QU'EST-CE QU'UNE EXPLICATION MATHEMATIQUE ?

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

*Young man, in mathematics
you don't understand things.
You just get used to them.*
John von Neumann

A Los Alamos, après la Seconde guerre mondiale, un jeune physicien demanda une explication à John von Neumann concernant un problème mathématique difficile. "*Elémentaire*, dit von Neumann. *On peut résoudre ce problème en employant la méthode des caractéristiques*". A quoi le jeune physicien répondit : "*Je crains de ne pas comprendre la méthode des caractéristiques*". "*Jeune homme,* répliqua von Neumann, *en mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue, c'est tout*".

En réduisant ainsi la question de la compréhension des mathématiques à une simple habitude acquise par la fréquentation, von Neumann se place en rupture avec l'approche classique fondée sur le raisonnement, sur la justification, sur la démonstration et, pour tout dire, sur «le sens». C'est-à-dire au fond sur la «raison». Il se place d'emblée sur une position particulièrement iconoclaste à propos de la grande question qui structure l'enseignement des mathématiques : comment l'élève peut-il *comprendre* ce qu'on lui apporte et comment le maître peut-il réussir à *expliquer* ce qu'il doit enseigner. Et il faut bien reconnaître que cette opposition — au moins apparente — avec les

---

Ce texte est celui d'une conférence présentée aux « Journées Académiques de l'Irem de Lille », *Horizons mathématiques,* les 22, 23 *et* 24 *mars* 2018, en hommage à Rudolph BKOUCHE.

On en trouvera l'enregistrement vidéo à l'adresse : http://lille1tv.univ-lille1.fr/collections/video.aspx?id=806ea903-3442-4c4a-81e8-edcfe1802f2e idées reçues en la matière, rappelle curieusement des critiques formulées par Rudolph Bkouche, en 1992 [1], sur un enseignement qui reposait, selon lui, sur deux erreurs fondamentales : « l'illusion langagière » et « l'activisme pédagogique ». D'un côté la prétention *d'expliquer* grâce au seul discours du professeur, et de l'autre l'idée que de simples activités introductives puissent suffire à faire *comprendre* les arcanes les plus subtils à la plupart des élèves…

Naturellement, il ne s'agit pas de prétendre ici que la question de l'explication en mathématiques possède une réponse simple. Bien au contraire. Et si le titre de ce texte est une question : « Qu'est-ce qu'une explication mathématique ? », c'est que nous sommes en réalité devant un problème qui touche à la fois à la philosophie et à la science.

D'une certaine manière on pourrait presque se contenter de penser que la position de von Neumann correspond, au fond, à une certaine attitude des physiciens vis-à-vis des *explications mathématiques* des phénomènes réels. On ne saurait oublier en effet la phrase de Richard Feynman à propos de la mécanique quantique : « *Ces calculs donnent des résultats numériques conformes à l'expérience au delà de douze décimales… mais ne me demandez pas pourquoi ils marchent, personne ne l'a compris jusqu'à présent !* ». Et il faut d'ailleurs bien convenir que, depuis un bon siècle, les théoriciens de la physique se sont *habitués* à utiliser le formalisme de la mécanique quantique, mais qu'ils ont bien peu progressé sur le plan de ce que l'on pourrait considérer comme une *explication* véritablement convaincante de cette mystérieuse théorie.

Mais peut-être — au moins s'il faut en croire Pierre Lecomte du Noüy — « *le but de la science est-il de* prévoir *et non, comme on l'a dit souvent, de* comprendre. » ? Depuis quelques années (depuis qu'ils ne s'intéressent plus, presque uniquement, à la logique formelle) les philosophes tentent de répondre à cette question de savoir ce que peut bien être une «explication mathématique» en étudiant les «pratiques» des mathématiciens.

Le problème leur paraît intéressant sous deux aspects un peu différents mais, en définitive assez complémentaires ; l'un plutôt «local» qui consiste à dégager des critères pour qu'une démonstration soit explicative : *pourquoi appliquer tel résultat plutôt que tel autre ?* le second plus « global », c'est-à-dire au niveau des théories elles-mêmes : *pourquoi a-t-on un tel théorème dans un tel cadre* ? [2]

Au reste, le problème de *l'explication mathématique* concerne avant tout, évidemment, les mathématiciens. Et l'on connaît tous, sans doute, l'adage popularisé par René Thom «*Prédire n'est pas expliquer*», qui ne fait que rappeler, comme le souligne Alain Connes lui-même [3], qu'en mathématiques, *la vraie motivation ce n'est pas de* résoudre *telle ou telle conjecture, la vraie motivation c'est d'essayer de* comprendre. Cela ne résout malheureusement pas pour autant la problème de savoir ce que peuvent bien signifier les mots *expliquer* et *comprendre*, qui possèdent respectivement dans notre langue 53 et 51 synonymes. Et nous allons précisément nous attacher à éclairer un peu cette question en nous intéressant essentiellement à la pratique des mathématiciens, d'abord dans les phases de résolutions de problèmes, puis dans celles de formalisations des démonstrations

---

1 Rudolph Bkouche, *L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique*, Repères-Irem n°9, octobre 1992.

2 curieusement, une des motivations de telles recherches est illustrée par la question suivante : comment expliquer que le nombre π de la géométrie (celui de la longueur de la circonférence) soit le même que celui de l'analyse (celui de la formule d'Euler $\exp(i\pi) = -1$) ?…

3 Voir plus loin, note 5.

qui en découlent, avant de dire quelques mots sur les conséquences pédagogiques qu'il nous paraîtra utile d'en tirer.

1. — Résoudre des problèmes

Il est clairement inutile de préciser ici ce que l'on considère habituellement comme étant un «problème mathématique»... J'envisagerai donc des problèmes «classiques», éventuellement très simples comme, par exemple, celui qui consisterait à trouver une façon de partager le rectangle ci-dessous

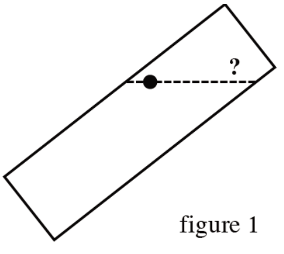


figure 1

en deux parties de même aire par un segment assujetti à passer par le point marqué sur la figure, ou sérieusement plus difficiles, comme celui de trouver la somme de la série de terme général $1/n^2$:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Mais j'inclus aussi dans la liste des problèmes moins formalisés comme celui que se poserait un enfant qui, donnant la main à son père pour aller à l'école se demande bien pourquoi il est obligé de lever le bras, alors que son père qui est plus grand que lui, a un bras plus grand que le sien, et que sa main devrait donc arriver à la hauteur de la sienne. Ou celui de l'élève qui se demande, par exemple, pourquoi un miroir renverse la droite et la gauche, et jamais le haut et le bas… Dans tous les cas, un mathématicien sait que la solution du problème passe nécessairement par une réponse argumentée, mise de préférence sous forme de démonstration…

1. a. *Schémas de démonstration*

On peut sans trop caricaturer résumer la problématique d'une démonstration en disant qu'il s'agit de construire un chemin logique — ou plutôt un réseau logique — qui permette de passer des hypothèses données dans un problème aux conclusions recherchées. Je le schématiserai de la façon indiquée par le diagramme 1 ci-dessous, dans lequel les propriétés A, B et C pourraient être considérées comme découlant directement des hypothèses initiales, puis serviraient d'hypothèses requises par les théorèmes 1 et 2 afin d'impliquer des propriétés D et E qui, *via* le théorème 3 permettraient d'aboutir à la conclusion souhaitée…

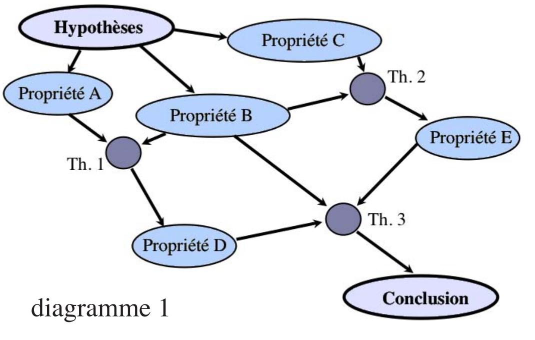


diagramme 1

Ce résumé est évidemment simplificateur, mais il montre que le «raisonnement» qui structure la « démonstration » cherchée permet de constituer finalement un « chemin », un « réseau », susceptible de passer logiquement des hypothèses à la conclusion. Et il convient naturellement de prendre en compte de nombreuses «variantes », qui sont à vrai dire plus ou moins répertoriées : calcul algébrique, géométrie pure, géométrie analytique, raisonnement par contraposition, raisonnement par l'absurde, par récurrence, par étude de cas, etc., etc.

