

DES LABORATOIRES DE MATHÉMATIQUES

Thierry DIAS, Adrien FERREIRA DE SOUZA, Jimmy SERMENT
Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Lausanne

Résumé : La mise en place de laboratoires de mathématiques s'inscrit dans la perspective d'un changement des pratiques dans l'enseignement des mathématiques. Ce dispositif, relevant d'une démarche expérimentale et collaborative, incitant aux interactions sociales, à la manipulation et à l'investigation, vise à favoriser l'apprentissage de tous les élèves. Un laboratoire de mathématiques se bâtit essentiellement sur un environnement didactique adapté à la situation d'apprentissage et permet une dialectique entre sujets apprenants et objets de savoirs en référence à la dimension expérimentale des mathématiques.

1. — Qu'est-ce qu'un laboratoire de mathématiques ?

Le laboratoire de mathématiques est plus qu'un lieu dédié aux expériences comme pourrait le laisser supposer son appellation. Nous ne chercherons pas ici à proposer une définition mais plutôt à explorer les différents constituants qui en déterminent les caractéristiques principales. Pour cela nous commencerons par situer ce dispositif dans un contexte institutionnel relatif aux politiques éducatives de la France et du canton de Vaud en Suisse. Nous verrons ensuite que l'idée d'une pratique plus expérimentale des mathématiques a laissé quelques traces dans l'histoire.

Une réponse aux attentes institutionnelles

Les rapports sur l'enseignement des mathématiques en France (Villani et Torossian,

2018) et dans le canton de Vaud en Suisse (Dias, 2019), ont mis en évidence que des changements dans les méthodes et les dispositifs permettant l'enseignement des mathématiques étaient plus que jamais nécessaires¹. Ces rapports montrent notamment que les mathématiques sont encore trop souvent assimilées par les acteurs du système à une discipline abstraite et souvent redoutée par les élèves (mais aussi parfois par les enseignants eux-mêmes). Elle est également accusée d'être discriminante, ne servant ainsi qu'à distinguer les « bons » et les « mauvais » élèves. Les mathématiques sont de

¹ Les raisons invoquées dans les deux rapports diffèrent dans les analyses, la France partant notamment d'un constat alarmant sur les résultats des élèves dans les tests de positionnement internationaux. Pour la Suisse, il est surtout question d'un renforcement des connaissances mathématiques des enseignants ainsi que de la nécessaire valorisation de la diversité des méthodes d'enseignement.

fait assez rarement considérées comme une discipline agréable à enseigner mais elles sont néanmoins reconnues dans leur utilité au service de la construction de liens entre la réalité et des concepts relevant de l'abstraction. Les auteurs des rapports soulignent qu'il est essentiel de donner à la fois du sens aux apprentissages et de nouvelles démarches d'enseignement afin de proposer aux élèves et à leurs enseignants un nouveau point de vue sur les mathématiques.

Parmi les mesures proposées par les auteurs des rapports précités (Villani, Torossian, 2018 ; Dias, 2019), il est recommandé le développement de laboratoires de mathématiques, un dispositif proposé dès 1904 par Émile Borel, et que nous avons présenté lors de travaux antérieurs (Dias, 2008 ; Dias & Durand-Guerrier, 2009). Il faut noter ici que, dans le rapport français, la mesure est plutôt préconisée au lycée alors qu'elle est suggérée à l'école primaire et secondaire 1 (collège) en Suisse. Citons enfin le cas de l'Italie qui recommande elle aussi la mise en œuvre de laboratoires de mathématiques dans le cadre d'une série de suggestions méthodologiques au sein d'un rapport de la Commission de l'Union Mathématique Italienne en 2003 rapporté par Maschietto (2010).

Avant de développer ce qui relève selon nous d'un laboratoire de mathématiques, nous souhaitons clarifier quelques éléments fondamentaux constitutifs au regard des différents modèles existants. Selon notre point de vue, le dispositif du laboratoire se veut accessible et adapté pour tous les apprenants, sans sélection des participants par l'enseignant comme dans le modèle italien (Paola, 2007). Il n'est donc pas spécifiquement destiné aux élèves les plus avancés dans leur scolarité, comme cela est proposé en Italie, dans la conception d'Émile Borel (1904) ou tel qu'il est préconisé dans le rapport Villani-Torossian. Il se veut être un dispositif pédagogique conçu, conduit et régulé

par un enseignant. Nous n'envisageons donc pas de délégation à un technicien de laboratoire (Paola, 2007) ou à un ouvrier préparateur (Borel, 1904). Nous sommes conscients que ce dispositif implique une préparation et un accompagnement fort de l'enseignant, ce que nous développerons au cours de cet article. Notre approche diffère ainsi des dispositifs qui ne proposent pas de formation spécifique (Borel, 1904 ; Paola, 2007). Enfin, notre vision du laboratoire se veut souple et adaptable aux différents contextes d'enseignement et d'établissement. Si nous pensons qu'une salle dédiée est préférable, un espace dans la classe nous paraît néanmoins une solution pertinente. Concernant l'environnement matériel (tel que proposé par exemple dans la liste de matériel en annexe 1 qui n'est qu'une suggestion non-exhaustive), nous estimons qu'il doit être évolutif et surtout adapté en fonction des besoins de recherche des élèves. Nous n'avons donc pas de vision arrêtée sur un type de matériel dans le laboratoire, ni peu coûteux, simple et utilisable par les élèves (Borel, 1904), ni faisant spécifiquement appel aux outils numériques (Villani-Torossian, 2018).

Un peu d'histoire

L'idée de créer des laboratoires de mathématiques est souvent référée à un célèbre discours d'Émile Borel en 1904 à l'Académie des Sciences. A noter que ce discours s'inscrivait alors dans le cadre d'une réforme importante de l'enseignement au secondaire² souhaitant donner une place plus importante aux disciplines scientifiques (dont les mathématiques).

« Mais pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera néces-

² Réforme des lycées en France, ce qui correspond au niveau secondaire 2 en Suisse.

saire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de Mathématiques.[...] Il est, en effet, nécessaire d'arriver, non pas à multiplier les points de contact entre les Mathématiques et la vie moderne (ces points de contact sont innombrables et se multiplient chaque jour d'eux-mêmes), mais à mettre ces points de contact en évidence pour tous ; c'est le seul moyen d'empêcher que les Mathématiques soient un jour supprimées comme inutiles par voie d'économie budgétaire. » (Borel, 1904, p.12)

Borel prône ainsi la création de laboratoires en tant que lieux dédiés à une véritable pratique des mathématiques pour les élèves, dénonçant un rapport trop théorique et conceptuel proposé par l'enseignement. Son approche vise essentiellement à associer la construction des connaissances mathématiques à une pratique en lien direct avec le réel. Les mathématiques peuvent alors être considérées comme relevant d'une science expérimentale, s'appuyant sur l'utilisation d'un matériel et sur des manipulations au service d'un projet de modélisation des concepts théoriques. On rapproche ainsi les laboratoires des ateliers du menuisier, dans lesquels l'élève pourra construire et observer des modèles simples grâce à ses expériences dans l'environnement matériel mis à sa disposition. La dimension transversale avec d'autres disciplines est aussi présente dans ces laboratoires. Selon Borel, il est en effet possible de collaborer avec l'enseignant des arts visuels, des travaux manuels, ou de physique pour concevoir et accompagner les activités des élèves au sein de ces ateliers.

En ce qui concerne les mathématiques, l'élève pourra raisonner en mobilisant des connaissances, en élaborant des hypothèses et en les confrontant à la réalité. La dialectique entre la théorie et la pratique expérimentale est indispensable pour l'assimilation des connaissances, l'élève ayant en effet besoin d'éprouver ses hypothèses avec des modèles réel :

« L'élève comprendra qu'il est sans doute excellent de bien raisonner, mais qu'un raisonnement juste ne conduit à des résultats exacts que si le point de départ est lui-même exact ; qu'il faut, par suite, ne pas croire aveuglément à tout raisonnement, à toute démonstration d'apparence scientifique, mais se dire toujours que la conclusion n'a de valeur qu'autant que les données ont été scrupuleusement vérifiées par l'expérience. » (Borel, 1904, p. 16).

2. — Ancrage épistémologique

Le laboratoire : un processus et un lieu

Dans cet article, nous proposons d'inscrire le concept de laboratoire dans un cadre épistémologique principalement en référence aux travaux d'Hacking (1989). Sa vision du laboratoire nous intéresse parce qu'il le considère à la fois comme un style de raisonnement spécifique mais aussi comme un lieu (un local) dans lequel on peut concevoir et expérimenter grâce à « des manipulations et des appareils ». Le processus de raisonnement dont il est question chez Hacking se situe dans l'alternance entre un raisonnement par « exploration et mesure » (propre à la discipline de la physique) et un autre relevant de la modélisation hypothétique (du fait de l'inaccessibilité de certains objets scientifiques à l'observation directe). Concernant le lieu des expériences, il doit être celui de la recherche scientifique consacrant autant la vérification que la création de phénomènes.

