LA SOMME DE DIX ENTIERS CONSECUTIFS

Pascale BOULAIS
Irem de Montpellier

Dans cet article, nous présentons une situation mise en œuvre et analysée par les membres du groupe Irem de Perpignan, composante de l'Irem de Montpellier, dans le cadre d'un travail visant à favoriser l'entrée des élèves dans l'algèbre en classe de quatrième. La situation didactique retenue est reprise de Barallobres (2007). Nous présentons les différentes phases de la situation, les principales variables didactiques et les analyses des mises en œuvre en appui sur des travaux d'élèves. Le défi de la rapidité vise à encourager les élèves à dépasser les procédures arithmétiques en identifiant des invariants pouvant conduire à des formules générales.

Le problème s'inscrit dans une perspective d'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre comme souligné par Grugeons-Allys et Pilet (2017) : « *Les recherches portant sur la transition entre l'arithmétique et l'algèbre convergent vers l'idée qu'il y aurait des potentialités à travailler des objets mathématiques à la frontière entre l'arithmétique et l'algèbre dès l'école primaire,* […] ». Le problème que nous avons retenu se situe justement dans cette articulation entre arithmétique et algèbre

La situation retenue est construite autour du problème « *Calculer le plus rapidement possible la somme de* 10 *nombres entiers consécutifs.* ».

Nous avons mené des expérimentations à différents niveaux de la 5^{e} à la 1ère. Ici nous intéresserons aux expérimentations menées par Jérôme Ciavaldini, Marie-Claire Demailly, Julien Gravas, Karine Le-Men, Carmen Sofonea, dans cinq classes de 4^{e} de cinq collèges différents dont deux sont en ZEP. A ce niveau, l'activité permet une entrée dans la modélisation algébrique et dans l'utilisation du calcul algébrique comme outil de généralisation et comme outil de preuve.

Le travail se déroule en classe autour de trois grandes phases :

— Une phase de jeu, s'appuyant sur du calcul numérique et une heuristique ;

— Une phase de formulation des méthodes les plus rapides ;

— Une phase de validation des méthodes les plus rapides.

Les stratégies les plus rapides que nous pensons voir apparaître in fine à ce niveau sont les suivantes :

— 10 fois le cinquième nombre + 5,

— 10 fois la médiane,

— 10 fois le premier nombre + 45,

— La méthode de Gauss : la moitié de 10 fois la somme du premier et du dernier terme,

— 5 fois la somme du premier et du dernier terme,

— Prendre le cinquième nombre et ajouter un 5 à droite.

Ces stratégies peuvent émerger de l'identification d'invariants qui apparaissent au cours des premiers calculs comme *la somme des unités fait toujours 45*, *la somme des dizaines donne toujours le premier nombre de la liste*, l'invariance du résultat de la somme de certaines paires de nombres mais aussi par observation des séries et de leur résultat : le résultat correspond toujours au cinquième nombre de la liste suivi d'un 5.

La validation des deux premières stratégies repose sur une même démarche : 10 fois un nombre auquel s'ajoute la somme des écarts relatifs entre ce nombre et chacun des autres, avec compensation des écarts dans le cas de la médiane et un excédent dans le calcul avec le cinquième. La troisième stratégie peut se valider selon deux approches différentes, soit la décomposition décimale, soit le point de vue successeur qui conduit à la somme des écarts. Les deux dernières peuvent se valider à l'aide de l'expression algébrique des successeurs ou des prédécesseurs. Pour la dernière, une preuve s'appuyant sur la décomposition décimale et la prise en compte de la retenue est envisageable également.

L'organisation didactique prend appui sur la théorie des situations (Brousseau, 1998) en jouant sur une articulation de phase d'actions et de formulation et de validation. Durand-Guerrier (2019) nous rappelle que « *La Théorie des Situations Didactiques offre une méthodologie de recherche qui permet d'insérer les situations didactiques singulières dans un réseau plus vaste de significations, par la confrontation aux objets (situation d'action), au discours sur les objets (situation de formulation), et à l'insertion dans un réseau de connaissances dans un processus d'argumentation et de preuve (situations de validation et d'institutionnalisation).* » Le *milieu*, c'est-à-dire tout ce qui peut agir sur l'élève et lui apporter des rétroactions éclairantes, est pensé et organisé pour favoriser une avancée autonome des élèves. Nous nous proposons d'analyser plus finement cette situation.

Analyse de la phase d'action

Les quatre suites suivantes sont projetées une à une :

Série 1 : 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 26

Série 2 : 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 29 ; 30 ; 31 ; 32

Série 3 : 47 ; 48 ; 49 ; 50 ; 51 ; 52 ; 53 ; 54 ; 55 ; 56

Série 4 : 90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95 ; 96 ; 97 ; 98 ; 99

Consigne : « Calculez le plus vite possible la somme des dix entiers. Dès que vous pensez avoir le résultat, levez la main. Si on le souhaite, on peut écrire. Le but est d'essayer d'être astucieux pour faire les calculs proposés. On va laisser suffisamment de temps pour cette première série afin que chacun puisse faire les calculs. ».

Durant cette première phase, les élèves travaillent individuellement

Le milieu

A ce niveau, nous faisons l'hypothèse que les nombres entiers et les opérations élémentaires sont suffisamment stabilisés pour que les élèves aient confiance dans les résultats de leurs calculs, ils jouent le rôle d'objets concrets au sens de Durand-Guerrier (2019).

Ils disposent de papier et de crayons, cela doit permettre à ceux qui le souhaitent d'écrire ou de poser des calculs intermédiaires et de contrôler leurs calculs plus facilement.

Après la validation de la première série, la série et son résultat restent affichés :

Série 1 : 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 26

réponse : 215

Série 2 : 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 29 ; 30 ; 31 ; 32

De même après la validation de la série 2 les deux premières séries et leurs résultats restent affichés, cela permet un enrichissement du milieu, l'observation des invariants étant facilitée.

On peut considérer aussi que les doigts qui se lèvent au fur et à mesure de l'achèvement des calculs sont un élément signifiant du milieu, pouvant conduire certains élèves à abandonner une stratégie qui ne paraitrait pas assez rapide aux vues des doigts déjà levés.