Dès lors, si l'on en croit par exemple Henri Lebesgue et si : « faire comprendre un résultat, c'est essentiellement l'intégrer dans un tout cohérent dont certaines parties sont déjà bien familières », une démonstration serait donc plus *explicative* qu'une autre si les éléments (disons les théorèmes) auxquels elle fait appel sont « familiers » au lecteur concerné. Cela présente évidemment le défaut d'appréhender la notion *d'explication* en la relativisant et en la ramenant un peu trop à telle ou telle catégorie d'interlocuteur... Ce qui n'est pas forcément une réponse satisfaisante pour les philosophes... Mais, cela étant, il peut d'abord être intéressant de remarquer que, au delà des divers types de raisonnements que nous venons d'évoquer, le diagramme précédent est avant tout à intégrer dans un *système syntaxique* qu'il nous faut bien analyser dans le sens suivant : Dans une démonstration mathématique, les définitions, les propriétés, les propositions et les théorèmes constituent — même indépendamment de tout appel au symbolisme « calculatoire » — un langage assez différent du langage naturel. On sait par exemple depuis Blaise Pascal qu'il convient de « substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l'équivoque des termes que les définitions ont restreints ». Et on doit bien savoir que, d'Euclide à Bourbaki, l'appel à un théorème suppose une vérification scrupuleuse de toutes les hypothèses requises, si on veut espérer conclure grâce à lui.

Nous entrons de plain pied, si l'on préfère, dans la « méthode formaliste ». Dans les langages pratiqués par les mathématiciens plus encore qu'ailleurs, les discours reposent sur une «combinatoire correcte» — une syntaxe, une grammaire — permettant de relier des énoncés ou des symboles. La « sémantique », en l'occurrence, est volontairement absente de ces énoncés et symboles. C'est-à-dire, en d'autres termes, que le « sens » qu'il convient d'attribuer à tel ou tel « objet », à telle ou telle « action » ou à tel ou tel « résultat », n'est finalement constitué que par l'ensemble des occasions où ces éléments apparaissent dans les « discours » mathématiques. La « sémantique » doit être essentiellement cantonnée à l'étude des *usages* qui sont faits des symboles en question dans la *pratique*. Un Wittgenstein parlerait sans doute ici de *jeux de langage*...

1. b. *Recherche et heuristiques*

La résolution d'un problème — qui serait schématisé, pour simplifier, par la donnée des hypothèses et de la conclusion seules, dans le diagramme 1 —, passe donc par la découverte d'un *réseau logique* (au sens précédent) susceptible de compléter le diagramme. Il est clair que, sauf dans des cas particulièrement simplistes, le premier travail du mathématicien (ou de l'élève...) est de *chercher* afin de trouver les propriétés et théorèmes qui sont utiles pour la question. Et il est tout aussi clair que la *résolution des conjectures* plus ou moins célèbres suppose un travail de recherche qui peut nécessiter des efforts (et des capacités) exceptionnels...

Comment trouver ? Comment chercher ?

On connaît les aides apportées aux élèves sous la forme de « boîtes à outils » et méthodes de type « chaînage ». Ainsi, dans le «chaînage avant», il est conseillé de chercher dans sa «boîte à outils» — c'est-à-dire dans son bagage de définitions, de théorèmes et de propriétés (caractéristiques ou non) — les premières marches éventuelles partant des hypothèses, d'y accrocher ensuite des énoncés susceptibles de poursuivre le « raisonnement »... jusqu'à aboutir, après plusieurs étapes, à la conclusion espérée. Si la providence le permet. On peut aussi, évidemment, procéder « à l'envers » (en « chaînage arrière ») en partant du résultat cherché et en remontant pas à pas, par l'intermédiaire de théorèmes dont les conclusions aboutiraient, à chaque étape, aux propriétés souhaitées. On peut combiner enfin les deux démarches... Il s'agit en fin de compte d'une méthode « algorithmique » et c'est, au fond, essentiellement la même que celle utilisée par la plupart des logiciels « démonstrateurs ». Pour dépasser ce type de méthode, il convient en fait de chercher (et de trouver !) des propriétés ou des énoncés qui ne soient pas forcément susceptibles d'être « raccrochés » immédiatement aux éléments déjà présents dans un projet de réseau, mais qui pourraient — à l'issue de réflexions complémentaires — s'avérer très utiles pour ouvrir d'autres pistes, pour offrir des passages insoupçonnés auparavant. J'appellerai « heuristiques » ces démarches destinées à « trouver des idées ». Elles se rattachent en général à ce qu'il est convenu d'appeler raisonnement par analyse et synthèse, car elles consistent, dans un premier temps, à utiliser aussi bien les propriétés qui découlent des *hypothèses* que celles qui découleraient de la *conclusion* recherchée :

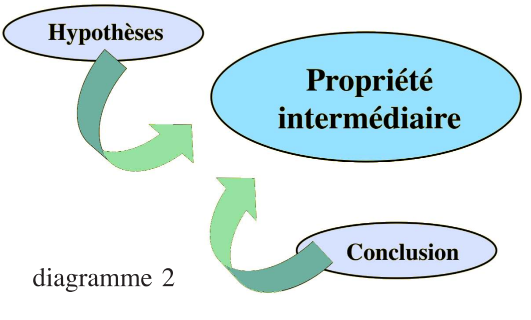


diagramme 2

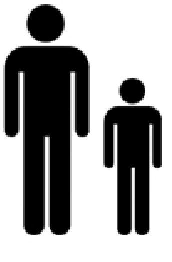
L'exemple bien connu est celui des problèmes classiques de constructions, où la conclusion est simplement la figure à construire sous les hypothèses données. On « suppose la figure construite » de manière à observer la situation projetée et à *l'analyser* afin d'en tirer des propriétés non évidentes *a priori*. Dans un deuxième temps (la *synthèse*), il faudra repartir uniquement des hypothèses données pour obtenir ces propriétés et tenter d'en déduire la construction de l'objet cherché. Il ne s'agit pas là, comme on l'aura noté d'un quelconque «chaînage arrière» au sens précedent, mais de tirer de véritables *conséquences* des conclusions elles-mêmes. Evidemment, les propriétés obtenues ne fournissent que des idées d'étapes éventuelles pour la mise au point d'une construction logiquement irréprochable.

C'est un peu la même démarche que lorsque, pour élaborer une « démonstration par l'absurde » — c'est-à-dire, par exemple, pour prouver qu'une conclusion est impossible — on cherche les conséquences d'une telle conclusion afin d'en mettre en lumière des conséquences paradoxales. Et c'est, classiquement, ce que les mathématiciens, qui cherchent à prouver une conjecture qui leur résiste, utilisent dans la pratique : ils cherchent les *conséquences* de la conclusion conjecturée. Soit dans le but d'en déduire des résultats contradictoires (ce qui démontrerait par l'absurde la fausseté de la conjecture), soit d'en tirer des conséquences plus ou moins attendues, qui fourniraient — peut-être — de nouvelles pistes pour construire un réseau logique efficace aboutissant à la conjecture étudiée.

Plus communément, à des niveaux très élémentaires, la *démarche algébrique* que l'on utilise pour résoudre des problèmes (plus ou moins) concrets revient précisément à raisonner sous cette forme. En effet, lorsque la conclusion cherchée consiste à déterminer la valeur d'une grandeur inconnue à partir des valeurs de grandeurs données, on suppose que la valeur cherchée, « si elle était connue », pourrait être désignée par une lettre (disons x ...) qui entrerait, au même titre que les valeurs données en hypothèses, dans des calculs traduisant la situation étudiée. Comme l'on sait, cela fournit à la fin du processus une ou plusieurs équations dont la résolution amène à des *valeurs possibles*. Il ne reste plus qu'à opérer une synthèse en déterminant lesquelles de ces valeurs conviennent…

Bien sûr, chacune des illustrations précédentes tente de dégager des « heuristiques », des méthodes d'enquête (ou de « zétèse » pour parler comme Viète) et elles ne sauraient constituer une liste exhaustive. Au delà de ce type de démarche, rien n'empêche évidemment de rêver à des intuitions miraculeuses, à des éclairs de génie, qui apporteraient une partie de la solution sans qu'on sache exactement ce qui a pu y conduire. Dans cette optique on peut classer, pour commencer, ce qu'il faut bien considérer comme des « coups de chance »[4].

