*Clé en main*

# EXPERIMENTER ET CONCEVOIR DES ACTIVITES DE MESURES DE DISTANCES INACCESSIBLES

Frédéric Laurent
INSPÉ Clermont Auvergne
& Irem de Clermont-Ferrand

## Contexte

La séance présentée ici a été mise en œuvre durant plusieurs années consécutives dans le cadre de la formation initiale des professeurs de mathématiques, au cours de la deuxième année de master MEEF[1] de l'Inspé de Clermont-Ferrand. Plus précisément, il s'agit d'une séance réalisée au cours d'une unité d'enseignement (UE) d'épistémologie et d'histoire des mathématiques.

Tout en couvrant quatre domaines des mathématiques – à savoir les nombres et la numération, la géométrie, l'algèbre et l'analyse – cette unité d'enseignement poursuit un triple objectif. Le premier est d'apporter des connaissances historiques aux futurs enseignants (situer des mathématiciens dans le temps, dégager des pratiques selon les époques et les lieux, etc.), de façon à renforcer la culture de la discipline et permettre de faire face à la curiosité de certains élèves. Le deuxième, plus ambitieux, est de permettre une réflexion épistémologique sur un certain nombre de notions de façon à mieux comprendre la façon dont celles-ci se sont développées et ont évolué. Cet aspect de la formation doit encourager les jeunes enseignants à approfondir davantage leur conception de séances et à interroger le savoir enseigné pour être mieux capable de saisir certaines difficultés inhérentes aux notions qu'ils enseignent. Enfin, le dernier objectif de l'UE est d'éclairer les stagiaires sur les façons d'introduire une perspective historique dans la classe, telle qu'elle est défendue depuis de très nombreuses années dans les Irem et à travers les travaux de la commission inter-Irem épistémologie et histoire des mathématiques, à

1 Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation.

savoir par le biais de l'étude de textes historiques, de pratiques instrumentales, etc.

La séance qui va être décrite dans cet article est très largement inspirée d'idées d'activités déjà imaginées par Jean-Pierre Le Goff (Irem de Basse-Normandie). Qu'il en soit ici chaleureusement remercié ! Ce dernier avait eu l'occasion de diffuser son travail au cours d'un atelier inscrit au programme du 14$^{\text{ème}}$ colloque inter-Irem d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, qui portait sur les liens historiques entre mathématiques et sciences physiques, organisé à Dijon en mai 2004 par la commission du même nom.

Dans cet article, nous commencerons par présenter l'activité soumise aux étudiants stagiaires et notamment ses objectifs relativement à l'UE décrite plus haut, puis nous en donnerons des éléments d'analyse et enfin quelques retours d'expérience.

## Objectifs de l'activité

La séance que nous présentons ici, que nous intitulerons « Mesures de distances inaccessibles », est conçue pour une durée de trois heures avec un groupe d'une vingtaine d'étudiants. Elle porte sur le thème de la géométrie, thème qui permet également d'aborder la question de la preuve, auquel deux séances dans la progression sont consacrées. Elle s'articule autour du problème de mesure de distances inaccessibles et se déroule en deux temps : une première phase d'expérimentation et d'analyse d'une activité élève (niveau fin de collège ou début de lycée) et une seconde phase de conception d'activité.

Cette séance s'inscrit principalement dans le cadre du troisième objectif de l'unité d'enseignement, à savoir engager les étudiants dans une réflexion sur les moyens et les finalités de l'introduction d'une perspective historique en classe. Le projet est de montrer aux professeurs stagiaires une activité réalisable avec des élèves du secondaire (de fin de cycle 4 ou de seconde) en leur proposant, dans un premier temps, d'effectuer cette activité comme l'effectuerait une classe puis de l'analyser. Cette activité portant sur une méthode ancienne de mesure d'une distance inaccessible, les conduit à quelques manipulations sur le terrain, sur le site même de l'Inspé de l'université de Clermont Auvergne qui jouit d'un beau parc. Puis, ils sont amenés à prendre de la hauteur sur l'expérimentation et à étudier la façon dont l'activité a été conçue en pointant les aspects qui motivent son utilisation en classe.

