

L'ENSEIGNEMENT DES POLYNOMES LORS DE LA TRANSITION SECONDAIRE - SUPERIEUR

Juliette VEUILLEZ-MAINARD
Institut Montpelliérain Alexandre Grothendieck
Université de Montpellier et CNRS

Résumé : Les polynômes sont un sujet transversal intervenant dans tous les domaines des mathématiques. L'article présente la construction de deux cartes conceptuelles sur l'enseignement des polynômes à la transition secondaire – supérieur. La première carte présente le savoir expert sur cette notion. La seconde, évolutive de la classe de Seconde à la première année de classe préparatoire MPSI, présente de façon structurée les contenus liés à la notion de polynôme.

L'analyse de cette évolution ainsi que de la comparaison entre les deux cartes permet d'identifier les principales ruptures dans cet enseignement, qu'elles soient liées à la notion même de polynôme ou plus générales dans cette transition. (*)

Les polynômes sont des objets très présents dans l'enseignement de l'analyse et de l'algèbre en France. Cet enseignement débute au collège, avec l'introduction des équations du premier degré. Il se poursuit au lycée au cours de l'apprentissage de la résolution des équations du second degré à coefficients réels, dans \mathbf{R} en Première, puis dans \mathbf{C} en Terminale option mathématiques expertes. L'étude des polynômes est approfondie dans l'enseignement supérieur, de l'apparition des polynômes formels jusqu'à l'apprentissage de la géométrie algébrique.

L'apparition du concept de polynôme dans l'histoire des mathématiques est liée à celle des équations algébriques. Leur résolution a longtemps été l'objet principal de l'algèbre

classique. Les considérations sur les structures des ensembles de polynômes émergent seulement au XIX^e siècle.

Les mathématiciens babyloniens, grecs, puis indiens et arabes, ont d'abord cherché à résoudre les équations du premier et second degré. La méthode de la complétion du carré, introduite par le mathématicien Al-Khwarizmi, est actuellement enseignée au lycée. C'est réellement avec la Renaissance italienne que les équations algébriques commencent à prendre de l'importance dans la recherche, en particulier avec la résolution des équations de degré trois et l'utilisation implicite des

* Travail réalisé dans le cadre d'un stage de M1 encadré par Anne Cortella et Simon Modeste

nombres complexes par Bombelli. Peu à peu, une notation algébrique s'est imposée, en même temps que de nouvelles recherches sur le nombre de racines d'une équation algébrique. C'est en 1770 que commence « l'âge d'or » des équations algébriques. Il va conduire à une compréhension complète du problème avec la démonstration du théorème de d'Alembert Gauss et la caractérisation complète des équations résolubles par radicaux par Galois (pour l'ensemble de ces points, voir Beauville, 2020). Les recherches sur le théorème de Fermat ont ensuite contribué au développement de l'algèbre générale.

On observe donc historiquement le développement d'une vision de plus en plus abstraite sur les polynômes. Les recherches s'intéressent d'abord aux polynômes de petit degré puis de degré quelconque, d'abord pour leurs racines pour enfin les étudier dans leur généralité en tant qu'éléments d'une algèbre.

On constate cette même gradation dans les enseignements en France, particulièrement à la transition entre le secondaire et le supérieur (première transition de Klein). On étudie d'abord les polynômes pour leurs racines et comme fonctions de références, pour considérer des aspects de plus en plus abstraits sur les polynômes et les ensembles de polynômes.

De multiples recherches ont été effectuées pour mettre en évidence les difficultés de la *transition secondaire – supérieur*, et proposer des pistes pour la faciliter. On peut donc envisager qu'il existe des difficultés au cours de la transition secondaire - supérieur relativement à l'enseignement des polynômes. Certaines peuvent être caractéristiques du passage à l'enseignement supérieur, et d'autres plus spécifiques à la notion de polynôme et au fait que les polynômes passent du statut d'outil à celui d'objet.

Partant de cette hypothèse, je cherche à apporter des éléments de réponse à la question suivante :

Quelles continuités et ruptures peut-on observer dans l'enseignement de la notion de polynôme au passage du lycée à l'enseignement supérieur ?

Dans cet article j'étudierai la question sous son aspect curriculaire, en examinant les programmes de mathématiques du secondaire et du supérieur, ainsi que des manuels scolaires et des documents de cours et exercices pour le supérieur. J'appuierai mon étude sur la réalisation de cartes conceptuelles. Leur utilisation semble en effet pertinente pour rendre visible les savoirs en jeux, ainsi que les liens entre ces savoirs. Elles éclairent ainsi les continuités et ruptures de la transition secondaire – supérieur.

L'élaboration de ces cartes, ainsi que leur structuration spatiale, ont mis en lumière certains phénomènes de cette transition. L'une des cartes présente le savoir expert lié au concept de polynôme. Les notions mathématiques utilisées pour cette carte sont classiques et limitées à un niveau M1. Pour les définitions de ces notions, le lecteur pourra se référer à ses ouvrages de cours de référence. Néanmoins, certains concepts particulièrement importants seront rappelés au fur et à mesure de leur utilisation dans le texte. On pourra consulter (Arnaudès & Fraysse, 1987) pour des rappels généraux sur les polynômes et les fonctions polynomiales.

Les autres cartes, évolutives de la classe de Seconde à la première année du supérieur, permettent de visualiser la manière dont les savoirs enseignés sont mis en réseau sur ce même sujet. Elles se basent sur une étude des programmes et manuels de lycée ainsi que sur des cours de classe préparatoire.

Dans une première partie, la notion de *transposition didactique* ainsi que les difficultés récurrentes de la transition secondaire – supérieure sont présentées. Ces éléments étayent mon étude de l'enseignement des polynômes. Les deux parties suivantes se concentrent sur la construction des cartes conceptuelles. Après avoir motivé l'intérêt épistémologique de d'une *carte du savoir savant*, je présente sa construction. J'explique ensuite les spécificités de la démarche de construction des cartes du savoir à enseigner. Un fragment de ces cartes montrant un phénomène de transposition didactique est proposé. Enfin, la dernière partie utilise l'ensemble des cartes pour mettre en évidence les continuités et ruptures de la transition secondaire – supérieure pour les polynômes.

1. — Quelques éléments de didactique

1) *La transposition didactique*

La notion de transposition didactique en mathématiques a été introduite pour la première fois par Chevallard (1985). Elle se base sur le constat qu'il existe une différence entre le savoir effectivement enseigné dans les classes et le savoir savant, produit par les experts. Chevallard met en évidence des contraintes spécifiques à l'enseignement des mathématiques. Ces contraintes impliquent un travail de fabrication du savoir enseigné à partir du savoir savant : c'est ce que l'on appelle la transposition didactique.

Il faut également noter une différence entre le *savoir à enseigner*, figurant dans les programmes et les manuels, le savoir effectivement enseigné et ce qui en est compris et retenu par les élèves et les étudiants. Une étude de la transposition didactique du concept de polynôme va permettre de comprendre l'évolution de son enseignement ainsi que son rapport au savoir savant.

2) *La transition secondaire – supérieure*

Dans l'article *Investigating the secondary-tertiary transition*, Gueudet (2008) réalise une synthèse de la littérature étudiant la transition entre le secondaire et le supérieur en mathématiques. L'auteure identifie trois difficultés principales.

Dans un premier temps, Gueudet évoque l'*Advanced Mathematical Thinking* (la Pensée Mathématique Avancée - AMT). Elle est caractérisée par un passage « de décrire à définir, de convaincre à prouver d'une manière logique basée sur des définitions ». L'AMT est nécessaire quand on traite de contenus abordés dans l'enseignement supérieur.

De plus, de nombreux concepts mathématiques, considérés exclusivement comme des outils au lycée, deviennent par la suite des objets d'étude à part entière (Douady, 1986).

À leur entrée dans l'enseignement supérieur, les étudiants doivent acquérir certains modes de pensée des mathématiciens. Les connaissances d'un mathématicien sont organisées, de façon à se référer non pas à des idées isolées mais à un réseau de concepts construit. En outre, les mathématiciens experts connaissent de nombreuses situations et exemples auxquels ils peuvent faire appel quand ils sont confrontés à un nouveau problème. Cette organisation des connaissances est une condition nécessaire pour comprendre et développer les raisonnements requis dans le supérieur.

Dans un second temps, Gueudet note que peu d'élèves savent produire une preuve correcte à la fin du secondaire et beaucoup jugent la justesse d'une preuve par des critères superficiels. À l'inverse, les mathématiciens experts reconnaissent la validité d'une preuve par des arguments

syntaxiques et sémantiques. Cet aspect syntaxique est très lié à l'utilisation des symboles, en particulier des quantificateurs. C'est un langage nouveau pour les étudiants.

Enfin, l'article souligne que certaines difficultés de la transition sont dues à des changements dans les exercices proposés aux étudiants. Plus précisément, dans le secondaire les tâches sont divisées en sous-tâches plus simples ; on retrouve aussi des indications dans beaucoup d'exercices, ce qui n'incite pas les élèves à l'autonomie. Ces éléments sont de moins en moins présents dans le supérieur, où l'on observe l'apparition de nouvelles tâches et une diversification des exercices proposés.