Ainsi, dans l'exercice simple de la figure 1, l'imagination de l'élève peut souvent être attirée par le seul point un peu particulier de la configuration, à savoir le centre du rectangle. Alors il serait assez naturel qu'il « conjecture » que la solution cherchée consiste à faire passer la ligne de découpe par ce centre… De même, l'enfant qui se pose la question sur les longueurs respectives de son bras et de celui de son père, pourra-t-il peut-être, un jour, être frappé par l'image d'un panneau de signalisation qui serait susceptible d'apporter une piste de réponse... Et celui qui est intrigué par l'effet de la réflexion de son image par sa glace, trouvera éventuellement quelques éléments de réponse en observant le renversement de l'écriture dans un miroir…



4 on parlerait plutôt aujourd'hui de « sérendipité »...

Mais dans la pratique quotidienne des mathématiciens, il convient de faire appel à des ressources qui sont souvent beaucoup plus sophistiquées et, pour tout dire, plus « savantes ». Il est, en l'occurrence, question de « métier » plus que de chance, de « génie » plus que d'intuition. Le « métier » du mathématicien, c'est d'abord de maîtriser des formalismes relativement nombreux, de disposer dans son bagage du bon formalisme adapté au problème posé, de le reconnaître, et ensuite de trouver le moyen de construire le réseau logique cherché en agençant correctement les pièces d'un puzzle qu'il a l'habitude de fréquenter. C'est, au fond, une mise en œuvre bien rodée d'une «boîte à outils» considérablement plus efficace que celle des collégiens. Et on peut ajouter aujourd'hui à la panoplie du géomètre ou de l'algébriste professionnels l'utilisation du « bon logiciel »… Ce n'est effectivement pas rare qu'il soit fait appel à des logiciels de calcul formel, de géométrie dynamique ou de calcul arithmétique non seulement pour vérifier (ou invalider) « expérimentalement » des conjectures, mais aussi pour explorer des situations beaucoup plus vastes que celles qui seraient accessibles sans ces outils modernes.

A vrai dire, il n'existe donc pas de méthode miracle pour résoudre les problèmes ! Et nous nous placerons pour la suite dans le cas où une solution — la trame d'une solution — a été trouvée, mais sans perdre de vue que, du moins en ce qui concerne les problèmes importants, cette solution n'a jamais été donnée immédiatement par l'appel à un formalisme dont le problème posé n'aurait été qu'un simple exercice d'application. Au contraire, l'histoire montre souvent que les solutions «surprenantes» sont le résultat de l'adaptation d'un formalisme connu à des situations pour lesquelles il n'avait pas été initialement forgé. Celui qui « trouve » y parvient parce qu'il a su «sentir» des analogies, qu'il est parvenu à surmonter des obstacles inconnus jusque-là et qu'il s'est mis lui-même en position d'ajouter de nouvelles facettes à ce qu'il connaissait. On notera d'ailleurs à quel point c'est le cas pour l'exemple que j'ai évoqué plus haut en citant le problème de la somme de la série des inverses des carrés des nombres entiers : Euler est parvenu au résultat en étendant aux « polynômes de degré infini » la propriété connue donnant la somme des racines ! Il n'a sans doute pas rendu sa démonstration complètement rigoureuse au regard des exigences actuelles, mais il a si bien « forcé » l'analogie qu'il a ouvert la voie à l'utilisation systématique des produits infinis…

Il en va un peu de même, au fond, pour tous les apprentis : les professeurs savent bien que les élèves réussissent mieux lorsqu'ils ont déjà rencontré un certain nombre d'exercices analogues — mais qu'il faut encore se montrer capable d'investir leur expérience dans une situation un peu nouvelle —, et ils savent aussi que les meilleurs élèves sont précisément ceux qui n'ont pas eu besoin d'entraînement répétitif, et pour lesquels le simple fait d'avoir fait un exercice plus ou moins analogue suffit à provoquer le déclic vers la solution… Dans tous les cas les pédagogues comme les philosophes se devraient de ne jamais oublier le jugement d'Evariste Galois lui-même : « En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils composent : toute immatérielle qu'elle est, l'analyse n'est pas plus en notre pouvoir que d'autres ; il faut l'épier, la sonder, la solliciter. Quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de ce côté et d'autre qu'ils y sont tombés. »

1. c. *Le moment de la trouvaille*

Attachons-nous quelques instants, avant d'aller plus loin, à ce que disent les mathématiciens de cette expérience qu'ils ont pu rencontrer lorsqu'il sont parvenus à la solution d'un problème. Non pas tant d'ailleurs à une solution parfaitement construite, mais lorsqu'il ont ressenti qu'ils étaient en train de mettre le doigt sur l'idée qui leur suffirait pour mettre au point un réseau logique pertinent, susceptible de compléter l'équivalent de notre diagramme 1. Arrêtons-nous sur cette illumination, sur cet « eureka », sur ce phénomène de « percolation » où l'on peut être submergé, en un éclair, par l'intuition que le chemin existe et qu'il doit passer par telles ou telles propriétés…

Les témoignages ne manquent pas pour parler d'une sorte de phénomène instantané. Claire Voisin décrit ainsi l'expérience : « Une fois le problème posé, il faut avoir l'idée d'une stratégie pour le résoudre. Mais lorsqu'elle arrive, c'est extraordinaire. C'est un peu comme tapoter sur un mur avant de percer un trou et que tout d'un coup il sonne creux. Parfois, l'idée surgit alors qu'on fait autre chose, y compris des courses. On se lance alors dans une direction et on l'exploite. Si l'idée marche, on avance et cela donne plein de choses merveilleuses ». André Weil écrit dans ses mémoires : « subitement, il m'apparut qu'avec cette interprétation leur extension était à ma portée ». Alexander Grothendieck : « […] ce qui semblait familier soudain prend des aspects insolites, puis troublants, jusqu'à ce qu'une contradiction enfin éclate et bouleverse une vision des choses qui paraissait immuable ». Et, dans ses échanges avec Jean-Pierre Changeux, Alain Connes tente de décrire ce moment d'illumination : « Dans l'illumination, c'est, au delà du plaisir ressenti, l'impression qu'un brouillard se lève brutalement. La fraction consciente de la pensée accède alors directement à un monde dépourvu pour elle de toute étrangeté […]. L'extase mystique doit certainement exciter les mêmes régions du cerveau. […] De même que l'harmonie esthétique. » Et il résume d'ailleurs les choses en un mot : « L'intuition, c'est la tension vers la beauté »…

C'est peut-être le moment de se rappeler la définition de la beauté donnée par les surréalistes :

« *La beauté sera convulsive ou ne sera pas* ».

N'est-ce pas le bon qualificatif pour parler comme Laurent Schwartz qui avoue, à propos de l'invention des distributions, en novembre 1944 : « La découverte, *subite*, se produisit en une seule nuit » ?... Mais les surréalistes ne s'en tenaient pas là car, selon André Breton :

« La beauté convulsive sera *érotique-voilée*, *explosante-fixe*, *magique-circonstancielle* ou ne sera pas. »

Ici encore les exemples ne manqueraient pas s'il fallait ramener cette mystérieuse *intuition* des mathématiciens à de tels critères esthétiques :

— *explosante-fixe* :

André Lichnerowicz : « ... à un moment donné quelque chose s'enclenche »

Jacques Riguet : « ... c'est plutôt une pièce dans *l'obscurité* puis *une fenêtre que l'on ouvre d'un seul coup* et les rayons du *soleil* qui viennent inonder la pièce... »

— *magique-circonstancielle* :

Henri Poincaré : « au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. »

— *érotique-voilée* :

Jacques Riguet : « ... [il y a] une certaine analogie entre l'extrême tension que vous avez quand vous êtes à la recherche d'un problème et, une fois la solution trouvée ... ce relâchement. C'est tout à fait parallèle à ce qui se passe dans l'acte sexuel ... »

... et même moins voilée :

Alexander Grothendieck : « Ce qui «fait bander» c'est la perception aigüe de quelque chose de fort, de très réel et de très délicat à la fois. On peut l'appeler « la beauté », et c'est là un des mille visages de cette chose-là. »

2. — Formalismes et explication

Si l'on en croit, une fois encore le mathématicien : « comme le seul moyen que nous avons de transmettre un résultat est une chaîne logique de raisonnements, il est nécessaire de procéder à une vérification pédestre de la démonstration que l'illumination a permis d'entrevoir... La phase purement « mystique », elle, s'est évaporée ».

Il y a donc indéniablement deux moments de la pensée qui sont mis en jeu dans la découverte (ou l'invention ?...) des démonstrations schématisées par le diagramme 1 : une phase que nous appellerons « intuitive » — même si les philosophes donnent généralement de ce mot une définition plus spécifique —, suivie par une phase plus «formelle» qui va consister à mettre au point, pas à pas, les idées qui ont été entrevues dans la première phase. Une illustration de ce double phénomène pourrait bien être cachée — poétiquement — dans la philosophie des anciens Grecs, dont la mythologie comptait en fait deux déesses associées à l'intelligence...