Il s'agit non seulement de lister les connaissances et savoirs mathématiques en jeu, mais aussi de réfléchir aux intérêts historiques et épistémologiques ainsi qu'aux tâches possibles à donner aux élèves et la façon dont les textes historiques peuvent être utilisés avec eux. Le deuxième temps de la séance doit permettre aux étudiants de s'approprier les apports méthodologiques précédents pour produire, à leur tour, une activité pour la classe (à différents niveaux allant du collège à la classe de seconde), sur le même thème des anciennes mesures de distances inaccessibles, mais à partir d'autres textes historiques.

## Description de la séance et support

Nous reproduisons dans cette partie les consignes exactes, documents et supports de travail soumis aux étudiants au fur et à mesure du déroulement de la séance. L'activité s'articule, nous le rappelons, autour de deux grandes parties : l'expérimentation et l'analyse d'une activité puis la conception d'une nouvelle activité pour la classe.

**1ère partie : expérimentation et analyse d'une activité autour de la mesure d'une distance inaccessible avec un miroir**

**A. Principe de la mesure** : Les documents n°1 et n°2 qui suivent décrivent une méthode ancienne de mesure de distance inaccessible.

**Questions**

1) À partir de ces deux documents, schématisez la situation et justifiez mathématiquement la méthode.

2) Réalisez l'expérience pour mesurer la hauteur du « château » de l'Inspé. Pour cela, on dispose du matériel suivant : un miroir, un niveau à bulle, un décamètre et un fil à plomb.

**Document n°1** : extrait du *Manuscrit du Mont Saint-Michel*

Voici, dans une transcription contemporaine, un petit texte qu'un moine a rédigé au Moyen Âge et qui figure sur le manuscrit Ms. 235 conservé à la bibliothèque municipale d'Avranches (en Normandie), manuscrit connu sous le nom de Manuscrit du Mont-Saint-Michel :

> *Pour déterminer la mesure d'une hauteur avec un miroir ou avec de l'eau. Plaçons un point sur un miroir ou au centre d'une coupe pleine d'eau. Un géomètre posera de niveau dans un champ plat l'une des surfaces réfléchissantes et la déplacera avec soin jusqu'à apercevoir à l'emplacement du point le sommet de la hauteur dont la mesure est recherchée. A la vue du sommet, on mesurera avec soin l'intervalle compris entre les pieds du mesureur et le point sur le miroir ou le centre du récipient d'eau puis on la comparera non moins précautionneusement à la taille de l'homme. Cet intervalle sera à la taille de l'homme comme la longueur qui s'étend du point vers la base de la hauteur sera à la mesure de la hauteur.*

**Document n°2** : extrait de *l'Encyclopédie méthodique*, *Mathématiques*

Voici un extrait de l'article concernant le mot « miroir » dans *l'Encyclopédie méthodique*, *Mathématiques t.*2 (1789), de D'Alembert :

> L'égalité des angles d'incidence & de réflexion dans les *miroirs plans* fournit une méthode pour meſurer des hauteurs inacceſſibles au moyen d'un *miroir plan*. Placez pour cela votre *miroir* horizontalement comme en C, *Fig*. 28, & éloignez-vous-en juſqu'à ce que vous y puiſſiez apercevoir, par exemple, la cyme d'un arbre, dont le pied répond bien verticalement au ſommet ; meſurez l'élévation *D E* de votre œil au deſſus de l'horizon ou du *miroir*, ainſi que la diſtance *E C* de la ſtation au point de réflexion, & la diſtance du pied de l'arbre à ce même point. Enfin cherchez une quatrieme proportionele *A B* aux lignes *E C*, *C B*, *E D*, & ce ſera la hauteur cherchée. *Voyez* HAUTEUR.

**Preuve :** Le document n°3 qui suit est l'énoncé de la proposition 19 de l'*Optique* d'Euclide suivi de sa démonstration.