La dévolution

La *dévolution* est définie par Brousseau (1998) comme un « acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage [...]. Dans cette situation, elle est favorisée par divers éléments :

— L'énoncé est simple et la tâche à accomplir est clairement comprise par tous les élèves.

— Le défi de rapidité de l'énoncé impulse un esprit de jeu. Il est stimulé par les premiers élèves qui réussissent dans un temps étonnamment court et qui sont identifiés lorsqu'ils lèvent la main.

— Le recours au papier crayon permet d'écrire les calculs et permet que la tâche soit perçue comme abordable.

— La première série met en jeu des nombres entiers relativement simples destinés à rassurer les élèves sur les calculs à accomplir et à favoriser une mise au travail rapide.

— Un temps long d'environ dix minutes est laissé sur la première série afin que chacun soit bien entré dans la tâche. Quand les plus rapides ont levé le doigt, il leur est proposé de décrire leur méthode par écrit.

Les variables didactiques

Ici nous analysons les principales variables didactiques afin de déterminer les meilleurs choix possibles en lien avec nos objectifs. L'équipe DREAM [1] (2020) relève comme variables didactiques majeures :

• Le nombre de nombres de la liste.

— 10, ou tout multiple de 10 permet l'exploitation de la décomposition décimale, mais les calculs deviennent très lourds avec les multiples autres que 10 pour la phase de recherche ;

1 DREAM est l'acronyme de Démarche de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques. C'est un groupe de recherche en didactique des mathématiques de Lyon 1.

— un nombre autre, inférieur strictement à 20, ne permettra pas l'utilisation de la décomposition décimale, car dans ce cas il n'y a plus d'invariants et selon que ce nombre est pair ou impair, la méthode d'identification de la médiane sera différente, si ce nombre est impair, c'est un nombre de la liste, sinon c'est un nombre décimal, demi-somme des deux valeurs centrales ;

— un nombre supérieur à 20 non multiple de 10 pourrait être décourageant par la lourdeur des calculs et le peu de procédures possibles, au niveau considéré.

• La valeur du premier nombre de la liste :

— *« Si la valeur est un multiple de 10, la procédure s'appuyant sur la décomposition décimale sera favorisée » (DREAM 2020, p.4). Cette approche peut favoriser la bascule sur le point de vue successeur plus favorable à la généralisation.*

— Si sa valeur est inférieure à 50, les calculs seront raisonnables et les élèves s'y engageront volontiers.

• L'utilisation d'une calculatrice :

La calculatrice ne permet pas de relever le défi de la rapidité, elle prive les élèves d'expériences qui peuvent leur permettre d'identifier des invariants et la raison d'être de ces invariants. Comme nous l'avons précisé précédemment elle peut constituer un élément de différenciation pour des élèves relevant d'un PAP, plan d'accompagnement personnalisé aménagé pour les élèves présentant un trouble « *dys* ».

• Donner toute la liste ou seulement le premier nombre :

— Si toute la liste est donnée, cela permet l'émergence des procédures partant du quatrième ou du cinquième nombre ou encore de la médiane ou du regroupement par paire donnant le même résultat que la somme du premier plus du dernier.

— Si seul le premier nombre est donné, cela privilégie les procédures s'appuyant sur celui-ci.

En quatrième, notre choix est de donner la liste complète pour favoriser des procédures variées mais aussi parce que cela favorise la représentation de la tâche.

Nous pensons que l'affichage ou non des séries déjà faites et de leur résultat est une variable importante ; si les résultats ne restent pas affichés, les conjectures relatives à l'utilisation du quatrième nombre ou de la médiane apparaitront moins facilement tout comme l'identification de certains invariants.

Le fait d'annoncer ou non que le temps sera long pour la première série est une variable significative,

— Si le temps long est annoncé, cela permet à l'élève d'oser se lancer dans les calculs, de les écrire sans craindre d'être trop long. Cela vient relativiser l'objectif d'être le plus rapide possible sur la première série.

— Sans annonce sur le temps de la première série, on peut craindre que beaucoup d'élèves ne s'engagent pas dans les calculs ; se sachant lent en calcul, ils risquent d'attendre les résultats des élèves les plus rapides.

Expérimentation et recherche

La première phase est une phase d'expérimentation et de recherche. Les élèves vont faire des calculs en essayant d'être astucieux et de dégager des conjectures qu'ils mettront à l'épreuve de la série suivante. Les actions possibles et accessibles aux élèves de collège sont nombreuses, reprenons l'inventaire établi par Durand-Guerrier (2010, p.3 et 4). Les actions observables sur la première série sont généralement longues :

- Faire des regroupements en utilisant les compléments à 10, par exemple :

  17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

  17 + 23 = 40 ; 18 + 22 = 40 ; 19 + 21 = 40 ; 24 + 26 = 50 il reste 20 et 25 ;

  3 × 40 + 50 + (20 + 25) = 170 + 45 ce qui donne 215.

  Cette méthode fait appel aux pratiques de calcul réfléchi travaillées dès le primaire. Elle reste cependant assez coûteuse en calculs et n'apporte pas de réel gain de temps lorsque l'on change de série. Cette méthode « *peut favoriser le repérage de ce que toutes les unités entre 0 et 9 apparaissent une fois et une seule dans chaque série, mais elle peut être un obstacle pour reconnaître le rôle particulier de 45* ».

- Poser l'addition à effectuer et faire fonctionner l'algorithme somme des unité, retenue et somme des dizaines. Cette méthode est coûteuse en calcul, mais elle peut permettre d'identifier que la somme des unités fait toujours 45 en effet :

  $$0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$$

  et donc que la somme cherchée finira toujours par 5. Ceci permet que l'élève progresse en rapidité d'une série à l'autre.

  L'invariant utilisé peut être utile dans la phase de validation. Ceci pourra se manifester sous forme d'un théorème en acte : lorsqu'on a 10 nombres entiers consécutifs, chaque unité de 0 à 9 apparait une fois et une seule. C'est le choix de la valeur 10, pour la variable didactique nombre de termes de la liste, qui permet la mobilisation de ce théorème en acte.