Leur destinée est résumée, d'une certaine manière, dans l'illustration ci-contre qui représente la naissance d'Athéna, sortant toute armée du cerveau de Zeus, et dont la mère — qui n'est autre que la nymphe Métis — est cachée sous le siège du grand dieu. Métis

représentait plutôt l’intuition dans la mythologie grecque. Elle était en effet associée à l’intelligence pratique et même à la ruse. Elle protégeait notamment les marins, à qui l’expérience, l’imagination, l’agilité d’esprit et pour tout dire le « métier » permettaient de se sortir des situations difficiles, de trouver la bonne route, ou d’élaborer des itinéraires les menant à bon port. Athéna, quant à elle, personnifiait une intelligence plus scientifique, plus « technique » et plus formalisée. A l’une les capacités d’un esprit susceptible de s’adapter à des données changeantes, à des décisions instinctives ; à l’autre les déductions véritablement rigoureuses, une pensée moins intuitive.

Si Athéna surgit ainsi toute armée du cerveau du chef de l’Olympe, c’est que celui-ci avait séduit Métis et qu’il l’avait rendue enceinte. Or une prophétie prétendait que la descendance de Métis le renverserait, il se débarrassa donc de Métis en l’avalant. Mais le temps de la gestation une fois écoulé, il ressentit une violente douleur à la tête et Héphaïstos dut lui ouvrit le crâne. Ainsi naquit la fille de Métis… L’intelligence primitive, intuitive, donna naissance à une intelligence plus rationnelle et plus formelle…

2. a. *De l’intuition à la rigueur*

Si nous reprenons l’exemple de l’enfant qui se demande pourquoi il est obligé de lever la main lorsqu’il la donne à celle de son père, et si nous admettons qu’il peut avoir un jour une sorte d’illumination en voyant une image telle que celle de la figure 2, il est clair qu’il lui reste une grande part du chemin à parcourir avant d’aboutir à une « explication » argumentée de la situation… De même le collégien confronté à l’exercice de la figure 1, s’il a « l’intuition » que le centre du rectangle pourrait jouer un rôle important dans la solution ne saurait se contenter de cette réponse ! Il lui faudra à tout le moins vérifier que les aires des deux parties ainsi définies sont bien égales. Il devra pour cela faire appel à des propriétés acceptables (à son niveau...) comme des considérations sur la symétrie centrale ou simplement sur les formules donnant l’aire des trapèzes. Et encore n’aura-t-il pas été ainsi jusqu’à justifier le fait que sa solution est la seule qui soit possible… à moins que le point donné au départ ne soit le centre lui-même du rectangle…

Il en va de même dans la pratique des mathématiciens professionnels. Dans le cas, par exemple, de Laurent Schwartz et des distributions, il n’est sans doute pas impossible que les idées porteuses de la découvertes soient nées « en une seule nuit », mais il n’en reste pas moins que la mise au point rigoureuse de tous les aspects complexes de la théorie a sous-tendu (aux dires mêmes des rédacteurs) l'essentiel de la rédaction du livre de Bourbaki consacré aux espaces vectoriels topologiques.

Et c'est peut-être l'exemple d'André Weil le plus éclairant sur la différence entre la phase dominée par « l'intuition », qui donne le sentiment d'avoir «trouvé», et cette phase indispensable de reprise pas à pas de tous les passages, obligatoire pour rendre les choses complètement rigoureuses. A propos de la première phase, il écrit : « Mes idées [...] firent des progrès que j'avais lieu de croire décisifs. Il y subsistait encore bien des lacunes ; en particulier la démonstration d'un certain lemme me faisait défaut. » Et il ajoute en parlant des jours suivants : « Mes mathématiques se sont bien calmées ; la conscience exige qu'avant d'aller plus loin je mette mes démonstrations au point, et cela m'assomme ».

Pour comprendre ce qui s'est passé à cette époque, il est en fait particulièrement intéressant de se reporter au témoignage livré par Jean-Pierre Serre sur ce sujet. Il écrit :

> « André Weil envoya une note à l'Académie des Sciences, qui commence ainsi :
>
> > « Je vais résumer dans cette Note la solution des principaux problèmes de la théorie des fonctions algébriques à corps de constantes finis ... »
>
> Cette Note contient une esquisse de démonstration, pas davantage. Tout repose sur un « lemme important » tiré de la géométrie italienne. Comment démontrer ce lemme ? Weil se rend bientôt compte que ce n'est possible qu'en reprenant entièrement les définitions et les résultats de base de la géométrie algébrique et en particulier ceux de la théorie des intersections (permettant un calcul des cycles remplaçant l'homologie manquante). Il est ainsi amené à écrire *Foundations of Algebraic Geometry* [...]), ouvrage massif (et quelque peu aride) de 300 pages, qui n'a été remplacé que vingt ans plus tard par les non moins massifs et arides *Eléments de Géométrie Algébrique* de Grothendieck. Une fois les *Foundations* rédigées, Weil peut revenir aux courbes et à leur hypothèse de Riemann. Il publie coup sur coup deux ouvrages : *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent* [...] et *Variétés abéliennes et courbes algébriques* [...]. Après huit années et plus de 500 pages, sa Note de 1940 est enfin justifiée ! »

C'est sur ce genre de difficultés que l'on peut mesurer les grandeurs et les vissicitudes de la pratique mathématique... Mais on aurait pourtant tort de croire que cette pratique se résume à l'accumulation de pages remplies de théorèmes et de définitions conçus et agencés dans le seul but de construire un discours parfaitement exempt de critiques au niveau logique. Cela ne résoud en réalité que partiellement le problème qui nous occupe ici et qui touche à la notion d'explication mathématique. Il convient en fait de se rappeler ce que nous dit Henri Poincaré à cet égard : « Nous ne pouvons pas nous contenter de formules simplement juxtaposées et qui ne s'accorderaient que par un hasard heureux ; il faut que ces formules arrivent pour ainsi dire à se pénétrer mutuellement. L'esprit ne sera satisfait que quand il croira apercevoir la raison de cet accord, au point d'avoir l'illusion qu'il aurait pu le prévoir. »

2. b. *L'exemple d'Alain Connes*

L'illusion qu'on aurait pu le prévoir ! ... Comment mieux résumer le but de cette seconde phase, qui s'apparente évidemment à la phase de *synthèse* dans un raisonnement par *analyse et synthèse* ? Et qui consiste principalement, comme nous l'avons signalé plus haut, dans l'appel à un *formalisme* qu'il convient d'utiliser uniquement sous un angle «syntaxique», de manière à édifier une démonstration «grammaticalement» irréprochable.

En vérité, l'idée que je souhaiterais défendre ici, c'est que ce que l'on peut considérer comme la *compréhension mathématique* n'est rien d'autre que la maîtrise jubilatoire du « bon » formalisme adapté au problème traité. Qu'une fois ce formalisme forgé à l'occasion de problèmes déjà rencontrés et résolus, il est prêt à être utilisé par les praticiens pour résoudre d'autres questions, avant de nécessiter de nouvelles extensions s'il leur faut surmonter des obstacles imprévisibles. Tant que les problèmes se cantonnent à des contrées qui sont à la portée du « métier » déjà acquis, le formalisme pense, en quelque sorte, à notre place, et lorsqu'ils se révèlent impuissants pour mettre en forme les solutions à des problèmes nouveaux, plus complexes, c'est alors qu'ils doivent être étendus — *déployés* — et s'intégrer à un nouveau formalisme qui les contient, les généralise, les transforme en cas particuliers dans un point de vue nouveau, insoupçonné auparavant.

Dans un entretien télévisé du 5 mars 2014, accessible sur internet[5], Connes s'arrête longuement sur cette question de l'importance des formalismes dans ce qu'il est possible de considérer comme des explications mathématiques. Parlant tout d'abord de ses travaux en géométrie non commutative il raconte : « au bout d'années de calculs, je me suis aperçu qu'il y avait derrière tous ces calculs comme une espèce de système d'horlogerie que j'utilisais tout le temps, et toute la force de ce que je faisais était contenue dans ce système d'horlogerie. »

Il a alors systématisé ce qu'il faisait en termes de catégories en trouvant la « catégorie cyclique », et il poursuit : « Il m'a fallu des décennies pour comprendre que la vraie théorie qui permettait de comprendre ce que j'avais trouvé c'était un topos ». En ajoutant : « Alors il m'a suffit d'ouvrir SGA 4 (le *Séminaire de Géométrie Algébrique* de Grothendieck), écrit au début des années 60, pour m'apercevoir que tout ce dont j'avais besoin était déjà là ! ».

