

Rubrique multimédia du n° 127 de Repères-IREM (version papier)

Gérard Kuntz (g.kuntz@libertysurf.fr)

La rubrique multimédia de Repères-IREM est ouverte aux suggestions, aux critiques et aux contributions de ses lecteurs, qui pourront être envoyées à l'adresse ci-dessus.

Elle donne en particulier aux groupes de recherche des IREM la possibilité de faire connaître aux lecteurs un site ou des activités dont les technologies sont des outils essentiels pour apprendre les mathématiques. Les propositions sont bienvenues, à la même adresse !

Cet article n'a pas de version électronique, mais il ne remplit pleinement son office que si le lecteur, en fin de parcours, va explorer le site qu'il présente et dont il décrit la philosophie.

La rubrique multimédia de ce numéro 127 a été prise en charge par l'IREM de La Réunion et rédigée par Yves Martin.

Présentation du site <http://curvica974.re/> consacré aux Géométries Non Euclidiennes

1. Introduction aux Géométries Non Euclidiennes (GNE)

Il y a de nombreuses façons de présenter les GNE. Le choix retenu ici est résolument celui *des configurations et de la manipulation en ligne de figures dynamiques*, soit pour illustrer les concepts, soit pour mettre en évidence des propriétés spécifiques à chacune de ces géométries. Traditionnellement, si on veut qu'elles soient assez riches¹, en terme d'isométries par exemple, il n'existe que trois principaux types de géométries planes: une géométrie peut être *euclidienne, hyperbolique ou elliptique*. Pour une analyse exhaustive des interactions entre ses (groupes d') axiomes, Hilbert rajoute, dans son ouvrage « les fondements de la géométrie », d'autres géométries, plus marginales, comme les géométries non archimédiennes ou non arguésiennes, la première ne respectant pas l'archimédie du corps, et la seconde le théorème de Desargues. Dans ce site, on traite aussi des géométries non arguésiennes, à travers deux modèles dont on montre, par la mise en évidence de propriétés différentes, qu'ils ne sont pas équivalents.

2. Les droites en faisceau pour séparer les trois principales géométries

Ce qui suit est la mise « en configuration » d'une axiomatique bien précise, l'axiomatique de Bachmann, basée sur les propriétés des symétries orthogonales. D'un point de vue formel, on dira que trois droites sont « en faisceau » si la composée des symétries orthogonales associées est une symétrie orthogonale. Du point de vue des configurations on observe (on démontre) qu'en géométrie euclidienne, il n'y a que deux types de faisceaux :

- les faisceaux à centre, c'est-à-dire les trois droites sont concourantes
- les faisceaux à axe : les trois droites ont une perpendiculaire commune

¹ Pour cela, deux démarches sont possibles :

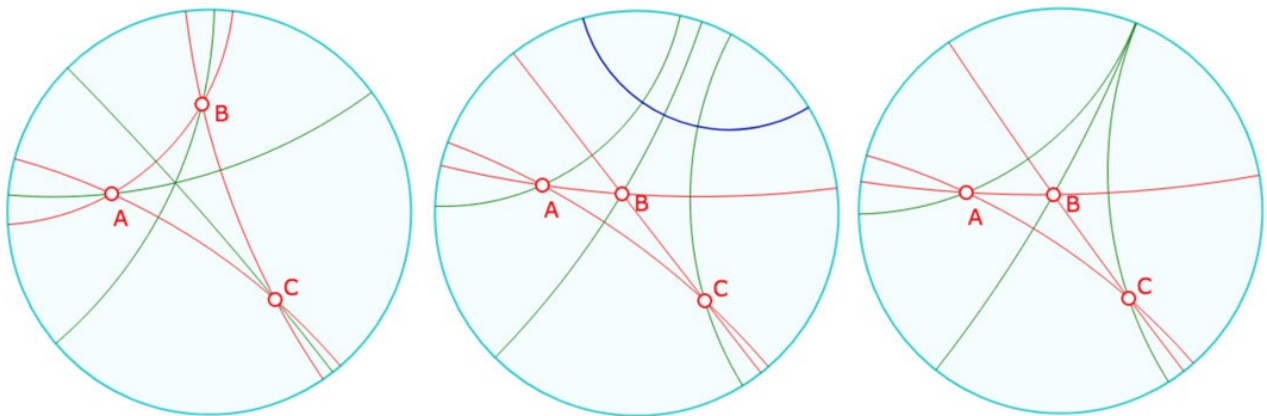
- Celle, axiomatique, où l'on se donne des axiomes de géométrie « pure » à partir desquelles on construit le corps des nombres (démarche de Hilbert) ;
- L'autre où le corps des nombres est préalablement donné, et sur la base duquel on construit une géométrie.