- Utiliser la décomposition décimale, par exemple :

  17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

  10 + 7, 10 + 8, 10 + 9, 20, 20 + 1, 20 + 2, 20 + 3, 20 + 4, 20 + 5, 20 + 6

  3 × 10 + 7 × 20 + (7 + 8 + 9 +1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 170 + 45 = 215.

  Comme dans l'addition posée, cette méthode met en évidence l'invariant 45 et fait apparaître la forme générale « multiplier le premier nombre par 10 et ajouter 45 ».

- Décomposer les nombres à partir du premier nombre de la série, par exemple :

  17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

  17, 17 + 1, 17 + 2 ; 17 + 3 ; 17 + 4 ; 17 + 5 ; 17 + 6 ; 17 + 8 ; 17 + 9

  17 × 10 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 170 + 45

  Ceci met en évidence le rôle particulier de 45 et fait apparaître la forme générale « multiplier le premier nombre par 10 et ajouter 45 ». La validation repose sur l'utilisation du nombre généralisé désignant le premier nombre, puis l'exploitation de la commutativité de l'addition dans **N**.

- Regrouper les nombres par paires de sommes égales, par exemple :

  17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

  17 + 26 = 18 + 25 = 19 + 24 = 20 + 23 = 21 + 22 = 43

  5 × 43 = 215

- Ou encore, à la manière de Gauss :

  17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

  26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17

  43, 43, 43,43, 43, 43, 43, 43, 43, 43

La production d'une formule de généralisation 10 × (premier + dernier) fournit un algorithme de calcul simple et efficace.

Le calcul réfléchi dans lequel se lancent les élèves, peut les conduire à transformer le calcul à effectuer en calculs plus économiques en jouant sur une réécriture d'expressions numériques, mettant en jeu les propriétés des nombres et des opérations, ici essentiellement la commutativité et l'associativité de l'addition. Selon Butlen et Pézard (2007) les propriétés des opérations mobilisées lors du calcul réfléchi constituent un début d'entrée dans l'algèbre.

Dans un second temps, pour certains élèves dès la seconde série, pour d'autres à la troisième ou la quatrième, des méthodes plus rapides pourront apparaître :

- Prendre la valeur médiane et la multiplier par 10, par exemple :

  17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

  17 - 18 - 19 - 20 - 21 - **21,5** - 22 - 23 - 24 - 25 - 26

  21,5 × 10 = 215

  Cette méthode est très économique en calcul. La validation repose sur la somme des écarts relatifs à la médiane qui est nulle. On remarquera que ce n'est pas une propriété caractéristique de la médiane mais de la moyenne, mais la série étant parfaitement symétrique, la médiane et la moyenne sont confondues. D'un point de vue didactique, il nous parait préférable de parler de *valeur centrale*.

- Prendre le cinquième nombre de la liste et ajouter 5 à droite, par exemple :

  17, 18, 19, 20**, 21,** 22, 23, 24, 25, 26

  ce qui donne directement 215.

  C'est la méthode la plus simple et la plus rapide. La validation repose sur la décomposition de chaque entier en termes d'écart à 21. La formulation « ajouter un 5 à droite du cinquième nombre » demandera de revenir au sens de l'écriture décimale pour pouvoir valider cette méthode, en écrivant que cela revient à calculer 210 + 5.

  17 = 21 – 4 ; 18 = 21 – 3 ; 19 = 21 – 2 ; 20 = 21 – 1 ; 22 = 21 + 1 ; 23 = 21 + 2 ; 24 = 21 + 3 ; 25 = 21 + 4 ; 26 = 21 +5 ;

  tous les écarts se compensent sauf le dernier ce qui conduit à 10 × 21 + 5. En remplaçant 21 par un nombre généralisé on obtient une validation générale de cette méthode.

D'une série à l'autre, certains élèves peuvent tenter de nouvelles stratégies dans une dialectique expérimentation/recherche. La dernière série, plus difficile car le premier nombre est supérieur à 50, peut permettre que l'efficacité de la stratégie utilisée soit confirmée ou non.

Lors de cette phase, ce sont les compétences calculer et chercher qui sont essentiellement mises en jeu.

Analyse de la phase de formulation

Cette seconde phase est une phase de formulation d'environ 15 minutes. Elle conduit les élèves à un effort de clarification de leur stratégie de calcul et à la rédaction d'une formulation explicite de celle-ci.

Lors de cette phase les élèves sont mis par groupe de quatre, on veille à constituer les groupes de sorte qu'il y ait, si possible, au moins un élève rapide dans chaque groupe.

La consigne proposée est « Echangez sur vos stratégies de calcul et mettez-vous d'accord sur la plus rapide. Expliquez cette stratégie sur la feuille A4 comme vous le feriez pour un copain absent. Vous pourrez tester cette stratégie sur deux nouvelles séries après le travail de groupe. »

Le partage des expériences au sein du groupe constitue un enrichissement du milieu pour les élèves de ce groupe, les interactions entre les élèves les conduisant à renoncer à leur propre méthode ou au contraire à se convaincre définitivement qu'elle est très efficace. Les échanges doivent permettre aussi que la formulation soit discutée, amendée et gagne en clarté.

Le travail de groupe a plusieurs fonctions :

— Permettre à tous de s'approprier une méthode rapide ce qui est nécessaire pour que chacun puisse prendre une part active dans la phase de validation.

— Limiter le nombre de méthodes que l'on cherchera à valider.

On sait combien il est difficile pour un élève d'abandonner sa propre idée, Durand-Guerrier (2010) indique « *Sur le plan du déroulement même de la situation, cela indique que l'émergence d'une méthode générale doit être soumise à nouveau « au tribunal de l'expérience », afin de pouvoir être validée par chacun des sujets.* ». Les deux nouvelles séries vont permettre cette mise à l'épreuve de la méthode retenue par le groupe.