Après avoir décrit quelques-unes des nombreuses conséquences que cet éclairage lui avait apportées dans son travail, non seulement en termes de réponses, mais aussi en termes de questions qui devenaient parfaitement naturelles, Alain Connes conclut : « A partir du moment où on dispose des bons concepts on a presque une aide à la pensée qui est merveilleuse, qui donne les bons problèmes, qui donne les bonnes questions [...] ».

2. c. « Expliquer » c'est « déplier »

Comme on le voit, la question de savoir ce qu'est une «explication mathématique» peut se poser selon deux facettes. La première consisterait à « expliquer ce que l'on sait expliquer », c'est-à-dire à s'intéresser à des questions relevant d'un formalisme qui est, en quelque sorte, déjà à notre disposition. C'est naturellement dans ce contexte que l'on peut se demander si, par exemple, une démonstration est plus ou moins «explicative» qu'une autre. Dès lors, si on élimine les paramètres qui touchent au type de public auquel s'adresserait une telle démonstration et si l'on cherche à dégager des critères qui soient « intrinsèques » (c'est au fond ce que cherchent les philosophes), il nous faudra tenter de dégager ce qui ferait qu'un formalisme (puisque c'est de cela qu'il s'agit quand on développe une démonstration) est plus « explicatif » qu'un autre. Autrement dit plus *pertinent*, plus *naturel*, plus *idoine*, etc.

5 https://www.youtube.com/watch?v=rHkhez4oxPu#t=2950

Cette question, évidemment, n'intéresse pas seulement les philosophes ou les épistémologues, elle est fondamentale aussi pour les pédagogues. On concevra cependant qu'elle a des aspects historiques non négligeables… et qu'elle nous emmènerait trop loin dans le cadre que je me suis fixé…

La seconde facette de la question est certes complémentaire de la première, mais plus « dynamique » : il s'agit d'expliquer « ce que l'on ne sait pas expliquer », c'est-à-dire de trouver des explications à des questions qui ne relèvent pas, au départ, de formalismes connus, et qui nécessitent donc — pour le dire de façon simpliste — de forger un formalisme nouveau, ou à tout le moins (par exemple dans le cas d'un élève) de pénétrer un formalisme inconnu jusque-là. On aura compris sur les exemples que j'ai choisis que c'est à cet aspect que je m'attacherai principalement ici.

Ces exemples montrent principalement que la compréhension face à un phénomène nouveau suit un processus assez surprenant : une première phase où l'on a le sentiment d'avoir « trouvé » la clef d'un problème, mais au niveau de laquelle on ne peut pas considérer la solution comme véritablement acquise, car il y manque une rigueur, une « formalisation », qui permettent seules de voir vraiment clair dans la situation et ses différents aspects.

Comment analyser cette dynamique qui conduit généralement — disons en mathématiques… — aux progrès qui ont marqué l'histoire des sciences ? Il me semble personnellement que de tels progrès relèvent le plus souvent de ce l'on peut regarder comme des « généralisations » ou, si l'on préfère, des « abstractions », mais qu'il est intéressant de regarder ces *généralisations* ou ces *abstractions* en prenant en compte ce qu'elles comportent de *transgression* et de *prise de recul*.

L'exemple de la solution donnée par Euler pour la somme de la série des inverses des carrés des entiers illustre à merveille la dose de transgression qu'il lui a fallu pour envisager des polynômes de « degré infini » et prolonger à ceux-ci la relation entre les coefficients et les racines. On peut de même considérer que les découvertes d'André Weil sur l'arithmétique des courbes algébriques supposaient une « extension » quelque peu audacieuse des propriétés connues dans le corps des complexes au cas des corps finis. Dans les deux cas le prolongement des théories existantes a nécessité beaucoup de temps et de travail avant d'aboutir à des formalismes satisfaisants. Et ceux-ci, une fois mis au point, témoignent d'une *mise en perspective* des points de vue anciens indispensable à la généralisation obtenue : établissement rigoureux des propriétés des limites et intégration de celles-ci aux calculs purement algébriques pour l'un, rôle fondamental accordé aux structures, notamment en algèbre commutative, pour l'autre.

Mais on se rendra peut-être encore mieux compte des obstacles à franchir en revenant à l'exemple de l'enfant et de son problème de longueurs de bras. S'il est clair — pour un adulte — que l'image fournie par la figure 2 contient la clé de son problème, elle ne la recèle qu'au travers d'un minimum de « formalisme » qui touche, d'une part, à l'idée de figures semblables ou homothétiques et, d'autre part, au calcul, indispensable pour traduire ici les conséquences de la proportionnalité. Soit. Mais admettons que l'enfant puisse saisir « instinctivement » (c'est-à-dire sans besoin d'une formulation, ou formalisation, intermédiaires) le ressort qui fait que « père plus grand et bras du père plus grand » ne suffit pas à éviter à l'enfant de lever le bras, on aurait tort de négliger l'obstacle essentiel en l'occurrence : il est primordial, pour que la figure apporte une solution, que l'enfant la reçoive comme une *mise en abyme* de son problème ! Il lui faut se rendre compte que la question qu'il se pose est là, sous ses yeux. Et d'une certaine manière il s'agit là pour lui d'avoir franchi un des multiples avatars de ce que les psychologues appellent un « stade du miroir »[6] et que je désignais plus haut sous le nom de « prise de recul » ou de « mise en perspective ».

On imagine sans peine que, de son côté, l'élève qui se pose des questions à propos du renversement de la gauche et de la droite dans un miroir devra parvenir à une mise en abyme du même genre, mais qu'il lui sera infiniment plus compliqué de maîtriser le formalisme de l'orientation, qui est loin d'être simple. L'expérience montre d'ailleurs que, même au fait des propriétés géométriques mises en jeu, chacun est confronté à des difficultés de « mise en perspective » relativement faciles à déstabiliser, dès que la question devient, par exemple : « pourquoi un miroir renverse-t-il la droite et la gauche, et jamais le haut et le bas ? »

Cela dit, il se trouve que l'on dispose d'un exemple historique tout à fait analogue en ce qui concerne l'histoire de la géométrie de l'espace et de l'invention de la représentation en perspective, aux quinzième et seizième siècles. En effet, les règles de représentation avec mise au carreau explicitées par un Alberti ont, dès 1400, offert aux peintres la possibilité de donner aux tableaux une apparence de reproduction « photographique » de leurs décors. Mais les problèmes posés par les différents points de fuite sur la ligne d'horizon ont mis un siècle de plus pour être à peu près surmontés, et les problèmes des point de fuite au-dessus de celle-ci n'ont été vraiment réglé que vers 1600 !

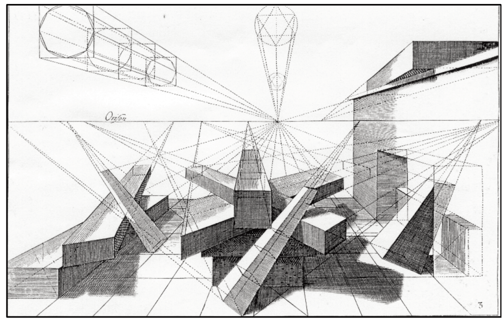


Figure 3. Erreur de perspective dans un traité de Vredeman de Vries (vers 1600)

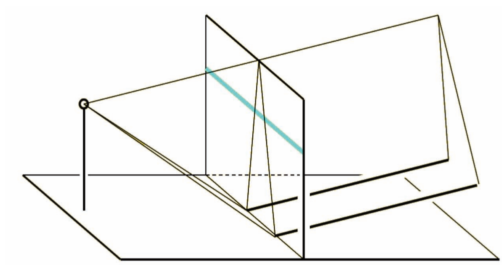


Figure 4. La démonstration de Guido Ubaldo (1600)

En effet, il a fallu attendre un Guido Ubaldo pour donner une explication correcte du phénomène de représentation des parallèles qui ne sont pas situées dans le plan horizontal. Celle-ci apparaîtrait assez simple aujourd'hui, mais c'est ainsi : la mise en abyme de la perspective était accomplie depuis au moins 1500 (voir les illustrations d'un Dürer), mais il aura fallu un siècle pour maîtriser vraiment ses règles géométriques et pour que le formalisme de la *géométrie dans l'espace* devienne le formalisme de la *géométrie de l'espace*.