Et alors on montre (propriétés de la géométrie euclidienne)

- Si des droites ont une perpendiculaire commune, elles en ont une infinité (existence de rectangles) ;
- Et dans ce cas elles n'ont pas de point commun (on dit qu'elles sont parallèles) ;
- Les droites remarquables d'un triangle (médianes, médiatrices, hauteurs, bissectrices) sont toutes en faisceaux à centre.

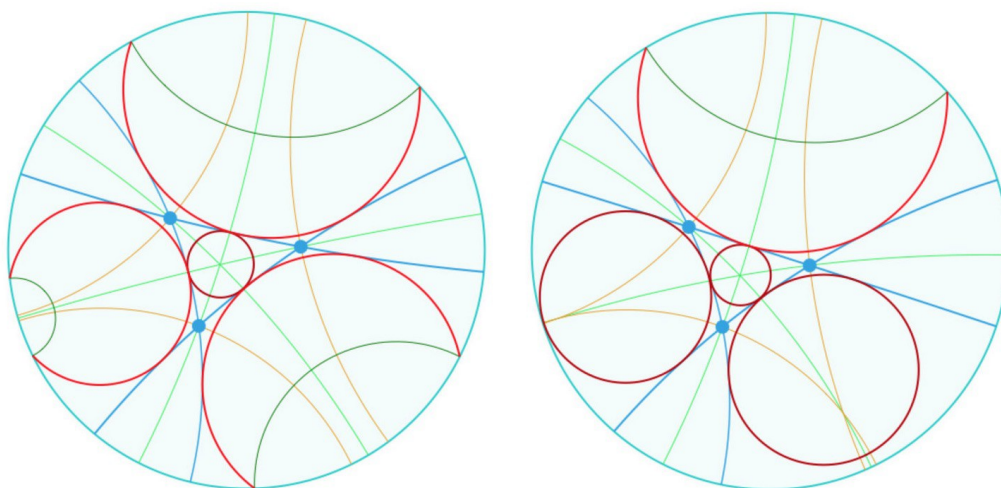
La géométrie hyperbolique

Dans ce contexte, la géométrie hyperbolique est une géométrie dans laquelle les faisceaux à axe euclidiens se scindent en deux types faisceaux distincts : ceux où les droites ont une perpendiculaire commune (et alors il n'y en a qu'une seule) et les droites qui n'ont ni point commun, ni perpendiculaires communes. Bachmann les appellent « sans support », ce sont les (nouvelles) droites parallèles. Avec cette propriété, qui a été un obstacle cognitif historique, la géométrie hyperbolique est non connectable : deux droites n'ont pas nécessairement un point ou une perpendiculaire commune : ce sont les droites parallèles, alors que les parallèles euclidiennes sont connectables.



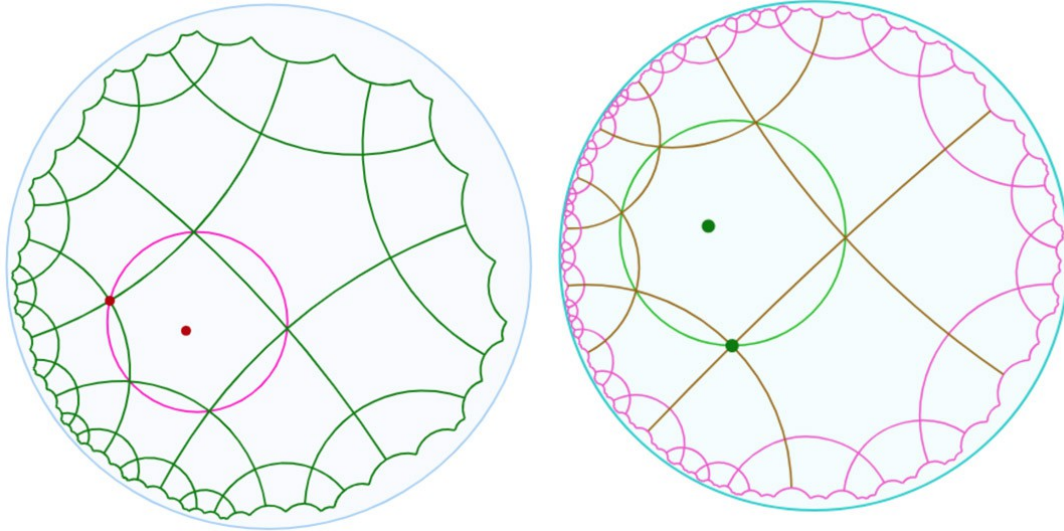
Dans le modèle du disque de Poincaré : les hauteurs d'un triangle sont en faisceau : à gauche elles sont concourantes, au centre elles ont une perpendiculaire commune, à droite elles sont parallèles.