On projette successivement deux séries, les élèves doivent répondre le plus vite possible à l'aide de la stratégie retenue dans leur groupe. On demande aux élèves de lever la main dès qu'ils ont fini. Entre chaque série, on demande au plus rapide de donner sa réponse et d'expliquer sa stratégie.

Série 5 : 84 ; 85 ; 86 ; 87 ; 88 ; 89 ; 90 ; 91 ; 92 ; 93

Série 6 : 125 ; 126 ; 127 ; 128 ; 129 ; 130 ; 131 ; 132 ; 133 ; 134

On donne deux séries à faire à la maison avec la stratégie de son choix.

Série 7 : 649 ; 650 ; 651 ; 652 ; 653 ; 654 ; 655 ; 656 ; 657 ; 658

Série 8 : 1 794 ; 1795 ; 1 796 ; 1797 ; 1 798 ; 1799 ; 1 800 ; 1801 ; 1 802 ; 1803.

Le professeur ramasse les productions des élèves, pour connaître les différentes stratégies retenues par les groupes. Cela permet de préparer efficacement la seconde séance dont l'objectif est de valider ces stratégies.

Lors de cette phase, le travail des élèves est un travail de modélisation qui devrait être de type pré-algébrique du type « Le premier nombre × 10 + 45 ». Cette formulation va jouer un rôle de construction sémantique de la lettre qui pourra apparaitre lors de la phase de validation. À ce niveau, on peut faire l'hypothèse que les nombres entiers, l'addition des entiers et les propriétés élémentaires de l'addition sont naturalisés. Ils peuvent de ce fait offrir une sémantique pour la syntaxe du calcul littéral. (Chevallard,1989, p.50)

Cette seconde phase permet de travailler sur la compétence *modéliser* et permet en outre de travailler la compétence *communiquer* à l'oral comme à l'écrit. On notera que la compétence *représenter* est mise en jeu pour soutenir la compétence *communiquer à l'écrit.*

Analyse de la phase de validation

Cette situation a été expérimentée en quatrième avec comme objectif principal de faire découvrir l'apport de l'algèbre comme outil de preuve. Ce travail de production de preuves va permettre la production des premières expressions algébriques et légitimer leurs manipulations syntaxiques.

Les questions fortes qui lancent cette phase sont « Cette méthode que vous avez utilisée a semblé encore fonctionner ici, mais fonctionnera-t-elle toujours ? Comment en être sûr ? Vous devez prouver que votre méthode donne toujours le bon résultat, quels que soient les dix nombres consécutifs à additionner. Vous rédigerez soigneusement cette preuve sur la feuille A4 ». L'aspect surprenant, inattendu des méthodes rapides joue un rôle majeur dans le maintien de la dévolution de la situation. Les actions menées par les élèves lors de la phase de jeu vont constituer un milieu pouvant favoriser l'émergence de preuves lorsque l'action a permis l'identification d'invariants.

Cette phase d'environ 20 minutes se déroule au sein des mêmes groupes, les interactions enrichissent le milieu. Même les démarches inabouties permettront une meilleure implication de chacun lors de la mise en commun, dont la fonction sera de valider les preuves produites. Cette phase est la plus importante d'un point de vue algébrique, on peut penser qu'elle va permettre l'émergence d'écritures algébriques, mais aussi qu'elle va être le lieu de transformations algébriques qui permettront de prouver ce que l'on croit vrai. Barallobres (2007, p.40) affirme que « *L'entrée dans des pratiques de validation intellectuelle serait favorable à Ia création d'un espace didactique, dans lequel la signification « locale » de l'outil algébrique dépasserait leur caractère d'expression symbolique* ». Le milieu constitué des expériences du jeu et des interactions au sein du groupe doit garantir le maintien de la signification des formes et des écritures algébriques produites. L'objectif de prouver que la méthode est généralisable doit soutenir les actions de transformation des premières expressions obtenues. Un contrôle sémantique est ainsi rendu possible lorsque, par exemple, l'élève écrit « premier + 1 + premier + 2 + … + premier + 9 » et qu'il transforme en écrivant « 10 × premier + 45 » la nécessité de la transformation est soutenue par la forme qu'il veut obtenir et le contrôle sémantique est assuré par le comptage du nombre de fois où le mot « premier » est écrit, le contrôle syntaxique étant assuré par la mobilisation du sens de la multiplication par un entier et par le théorème en acte « dans une somme, on peut changer la place des termes ».

On peut s'attendre dans une classe ordinaire à avoir au moins deux démarches différentes qui reposent sur les mêmes actions, c'est ce qui doit favoriser la participation du plus grand nombre lors du débat de validation des preuves produites.

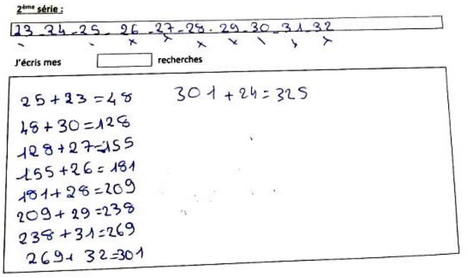
Si un groupe a fini rapidement, on lui propose de chercher une preuve pour une autre stratégie. Pour des groupes en difficulté, des coups de pouce pourront être apportés. Nous les préciserons au cours de l'analyse des productions afin de les contextualiser avec la difficulté rencontrée.

Cette phase permet de travailler les compétences *raisonner* et *communiquer*. La production des validations peut mettre en jeu des changements de registres sémiotiques au sens de Duval, dans ce cas la compétence *représenter* est mise en jeu.

Analyse de la phase d'action

Dans les cinq classes où se sont déroulées les expérimentations, les élèves s'engagent volontiers dans les calculs. Les stratégies de calculs réfléchis sont variées. La plus fréquente est la somme de paires utilisant des compléments à 10, suivie de près par la somme des dizaines plus la somme des unités. De façon non négligeable, on trouve d'autres types de regroupements par paires, certains utilisant les compléments à cinq et d'autres des associations diverses comme ci-dessous :

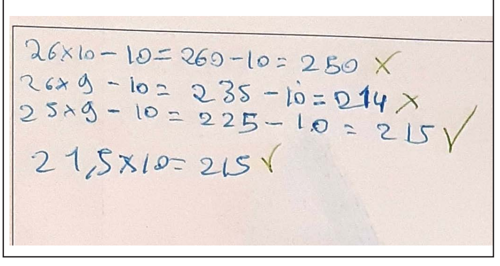
élève 1



Ces regroupements mettent en jeu en acte les propriétés de commutativité et d'associativité. On pourra observer une erreur de calcul à la seconde ligne.