La construction de cartes conceptuelles vise donc à pointer des difficultés typiques de la transition qui peuvent apparaître concernant les polynômes, mais également à identifier certains aspects plus spécifiques à l'enseignement des polynômes.

2. — Construction d'une carte du savoir savant

L'étude de l'histoire et de l'épistémologie de la notion de polynôme permet notamment de se rendre compte que ce sujet relie de nombreux domaines mathématiques. Cette partie présente les intérêts de l'analyse épistémologique d'un savoir dans une étude didactique.

1) *Apports de l'épistémologie*

Selon Artigue (1989), l'analyse épistémologique d'un savoir permet au didacticien de « donner une historicité aux concepts mathématiques », et de défaire certains a priori sur des notions telles que la rigueur, qui dépend fortement de la période historique et du domaine des mathématiques concerné. Aussi, cette

analyse permet de prendre conscience de la différence entre la connaissance scientifique et le savoir enseigné, qui est le produit d'une transformation – la transposition didactique. L'épistémologie permet donc au didacticien d'écarter des représentations épistémologiques inexactes qui peuvent influencer sa pratique d'enseignant et de chercheur.

Par ailleurs, comme on l'a vu précédemment, une des difficultés de la transition secondaire - supérieur est la nécessité pour les étudiants d'acquérir un réseau de connaissances. Ils doivent comprendre la multiplicité des points de vue possibles sur un même objet mathématique et assimiler ces différentes conceptions pour résoudre plus efficacement des problèmes. L'analyse épistémologique d'un contenu permet de mettre en évidence cette pluralité de représentations possibles sur les objets mathématiques en jeu.

J'ai donc réalisé une première carte conceptuelle pour visualiser et structurer les différents domaines des mathématiques dans lesquels les polynômes s'inscrivent, les objets qui interviennent dans ces domaines, et les liens entre ces objets.

2) *Démarche de construction de la carte du savoir savant*

J'ai choisi de limiter la carte du savoir savant à des concepts de niveau agrégation, afin de ne faire apparaître que des notions éclairant les enseignements de la transition secondaire - supérieur.

La sélection des notions présentes dans cette carte a d'abord été guidée par une étude des programmes de lycée et de CPGE. J'ai commencé mes recherches sur l'enseignement supérieur par les classes préparatoires, car il en existe un programme d'enseignement officiel.

Dans un même temps, j'ai lu le cours (Cortella, 2008) donné en Licence 3 sur les anneaux et en particulier les anneaux de polynômes. Aujourd'hui, certaines parties de ce cours correspondraient plutôt à un niveau Master.

Après cette première recherche, j'ai distingué six grands domaines dans lesquels les polynômes interviennent :

- algèbre générale ;
- algèbre linéaire ;
- algèbre bilinéaire ;
- arithmétique ;
- fonctions d'une ou plusieurs variables réelles ;
- géométrie euclidienne.

J'ai fait le choix de différencier l'algèbre linéaire, bilinéaire et l'algèbre générale, car les objets mis en avant dans ces domaines sont assez différents. Par exemple en algèbre linéaire on considère des polynômes en des endomorphismes. C'est une utilisation des polynômes en tant qu'outils. À l'inverse, dans la partie algèbre générale le polynôme est étudié comme objet mathématique, élément d'une algèbre de polynômes.

Il m'a paru important de montrer plusieurs niveaux de connaissances dans la carte conceptuelle, ainsi que d'en pointer certains détails. En effet, le but est d'abord de faire apparaître le savoir classique commun aux mathématiciens concernant les polynômes, puis la manière dont les connaissances enseignées dans le secondaire s'inscrivent dans ce savoir.

J'ai donc continué mes recherches dans les programmes et manuels de lycée, et dans les cours et programmes de CPGE pour avoir un éclairage plus précis de certains domaines des

mathématiques. Je me suis en particulier concentrée sur l'algèbre linéaire et bilinéaire et l'arithmétique des polynômes. Ces chapitres sont très développés dans les cours de classe préparatoire, et j'ai sélectionné dans chaque partie des théorèmes et propriétés en rapport avec les polynômes.

Par exemple, en MPSI dans le chapitre « Polynômes de $K[X]$ », on peut retrouver les points suivants (observés dans le cours de Abbrugiatti, 2019) :

- *Dans le domaine algèbre :*
 - la notion de dérivation des polynômes et les formules de Taylor polynomiales ;
 - des propriétés et caractérisations des racines de polynômes, comme les relations coefficients-racines.
- *Dans le domaine arithmétique des polynômes :*
 - le caractère euclidien de l'anneau des polynômes sur un corps commutatif ;
 - le théorème de Bézout ;
 - le théorème de factorisation de d'Alembert-Gauss sur \mathbf{C} .

Une description plus exhaustive des théorèmes et objets fondamentaux qui interviennent dans ces parties est donnée dans les textes encyclopédiques. J'ai donc rajouté des théorèmes plus généraux sur les anneaux, s'appliquant en particulier aux algèbres de polynômes et qui ne sont pas présents dans les enseignements des premières années du supérieur. On retrouve par exemple la factoriabilité de $K[X]$ ou la notion d'extension de corps et de polynôme minimal. Il est également important de noter le rôle central de la propriété universelle des anneaux de polynômes, même si elle n'est pas enseignée avant le cours de Master. En effet, de nombreux domaines de la carte découlent

de la spécialisation – ou évaluation – de polynômes en certains objets. Pour une formulation générale de la propriété universelle des anneaux de polynômes, on pourra se référer à Lang (2002). Dans un cadre plus restreint, elle s'énonce :

Soient A un anneau commutatif et B une A -algèbre. Soit b un élément de B .

Alors il existe un unique morphisme de A -algèbres

$$ev_b : A[X] \rightarrow B$$

tel que $ev_b(X) = b$.

En particulier, si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ est un polynôme de $A[X]$, alors

$$ev_b(P) = \sum_{k=0}^d a_k b^k$$

est l'évaluation de P en b .

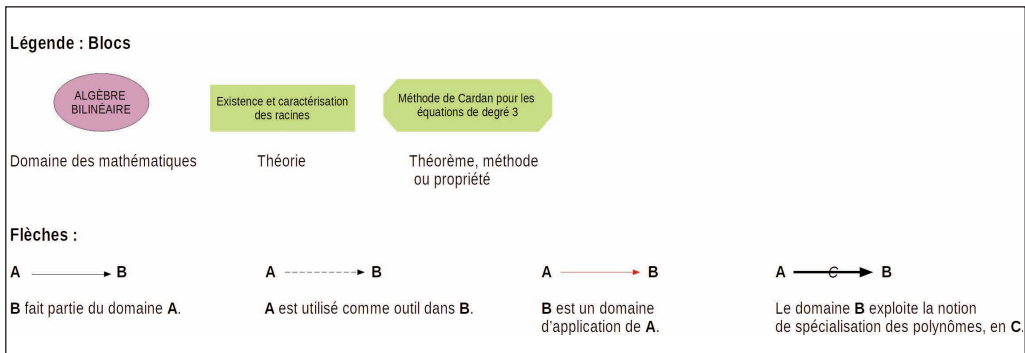
De plus, $A[X]$ est l'unique A -algèbre vérifiant cette propriété.

C'est ce théorème qui permet formellement de spécialiser – ou évaluer – des polynômes en des réels, des matrices ou des endomorphismes par exemple.

La dernière partie que j'ai construite est celle de l'analyse. On y retrouve en particulier des théorèmes sur les fonctions polynomiales, comme le théorème de Weierstrass, fondamental dans l'approximation de fonctions ; ou encore la recherche de la tangente à une courbe, dont l'équation fait intervenir des fonctions polynomiales de degré 1.

J'ai ensuite ajouté une branche sur le domaine des équations différentielles, qui découlent de la spécialisation des polynômes en des opérateurs différentiels. Les fonctions polynomiales y apparaissent aussi par leur caractérisation différentielle : ce sont les seules fonctions dont la dérivée $n^{\text{ème}}$ est nulle à partir d'un certain rang. Par ailleurs, on va parfois chercher des solutions polynomiales lors de la résolution d'une équation différentielle : les polynômes font partie d'un catalogue de fonctions de référence. De cette manière, les équations de Sturm font apparaître un certain type de polynômes orthogonaux, objets de l'algèbre bilinéaire.

Une fois les différents concepts identifiés, il a fallu définir les blocs et les types de relations en jeu. La légende de la carte du savoir savant est présentée ci-dessous. La carte comporte trois types de blocs. Le



premier comprend des domaines des mathématiques, ou domaines d'une autre matière. On y retrouve par exemple l'algèbre, l'arithmétique, ou la cryptographie. Les domaines faisant intervenir directement les polynômes sont colorés, les autres sont indiqués en gris.

Le deuxième type de blocs recouvre les différents sous-domaines d'application des domaines cités ci-dessus. Nous les appellerons des théories, qui regroupent par exemple les polynômes orthogonaux, les équations différentielles, ou la théorie de Galois. Dans ces théories, on trouve des contenus mathématiques : des théorèmes, méthodes ou propriétés. Ils forment le dernier type de bloc.