La géométrie hyperbolique est beaucoup plus riche que la géométrie euclidienne. Ainsi, pour aller rapidement, si aux médiatrices concourantes correspondent un cercle – le cercle circonscrit –, quand les médiatrices sont en faisceau à axe, il leur correspond un cycle – une équidistante – et quand elles sont parallèles, il leur correspond un autre cycle, l'horicycle.



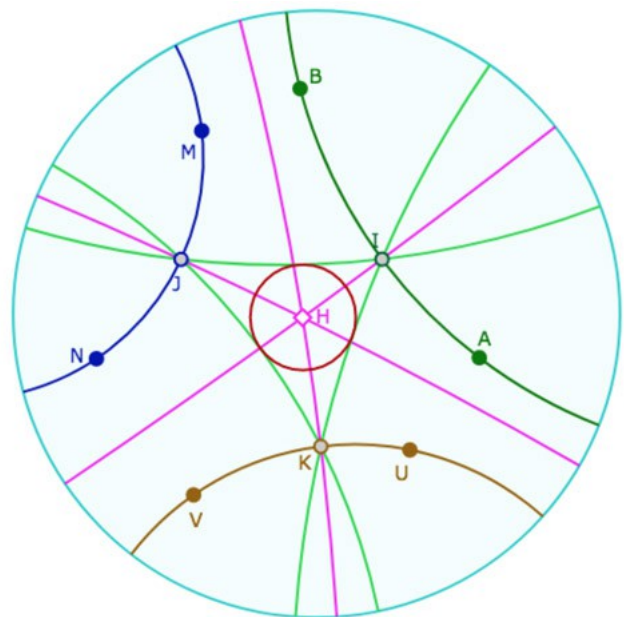
Toujours dans le disque de Poincaré : le cercle inscrit et les trois cycles exinscrits d'un triangle à gauche, trois équidistantes – et leurs axes, à droite, un cercle, une équidistante, un horicycle.

Et bien entendu les fameux pavages hyperboliques. Dans les figures de ce site, les cercles ne sont pas centrés en l'origine. On peut même déplacer le centre, pendant l'animation du point du cercle.



Génération 2 de deux pavages , à gauche, $P(5,4)$ de pentagones orthogonaux, à droite $P(6,4)$ d'hexagones orthogonaux qui sont d'aire π : hexagonature de π .

Une autre spécificité de la géométrie hyperbolique est la notion de **trilatère** et surtout celle des propriétés des trilatères. Si elle est largement abordée dans le site, cette notion peut être réservée à une seconde lecture. Un trilatère est un ensemble de trois droites qui ne sont pas en faisceaux. Par exemple, une hauteur d'un trilatère est la droite du faisceau de deux droites, orthogonale à la troisième. Alors, quand elles existent toutes les trois (roses ci-contre), les hauteurs d'un trilatère sont en faisceaux, et comme en géométrie euclidienne, elles sont bissectrices du triangle orthique associé (IJK ci-contre). Quand ce sont les bissectrices intérieures, comme ci-contre, l'orthocentre est le centre du cercle inscrit du trilatère.