Cette tentative de définition du laboratoire (processus de raisonnement et lieu d'expérimentation) renvoie explicitement à la discipline de la physique chez Hacking. Néanmoins il nous paraît pertinent de la convoquer pour la transférer à une certaine manière de faire faire des mathématiques aux élèves, mais aussi à des démarches d'enseignement

qui ne font pas de la théorie une référence première, voire un prérequis incontournable. Nous relevons en effet une forte tendance à privilégier la théorie et l'abstraction dans l'enseignement des mathématiques, ce qui renvoie parfois les temps d'expérimentation à des activités quasi ludiques éloignées de toute finalité scientifique. L'idée principale qu'il nous semble pertinente de poursuivre à travers les laboratoires de mathématiques est de rétablir et de réhabiliter l'expérimentation dans le processus d'enseignement et d'apprentissage des sciences.

De manière conventionnelle, on considère l'expérimentation principalement comme un moyen de vérifier une hypothèse (préalable), ce qui positionne la théorie alors implicitement première dans un tel processus. Si les laboratoires peuvent évidemment s'inscrire dans une telle démarche, ils peuvent également prôner une autre démarche : celle de l'investigation. Selon Hacking, le laboratoire doit être considéré comme un lieu dynamique d'observation et de découverte : "De par sa nature même, une observation de valeur ne peut être que le début d'un processus" (p.257). L'observation devra cependant être suivie ou appuyée par un apport conceptuel afin de garder une articulation continue entre expérimentation et théorie.

« Ainsi, je ne prétends pas que le travail expérimental pourrait exister sans la théorie. Cela reviendrait à travailler à l'aveuglette comme les « purs empiristes » dont se moquait Bacon. Reste ce fait que, généralement, la plupart des recherches vraiment fondamentales précèdent toute entreprise théorique. » (p.260)

La mise en place d'un laboratoire comme processus de dialogue entre les objets mathématiques et les sujets apprenants permet selon nous, à terme, de proposer un changement de regard sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La dialectique dont il est

question relie la théorie (le discours sur les concepts) et les expériences en les considérant in fine comme des processus inextricables.

« Le travail expérimental est le meilleur argument en faveur du réalisme scientifique. Ce n'est pas parce qu'il nous permet de vérifier si les entités théoriques existent bien. Mais plutôt parce que des entités qui ne peuvent en principe être « observées » sont couramment manipulées pour produire de nouveaux phénomènes et étudier de nouveaux aspects de la nature. » (p.419)

Le travail dans les laboratoires en mathématiques est particulièrement vrai, les "entités" comme le dit Hacking, sont intangibles en mathématiques car purs produits de l'esprit humain. Permettre aux élèves de manipuler des représentations de ces entités mathématiques pourra les conduire vers une meilleure compréhension de ces objets et ainsi de les réinvestir plus facilement.

Dimension expérimentale des mathématiques

La notion d'expérience peut faire l'objet d'approches et de références théoriques différentes et complémentaires, elles peuvent être épistémologiques, philosophiques, et bien entendu didactiques. Toutes ces approches tendent à interroger l'opposition entre deux modes d'élaboration des connaissances mathématiques selon que l'on considère ou non l'expérience comme une modalité nécessaire ou suffisante basée sur une dualité philosophique et épistémologique : empirisme et rationalisme. Pour échapper aux dilemmes théoriques dont nous ne renions évidemment pas la légitimité, nous utilisons pour notre part une formulation spécifique qui est celle de la *dimension expérimentale des mathématiques* (Dias, 2008 ; Bkouche, 2008). La dimension

dont il est question doit s'entendre non pas en tant qu'étendue mesurable d'un corps selon sa définition mathématique, mais comme le rapport de ses objets de savoir à une réalité permettant de les éprouver directement et d'agir sur eux. Nous pensons qu'il n'existe pas une séparation entre les objets théoriques et leurs signifiants matérialisés, mais que nous pouvons parler d'une dialectique qui connecte de manière constante le discours théorique et les actes expérimentaux sur les objets mathématiques.

Il nous paraît important de faire ici une première distinction entre la manipulation (rapport direct au monde sensible) et l'expérimentation (au sens de l'intervention selon Hacking). Selon nous, la notion de manipulation évoque essentiellement l'activité humaine, le faire au sens de toucher, utiliser, déplacer ; alors que l'expérimentation fait davantage référence au raisonnement en s'inscrivant dans une culture de la situation d'apprentissage scientifique au sens de l'essai, du contrôle, du test et de la vérification. La question du sens, pour un sujet apprenant, ne trouve pas de réponse dans la simple succession de ses actes (pratiques manipulatoires, des choses concrètes de son environnement réel) mais dans un processus d'expérimentation qui permet une mise en relation constante des activités concrètes avec les objets théoriques qui les structurent et qui les valident. Nous rejoignons ainsi Briand (2021) pour dire que la seule juxtaposition de tâches similaires manipulatoires ne garantit cependant pas la catégorisation nécessaire à la conceptualisation. Pour dépasser la juxtaposition des expériences et organiser la rencontre avec les objets de savoirs mathématiques (leur sémantique et leur syntaxe), il faut avoir recours à la dimension expérimentale au sein d'environnements dédiés et adaptés (comme celui des laboratoires de mathématiques).

La notion d'expérimentation nous semble plus prompte à décrire la pratique des mathématiques en classe que celle de l'expérience qui garde une dimension individuelle relativement passive et surtout plus subjective (faire l'expérience privée des choses). Nous souhaitons également distinguer ces deux terminologies dans leur rapport aux savoirs, l'expérience ne référant *in fine* qu'à elle-même et ne s'intégrant a priori à aucune organisation de savoir spécifique, alors que l'expérimentation est corrélée aux raisonnements, aux gestes, aux interventions et aux manipulations des objets.

Selon nous, la dimension expérimentale des mathématiques en tant qu'articulation entre un réel théorique et un réel empirique, peut être mobilisée dans une situation didactique lorsque les allers et retours sont possibles (et nombreux) entre les objets familiers qui orientent les pratiques des élèves et leurs référents théoriques (Dias, 2008). L'enjeu résidant dans la signification explicite des pratiques mathématiciennes par rapport aux concepts mathématiques qui leurs sont sous-jacents. Les expérimentations que font les élèves dans l'environnement didactique (le divers empirique) nourrissent la théorie (définitions, propriétés et relations relatives aux objets), théorie qui garantit en retour le sens de ces expérimentations.

3. — Un milieu d'apprentissage spécifique

Nous considérons que les termes milieu et environnement peuvent être considérés didactiquement comme des synonymes, chacun d'entre eux pouvant *in fine* servir dans la définition de l'autre : le milieu (en didactique des mathématiques) désigne tout ce que l'enseignant propose comme environnement à ses élèves pour apprendre. La finalité du milieu réside dans sa capacité à susciter les interactions des élèves avec les ressources environnantes, qu'elles soient matérielles ou cognitives.

L'enjeu de son adaptation à la situation d'apprentissage est donc fondamental, raison pour laquelle le dispositif du laboratoire de mathématiques peut être analysé à la lumière de cette notion d'environnement.

*Un environnement didactique
dédié aux expérimentations*

Selon Vergnaud (2011) l'action d'un sujet en interaction avec l'environnement d'une situation didactique est une mise en actes de ses connaissances. Cette mise en actes des élèves est un processus essentiel à la conceptualisation notamment pour les apprentissages mathématiques. Les manipulations, les gestes, les déplacements et les différentes manifestations de ses interactions avec les éléments matériels présents dans l'environnement sont des manifestations de ses connaissances. Nous associons donc les manipulations d'un élève à la mise en actes de certaines de leurs connaissances, en assumant le fait que leur repérage n'est pas transparent pour le professeur.

La dévolution des situations (Brousseau, 1998) devrait être très rapide, et ce sont bien les actes qui vont précéder les mots. Cette priorisation des actes dans une situation reconnue comme scolaire par les élèves est facteur d'utilisation et de développement de ses connaissances. Pour l'élève, manipuler est alors prendre conscience de l'étendue de ses connaissances dans son potentiel d'action, de transformation et de décision sur les objets de son environnement. Ne pas avoir à témoigner de manière déclarative de ses connaissances permet même à certains élèves anxieux par rapport aux tâches mathématiques de désacraliser cette rencontre et de construire un rapport plus apaisé aux savoirs. Faire, agir, intervenir, c'est montrer ce que l'on sait, par ses gestes et ses actes dans un processus expérimental. Il est en effet difficile d'établir des bijections entre les gestes et les

connaissances surtout dans un contexte scolaire où les acteurs interagissent non seulement avec les éléments matériels mais également avec d'autres acteurs de la situation (élèves et professeur). Pour améliorer l'accès à ces connaissances mises en actes, il est nécessaire de proposer un milieu riche en artefacts adaptés (Folcher & Rabardel, 2004) au jeu des interactions.