Encore faudra-t-il attendre un demi-siècle supplémentaire — et Desargues — pour comprendre les règles proprement métriques de la perspective, et pour que commence à se forger le for-

6 stade du développement de l'enfant qui correspond au moment où il prend conscience — lorsqu'il joue avec son reflet dans un miroir — qu'il est en train de se regarder lui-même dans la glace.

malisme de ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrie projective… Et l'on sait que celui-ci ne trouvera sa véritable maturité que dans la seconde moitié du XIXème siècle. C'est ainsi que se déploient progressivement les formalismes. A chaque étape, le nouveau point de vue englobe et dépasse le point de vue précédent. Mais il n'y a réellement « dépassement de point de vue » que si ce dépassement est le résultat d'un *déploiement* du formalisme existant, d'un « dépliement » rendu nécessaire pour surmonter un obstacle qui résiste, pour *expliquer* — ex-pliquer [7] — une difficulté que seule l'intuition du mathématicien inspiré est capable de pénétrer.

Alors le nouveau formalisme apportera des *réponses*, et selon Alain Connes, des *questions* inaccessibles à celui qui n'en disposerait pas. Et pour citer Michel Chasles à propos, précisément, de la naissance de la géométrie projective : « les propositions qui rentreront dans des théories connues forceront, par leur généralité, d'élargir les bases actuelles de ces théories, et de les asseoir sur des principes susceptibles de déductions plus diverses et plus générales. »

3. — Qu'est-ce qu'un formalisme ?

Il est malheureusement très difficile de définir exactement ce que peut être un *formalisme mathématique*, car l'expérience montre que cette notion peut prendre de multiples formes et, surtout, que les mathématiciens semblent s'ingénier à en trouver perpétuellement de nouvelles… Nous allons, pour terminer, tenter de préciser un peu ce que peut être cette notion de « formalisme qui pense [presque] à notre place » et essayer d'en tirer quelques conséquences au niveau d'une problématique très terre à terre : celle de l'apprentissage des mathématiques.

3. a. *Formalismes et* formalisme

Habituellement, les philosophes (et les logiciens) traduisent le mot « formalisme » en pensant uniquement à ce qu'il est convenu d'appeler la « logique formelle », dans laquelle tous les objets et toutes les propositions sont traduits dans des assemblages de symboles — de « caractères » pour parler comme Leibniz — dont la signification est purement conventionnelle.

Ce n'est sans doute pas la meilleure illustration aux yeux des logiciens, mais Bourbaki a, par exemple, choisi un système formel dans lequel tout énoncé et toute propriété peuvent s'écrire à partir des sept symboles primitifs $\tau, \square, \vee, \neg, =, \in, \supset$.[8]

$$\overbrace{\overbrace{\tau \vee \neg\square}A' \in \square A''}$$

Ainsi le nombre 1, qui s'écrit dans le langage habituel de la théorie des ensembles sous la forme :

$$\tau_Z ((\exists u)(\exists U)(u = (U, \{\varnothing\}, Z) \text{ et } U \subset \{\varnothing\} \times Z \text{ et } (\forall x)$$

peut s'écrire comme un assemblage de caractères primitifs, mais il nécessite

4 523 659 424 929

signes ! Autant dire que ce formalisme n'est jamais utilisé en tant que tel, mais qu'il s'agit simplement d'un « système syntaxique originel » auquel il serait théoriquement possible de ramener tout énoncé. Il ne s'agit donc pas, en l'occurrence, d'un formalisme susceptible de « penser à notre place »… Ce qui ne veut évidemment pas dire que des formalismes

7 Le verbe expliquer vient de explicare, supprimer les plis.
8 on notera que le choix de tels caractères pour le système syntaxique engage le sens : adopter le symbole τ revient à considérer l'axiome du choix comme un donné de la théorie…

semblables ne sont pas susceptibles — notamment dans le cadre de la théorie de la démonstration — d'aider les logiciens dans leurs rélexions.

Naturellement, ce n'est pas à ce genre de formalisme que j'ai fait référence jusqu'ici, et Bourbaki s'est immédiatement affranchi de telles écritures pour introduire progressivement des systèmes de symboles et de de définitions spécialisés, des « combinatoires » de niveau supérieur, en quelque sorte, qui sont les seules à être utilisables en pratique. On parlera par exemple du «formalisme des distributions», ou de la «méthode des caractéristiques », voire de la « géométrie projective », de la « cohomologie cyclique », de la « théorie des topos », etc., etc.

Ces formalismes-là, lorsqu'ils ne sont pas des systèmes de calculs ou diagrammatiques, ressemblent au langage naturel par le fait qu'ils utilisent un vocabulaire souvent très proche du vocabulaire courant, mais ils n'en sont pas moins des « systèmes syntaxiques » quasiment purs, au sens où : d'une part, chaque mot uti-lisé a un sens unique bien précis et, d'autre part, chaque énoncé exige, comme je l'ai dit plus haut à propos du diagramme 1, de s'intégrer de manière parfaitement rigoureuse dans une « grammaire » logico-déductive. Il ne saurait, si l'on préfère, y avoir place pour des sens multiples ou même des synonymes, encore moins pour quelque figure de rhétorique que ce soit [9]. Mais je reviendrai plus loin sur la « question du sens », c'est-à-dire sur l'aspect « sémantique » de ces systèmes « syntaxiques ». L'important est de noter qu'un formalisme mathématique n'est jamais un système syntaxique réductible au système syntaxique d'une langue « naturelle ». Sa « combinatoire » — c'est-à-dire les règles qui président au « assemblages » de signes ou de propositions autorisés — permet souvent (notamment quand il s'agit de « calculs ») d'établir des résultats insoupçonnés au départ. Et comme le dit Alain Connes avec émerveillement, les « bons » formalismes ont indéniablement un côté « magique » qui apporte « une aide à la pensée »… Bien sûr, je ne suis pas là pour vous expliquer la manière de créer des «bons formalismes» et, en tout état de cause, l'histoire montre que ces « bons formalismes » ne s'érigent pas en une nuit, ni à propos d'un seul problème. Il sont forgés lentement, laborieusement, et leur mise au point demande énormément d'énergie et de talents.

3. b. *Un exemple en géométrie*

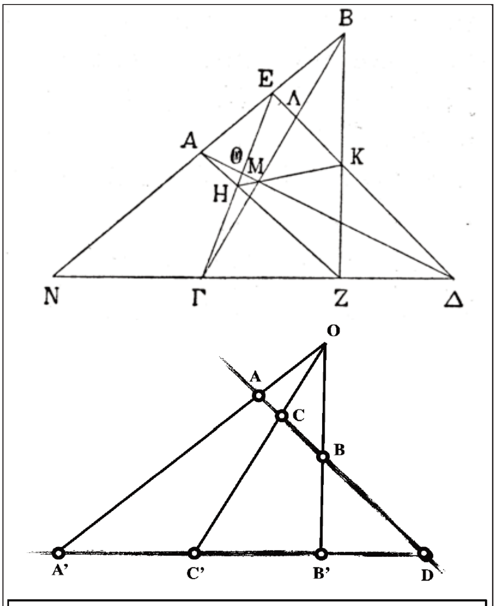
En m'intéressant à un exemple particulier, je vais essayer d'illustrer une part de l'évolution dans le temps « du formalisme » en géométrie à travers quelques-unes de ses métamorphoses. On connaît les principaux concepts et outils du formalisme introduit par les géomètres grecs : angles, longueurs, vo-lumes, aires, ainsi que similitude et égalité des figures, calculs sur les proportions… Et on se rappelle peut-être du jugement de René Thom : « au prix d'une distorsion minime des apparences (le point sans étendue, la droite sans épaisseur...), le langage purement formel de la géométrie décrit adéquatement la réalité spatiale. En ce sens, on pourrait dire que la géométrie est une magie qui réussit. »

Pour pénétrer dans l'univers de cette magie, nous nous arrêterons, pour le présent paragraphe, sur la proposition 139 du *Septième livre* de « La collection mathématique » de Pappus d'Alexandrie, écrit vers l'an 340 de notre ère : *Si l'on a deux droites* AB, ΓΔ, q*ui*

9 Je parle ici des formalismes aboutis, mais dans les phases de gestation de ceux-ci, au contraire, on peut observer des « transgressions » ou des appels à des « métaphores » (penser à l'exemple des indivisibles et même aux infinitésimaux de Leibniz).

se coupent en un point N *; s'il leur tombe des droites* AΔ, AZ, BΓ, BZ, *et si l'on mène les droites de jonction* EΔ, EΓ, *la ligne qui passe par les points* H, M, K *est droite.*

Autrement dit : *Soit un hexagone* AΔEΓBZ *dont les sommets sont situés alternativement sur deux droites sécantes, alors les points* H = EΓ ∩ AZ, M = AΔ ∩ BΓ *et* K = BZ ∩ EΔ *sont alignés.* Et c'est évidemment ce que l'on appelle aujourd'hui le *Théorème de Pappus.* La démonstration donnée par Pappus repose sur un lemme qu'il énonce ainsi : *Le rectangle compris sous les droites* AC, BD *est au rectangle compris sous les droites* AD, BC comme le rectangle compris sous les droites A'C', B'D *est au rectangle compris sous les droites* A'D, B'C'.