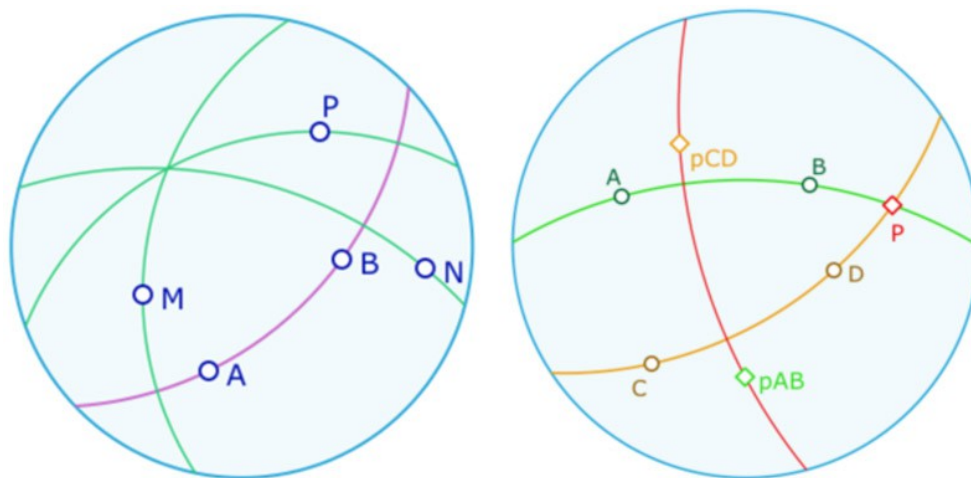


La géométrie elliptique

On a vu que la richesse de la géométrie hyperbolique s'explique par le passage de deux à trois types de faisceaux de droites. La géométrie elliptique va être d'une certaine façon beaucoup plus simple, mais aussi bien plus déconcertante, bien loin de nos représentations mentales. Plus simple, car on passe de deux type de faisceaux à un seul : tout faisceau à centre est un faisceau à axe, et il n'y a pas de parallèle. Plus déconcertante, car c'est une géométrie non orientée : toute symétrie orthogonale est une

symétrie centrale, il n'y a pas de pliage. D'une certaine façon, la richesse de la géométrie elliptique vient de ce que presque tout y est possible. Voyons quelques exemples.

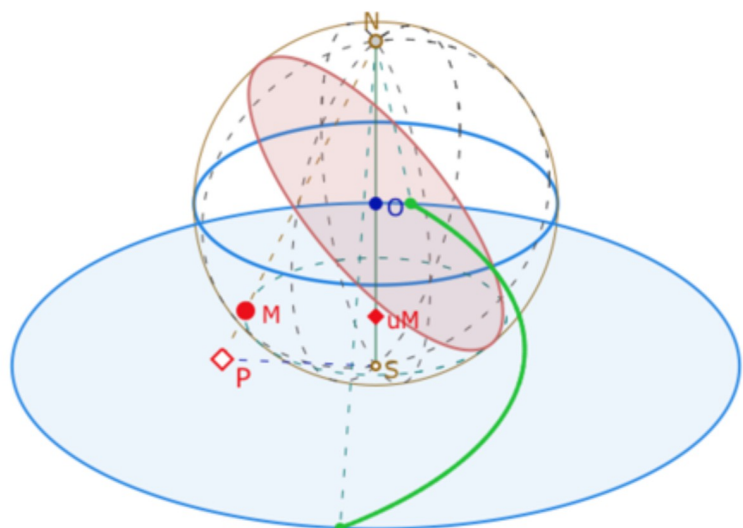
La géométrie elliptique est la géométrie de la sphère – dont on sait que les droites sont les grands cercles - dans laquelle les points diamétralement opposés sont identifiés. On utilise le modèle plan de Klein, la projection stéréographique de ce quotientage sur le plan. En pratique la droite passant par deux points est l'arc de cercle qui coupe le cercle du plan elliptique en deux points opposés, avec cette particularité que ces deux points opposés sont elliptiquement identifiés. Mais on comprend mieux les propriétés de la géométrie elliptique en raisonnant sur la sphère. Sur la sphère, toutes les perpendiculaires à l'équateur se coupent au pôle nord. Tous les grands cercles ont leur « pôle nord ». Ainsi, toutes les perpendiculaires à une droite se coupent en un point, le pôle de la droite (illustration de gauche). Et réciproquement, toute droite passant par le pôle d'une droite est perpendiculaire à cette droite.



Ci-dessus à droite, pAB et pCD sont les pôles de (AB) et (CD) . La droite $(pAB pCD)$ est alors perpendiculaire aux deux droites. Ces deux droites (AB) et (CD) , comme perpendiculaires à $(pAB pCD)$ se coupent donc en le pôle P de cette droite. Autrement dit, deux droites ont toujours une perpendiculaire commune, la droite de leurs pôles, et se coupent en le pôle de leur perpendiculaire commune : tout faisceau à centre est un faisceau à axe.