Au sein du laboratoire, il s'agit pour les élèves d'interagir et d'intervenir avec un environnement matériel adapté les confrontant à des artefacts susceptibles de représenter les objets conceptuels. Afin de caractériser ce que nous appelons un environnement adapté, nous nous appuyons sur les travaux d'Anghileri (2006) qui développe un modèle en trois niveaux³ dont le premier (*environmental provisions*) nous semble particulièrement pertinent pour réaliser cette caractérisation. Ce premier niveau est celui des ressources environnementales, il est destiné à bâtir une série d'aménagements didactiques préventifs suffisamment riches pour développer l'implication active des élèves. Les ressources dont il est question dans ce modèle englobent les artefacts (tous les objets du milieu matériel, mais aussi les supports de travail) et l'organisation dite pédagogique de la séance : aménagement spatial, séquençage et temps didactique, choix des dispositifs sociaux. En proposant un milieu matériel spécifique, nous mettons à disposition des élèves une diversité empirique objective propice aux conceptualisations et aux genèses instrumentales (Folcher & Rabardel, 2004). En effet, ce sont bien à la fois les artefacts matériels et les schèmes d'utilisation des élèves qui permettent la représentation de certaines notions mathématiques. La spécificité des artefacts mis à disposition dans nos situations des laboratoires est une valeur ajoutée dans les

³ Selon Anghileri (2006) les trois niveaux d'adaptation sont les suivants : *environmental provisions* (level 1), *explaining, reviewing and restructuring* (level 2), *developping conceptual thinking* (level 3).

phénomènes de conceptualisation propres aux notions mathématiques notamment par leur rôle de médiation sémiotique (Mariotti & Maracci, 2010) qu'ils permettent dans la relation signifiant/signifié. La construction de schèmes opératoires en tant qu'actes possibles sur des réalités sensibles, ne fait sens que par son rapport (signes et règles d'organisation des signes) avec une théorie, un système organisé de savoirs. Les laboratoires sont un environnement didactique adapté et donc, selon nous, construit pour mettre en œuvre une situation d'enseignement et d'apprentissage intégrant une déstabilisation cognitive provisoire pouvant être surmontée par des ressources diversifiées et différenciées. Ces ressources permettent alors les adaptations nécessaires à l'apprentissage dans un jeu d'interactions contrôlées à la fois par le milieu matériel et par le professeur.

L'environnement matériel du laboratoire relève d'un système sémiotique pouvant être assimilé à un registre de représentation (Duval, 1993). Un registre de représentation sémiotique requiert à la fois des traces perceptibles qui représentent quelque chose, un potentiel de traitements déterminés par une règle de transformation interne au système et un potentiel de conversion (transposition dans un autre système de signes). Les objets présents dans le

milieu sont des artefacts proposés pour faciliter l'expression en actes des éléments constitutifs d'un savoir mathématique (un récipient est un artefact de la notion de volume, une baguette en bois celui de l'arête d'un polyèdre par exemple). La variété des utilisations d'un même objet de l'environnement matériel permet aux élèves d'opérer des transformations dans leurs représentations (le traitement selon Duval). On peut par exemple construire des solides différents à partir d'un même set de pièces plastiques triangulaires (polyédrons) selon des règles concernant les angles entre les surfaces. A partir d'un même répertoire de signes (le lot de pièces triangulaires) on procède à des constructions différentes qui sont des processus de traitement au sens de Duval : transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations.

Enfin, et toujours selon Duval (1993), pour utiliser le terme de registre de représentation, il est également nécessaire que la représentation dans un registre particulier soit susceptible d'être convertie dans un autre registre de représentation (conversion). Ce processus peut être illustré par l'utilisation d'un éditeur de texte de type Latex dans le processus de compilation. Il s'agit de convertir les représentations produites dans un système (le





			
<p>Signes du registre</p>	<p>Expression avec 4 signes</p>	<p>Transformations par ajout de signes et changement de valeur des angles dièdres</p>	

Figure 1 : transformations selon une règle interne au registre

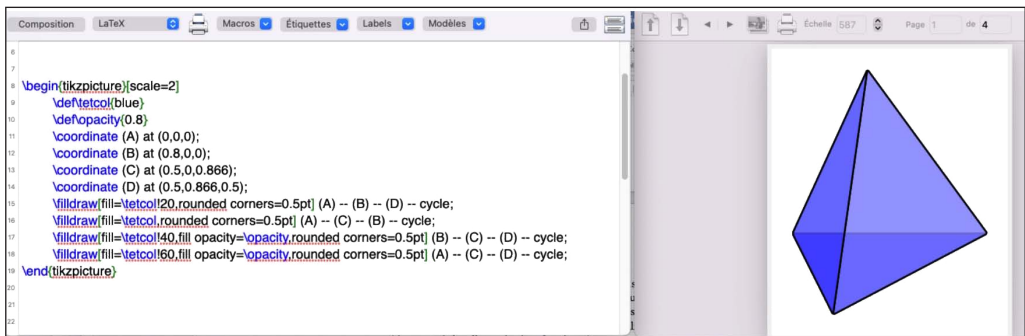


Figure 2 : deux représentations, code et figure pour un même référent : le tétraèdre

code) en représentations d'un autre système (le tracé de la figure), de telle façon que ces dernières permettent d'explicitier d'autres significations relatives à ce qui est représenté.

Au sein des laboratoires de mathématiques, les élèves interagissent avec un milieu matériel qu'ils sont amenés à représenter par exemple schématiquement sous diverses formes (dessins, symboles). Les objets manipulés vont également être mis en mots à l'occasion des verbalisations qui sont les supports des échanges langagiers. Ces conversions de registre de représentations sont rendues possibles par la dimension expérimentale de l'activité mathématique des élèves. Dans l'illustration de la figure 3 on

rapporte un travail conduit dans un atelier de formation d'enseignants à propos des laboratoires de mathématiques. L'activité consistait à construire le même objet (ici un icosaèdre) dans deux registres différents (matériel avec des baguettes et des connecteurs et le logiciel GeoGebra) afin de faire observer l'apport de chaque représentation lors du passage d'un registre à un autre : la conversion.

Place et rôle des interactions langagières

Au sein du laboratoire de mathématiques, la construction des connaissances mathématiques par un sujet s'élabore *a priori* dans le monde sensible et plus spécifiquement dans un

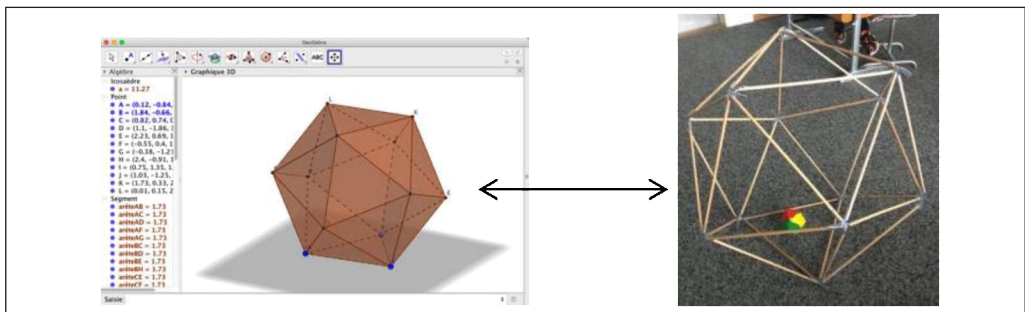


Figure 3 : conversion d'un même objet entre deux registres différents

environnement de réalités objectives avec lesquelles des interactions sont possibles. Ce que l'apprenant ne sait pas *a priori*, c'est que les signes qui matérialisent les objets théoriques qu'il rencontre sont organisés dans un système susceptible de modéliser et de donner du sens à ses pratiques. Cette organisation mathématique est donc bien réelle elle aussi, elle comporte non seulement des signes et des règles d'articulation, mais aussi un système langagier corrélé qui lui donne un statut de science dans sa capacité à permettre la connaissance et la compréhension du monde. Ces structures mathématiques sont le résultat d'une reconstruction organisatrice du réel empirique explicitée dans le langage (Bailly & Longo, 2006).

Selon Palacio-Quintin (1990), « le langage constitue le système symbolique privilégié de soutien de la pensée et de la communication ». Le langage est un élément facilitateur pour que l'élève donne du sens aux manipulations qu'il vient d'effectuer. En mathématiques, on peut dire que le langage émancipe progressivement l'objet mathématique de la réalité. La verbalisation des actes peut être considérée comme un des éléments contribuant à faciliter le passage du concret vers l'abstraction (Dias, 2017).

Les laboratoires de mathématiques doivent permettre aux élèves d'être en situation d'interaction, de leur proposer des tâches inscrites dans des dispositifs sociaux collaboratifs (un même problème à résoudre pour un groupe d'élèves sans mise en concurrence entre eux). Les interactions entre les sujets et le milieu matériel vont générer des échanges langagiers du fait de la confrontation des répertoires de connaissances des acteurs. Nous postulons donc sur la diversité des niveaux de connaissances et sur des interactions de type dissymétriques entre les protagonistes de la situation d'apprentissage. Pour décrire ce modèle de situation, nous parlons de situation de

communication au sens de Brousseau (2000). Il met en évidence que c'est le milieu matériel et les interactions qu'il génère qui sont responsables des échanges langagiers entre les sujets apprenants.