Figures 5 & 6 : la proposition 139 et le lemme

Ce que nous écririons aujourd'hui :

.

Il suffit alors d'appliquer ce lemme (et sa réciproque), d'abord aux points (E, K, Λ, Δ) et (N, Z, Γ, Δ), puis aux points (N, Z, Γ, Δ) et (E, H, Θ, Γ), pour obtenir finalement la relation :

,

qui montre l'alignement cherché.

Descartes, 1300 ans plus tard, reprend le problème de Pappus et déclare : « Je vous prie de remarquer en passant, que le scrupule, que faisaient les Anciens d'user des termes de l'Arithmétique en la Géométrie, qui ne pouvait procéder, que de ce qu'ils ne voyaient pas assez clairement leur rapport, causait beaucoup d'obscurité et d'embarras, en la façon dont ils s'expliquaient ». Dès lors l'égalité de raisons du lemme précédent s'écrira tout simplement comme une égalité entre deux produits de quatre longueurs :

⇔

AC.BD.A'D.B'C' = AD.BC.A'C'.B'D .

Ecriture impossible chez les Grecs, pour lesquels la multiplication des longueurs ne pouvait mettre en jeu plus de trois termes, et correspondait alors à un volume. Mais le siècle de Descartes avait hérité de la notation des nombres réels sous forme de développement décimaux illimités, et il est clair que le formalisme de « l'Arithmétique » devint habituel « en la Géométrie »…

Parallèlement, Desargues, utilisant les «raisons de raisons», traduisait la même relation sous la forme de ce qui deviendra systématiquement, deux siècle plus tard avec Chasles, le *birapport* :

$\Leftrightarrow$

,

le lemme utilisé par Pappus n'étant désormais rien d'autre qu'une expression de la conservation du birapport lors de la projection d'une droite sur une autre. Mais surtout, le formalisme introduit par Desargues fournit une extension du résultat de Pappus en « déployant » dans un même énoncé tous les cas de figure où certaines droites sont parallèles. Et si l'on cherche une preuve du fait que ce nouveau formalisme, « semant de toute part autour du plan » des « points à l'infini », fournit une véritable « aide à la pensée », il suffit de lire Desargues lui-même, qui écrit en 1639 : « Chacun verra que la raison essaye de connaître des quantités infinies et que l'entendement s'y perd, non seulement à cause de leur inimagi-nable grandeur et petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des propriétés, d'où il est incapable de comprendre comment c'est qu'elles sont. »

C'est à la même époque — et dans l'esprit des recherches de Desargues — que Blaise Pascal découvrit une généralisation spectaculaire du théorème de Pappus : *le résultat sur l'alignement des points d'intersection est encore vrai si l'hexagone considéré est inscrit dans une conique quelconque !* Si bien que le cas envisagé dans la proposition 139 de *La collection mathématique* apparaît alors comme un simple cas particulier : celui où la conique considérée est une courbe « dégénérée » de degré deux, c'est-à-dire composée de deux droites distinctes.

C'est d'ailleurs en ce sens qu'il semble légitime de parler de « déploiement » : le nouveau résultat permet de retrouver l'ancien

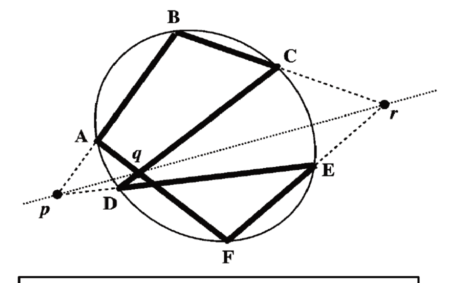


Figure 7. L'hexagone de Pascal

comme cas particulier, mais il ne serait pas possible de passer simplement du cas « dégénéré » au cas général. Nous en terminerons avec cet exemple sur un « déploiement » postérieur, qui consiste à intégrer encore plus avant la proposition originelle dans le formalisme des courbes algébriques : le théorème dit « du neuvième point ».

Il décrit une propriété des «cubiques», c'est-à-dire cette fois des courbes de degré trois, qui touche à une sorte de paradoxe apparent : deux telles courbes se coupent en neuf points mais, en même temps, neuf points suffisent à déterminer une équation de degré trois… L'*explication* relève en fait de l'algèbre linéaire car le systè-

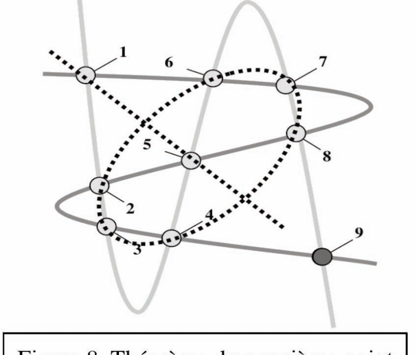


Figure 8. Théorème du neuvième point

me obtenu à partir des neuf points qui se trouvent correspondre à l'intersection de deux cubiques n'est pas déterminé, si bien que (en général) si une cubique passe par huit des points communs à deux autres, alors elle passe nécessairement par le neuvième.

Comme on le voit sur la figure, si on part de deux cubiques qui se coupent en neuf points et si six de ces points sont sur une conique (en pointillés), alors les trois autres points sont alignés, car le neuvième point est nécessairement sur la cubique déterminée par la conique et la droite joignant les points numérotés 1 et 5, puisqu'elle passe déjà par huit des points. C'est cette fois l'hexagone de Pascal qui apparaît comme un cas « dégénéré » : celui où l'on considère les deux groupes de trois droites comme des cubiques…

Signalons, juste pour mémoire, que le théorème de Pappus présente aussi un grand intérêt dans le cadre des fondements de la géométrie car, posé comme axiome dans le cas le plus simple, il permet de voir que la géométrie plane est en fait la géométrie de dimension deux sur un corps commutatif. En d'autre termes, c'est le liant indispensable pour comprendre que la géométrie « pure » est indissociable du point de vue algébrique. Ces deux «formalismes» sont donc indissociables … Il resterait évidemment, dans cette excursion sur un exemple, à « expliquer » le théorème du neuvième point… Je laisserai ce soin au lecteur [10] mais je lui rappellerai surtout la boutade d'André Weil : « Heureusement pour les chercheurs, à mesure que les brouillards se dissipent sur un point, c'est pour se reformer sur un autre. »

3. c. *« L'illusion langagière » ?*

Dans l'article de 1992 évoqué au début de ce texte, Rudolph Bkouche critiquait l'illusion didactique qui conduisait les maîtres à croire qu'ils pouvaient (ou qu'ils devaient) faire « passer le sens » des différentes notions mathématiques enseignées au travers de «discours explicatifs». Arrivés au terme de la présente réflexion, cela nous ramène à une question inévitable : comment *faire comprendre*, comment *expliquer* ? Même si nous nous en tenons au point de vue énoncé par von Neumann — *on ne comprend pas, on s'habitue* — la question pédagogique reste entière : il ne convient certes pas de s'illusionner sur l'efficacité des discours, mais il n'en reste pas moins primordial de savoir, d'une part, « à quoi il est nécessaire de s'habituer » et, d'autre part, « comment il est possible de s'y habituer ».

Le point de vue que j'ai tenté de défendre ici peut se résumer sous la forme suivante : il est indispensable d'apprivoiser des *formalismes* qui pensent [presque] à notre place. Et je voudrais illustrer cette idée sur l'exemple de l'apprentissage du calcul différentiel et intégral…

Le formalisme du calcul intégral commence largement avec les mathématiciens grecs, qui savaient calculer le volume des pyramides et de la sphère, qui avaient mis au point des méthodes très rigoureuses d'exhaustion pour étudier le rapport entre la mesure de la circonférence et l'aire du disque, ou pour effectuer la quadrature de la parabole. Ils disposaient de méthodes heuristiques comme celle des leviers et avaient su, enfin, énoncer des axiomes très subtils sur la longueur des courbes convexes ou sur le dépassement d'un nombre quelconque par les multiples d'un autre.