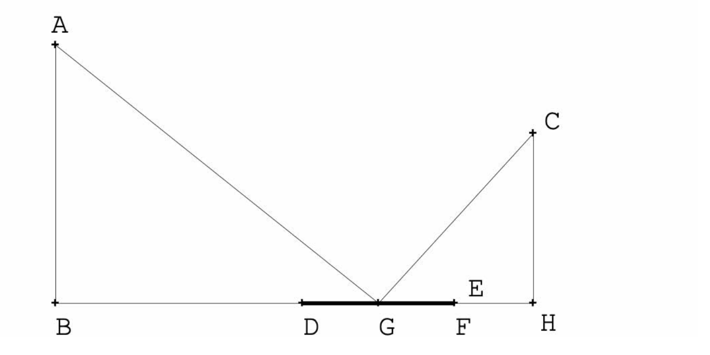
**Questions**

3) Analysez la preuve d'Euclide en mettant en évidence les outils mathématiques qu'il utilise puis comparez cette preuve à celle que vous avez rédigée.

4) Quels seraient les avantages et les inconvénients de l'exploitation du texte d'Euclide en classe ? Quelles tâches pourrait-on demander aux élèves pour étudier ce texte ?

**Document n°3** : extrait de *l'Optique* d'Euclide (v. 300 avant J.-C.)

*Reconnaître de quelle grandeur est une hauteur donnée,*
*lorsque le soleil ne se présente pas.*




*Soit la hauteur AB, soit l'œil C ; il faut reconnaître de quelle grandeur est la hauteur AB quand le soleil ne se présente pas. Posons un miroir DF, et menons la droite de prolongement en direction de la droite DE jusqu'à ce qu'elle rencontre l'extrémité B de la grandeur AB. Faisons tomber le rayon CG de l'œil C ; réfléchissons-le jusqu'où il rencontre l'extrémité A de la grandeur AB, et menons la droite EH en prolongement de la droite DE. Enfin, menons de l'œil C la perpendiculaire CH sur la droite EH. Dès lors, puisque le rayon CG est incident et le rayon GA réfléchi, ils sont infléchis à angles égaux, comme il est dit dans les Catoptriques ; par conséquent, l'angle compris sous les droites CG, GH est égal à l'angle compris sous les droites AG, GB. Mais, l'angle compris sous les droites AB, BG est aussi égal à l'angle compris sous les droites CH, HG ; donc, l'angle restant, compris sous les droites GC, CH est aussi égal à l'angle restant compris sous les droites GA, AB. En conséquence, le triangle AGB est équiangle au triangle CGH. Or, les côtés des triangles équiangles sont proportionnels ; donc, la droite AB est à la droite BG comme la droite CH est à la droite HG. Mais, le rapport de la droite CH à la droite HG est connu ; donc, le rapport de la droite AB à la droite BG est connu aussi. Mais la droite GB est connue ; donc, la droite AB est connue aussi.*

**2ème partie : conception d'activités**
**autour d'anciennes méthodes de mesures de distances inaccessibles**

**Questions**

1) À partir des documents fournis, expliquez la méthode pour déterminer la distance inaccessible considérée et le fonctionnement de l'instrument le cas échéant. Donnez une justification mathématique de la méthode.

2) Dans un second temps, indiquez à quel niveau de classe il serait envisageable d'exploiter les documents étudiés pour concevoir une activité, en précisant les notions mathématiques mises en jeu et les objectifs d'une telle activité. Imaginez quelques tâches possibles ainsi que des éléments de mise en œuvre dans la classe, en précisant la façon dont le ou les textes historiques sont utilisés.

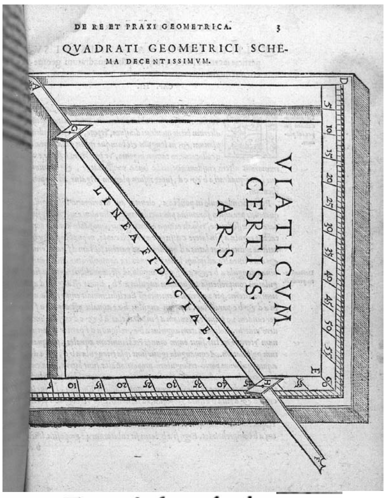
3) Rédigez une brève trace écrite à destination de la classe dégageant les intérêts historiques et épistémologiques de l'activité proposée.