On distingue ensuite les relations entre les blocs. D'une part, un objet B peut simplement faire partie du domaine A : en tant que sous-théorie de A, théorème ou exemple d'application de A. De cette manière, le domaine de l'algèbre est relié au bloc *Existence et caractérisation des racines*, lui-même en lien avec *Solutions en degré 2*, *Théorie de Galois* et *Relations coef-*

ficients/racines, comme le montre le morceau de carte ci-dessous.

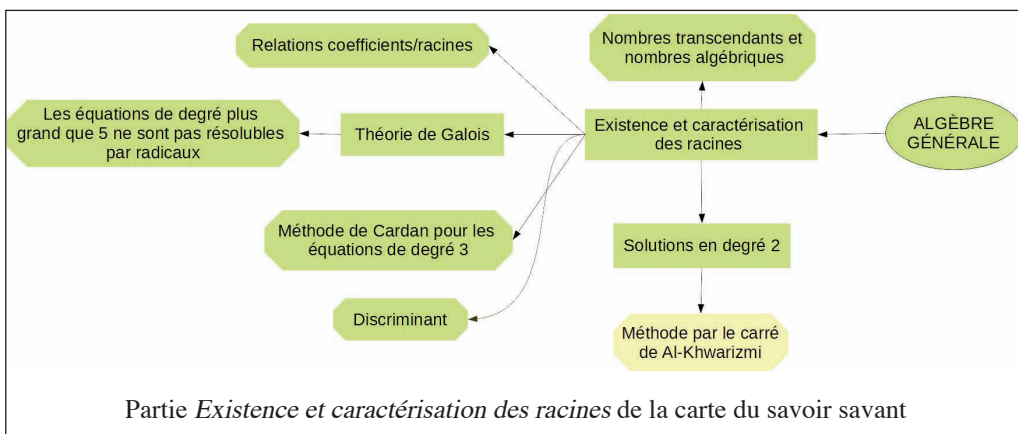
D'autre part, un bloc A peut être utilisé comme un outil du bloc B. Par exemple, le théorème de division euclidienne est utilisé comme outil pour la décomposition en éléments simples. Par ailleurs, un bloc B peut être un domaine d'application de A. Les polynômes orthogonaux ont des applications en cryptographie ou en analyse numérique, et sont donc reliés à ces domaines.

Le dernier type de flèches précise qu'un domaine exploite la notion de spécialisation d'un polynôme. En algèbre linéaire par exemple, on spécialise des polynômes en des endomorphismes.

À titre d'exemple, des parties de cette carte conceptuelle sont présentées dans la section suivante.

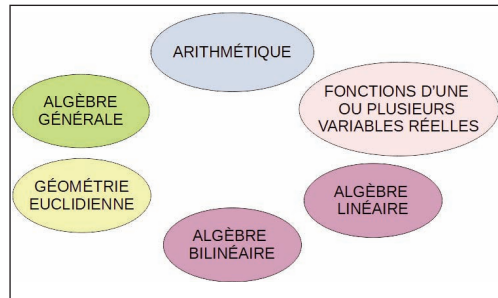
3) Présentation de la carte

La carte détaillée est téléchargeable à partir de la fiche Publmath de l'article.



L'ENSEIGNEMENT DES POLYNOMES LORS DE LA TRANSITION SECONDAIRE - SUPERIEUR

Les couleurs des différents blocs font référence au domaine des mathématiques dans lequel le bloc s'inscrit. L'algèbre est représentée en vert, l'arithmétique en bleu, l'analyse en rose, l'algèbre linéaire et bilinéaire en violet, et la géométrie en jaune, comme sur la figure ci-contre.

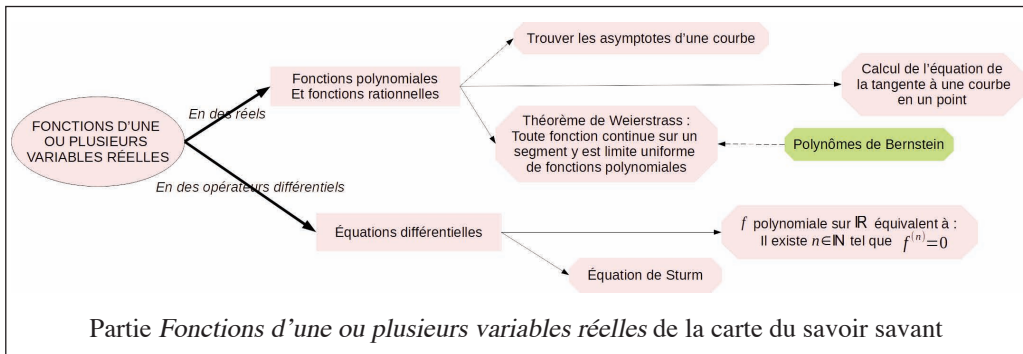


Les morceaux de carte du savoir savant correspondant aux domaines de l'analyse et de l'arithmétique sont exposés ci-dessous.

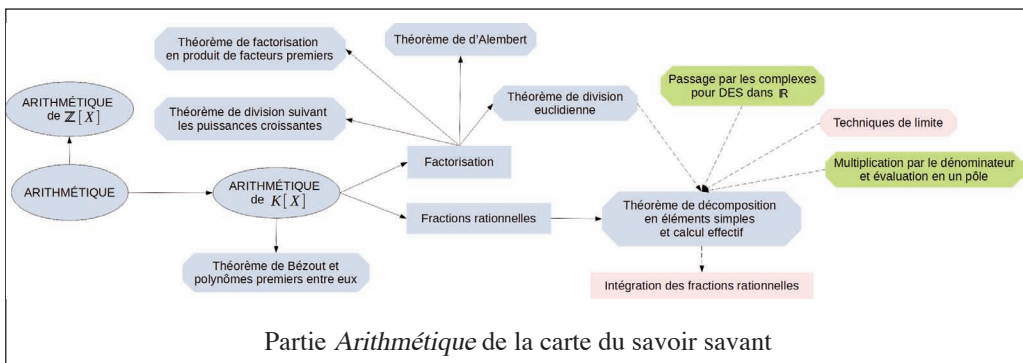
4) Premiers apports

On observe sur cette carte que le concept de polynôme joue bien un rôle dans de nombreux domaines des mathématiques. Il permet de faire

des connexions entre ces domaines, mais aussi entre les différents objets qui les composent. En effet, même si tous les savoirs ne peuvent pas être représentés sur la carte, des connexions entre les domaines à plusieurs niveaux et entre



Partie Fonctions d'une ou plusieurs variables réelles de la carte du savoir savant



Partie Arithmétique de la carte du savoir savant

différents objets, théorèmes, propriétés, théories sont présentes.

On trouve deux pans de connaissances sur les polynômes formels en algèbre. Historiquement, ils ont d'abord été étudiés dans le but de résoudre des équations algébriques et arithmétiques. Plus tard, ils sont mis en lumière dans l'étude des algèbres de polynômes. Dans les deux cas, les polynômes sont étudiés en tant qu'objets mathématiques.

Par ailleurs les polynômes sont utilisés comme outils pour d'autres théories comme l'analyse ou l'algèbre linéaire, dans lesquels ils interviennent via la spécialisation en des réels, des endomorphismes ou encore des opérateurs différentiels.

3. — Construction de cartes du savoir à enseigner

En parallèle de la carte du savoir savant j'ai réalisé des cartes évolutives du savoir à enseigner, déclinées entre la Seconde et la MPSI, pouvant être vues comme un diaporama. Elles sont basées sur l'étude des programmes et des manuels, de manière à identifier les obstacles de la transition secondaire - supérieur. [On peut télécharger ces cartes à partir de la fiche Publmath de l'article.]

1) Démarche de pensée et de construction des cartes du savoir à enseigner

Ces cartes ont pour but d'exposer les savoirs à enseigner apparaissant dans les programmes de la Seconde à la MPSI. Il faut donc noter qu'elles ne montrent pas les savoirs effectivement enseignés dans une classe. Les programmes font partie d'une première phase de transposition didactique. S'il n'a pas été possible d'effectuer une analyse des enseignements en classe, les manuels permettent

tout de même de déterminer des pratiques enseignantes possibles.

Pour l'enseignement supérieur, j'ai choisi de me concentrer sur la classe préparatoire MPSI car elle a l'avantage d'avoir un programme d'enseignement national. Les savoirs enseignés dans cette classe semblent représentatifs de ceux exigés au début de l'enseignement supérieur scientifique en France. C'est donc un choix qui paraît pertinent pour l'étude de la transition secondaire – supérieur.

Pour construire les cartes du savoir à enseigner, je me suis appuyée sur les manuels Magnard disponibles gratuitement en ligne via la plateforme Sesamaths (Bau, Couteau, Gringoz, et al., 2019, Bau, Couteau, Guiader, et al., 2019, Arnaud, Couteau, et al., 2020 et Arnaud, Fournet-Fayas, et al., 2020). Pour la partie concernant la classe préparatoire MPSI, j'ai consulté les programmes officiels, ainsi que les cours de Abbrugiatti, professeur de MPSI, disponibles en ligne. J'ai également consulté les exercices proposés sur le site Exo7, développé par des universitaires, qui regroupe des cours et exercices de la première à la troisième année d'enseignement supérieur.