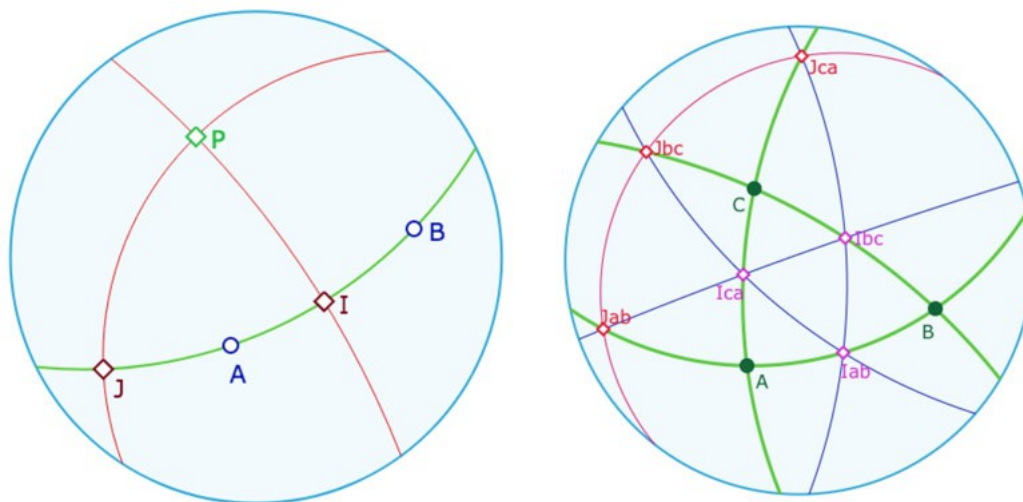
De même tout point admet une polaire. On montre facilement que la symétrie orthogonale par rapport à une droite est la symétrie centrale par rapport à son pôle.

Quand on s'intéresse au milieu de deux points A et B , on commence par construire – dans le modèle – une médiatrice. Elle coupe (AB) en un milieu I . La perpendiculaire à cette médiatrice passant par le

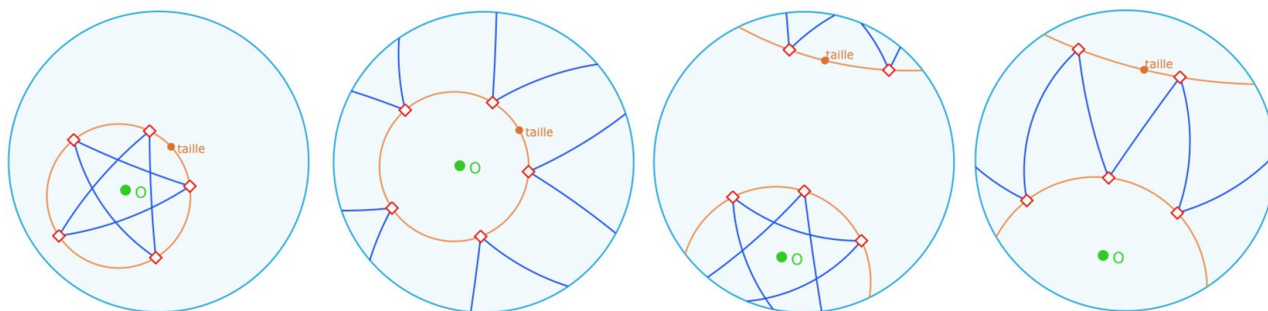


M est un point de la sphère, sa polaire - disque rouge sur la sphère et leurs projections stéréographiques dans le disque de Klein.

pôle de (AB) recoupe (AB) en un point J qui est le pôle de la médiatrice. Alors, par identification de la symétrie centrale de centre J et la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de A et B , J est un second milieu de A et B . Deux points ont deux milieux et deux médiatrices (illustration de gauche). Et le triangle IPJ est tripolaire : chaque sommet est le pôle de la droite opposée. Une conséquence immédiate est que tout point du plan qui n'appartient pas à une des ces trois droites est orthocentre du triangle ... Il faut peut-être lire deux fois la phrase, mais c'est immédiat ...



On montre aussi que, pour un triangle, la droite passant par deux milieux de deux côtés passe par un milieu du troisième côté. Les 6 milieux d'un triangle ABC sont 3 à 3 sur 4 droites. On montre ensuite que les pôles de ces 4 droites sont les centres des 4 cercles circonscrits à ABC . La réduction des types de faisceaux à un seul type produit beaucoup de propriétés surprenantes. Dans le site, on peut manipuler plusieurs polygones réguliers.



Illustrations d'un pentagone régulier animé. La manipulation réserve quelques surprises ...