**A. Mesure de la profondeur d'un puits**
**grâce au carré géométrique d'Oronce Fine (1494 – 1555)**

**Document n°4** : extrait de *De re et praxi geometrica libri tres* d'Oronce Fine

*Soit doncques (à fin que premierement nous entrions en matiere) presenté le puis quadrangulaire befg, la profondité duquel bg ou ef, soit proposé à mesurer. Dresse le quarré sur le costé bc, & au droit du costé de la bouche du puis be : & soit aussi le costé ab, pareillement au droit de bg. En apres ayant mis l'oeil en a, remuë tant de fois la reigle jusques à ce que l'un des trou des pinnules tu apercoives le visible & plus bas terme f, constitué diametrallement à bg. Ces choses ainsi gardées, prens garde à l'attouchment de la reigle au coste bc, advenant en ligne de foy : & icelluy soit fait au point h. Cette raison donc aura la partie hb, au costé ba, la mesme gardera gf, c'est à dire be (elles sont egalles) à la longueur de la profondité donnera ag. Pour que les deux triangles abh et agf sont equiangle ensemble : ainsi comme est facillement manifeste par la 29 du premier livre des Elements d'Euclide, & l'angle abh, est egal à l'angle agf, car l'un est l'autre est droict : parquoy est faict, par la 4 du sixiesme du mesme Euclide, comme hb, à ba, ainsi la largeur du puis fg, à la longueur ou profondité ga, compose de gb et ba.*

*Soit pour exemple bh de 20 parties desquelles le coste du quarré est 60 : & soit mesuré be, & soit par exemple de 9 pieds ; d'autant de pieds aussi sera gf : car se sont des costez opposez du parallelogramme befg, qui sont egaux ensemble par la 34 du mesme premier. Multiplie doncques 9 par 60, feront 540 que tu divisera par 20 & aura pour quotient 27 : d'autant de pieds doncques sera ag : de laquelle si tu soustrait ab c'est assavoir 4 piedz & demi, restera la longueur bg, désirée & abaissée en profondité de 22 piedz & demi.*




Exemple de ce chapitre.

SVppoſez (par forme d'exemple) que lon vueille meſurer la profondité du puys b e f g. Le quarré donques a b c d, eſtant dreſſé en telle maniere, que le coſté a b ſoit droitement colloqué au long de la muraille b g, & le coſté b c ſur le bord & orifice b e: ſoit la largeur b e, (laquelle eſt egale à ſon oppoſite g f) de 6 pieds, & la ſection de la ligne fiduciale ſur le point h, du coſté b c, & la portion b h, de 20 parties telles dont tout le coſté eſt de 60. Ie dis que la longueur b e, ou f g, obtient telle raiſon ou proportion à la longueur ou profondité, a g comme leſdites 20 parties de la portion b h, aux 60 parties de tout le coſté a b, ou b c. Il conuient donques multiplier leſdits 6 pieds par 60, dont ils viendront 360: qu'il faut diuiſer par 20, & lon aura 18. Autant de pieds contiendra la longueur a g: de laquelle conuient ſouſtraire le coſté a b. Si ledit coſté dōques eſt de 3 pieds la ſuſdite profondité b g, ſera de 15 pieds iuſtement.