On peut observer que très majoritairement, les élèves ne font pas évoluer leur stratégie de calcul au cours du calcul des quatre premières séries. Sur les cent dix productions analysées, seuls sept élèves montrent une évolution, l'un utilisant dès le deuxième calcul 10 × premier + 45, un autre calculant (premier + dernier) fois 5, trois calculent « milieu fois dix » et deux font « le cinquième suivi d'un 5 ». Il est intéressant d'observer la production de l'un d'eux :

élève 2



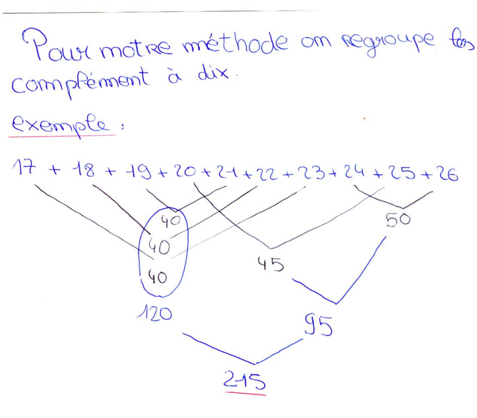
Cet élève tente dès le départ de multiplier l'un des termes par 10 et de soustraire sans doute quelque chose qui doit être un écart, le 10 correspond aux 10 termes de la série. Son premier calcul ne donne pas le résultat validé lors de la correction de cette série, il essaie aussitôt de réajuster sa méthode, pour finalement se placer au milieu de sorte que les écarts se compensent. La dimension heuristique de l'expérimentation est lisible. On remarquera ce choix de partir des derniers termes.

Trois élèves seulement font des erreurs de calcul et deux semblent ne pas avoir compris la consigne, complétant la suite des nombres.

Analyse des productions de la phase de formulation

Le travail de groupe devait permettre une sélection des stratégies les plus efficaces, cet effet est bien obtenu, seuls trois groupes, chacun dans une classe différente, conservent la stratégie la plus fréquente fondée sur les compléments à 10 comme dans la production suivante :

groupe 1



La méthode la plus fréquemment retenue est celle qui découle de l'expérimentation « somme des dizaines plus somme des unités » et de l'observation de l'invariant 45.

groupe 2

On calcule d'abord les dizaines et après les unités. Le nombre des unités font tout le temps 45 parce que c'est tout le temps 1, 2, 3, 4 etc...

Dans la production suivante, l'écriture dans un langage usuel évolue vers une écriture condensée « × 10 + 45 », dont on peut penser qu'elle décrit un programme de calcul et peut être considérée comme une entrée dans l'algèbre mettant en évidence une structure invariante.

groupe 3

On multiplie le premier chiffre de la serie par le nombre des autre chiffre de la serie et out ajoute toute les difference avec le 1er nombre

×10 + 45

Un groupe retient une stratégie cousine, que nous n'avions pas anticipée :

10 × le dernier – 45

groupe 4

on prend le dernier ~~chiffre~~ nombre de la liste, on ajoute un 0 et on enlève 45.

ex :

36-37-38-39-40-41-42-43-44-450

450-45=405

On observe ici que l'algorithme qui décrit l'ajout du zéro n'est pas relié à la multiplication par 10.

La stratégie, le cinquième suivi d'un 5, est retenue par trois groupes, on observera dans la production suivante que ce 5 émerge de l'observation de l'invariance du chiffre des unités :

groupe 5

lucky
ambre
moa

Om prend le 5ème chiffre de la serie plus on ajoute 5 car les chiffres de 0 à 9 sa fait 45, alors automatiquement à la fin il y'aura 5.

exemple : 54 55 56 57 $\boxed{58}$ 59 60 61 62 63 = 585

58 . 5

plus on met 5

Dans certains groupes, l'algébrisation est absente de la description :

groupe 6

36 - 37 - 38 - 39 - 40 - 41 - 42 - 43 - 44 - 45

On prend le 5ème nombre en partant de la gauche : 40

et on place un 5 derniere : 405

Un groupe calcule avec le premier et le dernier terme :

groupe 7

Notre stratégies est de prendre le premier et le dernier nombre de la série on les additionnes et on fait fois 5

Dans chacune des classes, à l'issue des travaux de groupes il est resté, au plus, trois stratégies différentes. La mise en commun qui a suivi les deux séries qui clôturaient cette phase a permis de ramener à deux stratégies sélectionnées par l'ensemble du groupe classe.

Analyse des preuves produites par les élèves

Comme nous l'avions pensé, le repérage des invariants au cours des expérimentations suscite de l'étonnement.

groupe 8

C'est toujours 45 !
il a parait toujours

Durand-Guerrier (2010) pointe que la dimension expérimentale n'est pas réservée à la seule phase d'action « *elle met en évidence l'importance de la nature des expériences des élèves non seulement dans les phases d'action de la situation, mais aussi dans les phases de formulation, de validation et dans le processus de conceptualisation.* ». Dans l'analyse des productions des élèves nous nous attacherons à montrer le rôle de la dimension expérimentale dans cette phase de validation du point de vue de la construction algébrique et d'autre part, nous analyserons les preuves produites.

Nous appellerons preuve « une explication reconnue et acceptée » qui « se détache du locuteur » comme le propose Balacheff (1982) et nous nous proposons de prendre appui sur la typologie qu'il a établie pour analyser les preuves produites par les élèves. Rappelons que Balacheff classe les preuves selon deux grandes catégories, les preuves pragmatiques dans lesquelles il décrit trois grandes familles :

— *L'empirisme naïf*, vérification sur quelques cas

— *L'expérience cruciale* : mise à l'épreuve sur un exemple pour lequel on ne se fait pas de cadeau.