J'ai commencé par chercher dans les programmes, dans la continuité de mon précédent travail, tous les endroits où les polynômes apparaissent explicitement ou implicitement. On les trouve par exemple dans le travail sur la résolution de certaines équations en seconde, les équations du second degré en première, ou encore le chapitre sur $K[X]$ en MPSI.

Les fonctions polynomiales apparaissent aussi comme premiers exemples dans certains chapitres sur les fonctions : elles servent de références pour tester des propriétés comme la convexité ou la dérivation.

Les fonctions polynomiales du premier degré sont également utilisées pour la recherche d'asymptotes à des courbes plus générales. Cependant, seules les asymptotes verticales et horizontales apparaissent aux programmes de Terminale mathématiques complémentaires et spécialité mathématiques et donc dans le cours proposé par les manuels. Les asymptotes obliques sont suggérées comme approfondissement dans le programme. Par conséquent, ce thème n'apparaît pas dans les cartes des savoirs à enseigner.

En me basant sur le travail décrit ci-dessus, j'ai réalisé un premier récapitulatif des connaissances censées être acquises à la fin du lycée (en ayant suivi le parcours Première spécialité mathématiques, Terminale option mathématiques expertes) et à la fin de la MPSI.

On y retrouve par exemple à la fin du lycée les éléments du tableau ci-dessous.

J'ai ensuite listé, pour chaque thème, les groupes de compétences – appelés compétences générales dans les cartes – déclinés en tâches spécifiées dans chaque niveau. Ce sont ces

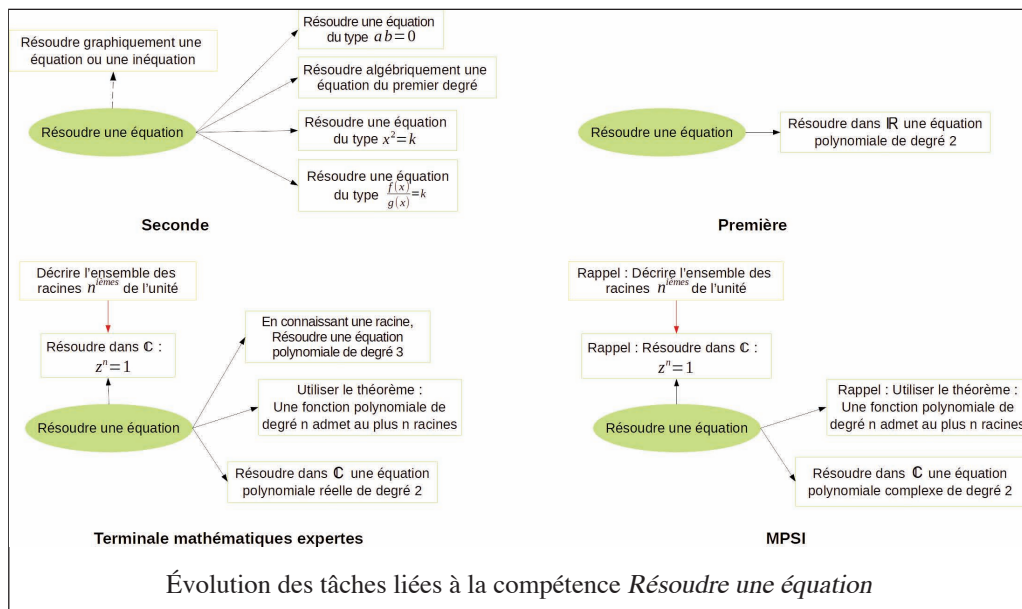
éléments que l'on retrouve dans les cartes des savoirs à enseigner, par exemple :

- Factoriser une expression algébrique ;
- Résoudre une inéquation ;
- Rechercher des extrema ;
- Étudier la convexité.

J'ai enfin travaillé à l'élaboration des cartes en elles-mêmes. Les blocs initiaux de ces cartes sont les compétences générales décrites ci-dessus, puis ils sont déclinés en différentes tâches. J'ai donc étudié les cours et exercices proposés dans les manuels pour exhiber ces tâches, et mettre en lumière la nature des relations mises en jeu.

L'objectif était que l'on puisse voir facilement l'évolution entre les différentes cartes pour mettre en avant les difficultés de la transition entre les différentes classes du lycée, puis entre le lycée et le supérieur. Dans ce but, les compétences générales ont été disposées au même endroit pour toutes les cartes du savoir à enseigner. En les visionnant comme un diaporama, on peut voir l'évolution des tâches

Savoir manipuler des expressions algébriques	Savoir utiliser les fonctions polynomiales de degré deux pour résoudre des problèmes
Factoriser à l'aide de plusieurs méthodes : exhiber une racine, utiliser les identités remarquables ...	Calculer les racines complexes d'une fonction polynomiale de degré deux
Développer rapidement des expressions algébriques : directement, utiliser les identités remarquables, utiliser la formule du binôme sur l'expression de $(a + b)^n$...	Modéliser un problème à l'aide d'une fonction polynomiale de degré deux
	Choisir la bonne forme - canonique, factorisée, développée réduite - en fonction du problème demandé.



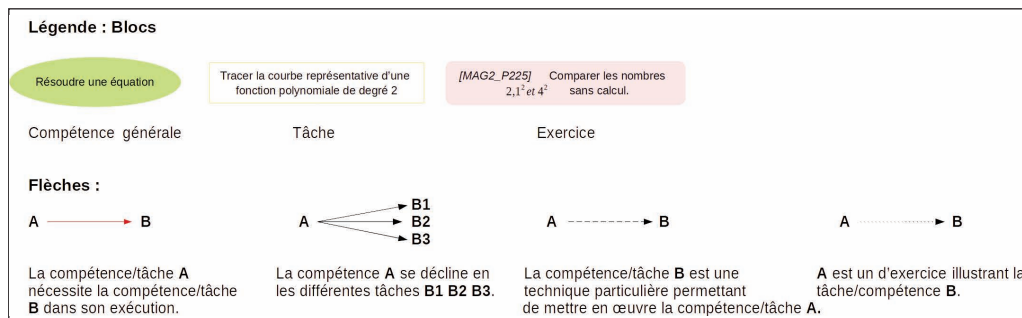
associées à une même compétence. On peut par exemple observer une complexification de certaines tâches, tandis que d'autres connaissances ne sont plus développées à certains niveaux de la scolarité. Un exemple d'évolution d'une compétence et des tâches qui lui sont liées est présenté ci-dessus.

montre que les compétences et les tâches requises à ce niveau, et un autre où se rajoutent des exemples d'exercices proposés aux élèves.

La légende des cartes du savoir à enseigner est affichée ci-dessous.

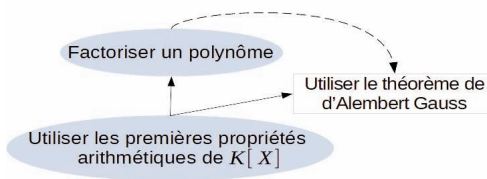
Enfin, j'ai opté pour un format dans lequel on trouve deux feuillets par niveau : un qui ne

J'ai choisi de différencier deux types de blocs : les compétences et les tâches. Les compétences sont des savoir-faire généraux, comme *Résoudre*



une équation. Elles peuvent être liées à plusieurs domaines des mathématiques et différents types d'exercices peuvent s'y rapporter. Les tâches, quant à elles, sont plus précises, comme *Tracer la courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré deux*. Elles peuvent se décliner en plusieurs autres tâches qui font appel à des techniques spécifiques de résolution.

On peut noter que les tâches peuvent être reliées à plusieurs compétences. Par exemple la tâche *Utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss* se rapporte aux compétences *Factoriser un polynôme* et *Utiliser les premières propriétés arithmétiques de $K[X]$* , comme dans le schéma ci-dessous :



On trouve enfin le type de bloc Exercice ainsi que la flèche associée. Il présente un exercice à qui semble être représentatif de ce qui peut être demandé à un élève, tiré d'un cours ou d'un manuel.

Les références devant les exercices sont écrites sous le format suivant :

- [MAGTSPE-P145] : L'exercice est tiré du manuel Sesamath de Terminale spécialité mathématiques, à la page 145.

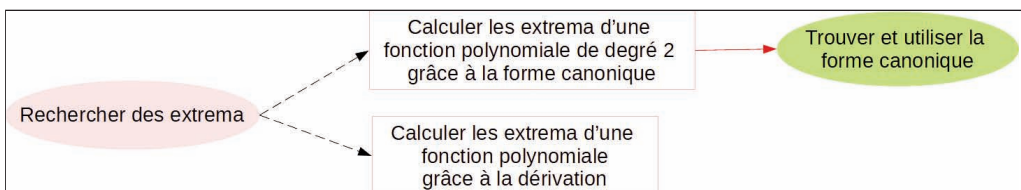
- [EXO7-P85] : L'exercice provient de la banque d'exercices fournie par le site Exo7, à la page 85.
- [ABB-TD29] : L'exercice provient de la feuille de travaux dirigés 29 du cours de Abbrugiatti. L'acronyme TAC fait lui référence aux feuilles d'exercices de Techniques Algorithmique de Calcul, fournies par Abbrugiatti.