Le site curvica974.re

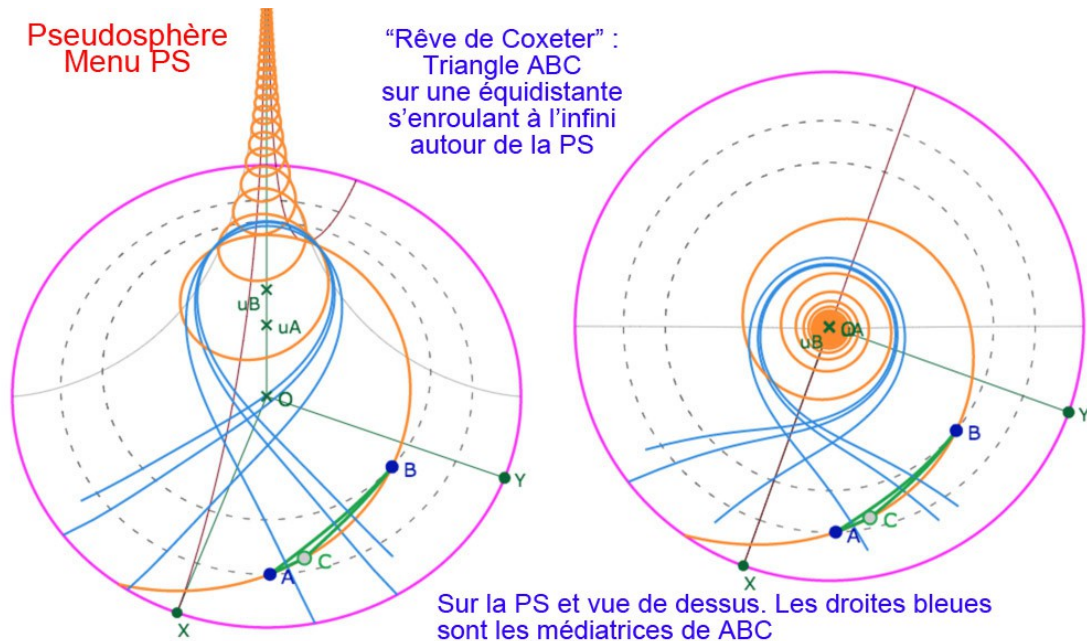
Le site est a priori organisé autour d'un blog, mais la première livraison (mars 2022) s'est concentrée sur la livraison de pages fixes dont voici la structure.

Les menus du site curvica974.re

Logiciel utilisé	Intro générale	Disque de Poincaré	Pseudosphères		Géométries non arguésiennes	
DGPAD ▼	MODÈLES ▼	DP ▼	usuelle	hyperbolique	ELL ▼	NON ARG ▼
Manipulation des figures	Deux modèles bornés géom euclidienne et modèle géom hyper finie	Intro géom hyperbolique	Mémoire de Beltrami	Pavages	Géom elliptique	Modèle de Hilbert Modèle de Moulton

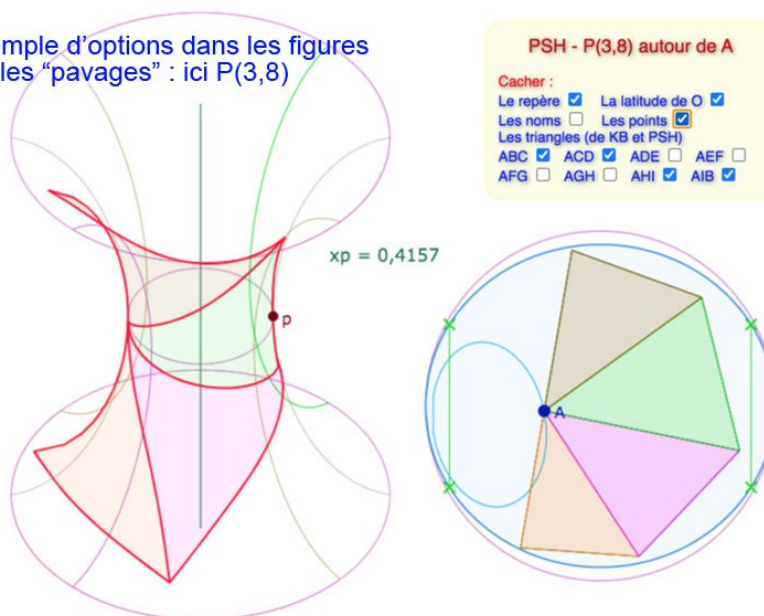
Les titres des menus sont aussi des pages de présentation des modèles

La présentation des différents concepts non euclidiens est essentiellement dans le menu **DP**. Pour une lecture rapide, on commencera par ce menu, puis le menu **ELL**. Beltrami est le premier à avoir montré un modèle réel – et même physique – de la géométrie hyperbolique, avec les surfaces pseudosphérique. On y consacre deux menus, d’abord **PS**, organisé autour du mémoire de Beltrami, et **PSH**, consacré, à nouveau, aux pavages sur cette surface, juste parce que les figures produites sont esthétiques, en plus d’être originales. Voici deux illustrations de ces deux menus.