— *L'exemple générique* : explication des raisons de la validité sur un objet présent non pour lui-même, mais comme représentant d'une classe. C'est un élément pivot entre preuves pragmatiques et intellectuelles. Par la prise de recul qui le caractérise, il peut être assimilé à une preuve intellectuelle.

et les preuves intellectuelles qui témoignent d'une prise de recul par rapport à l'action :

— *L'expérience mentale* : invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un cas particulier.

— *Le calcul des énoncés* : au-delà de l'expérience mentale mais pas reconnue comme démonstration.

Dans les cinq classes observées, l'élaboration de preuves intellectuelles ou *par exemple générique* au sens de Balacheff est difficile.

Certains groupes ont identifié que la somme des unités donne toujours 45. Les élèves commencent par affirmer leur résultat plutôt que de produire une preuve comme dans la production ci-dessous :

groupe 9

le nombre de départ fois 10 + 45.
c'est 45 car il y a systématiquement 45 chiffres restant.

Ce type de preuve relève d'un empirisme naïf, les expériences les ont convaincus qu'il ne pouvait pas en être autrement, c'est ce que traduit l'emploi de « *systématiquement* ». La première phrase « le nombre de départ fois 10 + 45 » est une écriture de type pré-algébrique de généralisation. Pour ces groupes, le professeur relance « Pourquoi cela fait-il systématiquement 45 ? »

L'argument avancé s'appuie sur une analyse à partir du successeur, à ce titre elle rentre dans les preuves intellectuelles. Cette preuve est plus ou moins développée suivant les groupes comme en témoigne les deux productions ci-dessous :

groupe 10

- il y a toujours des chiffres de 0 à 9 donc on les aditionne, le résultat est 45.
- on ajoute un zéro au 1er nombre car on fait : premier nombre x 10. (car on a le premier nombre +1, +2, +3, +4, +5, ... jusqu'à 10)

groupe 11

90 91 92 93 94 95 96 97 98 99

+1

9 chiffres consécutif dans les unités.

10 nombres consécutif au total.

$10 \times \underbrace{17}_{\text{le premier nombre de la liste}} = 170$

Le premier nombre "+1", "+2" etc... Donc le premier nombre fois 10 plus 9 :

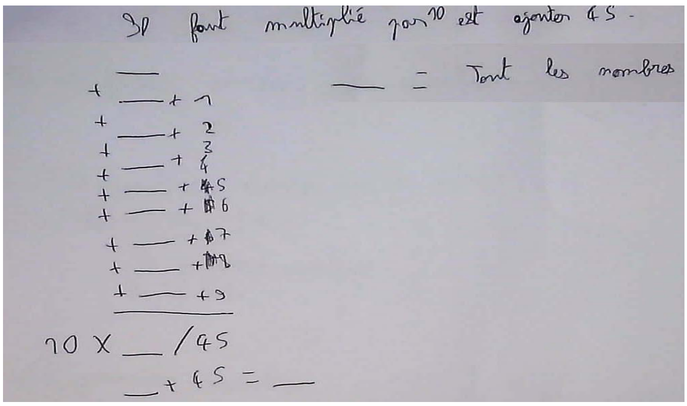
90 91 92 93 94 95 96 97 98 99

+1

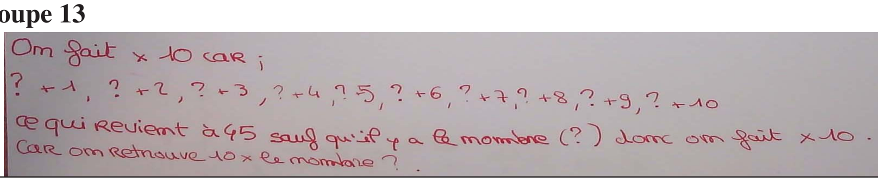
+2

Dans ces deux productions, les transformations se font sans recours à la lettre. D'autres productions font apparaître un symbole *marque-place* qui, pour l'élève, signifie qu'il peut être remplacé par une valeur quelconque. Cette production montrant une opération posée généralisée, montre le rôle de l'expérimentation dans la production de preuve, ils utilisent un trait comme marque-place :

groupe 12

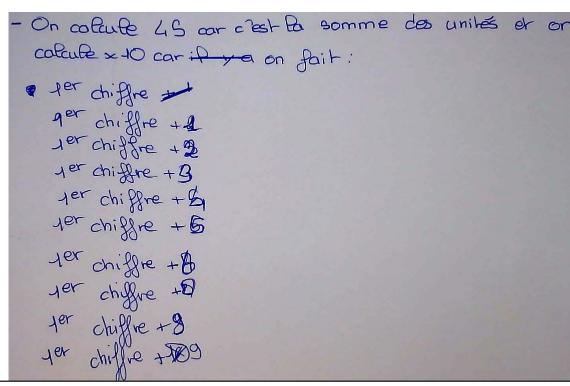


groupe 13



Un autre groupe (groupe 13) utilise le point d'interrogation « ? » comme marque-place :

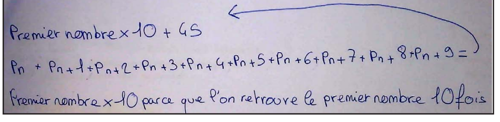
groupe 14



Dans beaucoup de groupes, le marque place est un mot explicite :

Dans un autre groupe, le professeur donne un coup de pouce : « Est-ce que vous pouvez écrire plus simplement le premier nombre ? », ce qui les conduit à la production suivante :

groupe 15

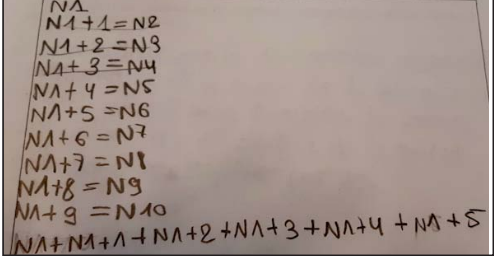

Premier nombre x 10 + 45
Pn + Pn+1+Pn+2+Pn+3+Pn+4+Pn+5+Pn+6+Pn+7+Pn+8+Pn+9 =
Premier nombre x 10 parce que l'on retrouve le premier nombre 10 fois

Sur ces productions apparaissent des écritures « précurseur » de l'écriture algébrique. La notation « *Pn* » renvoie à la notion de lettre étiquette, comme le L désigne la longueur dans la formule de l'aire d'un rectangle, toutefois il désigne un nombre générique. Dans ce jeu d'évolution d'écritures de l'expression « *Premier nombre* » à la notation « *Pn* » se joue une construction sémantique de la lettre en algèbre.