Le choix des tâches doit être adapté au dispositif social et à l'environnement matériel si on veut que la situation engendre des apprentissages. L'objectif est d'enrichir, de diversifier et surtout d'adapter le milieu matériel afin d'assurer aux élèves les interactions nécessaires à la résolution du problème posé. Cependant, ce sont bien les tâches et leurs consignes (et non pas seulement les éléments matériels) qui portent in fine la responsabilité des échanges verbaux garantissant alors l'appellation de situation de communication.

Ce sont donc bien les interactions langagières qui sont sollicitées pour dénoter les objets, les relations et même les gestes. Ce processus de mise en mots sert alors progressivement le passage de la situation de communication simple (formulation) à celle de la preuve (validation) dans laquelle émetteurs et récepteurs deviennent proposants et opposants. Les répertoires de connaissances et les éléments de langage s'appuient sur des théories et sur des éléments de logique des enchaînements de propositions (Brousseau, 2000).

Si la ressource matérielle facilite la dévolution grâce à sa diversité, son adaptation voire son aspect novateur, ce sont les accords ou les désaccords verbaux exprimés lors des échanges entre émetteurs et récepteurs qui déclenchent les phases de validation ou de preuve. D'un simple langage de dénotation des actes, on passe à une vraie situation de communication dans laquelle émetteurs et récepteurs font des propositions mathématiques utilisant le langage non plus seulement pour dénoter leurs actes et aussi pour les questionner. Lorsque les interactions

en actes sont génératrices de propositions verbales, le processus de conceptualisation est bien mis en œuvre. Ces propositions verbales sont fortement dépendantes des connaissances mathématiques préalables des apprenants, qu'elles soient valides ou non d'ailleurs.

4. — Mise en place d'un laboratoire

Comme nous l'avons évoqué en début de cet article, les laboratoires de mathématiques font partie de plusieurs plans institutionnels proposant des mesures destinées à provoquer des changements dans les pratiques professionnelles des enseignants. Si les niveaux scolaires concernés par ces préconisations sont variés selon les pays (du cycle primaire à celui de l'enseignement secondaire), nous souhaitons évoquer ici quelques éléments pragmatiques d'installation de ce type de dispositif. Nous ne chercherons donc pas à faire de distinction selon la complexité des savoirs engagés dans les laboratoires. Nos variables porteront plutôt sur trois éléments qui nous paraissent récurrents dans un projet de mise en place d'un laboratoire de mathématiques : la démarche, le lieu (local) et la spécificité d'un matériel dédié. Nous évoquerons ensuite un canevas didactique pouvant servir de guide à l'élaboration et la conduite d'un tel projet, puis nous terminerons par une présentation complète des enjeux pédagogiques en termes de gestion de classe.

La démarche

La démarche que nous préconisons est relativement proche de celle de la démarche

d'investigation en sciences. Comme nous l'avons évoqué plus haut, plusieurs de nos travaux dans le cadre de la dimension expérimentale des mathématiques montrent que cette discipline peut être rapprochée des autres domaines scientifiques en ce qui concerne la démarche de construction des connaissances du sujet. Nous rejoignons par exemple ici Hersant et Orange-Ravachol (2015) pour dire que ni la notion d'expérience, ni celle d'expérimentation et pas même celle de la validation ne sont susceptibles de priver les mathématiques d'un enseignement proche de l'investigation voire même de l'*Inquiry-based Science Education* prônée dans les pays anglo-saxons.

Afin de proposer un canevas didactique destiné aux enseignants, nous pouvons dégager sept moments clés dans l'élaboration d'un laboratoire de mathématiques. Ces moments seront détaillés au sous-paragraphe suivant. En résumé, la démarche doit suivre trois étapes fondamentales (figure 3) correspondant à un schéma de préparation relativement ordinaire dans le métier d'enseignant :

1. Un temps de conception de la situation d'apprentissage guidé par des outils d'analyse didactiques afin de s'assurer que les élèves seront confrontés à une situation de recherche.
2. Un temps d'interactions et d'expérimentation des apprenants dans un milieu matériel et langagier adapté,
3. Une phase résolument orientée vers la structuration des connaissances.



Figure 3 : étapes principales pour le projet laboratoire

Il faut signaler ici l'importance d'utiliser régulièrement cette démarche d'investigation afin d'habituer les élèves à de nouvelles formes de contrat didactique. Cette phase d'expérimentation, centrale dans le schéma ci-dessus, laisse une place importante à l'autonomie des élèves. Il est nécessaire qu'ils puissent interagir avec leur environnement. Le fort degré d'autonomie requis dans la phase d'expérimentation peut déstabiliser certains élèves quant à leur rapport à la construction des connaissances. Au lieu d'une construction de connaissances dépendante des interactions directes avec l'enseignant et son savoir, celle-ci dépend des interactions avec le milieu matériel et avec les pairs. Il faudra donc accepter de leur laisser du temps pour s'approprier le dispositif et ses nouvelles modalités d'organisation.

La salle du laboratoire

Le lieu dépend de l'espace à disposition et du stockage du matériel nécessaire au laboratoire. Si la place le permet, une salle dédiée au laboratoire peut être mise en place dans un établissement. Dans ce cas, les classes peuvent y venir en réservant la salle au moment voulu. L'enseignant met en place des ateliers corrélés aux objectifs d'apprentissage anticipés et correspondants aux connaissances qui doivent être utilisées ou à acquérir. Une telle salle de classe peut également être ouverte aux élèves hors temps scolaire (sur la pause de midi ou en fin de journée par exemple). Sous la vigilance d'un enseignant, les élèves y viennent alors de leur plein gré faire des mathématiques par plaisir, par curiosité ou par envie de découvrir de nouveaux savoirs mathématiques. Dans le cas où une salle dédiée au laboratoire n'est pas envisageable, il est possible de créer une simple armoire installée dans une salle de classe ou une salle spéciale. La plus-value d'un lieu indépendant par rapport à la salle de classe ordinaire est de provoquer chez les élèves un rapport différent

à l'activité mathématique. En permettant des échanges plus spontanés, en incitant à l'utilisation d'un matériel sans restriction, en laissant libre cours au choix des démarches et des procédures, le lieu indépendant du laboratoire est une matérialisation concrète d'un nouveau contrat didactique pour les élèves.

Quelle que soit la configuration du laboratoire dans l'établissement, il y a deux points à respecter. Le premier est l'anticipation de l'enseignant quant au lieu en fonction des ateliers choisis. L'enseignant doit prévoir un espace suffisant pour que les élèves puissent manipuler du matériel, circuler de manière sécurisée, collaborer et échanger sans déranger d'autres classes. Le deuxième point est la posture de l'enseignant et l'attitude des élèves au sein du laboratoire. Les rôles de l'enseignant et de l'élève changent en effet fondamentalement par rapport à une leçon classique, le contrat didactique est très différent dans les laboratoires et tout le monde doit en être conscient. L'expertise de l'enseignant s'inscrit davantage dans la phase de conception. Pendant la phase d'interactions, il s'inscrit plutôt comme un facilitateur, médiateur et moins comme un expert de la transmission du savoir.

Environnement matériel

L'environnement matériel est un élément clé du laboratoire de mathématiques comme nous l'avons évoqué depuis le début de cet article. Il doit permettre aux élèves de manipuler des objets pour explorer, construire ou vérifier des hypothèses mathématiques. Ces objets peuvent être sensibles (objets manipulables), mais aussi immatériels (représentations iconiques ou symboliques). L'environnement matériel doit faire l'objet d'une analyse a priori en amont des ateliers proposés notamment en fonction des besoins des élèves, des objectifs à atteindre et des difficultés anticipées. Le matériel est au service

d'une représentation adaptée des objets mathématiques en jeu et doit assurer les liens nécessaires entre l'abstraction sous-jacente à l'action et la réalité de l'expérimentation. Il agit pour soutenir les démarches réflexives des élèves. Il n'est donc pas déclencheur d'une activité attendue comme ce serait le cas du matériel Montessori très codifié et permettant une progression déterminée à l'avance. La vision des outils Montessori semble plutôt propice à activer les neurones canoniques chez les élèves qui ont vécu la présentation de l'atelier par l'enseignant et disposent donc d'une représentation de l'utilisation attendue du matériel. Les objets concrets du laboratoire de mathématiques viennent quant à eux en soutien d'une démarche initiée par les élèves. En termes d'activation des neurones visuo-moteurs, ce type de matériel convoque davantage les neurones miroirs (Rizolatti, 2008) aussi bien dans la perception des émotions et les interactions que dans l'imitation des actions, l'observation de l'autre agissant. Observer un mouvement, c'est déjà le réaliser dans notre esprit, et de manière extrêmement précise. Être témoin ou acteur d'une action entraîne l'activation des mêmes zones cérébrales. L'utilisation du matériel a donc une incidence sur les procédures mais aussi les processus mentaux des élèves.