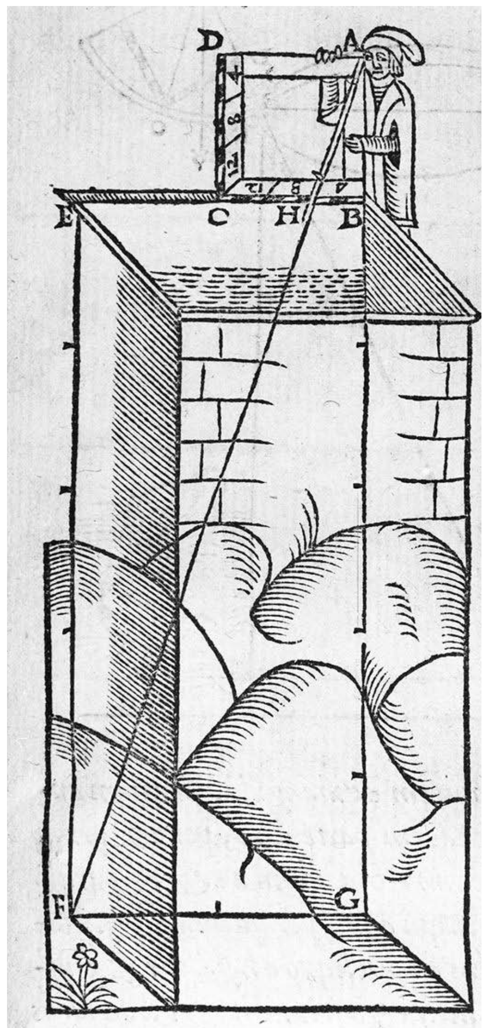
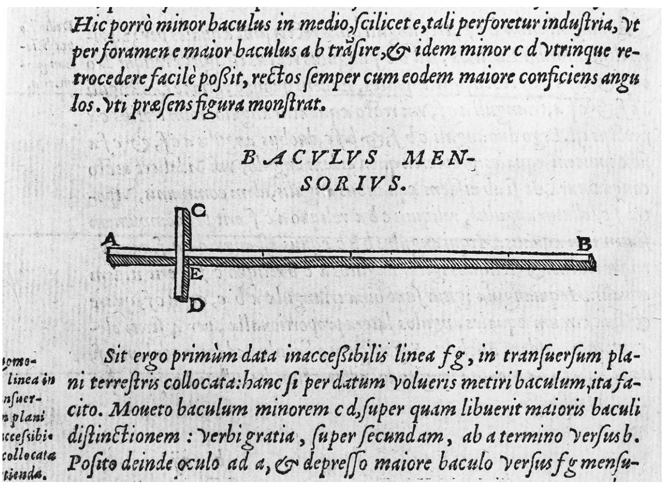



Figure 1. Un carré géométrique. *De re et praxi geometrica libri tres*, Oronce Fine.

**B. Mesure de la largeur d'une rivière avec le bâton de Jacob**

Le bâton de Jacob porte aussi le nom d'arbalestrille à cause de sa forme : il est en effet constitué d'une tige graduée sur laquelle coulisse une règle graduée également. Cette règle est accrochée en son milieu à la tige avec laquelle elle est perpendiculaire. Il existe des bâtons de Jacob disposant de plusieurs règles coulissantes.


Hic porrò minor baculus in medio, ſcilicet e, tali perforetur induſtria, vt per foramen e maior baculus a b trãſire, & idem minor c d vtrinque retrocedere facilè poßit, rectos ſemper cum eodem maiore conficiens angulos. vti præſens figura monſtrat.

BACVLVS MENSORIVS.



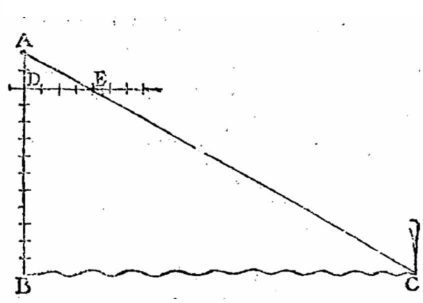
Sit ergo primùm data inacceßibilis linea f g, in tranſuerſum plani terreſtris collocata: hanc ſi per datum volueris metiri baculum, ita facito. Moueto baculum minorem c d, ſuper quam libuerit maioris baculi diſtinctionem : verbi gratia, ſuper ſecundam, ab a termino verſus b. Poſito deinde oculo ad a, & depreſſo maiore baculo verſus f g menſu-

...omo- linea in ...nſuer- ...n plani ...cceſsibi- collocata ...tienda.

Figure 2. Bâton de Jacob. *De re et praxi geometrica libri tres*, Oronce Fine.

**Document n°5** : extrait des *Éléments de géométrie de Monseigneur le Duc de Bourgogne* (édité en 1722).

Cette même Propoſition eſt le fondement de toutes les operations que l'on fait avec le Bâton de Jacob. Cet inſtrument eſt composé de deux Regles, chacune diviſée en parties égales. Ces deux Regles ſe coupent à angles droits, & on les diſpoſe de telle maniere que la hauteur du bâton *AB*, poſée perpendiculairement ſur le terrain *BC*, que l'on veut meſurer, & le raïon viſuel conduit du haut du bâton *A*, juſques au point d'éloignement *C*, font un angle qui a deux baſes paralleles ; ſçavoir, la diſtance *BC*, & la partie *DE*, de la Regle tranſverſalle de l'inſtrument. Ainſi l'on connoît la diſtance *BC*, en conſiderant que comme *AD*, eſt à *AB*, de même *DE*, eſt à la diſtance *BC*, que je ſuppoſe, par exemple, être la largeur d'une riviere que l'on veut meſurer du bord *B*.