On assiste ensuite, au XVIIème siècle, à la suprématie d'un «formalisme» non rigoureux mais très puissant : la «méthode des indivisibles», qui permettra aux Roberval, Torricel-

10 voir par exemple : *Cayley-Bacharach theorems and conjectures*, D. Eisenbud, M. Green, J. Harris, Bull. of the AMS, Vol. 33, N° 3, 1996.

li, Pascal et bien d'autres de résoudre brillamment de nombreux problèmes de calculs d'aires, de volumes ou même de tangentes. Mais il aura fallu, dans la foulée, la mise au point de la *notion de fonction* pour qu'un Leibniz développe un formidable outil formel : le calcul infinitésimal ou *calculus*. Comme on le sait, ce formalisme repose essentiellement sur le fait d'adjoindre aux symboles habituels $+, -, /, \times$ du calcul algébrique deux nouveaux symboles : *d*, pour désigner le résultat de «l'évanouissement» d'un accroissement et $\int$, pour désigner l'extension d'une somme à une infinité de quantités «évanouissantes». Ces deux symboles étant reliés par les relations $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ et $\int f'\mathrm{d}x = f$ et reliés aux opérations algébriques par les formules désormais bien connues.

Hormis une difficulté majeure au niveau de la notion d'infinitésimal (une quantité comme *dx* est devenue nulle, mais semble se souvenir, en cas de besoin, de ce qu'elle valait auparavant…), le formalisme est d'une très grande efficacité pour « penser à notre place », et il pense si bien à notre place qu'en 1784, l'Académie de Berlin mis au concours, sous la plume de Lagrange : « L'Académie souhaite […] qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'infini […] ». Comme l'on sait, la réponse se fit attendre jusqu'au vingtième siècle avec ce que l'on appelle « l'analyse non standard », mais le formalisme introduit par Leibniz a traversé les siècles sans grand changement, du moins dans la pratique.

Même si le calcul intégral et le calcul différentiel ont trouvé des mises en forme plus rigoureuses, l'utilisation des « infiniment petits » et des « infiniments grands » a survécu dans la pratique, avec ou sans analyse non standard. Mais la question n'est pas ici de refaire l'histoire, elle est de s'interroger sur l'enseignement du calcul différentiel et intégral au niveau du secondaire, d'autant qu'aujourd'hui la part d'utilisation des « infinitésimaux » dans les cours de physique — qui permettait évidemment aux élèves de « s'habituer » au sens de von Neumann — ne semble plus être à la mode des programmes actuels.

Qui pourrait prétendre que von Neumann ait vraiment tort en ce qui concerne cet apprentissage ? Comment pourrait-on penser qu'une « compréhension » fondée sur l'explication théorique, sur le discours du professeur, puisse véritablement éclairer un élève qui n'aurait pas passé auparavant beaucoup de temps à résoudre des exercices axés sur les multiples savoir-faire indispensables en la matière ?

Seulement voilà, le corps professoral est loin d'avoir des idées claires sur le problème. Juste pour méditer, je n'en prendrai comme illustration que l'exemple suivant : en 2004, au moment même où une grande part des didacticiens se proposaient de *justifier* le formalisme à la Leibniz en faisant appel à toutes les subtilités de l'analyse non standard, sept Académiciens publiaient un avis sur les programmes [11] et déclaraient :

> « […] il devrait être possible, au niveau de la classe de 4ème ou de 3ème, de donner une justification convaincante et quasiment rigoureuse de la formule d'aire de la sphère à l'aide du seul théorème de Thalès par projection de la sphère sur un cylindre. »

Conclusion

Quasiment rigoureuse… l'expression est d'autant plus intéressante, me semble-t-il, qu'elle se trouve sous la plume de « sommités scientifiques ». Ils n'ont pas écrit « convaincante

11 *Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique*, R. Balian, J.-M. Bismut, A. connes, J.-P. Demailly, L. Lafforgue, P. Lelong et J.-P. Serre.

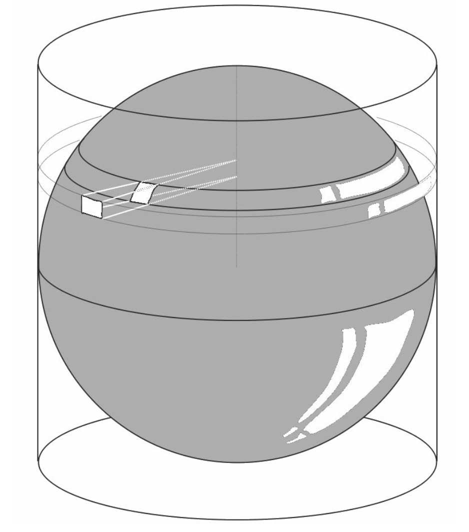


Figure 9

bien que seulement quasiment rigoureuse » mais, au contraire, ils attribuent une indéniable qualité à la justification suggérée.

Et ce « quasiment rigoureux » est même assez savoureux lorsqu'on mesure le chemin qu'il faudrait parcourir — que ce soit dans le formalisme du calcul différentiel moderne ou dans celui de l'analyse non standard — pour rendre effectivement « rigoureuse » cette « démonstration ». Seulement nous n'évoquons pas ici un traité de mathématiques, mais l'apprentissage des mathématiques ! Et si la justification est convaincante, c'est que, même si elle repose sur un formalisme plus proche de celui des indivisibles ou de celui de Lebniz que de celui de Bourbaki, elle est susceptible de fournir au collégien un diagramme analogue à celui de notre diagramme 1, et d'intégrer la propriété « dans un tout cohérent dont certaines parties sont déjà bien familières ».

Combien de maîtres sont-ils prêts à accepter cette façon de « donner du sens » qui ne repose pas sur le discours mais sur la pratique ? Il est pourtant impératif de garder en mémoire ce conseil de Ferdinand Buisson :

> « Telle a été la tendance primitive de la pédagogie ; et c'est celle de tous les maîtres au début de leur carrière : partir de l'idée générale de la science à enseigner, la décomposer logiquement en un certain nombre de notions abstraites, définir chacune de ces notions, [...] en construisant définition après définition, chapitre après chapitre, tout l'édifice théorique de la science, sauf à leur en faire ensuite les applications sous forme d'exercices, de problèmes, d'exemples. [12] »

« La connaissance rationnelle est *opératoire* ou n'est pas. » dirait Gérard Vergnaud. Le passage obligé de tout élève est donc d'apprivoiser d'abord des formalismes, des savoir-faire, et ce n'est qu'à partir de cette pratique qu'il sera capable de se construire du sens.

Comme le décrit Yvette Perrin : dans l'activité mathématique :

> « il y a le long et parfois dur travail de l'appropriation. Une étude ouvre sur des techniques et des concepts, voire tout un champ mathématique inconnu ou mal connu. On veut en être maître. Par une étude volontaire, agissante, un effort, on se les approprie. Il faut réécrire avec ses propres mots, utiliser ses propres images, faire marcher ses propres associations d'idées pour décrypter et arriver à comprendre un texte mathématique. Une chimie se fait en soi entre le moment où un article vous est étranger, difficilement pénétrable et celui où il a été assimilé, comme s'il semblait émaner de soi. [13] »

12 Buisson Ferdinand, *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, 1887.

La phrase de von Neumann est donc pleine de sagesse : ce n'est, au fond, qu'après s'être habitué à un formalisme et se l'être approprié que l'on peut estimer avoir compris un peu de mathématiques…

Mais il convient aussi de ne pas oublier que le destin de tout formalisme est en fait d'être « déployé » un jour dans un formalisme plus général, plus puissant, qui permette d'en dépasser les limites tout en l'éclairant sous un jour nouveau. Autant dire qu'il convient de méditer sur la position philosophique défendue par René Thom :

> « A l'origine de toute grande discipline scientifique, on peut déceler ce que j'ai proposé d'appeler une *aporie fondatrice*. On entend par là une opposition fondamentale, une contradiction de base, qui, au cours des temps, reçoit des solutions « fantasmatiques » ; toute solution de ce type permet un certain développement de la discipline ; ces solutions sont donc, lors de la phase d'extension associée, considérée comme ayant une validité définitive ; mais au bout d'une certaine durée, le développement même de la discipline, l'ampleur croissante des résultats aboutissent à remettre en question la solution initiale, dont on reconnaît alors le caractère arbitraire et illusoire. »

13 Re*ncontres entre artistes et mathématiciennes*, *Toutes un peu les autres*, Pascale Jakubowski, Sylvie Paycha, Jeanne Peiffer, Yvette Perrin, Véronique Roca, Bernadette Taquet, Thérèse chotteau, Francine Delmer. Bibliothèque du féminisme.