Trois types de flèches sont utilisés dans les cartes :

Une compétence ou tâche A peut nécessiter une compétence ou tâche B dans son exécution. C'est par exemple le cas de la compétence *Factoriser un polynôme* qui fait appel à *Connaître et utiliser les propriétés des racines* sur la carte de MPSI.

Ensuite, une compétence A peut se décliner en plusieurs tâches différentes. Ainsi, la compétence *Résoudre une inéquation* est reliée aux tâches *Résoudre une inéquation du premier degré* et *Résoudre une inéquation sur la fonction carré* sur la carte de Seconde.

Enfin, une tâche B peut être une technique particulière de mise en œuvre de la compétence ou tâche A. Par exemple la compétence *Rechercher des extrema* est reliée de cette manière aux tâches *Calculer les extrema d'une fonction polynomiale grâce à la dérivation* et *Calculer les extrema d'une fonction polynomiale grâce à la forme canonique*. Cette dernière tâche est elle-même reliée à la compétence *Trouver et utiliser la forme canonique* ; voir le schéma ci-dessous :

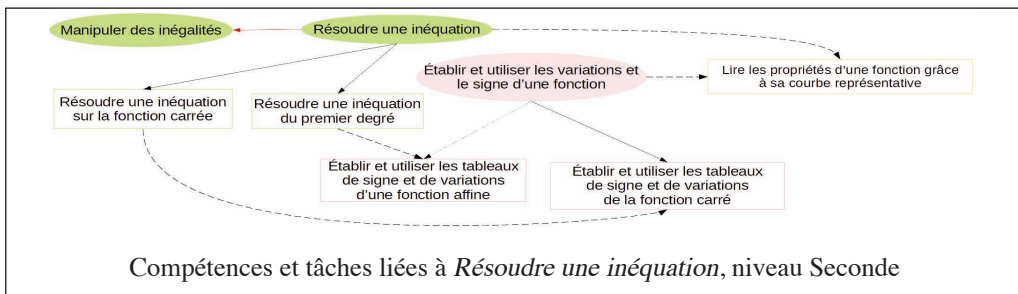
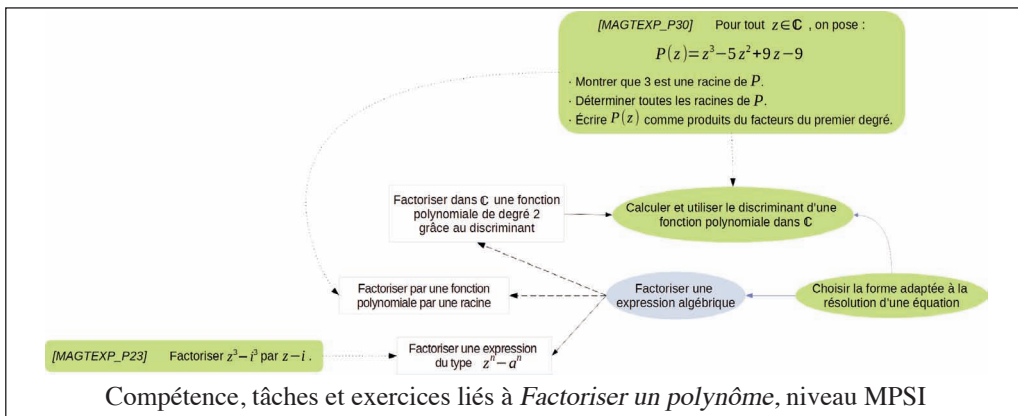
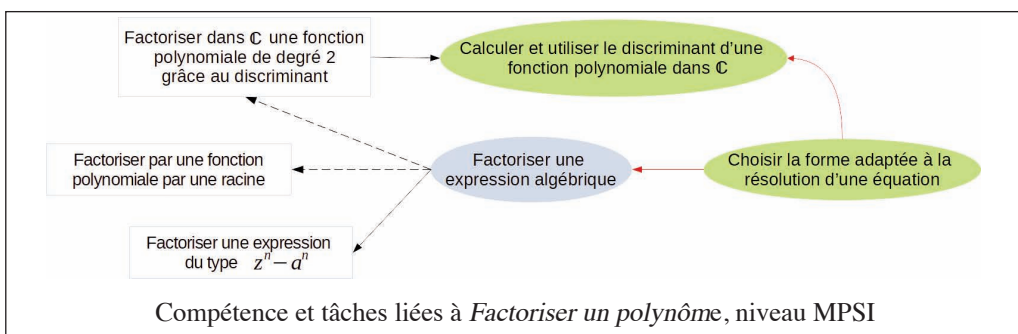


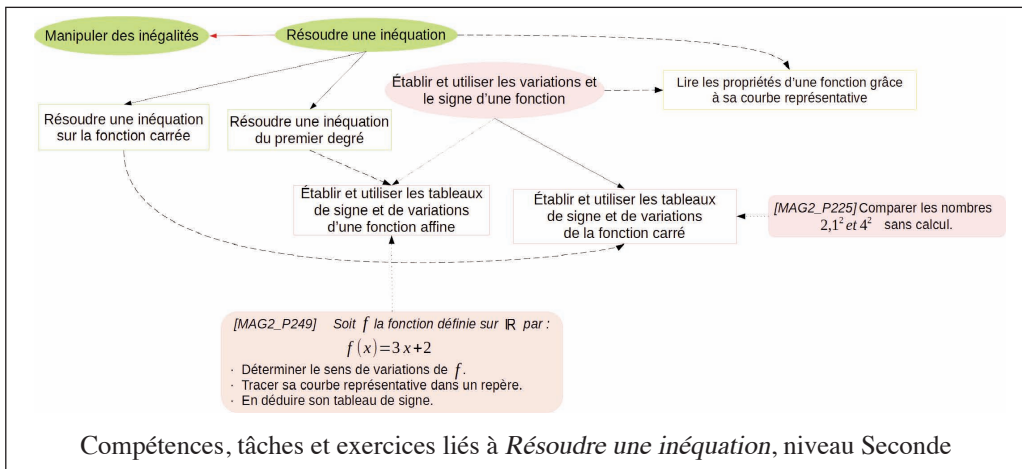
Des parties de cartes sont présentés dans la partie suivante. [Les cartes détaillées sont téléchargeables à partir de la fiche Publmath de l'article.]

2) *Présentation des cartes*

On trouve deux déclinaisons de la carte par

niveau, de la Seconde à la MPSI : l'une représentant les compétences et les tâches, respectant les couleurs de la carte du savoir savant; l'autre la complète par des Exercices classiques associés à chaque tâche. Deux exemples de morceaux de cartes conceptuelles sont présentés ci-dessous :





Une visualisation rapide des cartes permet de remarquer que les savoirs exposés dans le domaine de l'arithmétique de la carte du savoir savant sont majoritairement absents des programmes de l'enseignement secondaire. En effet, la couleur bleue est très peu présente dans les cartes avant la classe de MPSI. En revanche, certaines connaissances se rapportant au domaine de l'analyse y sont enseignées.

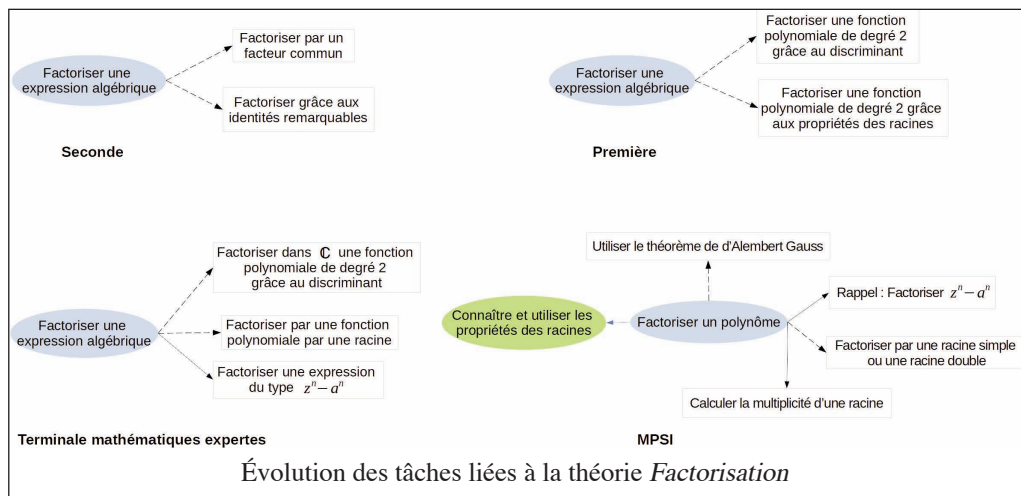
L'allure générale des cartes fait apparaître deux directions principales de l'enseignement des polynômes dans le secondaire. D'une part, les programmes prescrivent la résolution des équations polynomiales de petit degré. D'autre part, les fonctions polynomiales sont utilisées comme fonctions de référence de l'analyse, pour permettre aux élèves de pratiquer la dérivation. On remarque également que l'enseignement des équations polynomiales au lycée semble proche du développement historique de ces dernières : on étudie d'abord les équations du premier et second degré, puis on retrouve des théorèmes plus généraux sur les racines des polynômes en Terminale et dans l'enseignement supérieur.