**C. Mesure de la hauteur d'une tour avec la flèche d'Alberti (1404 – 1472)**

**Document n°6** : extrait de *Ludi rerum mathematicarum* (*Divertissements mathématiques*) d'Alberti

*Si vous voulez mesurer la hauteur d'une tour située sur une place par une simple visée faite de l'autre côté de la place, procédez ainsi. Fichez en terre une flèche, bien verticalement, écartez-vous-en quelque peu, de six ou sept pieds, et de là visez le sommet de la tour en prenant la flèche pour mire ; faites placer une marque avec un peu de cire à l'endroit précis où votre regard rencontre la flèche, et appelons A cette marque de cire. Puis, de l'endroit même d'où vous avez visé le sommet de la tour, visez sa base et, à nouveau, là où votre regard rencontre la flèche, faites placer une marque de cire, et appelons cette deuxième cire B. Visez enfin quelque endroit de la tour que vous connaissez et dont vous pouvez facilement mesurer la position au pied de la tour avec votre flèche, comme par exemple le porche d'entrée, ou quelque trou ou quelque chose comme cela situé assez bas. Comme vous avez fait en visant le sommet puis le pied de la tour, faites mettre enfin une troisième cire à l'endroit où votre regard rencontre votre flèche. Cela fait, appelons cette troisième cire C, comme sur la figure 5.*

*Je dis que la partie de la flèche qui est entre la cire B et la cire C tient dans la partie de la flèche située entre le point A et le point B autant de fois que la partie inférieure de la tour, que vous connaissez, tient dans la partie supérieure dont la hauteur vous est inconnue. Et pour saisir plus clairement et plus pratiquement ce procédé, voyons cela sur un exemple numérique. Soit 100 pieds la hauteur de la tour et 10 pieds la hauteur du porche, vous trouverez le même rapport sur la flèche, c'est-à-dire que, comme cette partie de la tour, 10, tient 9 fois dans la partie supérieure, plus grande, et est la 10^e^ partie de la tour tout entière, de même la partie AC de la flèche sera telle que, divisée en 9 parties, elle contiendra 9 fois BC qui est la 10^e^ partie de AB pris tout entier. En procédant de cette façon, vous ne ferez jamais d'erreur, tant que vous veillerez à avoir l'œil toujours au même endroit pour placer les marques. Vous pouvez faire la même chose en suspendant un fil à plomb devant vous et en marquant vos visées avec des perles, comme je vous ai montré quelques fois.*

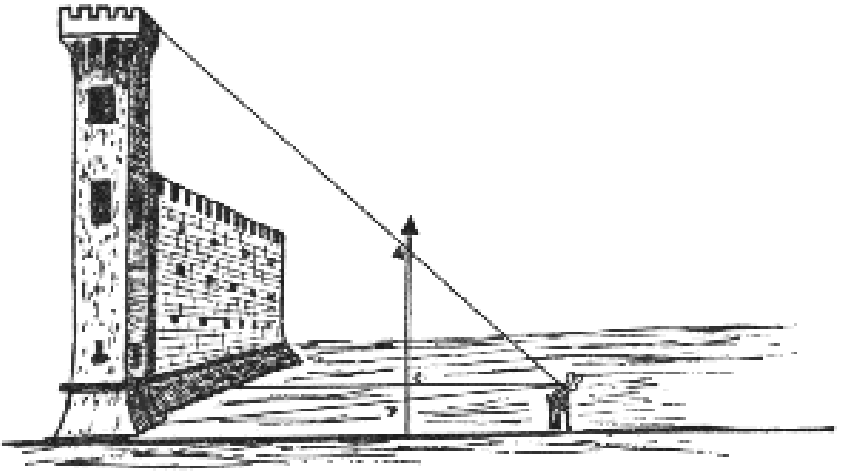


Figure 3. Illustration tirée des *Ludi rerum mathematicarum* d'Alberti.