Nous proposons en annexe une liste non exhaustive de matériel établie par des enseignants lors d'une formation continue dédiée aux conditions de réussite de la mise en place de laboratoires de mathématiques. Elle se veut évolutive, en réponse aux besoins des expérimentations, mais aussi des expériences qui visent à enrichir constamment le laboratoire. La classification des types de matériel et artefacts présents dans cette liste est un témoignage de la relative simplicité de cette opération de rassemblement d'éléments matériels, très souvent présents dans les classes ou les établissements.

Les 7 moments clés des laboratoires

A partir des trois étapes principales présentées plus haut (figure 3), nous avons identifié sept moments importants dans la mise en place des activités au sein d'un laboratoire de mathématiques (figure 4). Ces moments clés ne doivent pas être considérés comme totalement indépendants ni successifs, notamment quand ils appartiennent à une même étape principale. Leur présentation sous une forme de moments permet de décliner leurs caractéristiques. À noter que ces caractéristiques sont proches de celles développées dans la démarche d'investigation scientifique (Sanchez & Jouneau-Sion, 2010).

1. L'anticipation de la situation par l'enseignant

C'est un moment qui se situe en amont de la séance de pratique des élèves, étape pendant laquelle le rôle de l'enseignant consiste à conduire une réflexion didactique sur la situation qu'il va proposer aux élèves. Sa proposition didactique doit faire l'objet d'une analyse a priori qui lui permet de sélectionner les savoirs visés, de déterminer les objectifs à atteindre, d'identifier les conceptions et représentations, d'anticiper les procédures des élèves ainsi que les difficultés et obstacles potentiels.

2. L'appropriation du problème par les élèves

Ce deuxième moment marque le début de la séance au sein du laboratoire. Grâce à la dévolution de la situation par l'enseignant, les élèves doivent s'approprier le problème posé, se sentir responsable de sa résolution en mobilisant et en partageant leurs connaissances. Le rôle de l'enseignant sera de s'assurer de la bonne compréhension du problème, son étayage se situe sur l'enrôlement des élèves dans la tâche. Cette étape crée un changement radical de contrat didactique pour les élèves,

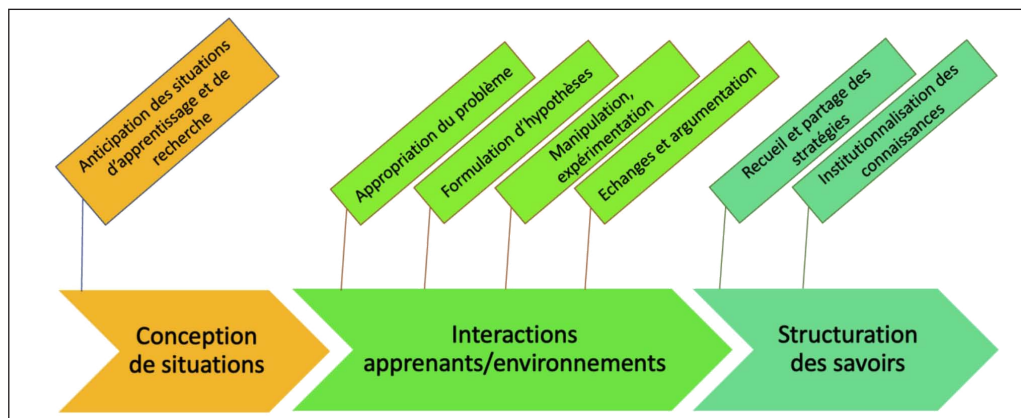


Figure 4 : sept moments clés

qui attendent souvent de l'enseignant un apport sur les savoirs (au moins sous forme de rappel) avant de se lancer dans l'activité proposée.

3. La formulation d'hypothèses et/ou de conjectures

Une fois un temps d'appropriation du problème effectué, les élèves sont alors en mesure de formuler des conjectures et/ou des hypothèses. Ces propositions doivent s'appuyer sur les interactions verbales entre les élèves et sur le partage de leurs ressources en termes de connaissances individuelles, mais elles peuvent également naître de certaines interactions avec le milieu matériel. Raison pour laquelle cette étape est donc relativement simultanée dans le temps avec l'étape 4 décrite ci-dessous puisqu'elle fait partie du processus plus global de résolution du problème.

4. Manipuler et expérimenter pour la résolution du problème

On peut considérer cette étape comme celle pendant laquelle les élèves seront les plus

autonomes pour mettre en actes leurs connaissances et leurs doutes au sein de la situation mathématique. Ces confrontations au milieu matériel environnant s'appuient sur des raisonnements mathématiques souvent non verbalisés, l'investigation étant souvent conduite par des manipulations. Les connaissances mathématiques ainsi mises en actes sont essentielles pour enrichir l'étape suivante : celle de la mise en mots (formulation et validation), raison pour laquelle le rôle de l'enseignant dans cette phase est celui d'un observateur rigoureux dans son protocole d'observation.

5. Les échanges argumentés

Dans cette phase, les interactions entre les élèves sont essentiellement destinées à verbaliser leurs découvertes dans un but de validation : il s'agit en effet *in fine* de proposer des solutions aux questions posées. Le débat contradictoire en cas de diversité des démarches, des procédures et même des solutions, est le moment clé de cette étape. Ce sont les connaissances qui doivent structurer ce débat qui doit progressivement amener les élèves

à identifier le savoir mathématique en jeu de la situation. L'enseignant ne doit pas perdre de vue que la communication est un support aux échanges, mais que l'objectif d'apprentissage reste mathématique.

6. Le recueil et le partage des stratégies

Les élèves mobilisent différentes stratégies qui ne sont pas nécessairement explicites, notamment pour ceux qui ne pensent pas en avoir. Le repérage des stratégies utilisées par les élèves doit également faire l'objet d'un traitement explicite par l'enseignant. Il garantit en effet la possibilité de rendre ces stratégies utilisables dans d'autres situations ultérieurement. Il est également important d'en garder des traces et de les structurer dans un recueil de stratégies ou sous forme d'affiches utilisables pour les élèves.

7. L'institutionnalisation des connaissances

Lors de cette phase, l'enseignant reprend en quelque sorte la main sur le déroulement du laboratoire afin d'assurer l'avancée du temps didactique. Il s'appuie sur les échanges du moment précédent pour institutionnaliser le

nouveau savoir mathématique. Cette étape est très importante pour aider les élèves à donner du sens aux expériences conduites et aux débats effectués. Il s'agit en effet d'aider à structurer les connaissances, au risque sinon de laisser le seul souvenir d'une série d'activités expérimentales juxtaposées. Cela permet de mettre en évidence le passage du faire à l'apprendre.

A la suite des nouveaux objets de savoir découverts par l'expérimentation, vient un moment nécessaire de réinvestissement des nouvelles connaissances dans d'autres situations. Il se situe en dehors du temps et du dispositif de laboratoire et peut se conduire en situation de classe ordinaire.

Les élèves ont en effet besoin de temps pour ancrer leurs connaissances et d'entraînement pour les stabiliser. Ces phases nécessaires dans l'apprentissage sont complémentaires au fonctionnement du dispositif de recherche expérimentale. Si la phase d'opérationnalisation des connaissances est nécessaire pour l'apprentissage, elle ne constitue cependant pas une étape clé du laboratoire de mathématiques au sens strict.

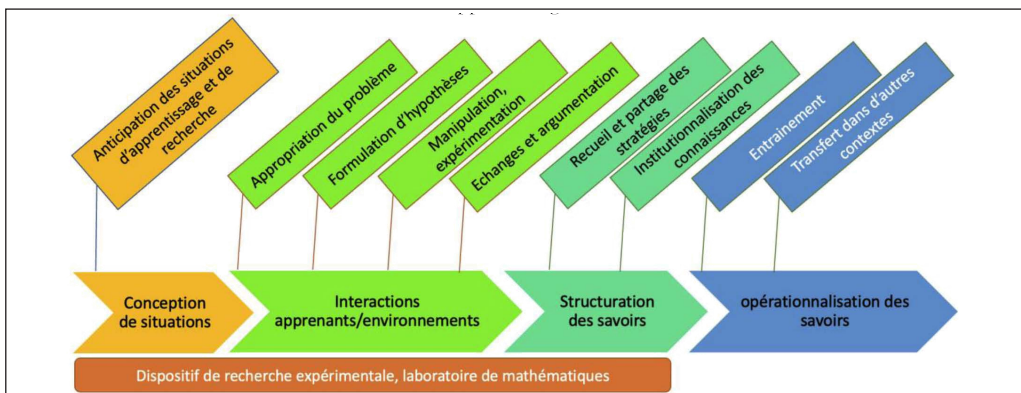


Figure 5 : le laboratoire et la phase d'opérationnalisation des savoirs

Néanmoins, cette phase d'opérationnalisation doit s'inscrire dans la durée et être réitérée sur différents supports pour engager progressivement le transfert des connaissances construites dans d'autres contextes et d'autres situations d'apprentissages.