3) Une première description de transposition didactique

Il est maintenant possible de décrire les transpositions didactiques réalisées sur le sujet des polynômes.

Intéressons nous à la transposition didactique de la théorie *Factorisation* de la carte du savoir savant, présente à tous les niveaux des cartes des savoirs à enseigner. L'évolution de cette branche des cartes et des tâches qui lui sont liées est illustrée dans la figure de la page suivante.

Cette théorie est d'abord introduite par des méthodes simples. En Seconde, elle se limite à utiliser les identités remarquables, ou à identifier un facteur commun. En Première, des outils plus développés commencent à apparaître, avec la factorisation de fonctions polynomiales de degré deux. Quelques propriétés de factorisation plus générales sont visibles en Terminale option mathématiques expertes. En MPSI, l'apprentissage de la factorisation de polynômes de degré quelconque débute, avec



par exemple la notion de racine multiple. Ce n'est qu'à ce niveau que l'on commence à enseigner des savoirs mathématiques se rapprochant de ceux présentés sur la carte du savoir savant, comme le théorème de d'Alembert. Cependant, cet enseignement se limite au cas où l'ensemble K est un corps, et dans la pratique ce corps est souvent \mathbf{R} ou \mathbf{C} – ou dans certains cas \mathbf{Q} . En exercice, on peut plus rarement trouver des polynômes à coefficients dans \mathbf{Z} . La considération de polynômes à coefficients dans d'autres anneaux n'est pas présente au début de l'enseignement supérieur.

Les cartes du savoir à enseigner permettent donc d'observer les transpositions didactiques qui ont lieu entre la seconde et la MPSI sur le sujet des polynômes, et la progression qui se met en place entre la Seconde et l'entrée dans l'enseignement supérieur.

La prochaine partie est centrée sur l'analyse des cartes construites pour mettre en lumière certaines difficultés de la transition secondaire - supérieur.

4. — Analyse en regard des cartes et exercices : les difficultés de la transition secondaire – supérieur

On peut désormais mettre en évidence certains facteurs pouvant rendre délicate la transition secondaire - supérieur dans le cadre de l'étude des polynômes. Dans une première partie sont présentées des difficultés qui semblent spécifiques à l'enseignement des polynômes. Dans une seconde partie, on montre que les polynômes sont concernés par les difficultés générales de la transition secondaire-supérieur en mathématiques, identifiées dans le texte de Gueudet (2008).

Pour chaque évolution ou rupture mise en lumière par les cartes, je propose d'une part une analyse reposant sur les analogies et différences entre les deux cartes et d'autre part un examen des exercices au regard de celles-ci.

Pour mieux comprendre ces analyses, le lecteur est invité à visionner les cartes du savoir à enseigner en diaporama.

4. A. Quelques spécificités de l'enseignement des polynômes

1) Polynôme : un objet algébrique, analytique et géométrique

Les polynômes ne s'inscrivent pas toujours dans les mêmes domaines au cours de la scolarité. Au lycée, les programmes abordent principalement le point de vue du calcul algébrique, avec la résolution d'équations simples. De fait, on constate que la couleur verte, utilisée pour l'algèbre, est dominante sur les cartes du lycée. Comme évoqué précédemment, les fonctions polynomiales de petit degré sont également utilisées comme fonctions de référence. Elles servent par exemple d'exercices pour le tracé de courbe, l'étude de la convexité ou la recherche d'extrema. Les fonctions polynomiales de degré 1 sont manipulées en Première lors de la recherche de la tangente à une courbe en un point.

En MPSI, les domaines abordés au lycée sont enrichis de nouvelles compétences. En effet, on voit sur la carte de MPSI que le domaine de l'arithmétique des polynômes se développe fortement, faisant apparaître d'autres branches tout en prolongeant la branche « Factoriser un polynôme », présente aux autres niveaux de la scolarité. De la même manière, dans le domaine de l'algèbre, les compétences déjà présentes sont développées, et de nouvelles compétences apparaissent, faisant le lien avec l'algèbre linéaire. L'étude des fonctions polynomiales s'étend aussi à d'autres domaines de l'analyse comme les équations différentielles ou l'approximation.

Par ailleurs, on observe assez peu de compétences et de tâches liées à la géométrie, que ce soit dans les cartes du lycée ou celle de MPSI. En effet, au lycée, les seules considérations géométriques sont présentées sous forme de

méthodes souvent dans le seul but de construire un tableau de variations. Mais il peut parfois être compliqué pour les élèves de faire le lien entre l'expression algébrique de degré deux et les propriétés de la courbe de la fonction polynomiale associée, comme la forme en cloche, les axes de symétrie ou les sommets.

Cette pluralité des représentations des polynômes utilisant divers registres, qui est de plus en plus développée lors de la transition, ne semble pas être explicitée dans les manuels. Elle peut être source d'erreurs et d'incompréhensions pour les élèves et étudiants.

2) Polynôme et fonction polynomiale

Les étudiants peuvent avoir des difficultés à différencier polynôme et fonction polynomiale au début de l'enseignement supérieur. Seules les fonctions polynomiales réelles sont étudiées au lycée, alors que la distinction est présente dans l'enseignement supérieur. On donne en Terminale la définition suivante :

Fonction polynôme de degré n : *Définition tirée du manuel de Terminale expertes mathématiques, édition Magnard.*

Une fonction polynôme de degré n est une fonction de la forme

$$Q(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0$$

où z est un nombre complexe, et c_0, c_1, \dots, c_n sont des réels tels que $c_n \neq 0$.

Cette définition est confondue avec celle de polynôme, comme l'appuie la phrase du programme de Terminale option mathématiques expertes :

« On utilise librement la notion de fonction polynôme à coefficients réels, plus simplement appelée polynôme ».

À l'inverse, en classe préparatoire, on attend des étudiants qu'ils comprennent la différence entre ces deux notions, et qu'ils en saisissent l'intérêt. Ceci est justifié par la manipulation de polynômes en des matrices ou des endomorphismes, nouveau type de fonction polynomiale. On définit alors un polynôme formel et une fonction polynomiale sur une algèbre quelconque par :

Polynôme de $K[X]$: Définition tirée du cours de MPSI de Abbrugiatti.

Un polynôme est de la forme

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k,$$

où n désigne un entier naturel, a_0, a_1, \dots, a_n des éléments de K et X est l'indéterminée.

Fonction polynomiale : Définition tirée du cours de MPSI de Abbrugiatti.

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une K -algèbre. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ de $K[X]$, on peut considérer l'application polynomiale associée à P dans A définie par :

$$\tilde{p} : \begin{array}{l} A \rightarrow A \\ A \mapsto \sum_{k=0}^d a_k A^k \end{array}$$

La somme et les multiplications considérées dans cette expression sont celles de l'algèbre A .

La définition de fonction polynomiale enseignée au lycée diffère grandement de celle du cours de MPSI. De plus, ce n'est qu'en L2 (ou en classe préparatoire MP) que l'on commence à spécialiser régulièrement des polynômes en des éléments d'algèbres plus abstraites que l'ensemble des réels.

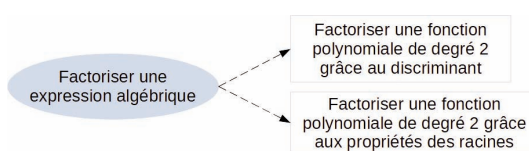
À ce niveau, des théorèmes faisant intervenir des polynômes d'endomorphismes sont introduits. Les questions portant sur les fonctions polynomiales réelles ne sont alors plus prédominantes dans l'utilisation des polynômes.

Pour autant, les fonctions polynomiales interviennent massivement dans les chapitres d'analyse. Par exemple, l'apprentissage des développements limités forme une grande partie de l'utilisation de ces fonctions en MPSI ; comme les séries entières un peu plus tard. Il ne semble pourtant pas que le lien soit fait avec l'objet polynôme.

3) Polynômes de degré 2 ou supérieur ?

On remarque sur les cartes du savoir à enseigner que l'enseignement des polynômes au lycée est majoritairement axé sur les degrés 1 et 2. Seules quelques tâches de Terminale font apparaître des polynômes de degré quelconque, comme la factorisation de l'expression ou la recherche de racines de l'unité.