Pseudosphère hyperbolique
Menu **PSH**

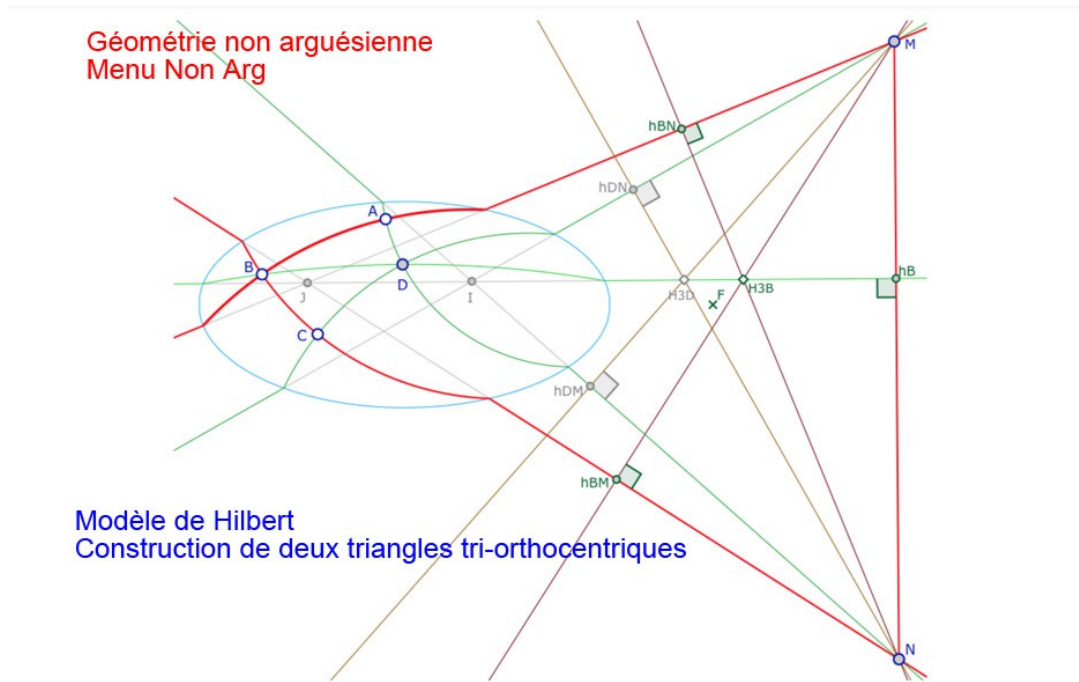
Exemple d’options dans les figures
sur les “pavages” : ici P(3,8)



Quatre triangles équilatéraux de 45° dans une configuration plus « verticale » sur la PSH.

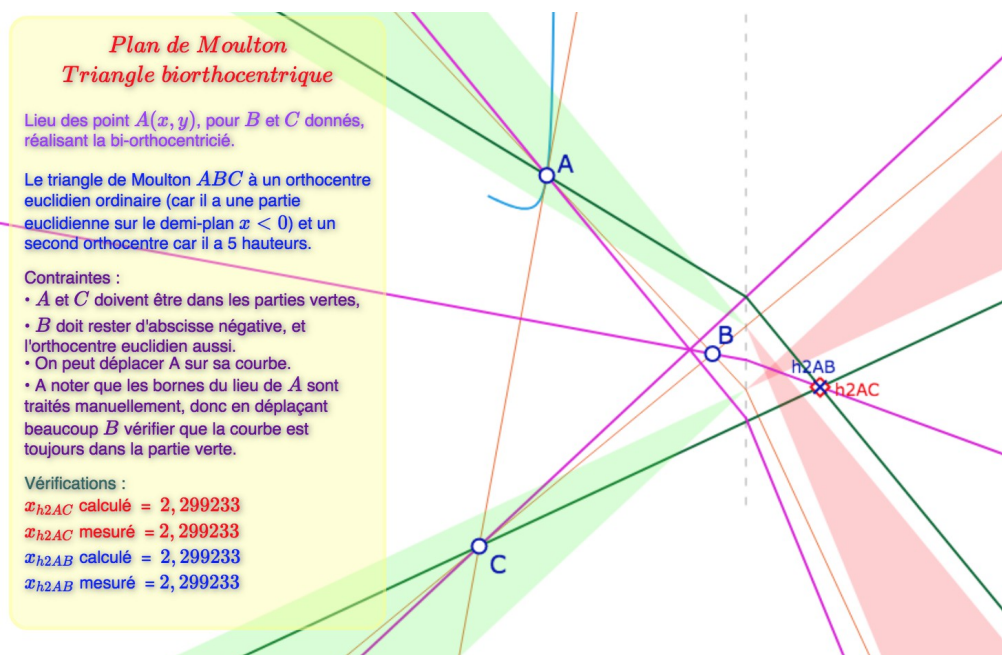
Un mot sur le menu **Non Arg**. On y présente d’abord le projet de Hilbert autour de ses « fondements de la géométrie » (1899). Dans cet ouvrage, Hilbert propose un modèle de « géométrie non arguésienne » en quelques paragraphes, seulement comme « preuve de concept ». Nous nous proposons d’illustrer de nombreuses propriétés de cette géométrie, obtenues simplement par manipulation (et un peu de programmation quand même) d’une