Dimension pédagogique et gestion de classe

La mise en œuvre d'un laboratoire de mathématiques réussie s'appuie sur des éléments pédagogiques fondamentaux. Selon nous, il ne peut y avoir de démarche d'expérimentation par les élèves sans une situation de recherche adaptée et située dans leur zone proximale de développement au regard de leurs centres d'intérêts. Aussi, l'analyse *a priori* rigoureuse de la situation proposée doit permettre de s'assurer que les élèves seront bien actifs et que les tâches proposées répondent aux exigences posées par le laboratoire de mathématiques : qu'ils émettent des hypothèses, cherchent pour les valider ou les invalider, échangent et interagissent verbalement, etc.

L'appui sur la taxonomie de Bloom (1979) revisitée par Anderson et Krathwohl (2001) peut être en ce sens éclairante pour évaluer l'exigence de la tâche au regard de l'activité attendue des élèves. En effet, elle permet d'identifier et de catégoriser des processus cognitifs de haut et bas niveaux à partir des verbes d'action qui correspondent à l'activité des élèves. Cet outil permet ainsi d'anticiper différents niveaux d'exigences au sein d'une tâche afin de répondre à l'hétérogénéité des élèves. Par exemple, dans le cadre du laboratoire de mathématiques, les activités liées à la sélection de données pertinentes ou la comparaison de données sont moins complexes que celles de justifier et argumenter. Le travail de recherche conduit en équipe permet à tous d'agir collaborativement en apprenant aussi des élèves qui construisent et effectuent les tâches de plus haut niveau.

Le laboratoire de mathématiques ouvre donc des perspectives au niveau du type d'activité des élèves, comme évoqué précédemment, mais il ouvre aussi des pistes dans les modalités de dispositif social. En effet, il alterne des phases collectives de travail, des phases de recherche à la fois individuelle et collective. Cela implique une structuration précise des différentes phases de la séance, aussi bien dans leurs contenus que dans la gestion du temps. En effet, la phase d'institutionnalisation est primordiale afin de faire passer les élèves du faire à l'apprendre et d'identifier des stratégies de résolution. Cela implique également qu'un temps soit dédié à ce travail, notamment métacognitif, mais aussi de verbalisation. La gestion du temps est donc un facteur important pour que les élèves puissent progressivement construire des repères quand ils sont en phase de recherche ou dans leurs phases de travail en autonomie. L'utilisation d'un time timer, d'un sablier ou d'une horloge peut soutenir les élèves dans cette gestion du temps.

Un point clé du dispositif réside dans le choix du matériel mis à disposition des élèves. Il est important que le matériel soit le même sur l'ensemble de l'année scolaire et que l'enseignant n'induisse pas un choix de matériel en le proposant uniquement pour une séance définie. Il est donc nécessaire de prévoir un matériel pas trop conséquent en termes de volume pour que cela ne prenne pas trop d'espace dans la classe, mais il est surtout indispensable de proposer des objets et outils transférables et utilisables dans différentes situations d'apprentissage. Une liste non-exhaustive est proposée en pièce jointe du présent article (annexe).

Comme cela a déjà été précisé, les gestions de l'espace et l'organisation spatiale de la classe sont un des éléments importants à anticiper dans la phase de conception. La quantité de matériel, sa place dans la salle de classe sont à réfléchir afin de faciliter les déplacements des

élèves pour accéder au matériel. De même, l'activité de recherche implique de faire des hypothèses, des essais, de réfléchir parfois à plusieurs sur des supports comme un tableau, parfois un tableau mobile ou un support d'écriture type paperboard.

En fonction des conditions de chacun, cela peut aller de l'aménagement d'un espace dans la classe, à des espaces dédiés avec des matériaux adaptés, par exemple des murs lavables et effaçables sur lesquels les élèves peuvent écrire.

La mise en place d'un laboratoire de mathématiques doit s'inscrire dans une temporalité suffisamment longue, idéalement une année scolaire a minima. La régularité du dispositif est un élément déterminant de sa réussite. Les élèves ont besoin de temps pour s'approprier ces nouvelles modalités de travail, ces nouvelles possibilités, de s'autoriser à penser et envisager les mathématiques autrement. De nombreuses compétences transversales se mettent progressivement en place dans la gestion par les

élèves du dispositif. La régularité aide à les stabiliser durablement.

L'évaluation des acquis des élèves est un incontournable de toute situation d'apprentissage. Il en est de même pour le laboratoire de mathématiques. Donner de la valeur au travail des élèves est une nécessité. Il est important de montrer aux élèves et aussi aux familles que le dispositif respecte une organisation, une progression au regard du prescrit. Cela peut se faire sous la forme d'un cartouche dans lequel est inscrite la compétence cœur de cible travaillée et le niveau de réussite de l'élève.

Un élément important de l'évaluation est également de permettre aux élèves d'observer leurs progrès. La validation régulière de compétences permet cela, il est aussi possible d'utiliser un cahier d'expériences afin de garder des traces et prendre conscience de progrès périodiques ou une frise annuelle des compétences, un tableau récapitulatif des compétences.

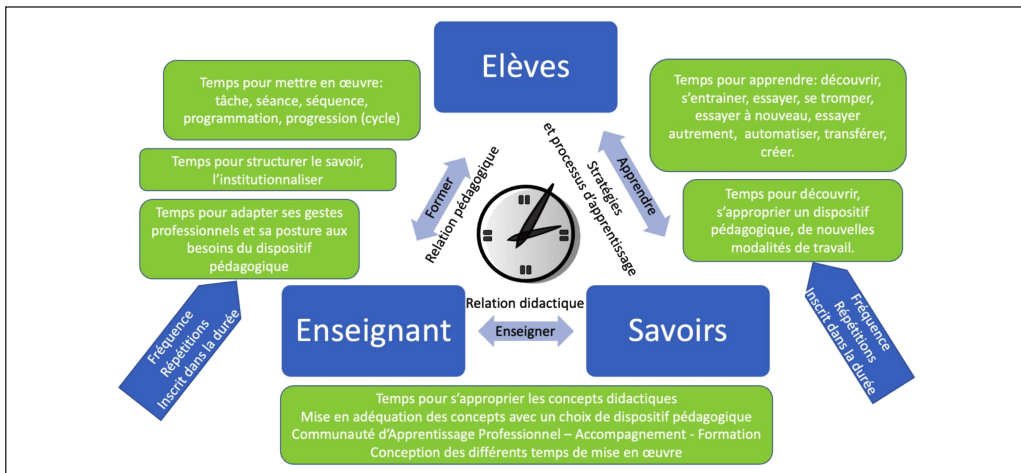


Figure 6 : Gestion des temps dans l'implantation d'un nouveau dispositif pédagogique.

5. — Pérennité du dispositif : la formation des enseignants

Le déploiement d'un laboratoire de mathématiques sur l'ensemble d'un cycle et/ou sur plusieurs cycles est souhaitable afin de garantir une forme de continuité et de cohérence pédagogique, d'abord dans l'intérêt des élèves. Les garants de cette continuité restent les enseignants et elle est donc facilitée s'ils sont accompagnés dans ce changement dans leur pratique professionnelle. Comme nous l'avons dit plus haut, la mise en place d'un laboratoire implique de nombreux changements dans la pratique professionnelle des enseignants : la posture, la conception, l'observation, la préparation, l'étayage, l'évaluation... et l'entrée dans le dispositif est réussie si elle reste dans la zone de développement professionnel des enseignants. Aussi, il semble nécessaire que cet accompagnement se construise tout au long de la mise en place du laboratoire donc s'inscrive dans un temps long.

En France, depuis la rentrée 2019, le Ministère de l'Éducation Nationale a souhaité que tous les enseignants du premier degré (école primaire) soient accompagnés en français et en mathématiques dans le cadre d'un nouveau dispositif de formation : les constellations. Cette modalité de formation continue, proche des *lessons studies* (Clivaz, 2015), permet de cibler des domaines, des compétences et des séances au regard des besoins des enseignants qui composent le groupe de formation. La constellation est coachée par un formateur référent qui accompagne le groupe tout au long du parcours de formation.

L'enjeu majeur de ce dispositif de formation est de construire des situations d'enseignement robustes pour la classe qui peuvent de plus être mutualisées. A la manière des *lessons studies*, ce dispositif de formation permet des allers et

retours entre la conduite de situations d'apprentissage en classe, le temps nécessaire de la préparation et de l'analyse a posteriori des séances. Le premier temps de formation est dédié à la création d'une situation de classe par l'ensemble des participants, celle-ci est ensuite mise en œuvre par un des enseignants du groupe qui est alors observé par ses pairs co-concepteurs. L'analyse a posteriori est réalisée in fine en groupe.

Cette modalité de formation permet le développement de nouvelles compétences professionnelles, notamment celle de l'observation de la pratique de classe. Pour cela, il est important que les enseignants utilisent ou construisent collaborativement des outils d'observation afin qu'ils puissent analyser l'activité expérimentale des élèves au sein du laboratoire de mathématiques. Ce type d'activité est en effet particulièrement riche, les actions et les échanges très diversifiés.