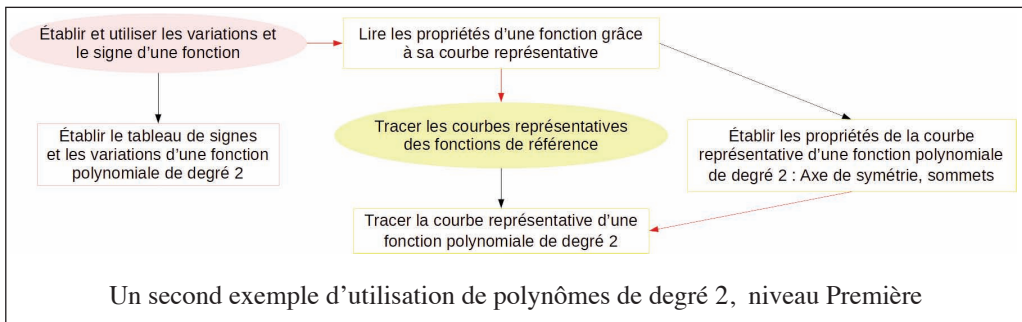
En Première, la quasi totalité des tâches fait intervenir des fonctions polynomiales de degré deux. Deux exemples sont présentés ci-dessous et en haut de la page suivante.



Un premier exemple d'utilisation de polynômes de degré 2, niveau Première

De plus, même en Terminale, très peu d'exercices proposent aux élèves de manipuler des fonctions polynomiales de degré quelconque. Il est rare que des fonctions polynomiales de degré

L'ENSEIGNEMENT DES POLYNÔMES LORS DE LA TRANSITION SECONDAIRE - SUPÉRIEUR



supérieur à trois apparaissent dans les exercices, comme illustré sur les cartes du savoir à enseigner.

En MPSI, il est rapidement demandé aux étudiants de manipuler des polynômes de degré quelconque, comme dans les exercices suivants :

[ABB_TD29] Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :
 $P(X) = XP'(X)$ $P \circ P = P$ $P(2X+3) = P(3X+2)$

[ABB_TD29] En utilisant les relations coefficient / racines sur $X^n - 1$ dans \mathbb{C} , retrouver les expressions de $\sum_{\omega \in U_n} \omega$ et $\prod_{\omega \in U_n} \omega$.

[ABB_TD29] Déterminer tous les polynômes $P \in K[X]$ tels que $P' | P$.
 On pourra commencer par $K = \mathbb{C}$.

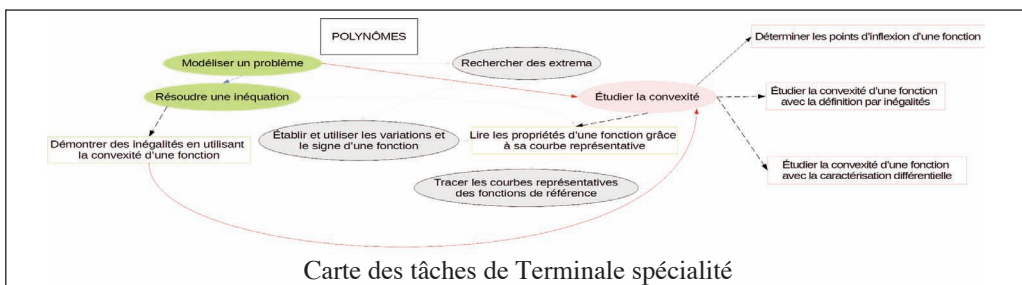
Les élèves doivent donc avoir une vision plus globale de l'objet polynôme à leur entrée dans l'enseignement supérieur. L'absence de l'étude systématique et comparative des fonctions polynomiales de tout degré dans le secondaire semble rarement pris en compte dans le supérieur.

De plus, sur la carte de MPSI, de nouveaux blocs compétences liés à l'apprentissage des développements limités et de l'interpolation polynomiale apparaissent – et plus tard des séries entières. Cela nécessite que les étudiants soient à l'aise avec la notion de polynôme de degré quelconque. L'intérêt de l'approximation de fonctions par des fonctions polynomiales peut aussi être difficile à saisir s'il n'est pas compris que certaines fonctions ne sont pas polynomiales.

4) Une disparition en Terminale spécialité mathématiques

En passant de la carte de Première à celle de Terminale spécialité, on observe une disparition presque totale de l'étude des fonctions polynomiales. La carte conceptuelle correspondante est exposée ci-dessous.

En Terminale, les fonctions exponentielle et logarithme monopolisent les sujets d'étude de



l'analyse, souvent sans faire référence au fait que ces nouvelles fonctions ne sont pas des fonctions polynomiales. Certaines compétences qui ne font pas intervenir de fonctions polynomiales restent vivantes à travers ces nouvelles fonctions étudiées. Ces compétences sont entourées en noir sur la carte. Elles concernent l'étude des fonctions, comme le tracé de courbes représentatives ou la recherche d'extrema.

Les polynômes continuent d'exister dans l'enseignement uniquement comme fonctions de référence. Ainsi, en Terminale spécialité, les polynômes ne sont présents qu'à travers les exercices sur la convexité.

L'absence de travail nouveau sur les polynômes en Terminale spécialité peut être source de difficultés à remobiliser ces connaissances à l'entrée dans le supérieur. Cela peut encore compliquer la transition pour des élèves n'ayant pas suivi le cursus mathématiques expertes, qui se destinent par exemple à des études de biologie ou de physique, pour lesquelles l'étude des polynômes est également importante.

Des causes plus générales des difficultés de la transition secondaire – supérieur sont illustrées dans la partie suivante.

4. B. Les polynômes : une illustration des difficultés de la transition secondaire - supérieure

1) L'Advanced Mathematical Thinking (AMT)

Des premiers exemples d'AMT sont présents au lycée, et marquent le début de la transition vers l'enseignement supérieur. On le remarque en première, où tout un pan de la carte des savoirs à enseigner est consacré à la méthode de résolution des équations polynomiales du second degré. Il est noté dans les programmes

que la preuve doit être exposée dans le cours, même s'il n'est pas demandé explicitement aux élèves de l'apprendre. C'est un premier pas dans la théorie *Existence et caractérisation des racines* de la carte du savoir savant.

Conseils & Méthodes

- 1 Identifier les coefficients a , b et c en faisant attention aux signes.
- 2 Commencer par calculer le discriminant :
 - si le discriminant est strictement négatif, il n'y a aucune solution ;
 - si le discriminant est nul, il y a une unique solution égale à $-\frac{b}{2a}$;
 - si le discriminant est strictement positif, il y a deux solutions : $-\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $-\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

C'est dans ce chapitre que les élèves commencent à appliquer une méthode en plusieurs étapes. D'abord, ils doivent identifier les paramètres, ce qui peut poser problème : il n'est pas évident pour eux de différencier variable, inconnue et paramètre, et cette ambiguïté ne semble pas éclairée dans les manuels. Ensuite il faut réaliser le calcul du discriminant, utilisant ces paramètres, pour enfin conclure en fonction du résultat du précédent calcul. Cette démarche est explicitée dans les manuels, comme le montre l'image ci-dessus. Dans les exercices, il est attendu que les élèves aient l'initiative de cette méthode.

L'introduction de l'AMT au début de l'enseignement supérieur est principalement liée à l'étude du polynôme en tant qu'objet en lui-même plutôt qu'outil de référence, ainsi qu'à l'introduction de polynômes et fonctions polynomiales de degré quelconque. Le premier point est détaillé dans la prochaine section.

Notons que la transition vers l'AMT se poursuit jusqu'en cycle Master. Dans le domaine des polynômes spécifiquement, c'est à cette période que peut apparaître dans le cours la propriété universelle des algèbres de polynômes, qui est utilisée implicitement en licence lorsqu'on évalue un polynôme en un endomorphisme ou en une matrice. Ce nouveau théorème permet de justifier que certaines formulations proposées au début de l'enseignement supérieur définissent correctement un unique objet.

2) Du polynôme outil au polynôme objet

Les cartes du savoir à enseigner permettent de souligner que dans l'enseignement secondaire, l'utilisation des polynômes est parfois liée à l'étude de propriétés générales sur les fonctions. En effet, les fonctions polynomiales font office de fonctions de base pour s'exercer à tracer des courbes représentatives, pour dériver ou pour établir des propriétés de convexité. Elles sont dans ce cas uniquement des outils pour l'analyse. Les blocs roses des cartes du savoir à enseigner représentent cette utilisation des fonctions polynomiales.

L'étude algébrique des polynômes est uniquement présente par la résolution d'équations algébriques de petit degré. En Terminale option mathématiques expertes, les élèves sont pour la première fois confrontés à des propriétés arithmétiques des polynômes. Il s'agit de la propriété de factorisation par une racine et de la propriété donnant le nombre maximal de racines d'une fonction polynomiale. Même lors de ces tâches, on continue à penser le polynôme comme une fonction donc dans son aspect outil. De plus, les exercices qui font appel aux polynômes ne traitent jamais de polynômes de degré quelconques, comme montré sur la carte des savoirs à enseigner.

Les considérations analytiques sur les polynômes sont encore présentes en MPSI,

mais un nouveau pan d'étude est introduit. On remarque en effet que les zones verte, bleue et violette de la carte, consacrées à l'arithmétique et à l'algèbre, sont bien plus approfondies que dans les cartes du lycée.