implémentation en géométrie dynamique de ce modèle. On trouve ainsi cette propriété particulièrement surprenante : l'existence de triangles tri-orthocentriques :



Principe de réalisation de triangles tri-orthocentriques : le triangle MBN a trois orthocentres, deux hilbertiens, B et D et un euclidien H_3B .
De même, MDN a aussi trois orthocentres, deux hilbertiens, D et B et un euclidien H_3D .

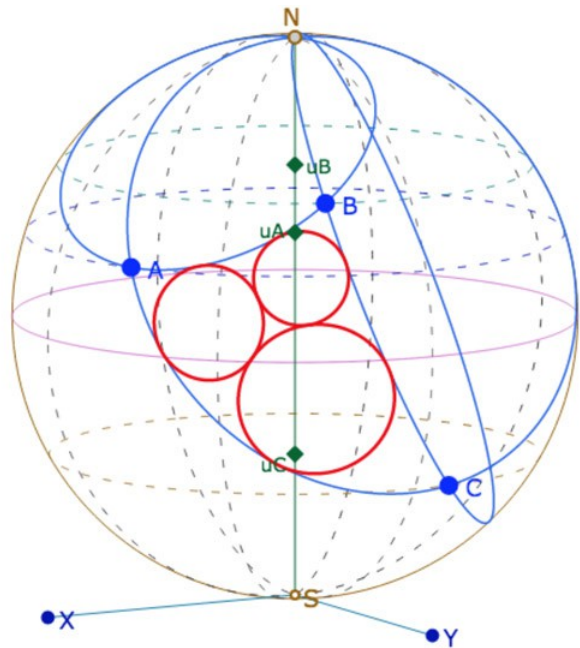
Rapidement, en 1902, Moulton propose un modèle plus simple. Son modèle est repris par Hilbert, à partir de la 4^e édition, mais toujours simplement comme « preuve de concept ». Là encore, une implémentation dynamique, plus aboutie que celle du modèle de Hilbert, permet une analyse fine de l'orthogonalité. On montre alors qu'il peut y avoir des triangles bi-orthocentriques mais certainement pas de tri-orthocentriques. Et donc ces deux modèles ne rendent pas compte de la même géométrie non arguésienne. Bien entendu, il faut entrer dans ces modèles pour comprendre les enjeux de ces constructions.



Avant cela on peut explorer quelques items du menu MODELES qui propose, entre autres, deux modèles non usuels, bornés, **de la géométrie euclidienne : un plan et l'autre sur la sphère épointée.**

Le premier est proposé pour le comparer au modèle elliptique (les droites sont les mêmes ... à un point près, ce qui change tout), le second est en lien avec les démarches de Lobatchevsky et Bolyaï qui tous les deux ont montré – avant tout modèle, vers 1830 - que la consistance de la géométrie « des parallèles » (hyperbolique) est équivalente à celle de la géométrie euclidienne, car elle aboutit à ce que la géométrie de la sphère épointée soit euclidienne (géométrie de l'horisphère chez Bolyaï). C'est ce qui est exploré dans ce modèle.

Ci contre, la construction de Malfatti (trois cercles deux à deux tangents entre eux et tangents aux côtés d'un triangle) sur la sphère épointée. La droite (AB) est le cercle de la sphère passant par A, B et le pôle Nord.



Le site sera régulièrement enrichi d'articles de blog pour traiter de nombreux thèmes non abordés dans ces menus. Il a pour vocation de ne pas se complexifier, mathématiquement parlant, en restant dans le champ des configurations et de la manipulation directe des figures. Par contre, il est possible qu'avec l'habitude prise par les lecteurs de manipuler les figures, il propose (à moyen terme) des manipulations peut être un peu plus sophistiquées comme cette tentative sur les pavages du modèle de Klein Beltrami (que l'on trouve à la date du 20 mars).

Bonne manipulation directe sur <http://curvica974.re>