Dans le cadre du dispositif laboratoire, quelques spécificités des situations d'apprentissage en mathématiques nous semblent particulièrement intéressantes à observer :

- Les interactions langagières élèves-élèves (discussions, explications, débats, argumentations),
- Les interactions de l'enseignant : interrogations, relances, étayages,
- Les sollicitations des élèves à enseignant,
- Les interactions des élèves avec le milieu matériel,
- Les gestes et les manipulations diverses,
- Les prises de notes des élèves.

L'analyse de la séance co-construite est au cœur de ce travail de formation afin de l'améliorer.

Indépendamment de ces temps d'observation qui sont une réelle opportunité pour tisser des

liens entre la réalité de la classe et les concepts théoriques, cette modalité de formation en constellation permet également de consacrer du temps à l'étude approfondie d'un sujet dans sa globalité. Ainsi, tous les aspects de la pratique de classe sont abordés au cours de la formation, notamment ceux qui semblent être les plus complexes, comme la différenciation ou l'évaluation.

L'opportunité offerte par cette modalité de formation permet également de rapprocher l'activité des enseignants avec celle des élèves dans le cadre du laboratoire de mathématiques. Les enseignants agissent devant leur classe non pas comme on leur dit de faire en formation, mais comme on le fait avec eux dans le temps de cette formation. Ce changement dans les pratiques des formateurs pourrait ainsi avoir une incidence plus forte sur les pratiques professionnelles des enseignants et faciliterait ainsi l'entrée dans des pratiques innovantes telles que le laboratoire de mathématiques.

Ce dispositif engagé dans le premier degré pourrait tout à fait être proposé en formation continue pour les enseignants du 2nd degré, sous forme de lesson studies, comme cela existe dans le canton de Vaud ou de Communauté d'Apprentissage Professionnelle, au Canada. La mise en place de laboratoire dans les différents établissements a besoin de se construire dans la durée, il est donc nécessaire d'accepter de lui donner du temps pour se concevoir, interagir et se structurer afin de faire réussir tous les élèves et leurs enseignants.

6. — Élèves et enseignants au laboratoire

Afin d'illustrer un peu plus concrètement nos précédents propos, nous présentons ici deux exemples : l'un issu d'une expérience menée avec des élèves et l'autre au cours d'une formation d'enseignants en Suisse. Nous

rapportons tout d'abord une série d'activités conduites dans un laboratoire de mathématiques dans le canton de Vaud. Afin de traiter le thème de la représentation des figures géométriques planes et des solides, l'enseignant propose une série d'ateliers⁴ dans le méso-espace à des élèves de 10 à 12 ans. Dans un premier temps, les élèves par groupes de 4 ou 5 sont amenés à construire les cinq solides de Platon avec un matériel spécifique : des baguettes de 1 mètre de long et des connecteurs rigides réalisés avec une imprimante 3D (Dias, T. & Serment, J. 2017).



Figure 7 : construction d'un dodécaèdre en grande dimension

Lorsque les ateliers de construction sont terminés, il est demandé aux élèves de trouver un moyen pour représenter des polygones (ou d'autres polyèdres) à l'intérieur des solides de Platon. Le matériel mis à leur disposition est constitué de pelotes de laine de couleurs différentes. La construction, ainsi que la matérialisation avec la ficelle, obligent les élèves à collaborer et à verbaliser toutes leurs actions. Comme on peut l'observer dans la figure 9, les élèves échangent sur les tracés de rectangles à l'intérieur de l'icosaèdre.

⁴ Un exemple se trouve en annexe.

Dans une troisième étape, les élèves doivent répondre à une série de questions⁵. Ils sont aussi sollicités par l'enseignant pour valider leurs polygones construits avec la laine : respectent-ils bien les propriétés attendues ? Dans cette situation de validation, ils doivent convoquer leurs connaissances mathématiques pour justifier leurs manipulations précédentes. Ce sont ces allers et retours entre les objets physiques et les connaissances mathématiques partagées qui fondent l'activité du laboratoire.

A l'issue de ces ateliers, l'enseignant conduit une phase d'institutionnalisation afin d'aider à la structuration des savoirs. Par la suite, l'enseignant va proposer une phase d'entraînement et peut utiliser des activités plus « classiques » pour que les élèves puissent réinvestir les savoirs dans d'autres contextes. Cette phase d'opérationnalisation des savoirs n'appartient pas au dispositif des laboratoires mais s'inscrit en complémentarité, comme décrit précédemment dans la figure 5.

Nous conduisons actuellement à Lausanne un dispositif de formation continue sur les laboratoires pour lesquels nous suivons globalement le même canevas. Les enseignants sont immergés dans les pratiques et les expériences mathématiques des ateliers. Ils sont amenés à expérimenter puis à discuter à propos de leurs productions, à échanger leurs interrogations, à partager leurs connaissances. Ils expérimentent ainsi la place de l'élève au sein d'un laboratoire et observent les intérêts du dispositif vis-à-vis des constructions du savoir en manipulant, collaborant et verbalisant. Ils doivent vivre à la fois le processus de déséquilibre cognitif propre à la situation de recherche, puis celui de l'adaptation au déséquilibre selon le double processus d'étayage/désétayage grâce à un coaching approprié.

La transposition à la classe n'est envisageable que lorsque l'enseignant a vécu ces étapes de déséquilibre/adaptation dans un collectif de formation, c'est la pérennité du dispositif



Figure 8 : un cube (ficelle rose) dans un dodécaèdre



Figure 9 : débat au sein du groupe

⁵ Un exemple se trouve en annexe.

laboratoire qu'ils mettront plus tard en place qui en est l'enjeu. Au sein de ces formations, on construit la posture pédagogique et les gestes professionnels de l'enseignant spécifiques au laboratoire, notamment en étayant la mise en évidence des savoirs mathématiques sous-jacents aux activités de manipulation proposées. Le postulat que nous défendons est que les enseignants doivent être accompagnés ou coachés sous le format d'une formation continue dédiée. Le principe d'un coaching assuré par un expert externe est une reprise du dispositif français MATH.en.JEANS⁶ qui propose depuis 1989 l'intervention et le coaching de chercheurs de l'université via des ateliers au sein d'établissements scolaires participants.

7. — Conclusion

Le dispositif *laboratoire de mathématiques* vise à rendre les élèves acteurs de leurs apprentissages dans une démarche scientifique d'investigation. Au sein du laboratoire, les élèves peuvent opérer des choix de matériel en fonction de leurs connaissances, de leurs ressources, et de leurs représentations de la tâche pour identifier les outils susceptibles de les aider pour répondre à leurs hypothèses. Cette forme de travail engage des échanges entre élèves, des verbalisations au cours desquelles ils sont amenés à expliquer, à argumenter, à se justifier et parfois même à convaincre leurs pairs. L'autonomie des élèves au sein de ce dispositif est conditionnée à la durée et à la fréquence des expérimentations qu'ils y conduisent. Le temps que l'enseignant doit consacrer à la conception des situations, à

l'anticipation des étayages et des aides nécessaires est également conséquent. C'est la répétition de ce type de situations qui permettra progressivement l'efficacité didactique de ce type de dispositif.

Le laboratoire de mathématiques permet de diversifier les modalités de représentations des objets mathématiques. Il s'agira donc de mettre à la disposition de l'enfant ou de l'adolescent une pluralité d'activités qui font appel à des fonctions diverses (motricité, perception visuelle, auditive, tactile, etc.), à un vocabulaire varié, à des matériaux différents et à des présentations spatio-temporelles multiples mais qui ont en commun le concept principal et les mécanismes mentaux sous-jacents (Palacio-Quintin, 1990).

La terminologie *laboratoire* pourrait ainsi être définie théoriquement pour signifier une activité de type expérimental au sein d'un environnement propice à l'émergence de connaissances en actes, dont la véracité scientifique est soumise au double tribunal de l'expérience et d'une communication partagée par la communauté de recherche (Dias, 2008, p.101). Le laboratoire de mathématiques s'inscrit également dans une complémentarité avec les moyens d'enseignement utilisés habituellement. Il ouvre les apprenants sur la richesse des possibles dans une démarche expérimentale qui fait de la diversité une force. Pour terminer, s'il est clair que le dispositif *laboratoire* vise à permettre des apprentissages mathématiques pour tous les élèves, il est sans doute un moyen de changer le regard porté sur les mathématiques, par les élèves, les enseignants et même les familles.