On peut aussi observer la place singulière du signe « = » associé à une flèche.

On retrouve ce statut de lettre étiquette dans la production suivante :

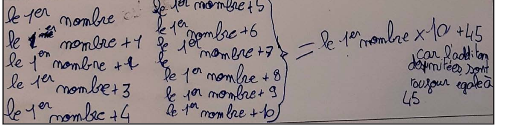
groupe 16


N1
N1+1=N2
N1+2=N3
N1+3=N4
N1+4=N5
N1+5=N6
N1+6=N7
N1+7=N8
N1+8=N9
N1+9=N10
N1+N1+1+N1+2+N1+3+N1+4+N1+5

Cette notation n'est pas sans rappeler la notation indiciaire des termes d'une suite. Dans cette production, il n'est pas certain que le signe « = » quitte son statut de « ça donne ».

Plusieurs groupes ne dépasseront pas le stade de désignation par un mot comme ici :

groupe 17

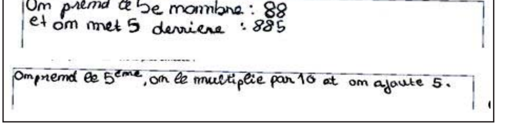

le 1er nombre
le 1er nombre +1
le 1er nombre +2
le 1er nombre+3
le 1er nombre +4
le 1er nombre+5
le 1er nombre+6
le 1er nombre+7
le 1er nombre + 8
le 1er nombre+ 9
le 1er nombre + 10
= le 1er nombre x 10 +45
car l'additon des unitées sont toujour égale à 45

Dans cette production, on peut observer un travail de transformation algébrique explicite. La modification syntaxique étant soutenue clairement par la sémantique, le sens de la multiplication comme addition itérée. La commutativité et l'associativité fonctionnent en acte.

Analyse des productions s'appuyant sur la médiane ou le cinquième terme

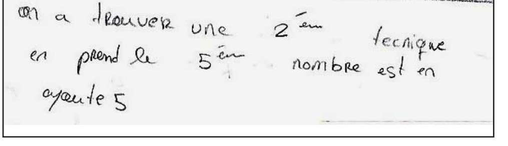
Dans la production suivante, on voit un effet du travail de groupe qui, d'un algorithme en langage naturel, aboutit à un programme de calcul dans un second temps :

groupe 18


Om prend le 5e nombre : 88
et om met 5 derriere : 885
Om prend le 5ème, on le multiplie par 10 et om ajoute 5.

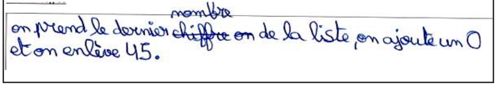
On note dans de nombreuses productions un usage non algébrique du mot « ajouter ».

groupe 19


on a trouver une 2ème tecnique
en prend le 5ème nombre est en ajoute 5

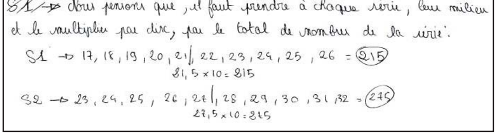
Dans la production ci-dessous, le mot « enlève » relève du champ algébrique alors que « ajoute » renvoie à une concaténation.

groupe 20



Pour les groupes ayant choisi la méthode reposant sur 10 fois la médiane, la preuve relève le plus souvent de l'empirisme naïf. « Cette méthode étant étonnante, si elle fonctionne plusieurs fois, c'est forcément qu'elle fonctionne toujours » pourrait être le raisonnement qui a guidé cette validation dont un exemple est présenté ci-dessous.

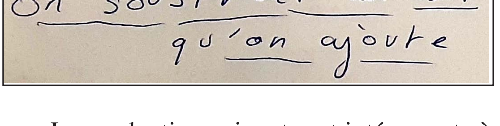
groupe 21



Le signe « = » apparait comme annonciateur de résultat.

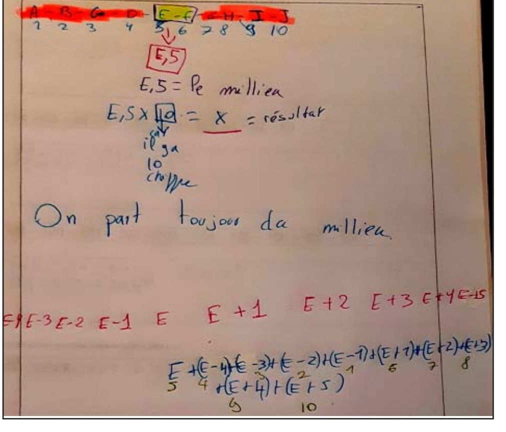
Certains groupes ont perçu le rôle des écarts et ont essayé de le formaliser. Dans ce premier exemple, la rédaction est minimaliste, mais fait référence à une preuve intellectuelle :

groupe 22



La production suivante est intéressante à plus d'un titre. Chaque entier de la série est désigné par une lettre différente et pour exprimer la médiane de cette série, ils écrivent « E,5 » c'est une concaténation que l'on comprend mais qui n'est pas autorisée en algèbre où l'écriture attendue aurait été « E + 0,5 ». Est-ce que cela n'a pas joué un rôle dans le choix du calcul des écarts à partir de E plutôt que de la médiane ? On a ici une preuve relevant des preuves intellectuelles mais qui prouve que l'on peut toujours faire 10 fois le cinquième + 5 et non pas 10 fois la médiane.

groupe 23



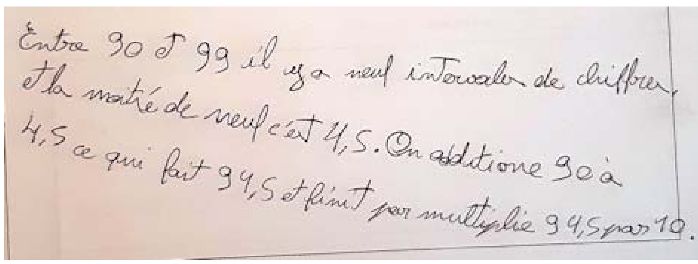
Cette production va permettre au professeur de relancer la recherche d'une preuve valide relative à l'utilisation de la médiane, aucun groupe n'ayant abouti dans la première phase de recherche.