Les polynômes sont peu à peu étudiés en tant qu'objets, en particulier dans le chapitre $K[X]$ évoqué précédemment. La notion de polynôme formel y est enseignée pour la première fois. Même si on utilise peu la spécialisation en autre chose qu'un réel, le cours sur l'arithmétique des polynômes permet d'introduire de nombreux théorèmes généraux sur les anneaux de polynômes, comme le théorème de factorisation ou le théorème de Bézout. De ce fait, de nombreux éléments sont communs entre la carte du savoir à enseigner de MPSI et la carte du savoir savant dans les parties arithmétique de $K[X]$ et algèbre générale.

3) Le travail sur la preuve

Dans l'enseignement secondaire, les démonstrations sont le plus souvent présentées dans le cours, et exposées par les enseignants. C'est le cas par exemple de la démonstration de la méthode de résolution dans \mathbf{R} des équations polynomiales de degré deux. Il n'est cependant pas attendu des élèves qu'ils retiennent la preuve. En effet, tous les exercices des cartes du savoir à enseigner se concentrent sur l'application de méthodes de résolution de certaines équations polynomiales.

Dans le programme de MPSI, il est demandé aux élèves de comprendre et maîtriser les preuves du cours, et de savoir conduire une démonstration. Il faut également savoir exploiter une preuve déjà vue en cours, comme par exemple dans l'exercice de la carte de MPSI représenté dans l'image de la page suivante.

[ABB_TD29] Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

Montrer que P est la somme de 2 carrés. *Indication : utiliser la décomposition en irréductibles d'un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. On pourra aussi se rappeler d'un exercice vu sur les sommes de carrés d'entiers*

4) La rigueur

Gueudet écrit que la rigueur des démonstrations exigée change entre le lycée et l'enseignement supérieur, ce que l'on remarque au sujet des polynômes. Par exemple la propriété d'unicité des coefficients d'un polynôme n'est pas évoquée au lycée, mais est utilisée sous la forme « identifier les coefficients ». On l'observe sur l'extrait de manuel présentant la méthode de résolution d'une équation de degré deux exposé dans la partie IV. B. 1).

Dans le supérieur, l'identification des coefficients de deux polynômes égaux est justifiée par l'unicité des coefficients d'un polynôme. L'identification des coefficients de deux fonctions polynomiales égales est quant à elle justifiée par l'injectivité de la fonction qui à un polynôme P associe sa fonction polynomiale \tilde{P} .

On retrouve un motif similaire avec la recherche d'optimum de fonctions (dont les fonctions polynomiales). Formellement, il faut trouver un élément qui vérifie certaines propriétés et s'assurer que cet élément est optimal. Au lycée, on omet souvent de vérifier que l'élément trouvé appartient à l'ensemble qui nous intéresse.

5) Le développement de l'autonomie

La capacité à résoudre des exercices et rédiger des démonstrations en autonomie doit être développée par les élèves au début de l'enseignement supérieur.

Sur les cartes des savoirs à enseigner du lycée, on observe que les exercices sont souvent guidés. Même si il n'y a pas toujours d'indication explicite, ils s'inscrivent dans un certain cadre d'étude et des chapitres précis.

Par exemple, on pourra demander à un élève de réaliser le tableau de signe d'une fonction polynomiale du second degré dans les chapitres *Second degré* et *Variations et courbes représentatives de fonctions*, soit par la dérivée, soit par identification des coefficients. Les étudiants peuvent avoir des difficultés à faire le lien entre des notions proches, mais qui apparaissent dans des chapitres différentes. Ceci est en lien avec la pluralité des représentations des polynômes : algébriques, analytiques et géométriques.

Les deux exercices ci-dessous sont typiques de ceux proposés dans les manuels :

[MAG1_P93] Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -2x^2 + 6x - 4$$

- Dresser le tableau de signe de $f(x)$.
- Résoudre $f(x) \leq 0$.

[MAGTEXP_P34] On considère l'équation suivante :

$$(E) : x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$$

- Montrer que si z est solution de (E) , alors \bar{z} est solution de (E) .
- Vérifier que 3 et j sont solutions de (E) .
- Quel est le nombre maximum de solutions que peut avoir l'équation ?
- Sans calcul, en déduire toutes les solutions de (E) dans \mathbb{C} .

On voit à l'inverse sur la carte de MPSI que les exercices, même présentant des indications, sont beaucoup moins détaillés et laissent l'élève choisir le point de vue à adopter.

Il faut également noter qu'au lycée, les exercices d'algèbre concernant les polynômes font souvent appel à des méthodes « toutes prêtes ». Les élèves ont parfois tendance à utiliser à outrance le discriminant pour résoudre des équations du second degré qui ne le nécessitent pas.

En MPSI, certaines tâches comme *Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre grâce à son équation caractéristique* ou *Calculer une décomposition en éléments simples sur \mathbf{R} ou \mathbf{C}* demandent seulement l'application d'une méthode du cours, mais elle est assez complexe car elle combine plusieurs autres méthodes.

5. — Conclusion et perspectives

De nombreux phénomènes peuvent être source de difficultés au cours de la transition secondaire – supérieur. On peut en repérer certains grâce à la conception et la structuration spatiale des cartes conceptuelles.

Des difficultés classiques de la transition mises en lumière par Guedet se produisent sur le sujet des polynômes, en particulier l'introduction des polynômes formels comme objets d'études à part entière. L'AMT est aussi beaucoup plus présente au début de l'enseignement supérieur.

Par ailleurs, les notions de polynôme et de fonction polynomiale sont confondues dans l'enseignement secondaire tandis que la distinction est importante dans le supérieur. Les fonctions polynomiales étudiées dans le secondaire sont systématiquement de petit degré, alors que l'étude des polynômes de degré quelconque est fondamentale dans le supérieur. De plus, il est important de comprendre que toutes les fonctions ne sont pas polynomiales pour saisir l'utilité des développements limités,

de l'interpolation polynomiale ou des séries entières enseignés dans le supérieur.

Identifier ces points peut aider à préparer la transition dans l'enseignement secondaire et prendre en charge les besoins des élèves issus du lycée à leur entrée dans l'enseignement supérieur.

Il est possible qu'un autre éclairage des programmes ou l'étude d'un autre manuel puisse modifier le détail des cartes. Il faut également noter que ce travail a été réalisé en 2020, l'année de la mise en place des nouveaux programmes en Première et avant leur mise en place en Terminale. Les manuels de Terminale étudiés n'avaient donc pas encore été testés, et ont été édités en pleine crise sanitaire. De plus, cette étude s'est basée sur les programmes de MPSI de 2020, avant la parution des programmes qui ont été mis en place suite à la réforme des lycées.

Certains liens entre les blocs des cartes conceptuelles n'ont pas été tracés pour ne pas compromettre leur lisibilité. On aurait par exemple pu rajouter un lien entre les propriétés de factorisation et la théorie de la réduction des endomorphismes. On pourrait aussi compléter ces cartes avec un point de vue moins centré sur les mathématiques fondamentales.

Ce travail de recherche pourra être complété par une étude plus systématique des manuels et de la transposition didactique entre le savoir à enseigner et le savoir effectivement enseigné, en analysant les conceptions d'élèves et d'étudiants à propos des polynômes et en menant des observations dans les classes. Une perspective de travail pourrait aussi être la conception et l'expérimentation d'activités permettant la prise en charge de la transition secondaire-supérieur pour la notion de polynôme, de chaque côté de la transition..

Bibliographie

- Abbrugiatti, P. (2019). *Cours et compléments : $K[X]$* . <http://mpsi.daudet.free.fr/math/index.html>
- Arnaud, D., Couteau, J., Fournet-Fayas, T., Goarin, M., Gringoz, H., Guiader, F., Hascoët, M., Krieger, D., Ladeira, C., Magana, L., Milan, P., Vertuel, E., & Weyermann, F. (2020). *Maths spécialité*, Tle. Magnard. https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstspe_2020
- Arnaud, D., Fournet-Fayas, T., Gringoz, H., Hascoët, M., Magana, L., & Milan, P. (2020). *Maths expertes*, Tle. Magnard. https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsexp_2020
- Arnaudière, J.-M., & Fraysse, H. (1987). *Cours de mathématiques. 1: Algèbre* (Nouveau tirage). Dunod.
- Artigue, M. (1989). *Epistémologie et didactique*. Univ. Paris 7, IREM.
- Bau, D., Couteau, J., Gringoz, H., Hascoët, M., Krieger, D., Pradel, M., & Weyermann, F. (2019). *Maths 2de : Programme 2019*. Magnard. https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
- Bau, D., Couteau, J., Guiader, F., Hascoët, M., Krieger, D., Magana, L., Pradel, M., & Weyermann, F. (2019). *Maths 1re : Enseignement de spécialité programme 2019*. Magnard. https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
- Beauville, A. (2020). *Histoire des équations algébriques*. <https://math.unice.fr/~beauvill/pubs/Equations.pdf>
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné* (1e éd.). la Pensée sauvage.
- Cortella, A. (2008). *Théorie des anneaux*. Cours de L3, document privé.
- Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 7(2), 5-31.
- Guedet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6>
- Lang, S. (2002). *Algebra* (Rev. 3rd ed). Springer.