⁶ <https://www.mathenjeans.fr/>

Bibliographie

- Anderson, L.W. et Krathwohl, D. R. (Ed.) (2001). Longman.
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 33-52.
- Bailly, F., & Longo, G. (2006). *Mathématiques et sciences de la nature : la singularité physique du vivant*. Hermann.
- Bkouche, R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. A propos des laboratoires de mathématiques. *Repères IREM*, 70, 33-76.
- Bloom, B.S. et al. (1979). *Taxonomie des objectifs pédagogiques. Tome 1 : Domaine cognitif (traduit par M. Lavallée)*. Les Presses de l'Université du Québec.
- Borel, E. (1904, 3 mars). *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*. Conférence prononcée le 3 mars 1904 au Musée pédagogique. Paris. https://wg.geschichte.uni-frankfurt.de/reader_rau09_vol3.pdf
- Briand, J. (2021). Manipuler en mathématiques... oui mais. *Au fil des maths, HS1*, 142-145.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. La Pensée Sauvage. <https://doi.org/10.7202/000137ar>
- Brousseau, G. (2000). Éducation et Didactique des mathématiques. *Educacion matematica*, 12(1), 539.
- Clivaz, S. (2015). Les Lesson Study : Des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Revue des HEP et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin* (19), 99-105 <https://revuedeshp.ch/pdf/19/2015-Clivaz-FPEQ-19.pdf>
- Dias, T. (2019). *Évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud*. DFJC du Canton de Vaud (Suisse). http://www.hepl.ch/files/live/sites/files-site/files/uer-ms/BROCHURE%20mission%20math_interactif.pdf
- Dias, T. (2017). La place de la verbalisation dans les situations didactiques en mathématiques. *Formation et pratiques d'enseignement en questions : revue des HEP de Suisse romande et du Tessin, HS2*, 91-103. <http://hdl.handle.net/20.500.12162/1676>
- Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. (Doctorat). Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France. <http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00635724/>
- Dias, T. & Durand-Guerrier, V. (2009). Le développement de laboratoires de mathématiques pour les élèves à besoin éducatifs particuliers : un défi à relever. *Colloque Espace Mathématiques Francophone* http://emf.unige.ch/files/9614/5329/9589/EMF2009_GT8_Dias.pdf
- Dias, T. & Serment, J. (2017). Formation à la géométrie dans l'espace par la construction de polyèdres In : Actes du XXXXIIF colloque COPIRELEM.

- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Communication présentée au Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Folcher, V., & Rabardel, P. (2004). Hommes, artefacts, activités : perspective instrumentale. In P. Falzon. *Ergonomie* (pp. 251-268). Presses Universitaires de France.
- Hacking, I. (1989). *Concevoir et expérimenter*. Christian Bourgois.
- Hersant, M., & Orange-Ravachol, D. (2015). Démarche d'investigation et problématisation en mathématiques et en SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union. *Recherches en éducation*, 21, 94-107.
- Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2010). Les artefacts comme outils de médiation sémiotique : quel cadre pour les ressources de l'enseignant ? In *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Presses Universitaires de Rennes et INRP. (pp.91-107).
- Maschietto, M. (2010). Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques. In Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources. *Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques. Actes des journées INRP*. INRP. (pp. 9-17).
- Paola, D. (2007). Dal laboratorio alla lezione: descrizione di un esempio. *Innovazione Educativa-Supplemento per l'Emilia Romagna*, n. 8 - 2006, 13 - 20, IRRE Emilia Romagna
- Palacio-Quintin, E. (1990). L'Education Cognitive à l'Ecole. *European Journal of Psychology of Education*, 5(2), 231-242. <http://www.jstor.org/stable/23422123>
- Sanchez, E. & Jouneau-Sion C. (2010). Les jeux, des espaces de réflexivité permettant la mise en œuvre de démarches d'investigation. *Actes des journées scientifiques DIES 2010*. <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/dies2010/05-communications-recherches/05-7-sanchez-jouneau-sion.pdf>
- Vergnaud, G. (2011). In Au fond de l'action, la conceptualisation. *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. (pp. 275-292). Paris : Presses Universitaires de France.
- Villani, C., Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Paris, France : Ministère de l'Éducation Nationale (France). <http://hdl.handle.net/20.500.12162/1695>

ANNEXE 1

Matériel
(La liste suivante n'est pas exhaustive.)

Objets à manipuler :

- jetons, cartes, pions, cubes, buchettes, billes,
- dés de jeux (4, 6, 8, 12, 20 faces),
- géoplans, élastiques, ficelle,
- baguettes de bois, connecteurs,
- polydrons.

Matériaux

Sable, terre, pâte à modeler, sel, graines

Supports de travail :

- feuilles de tailles diverses (A5, A4, A3, etc.),
- paperboard,
- papier calque,
- papier pointé, feuilles quadrillées,
- feuilles cartonnées,
- calendrier, tableaux.

Outils spécifiques :

- crayons, feutres, surligneurs,
- ciseaux, colle.

Instruments :

- divers instruments de mesure (règles, équerres, rapporteurs, décimètre),
- récipients de tailles et de formes diverses,
- calculatrices,
- tables de calcul (addition, multiplication).

Outils numériques :

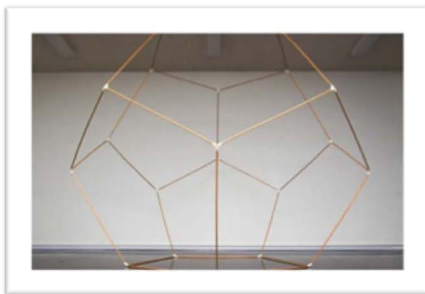
- tablette, ordinateur,
- imprimante 3D.

ANNEXE 2

Série d'ateliers

2. DODECAÈDRE GEANT

Dodécaèdre avec des baguettes de 100 cm.



Il y a plusieurs étapes dans cette activité (voir consignes).

- | | |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. La construction du solide. | 3. La recherche triangles et quadrilatères. |
| 2. Le dénombrement des faces, arêtes et sommets. | 4. La recherche de solides. |
| | 5. Dessins en perspective. |

Quoi? Comment?

Un dodécaèdre est:

 un des 5 solides de Platon (ou solides réguliers). Il tire son nom du grec "Dodeka" douze, et "edros" siège, base. Platon a associé sa forme à l'univers dans le Timée.

 composé de 12 faces, 20 sommets et 30 arêtes. En reliant le centre de ces faces, on obtiendra son dual, l'icosaèdre, un des autres solides réguliers.

Matériel :

 Il faudra 30 baguettes de bois d'un mètre de long et de diamètre 1 cm, de la laine, des ciseaux et 12 connecteurs rigides (voir encadré suivant).

 Un connecteur rigide est imprimé avec une imprimante 3D. Le fichier est disponible sur le site de Simplyscience.ch *.

*« La géométrie est la connaissance de ce qui est toujours. »
Platon*

Âge des élèves: 10-12 ans, 7H-8H.

Objectifs: MSN 21 — Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace...

...en dégagant des propriétés géométriques des figures planes.

...en dégagant des propriétés des solides et en s'initiant à leur représentation.

...en représentant des figures planes et des solides à l'aide d'ébauches de perspective.

Thèmes abordés :

- Propriété des quadrilatères
- Propriété des triangles
- Construction de solides
- Propriété de solides
- Dessin en perspective

* https://www.simplyscience.ch/a-faire-enseignants/articles/la-geometrie-dans-lespace-cest-facile.html?_locale=fr

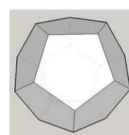
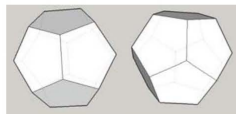
ANNEXE 3

Série de questions

Fiche sur l'activité du dodécaèdre géant

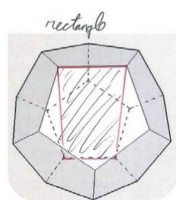
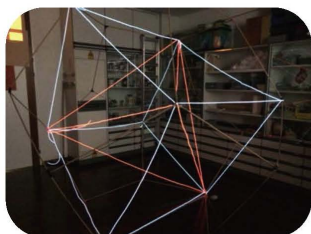
Consignes:

1. Construis un dodécaèdre. Utilise les baguettes de bois (1m) et les connecteurs rigides.
2. Combien a-t-il : · de sommets ? · d'arêtes ? · de faces ?
Peux-tu trouver une relation entre ces nombres ?
3. Utilise de la laine et essaie de connecter les sommets du dodécaèdre. Construis un carré, un triangle équilatéral et un rectangle.
4. Utilise de la laine et essaie de connecter les sommets du dodécaèdre. Construis un cube et un tétraèdre régulier.
5. Représente les quadrilatères, le triangle, le cube et le tétraèdre sur un squelette de dodécaèdre.



Voici quelques squelettes possibles du dodécaèdre pour faire le dernier exercice.

Réponses et quelques astuces



1. L'activité de construction avec les connecteurs rigides peut être compliquée pour les élèves, car le solide fera 2 m. de hauteur, ils devront le tourner en cours de construction. Pour faciliter la construction, on utilise des baguettes de 50 cm. Il peut être construit aussi avec les polyèdres en préalable pour obtenir un modèle en petit.
2. 12 sommets (S), 20 faces (F), 30 arêtes (A).
Relation d'Euler : $S + F - A = 2$
3. et 4. Ci-contre en haut une possibilité de trouver le cube et le tétraèdre dans le dodécaèdre (donc un carré et un triangle équilatéral aussi). Les élèves devront connaître les propriétés des polygones/polyèdres pour vérifier les côtés et les angles droits.
5. Corrigé du rectangle ci-contre en bas.

Liens avec d'autres fiches

Possibilité de faire des liens avec les fiches d'activité ...