Une autre méthode est apparue dans un groupe :

10 fois (Premier nombre + 4,5)

Nous pouvons observer que c'est une méthode valide et rapide, qui correspond à la factorisation de 10 dans la méthode « 10 fois le premier + 45 ».

groupe 24


Entre 90 et 99 il y a neuf intervaler de chiffres
et la moitié de neuf c'est 4,5. On additione 90 à
4,5 ce qui fait 94,5 et finit par multiplie 94,5 par 10.

La preuve produite est incomplète, elle décrit un procédé pour obtenir la valeur médiane. Il aurait pu être intéressant de proposer à ce groupe de traduire leur méthode à l'aide d'une formule. Cela peut leur permettre de faire le rapprochement avec la méthode « 10 fois le premier + 45 » en utilisant la distributivité et faire ainsi un lien entre la méthode portant sur le premier nombre et celle utilisant la médiane.

Phase d'institutionnalisation

A l'issue de ce travail, il est important que les élèves gardent des traces de ce qui a été travaillé.

La reprise d'une stratégie exprimée en langage naturel, accompagnée de diverses expressions pré-algébriques et algébriques qui ont été produites pour rendre compte de l'utilisation de la lettre comme outil pour rendre compte de la généralisation. On pourra aussi y intégrer une preuve en fonction de ce qui a été produit par la classe.

En conclusion

Comme Durand-Guerrier (2010, p.5) le souligne « *Cet exemple est une illustration de ce que la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves. Ceci contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation (Vergnaud, 1991)* ».

L'observation des élèves montre combien il est nécessaire de laisser du temps pour permettre cette lente émergence des premiers éléments algébriques. Barallobres (2007, p.43) nous dit « *l'épisode sur la validation que nous avons analysé, nous renseigne sur des conditions didactiques de réalisation de ce « sens » d'économie. La formule produite acquiert du sens dans le contexte du jeu et la transformation de la formule, dans le contexte de la validation.* » Cette algébrisation repose sur la reconnaissance d'invariants, qui ne peuvent émerger que de l'observation de nombreux cas et demande du temps. L'identification d'invariants est fondamental en algèbre, mais aussi dans l'ensemble du champ mathématique.

Soulignons enfin qu'au-delà du début de construction de la compétence algébrique au travers de tâches de généralisation et validation, cette situation permet d'entretenir peut-être même de développer les compétences numériques dans les jeux des changements de registres entre langage usuel et langage numérique comme le passage de « ajouter un zéro à la fin » qui se traduit « par multiplier par 10 », et aussi au travers de la décomposition décimale des nombres. La manipulation de propriétés algébriques, telles que la commutativité et l'associativité dans le champ des nombres contribue à forger des bases essentielles à l'algèbre. Il ne saurait y avoir de travail algébrique contrôlé sans de solides bases dans le cadre numérique. On retiendra que la tâche proposée est très abordable et a permis un excellent investissement des élèves. Ceci est important si l'on veut favoriser une entrée dans l'algèbre du plus grand nombre.

Enfin ne nous leurrons pas, quelle que soit la qualité didactique de la situation étudiée pour entrer dans l'algèbre, la construction de la compétence algébrique est lente et complexe. Cela nécessitera des propositions régulières de situations riches tout au long du curriculum au cours desquelles on laissera vivre les représentations pré-algébriques. On nourrira aussi d'activités variées quasi quotidienne, au travers de questions flash, de devoirs maison, etc. qui prendront en compte les diverses composantes algébriques : analyse structurale, travail procédural, renforcement de la sémantique, développement des habiletés syntaxiques, développement la compétence à modéliser et à prouver à l'aide de l'algèbre.

Références bibliographiques

BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies, vol. 18/2.

BALACHEFF, N. (1982), Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherche en didactique des mathématiques, 3/3.

BARALLOBRES, G. (2007), Introduction à l'algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés, For the Learning of mathematics, vol. 27, 1, pp.39-44.

BARALLOBRES, G. & GIROUX, J. (2008), Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective, in Actes électroniques du colloque EMF 2006, Sherbrooke, pp. 27-31 mai 2006.

BUTLEN, D. et PEZARD-CHARLES, M. (2007), Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté, le calcul mental entre sens et technique. Grand N, 79, pp.3-32.

BROUSSEAU, G. (1998), La théorie des situations didactiques, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit x. N° 9. pp.45-75.
https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR89002/IGR89002.pdf

DURAND-GUERRIER, V. (2010), La dimension expérimentale en mathématiques Enjeux épistémologiques et didactiques.
http://educmath.ens-lyon.fr/applet/exprime/texteintroress.pdf.

DURAND-GUERRIER, V. (2019), La théorie des situations didactiques comme levier pour penser les rapports au monde des connaissances mathématiques, Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018. Penser et organiser les articulations entre abstrait et concret dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université. pp.370-382. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document.

Équipe DREAM (2020), La somme de 10 entiers consécutifs, https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/4019128.

GRUGEON-ALLYS, B. & PILET, J. (2017), Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre ? Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20(3), pp. 106–130. https://doi.org/10.7202/1055730ar.

VERGNAUD, G. (1991), La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, 10/2.3, pp.133-169.