### D. Mesure de la profondeur d'un puits avec ou sans perche

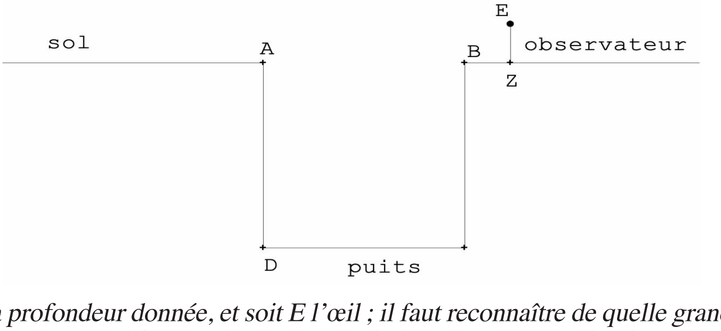
**Document n°7** : extrait du *manuscrit du Mont Saint-Michel*

*De même pour mesurer un puits avec une perche.*

> *Comme nous l'avons déjà dit pour le puits ci-dessus, que tout d'abord un géomètre relève avec soin jusqu'où le contour du puits semble circulaire. Que l'on cherche ensuite la valeur de son diamètre. Une fois le nombre trouvé, que le mesureur se place sur le haut du puits et qu'il pose sous ses pieds une canne ou une perche d'une longueur quelconque pour la déplacer d'avant en arrière jusqu'à apercevoir le sommet de la canne aligné avec le fond opposé du puits. Une fois l'alignement réalisé, que la partie de la canne qui s'entend au-dessus du puits soit repérée avec soin par une entaille auprès des pieds du mesureur. Avec non moins de soin, que l'on compare cette partie à la taille du mesureur. Le rapport établi entre cette partie du bâton et la taille du mesureur sera le même entre le diamètre et la taille du mesureur augmentée de la profondeur du puits. Par exemple : soit AB la profondeur d'un puits, AC son diamètre, CD la taille du mesureur, CE la perche comparée à la taille et utilisée pour la recherche de la profondeur, DF la partie opposée [à AB]. DF est donc quatre fois AC. Ôtons DC, il reste la profondeur du puits.*

**Document n°8** : extrait de *l'Optique* d'Euclide

Proposition 20 (problème) : *reconnaître de quelle grandeur est une profondeur donnée*

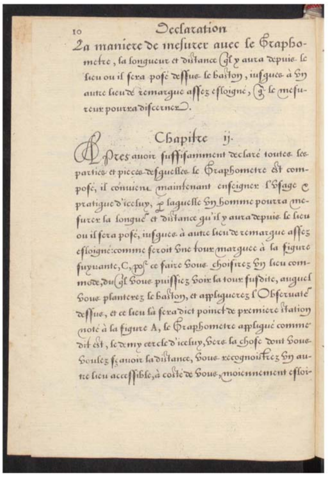



> *Soit AD la profondeur donnée, et soit E l'œil ; il faut reconnaître de quelle grandeur est cette profondeur. En effet, que le rayon de soleil ED, rencontrant le plan au point B et la profondeur au point D, arrive à l'œil ; menons du point B la droite BZ de prolongement en direction, et menons du point E la perpendiculaire EZ sur la droite BZ. Dès lors, puisque l'angle compris sous les droites EZ, ZB est égal à l'angle compris sous les droites BA, AD ; mais que l'angle compris sous les droites AB, BD est aussi égal à l'angle sous les droites EB, BZ il s'ensuit que le troisième angle, compris sous les droites BE, EZ est aussi égal à l'angle compris sous les droites AD, DB. En conséquence, le triangle ADB est équiangle au triangle BEZ, et leurs côtés seront proportionnels ; donc, la droite DA est à la droite AB comme la droite EZ est à la droite ZB. Mais, le rapport de la droite EZ à la droite ZB est connu ; donc le rapport de la droite DA à la droite AB est connu aussi. Et la droite AB est connue aussi ; donc, la droite AD est connue aussi.*

**E. Mesure d'une distance à un point inaccessible avec un graphomètre par Philippe Danfrie (1535 – 1606)**

**Document n°9** : extrait de la *Déclaration de l'usage du graphomètre* de Danfrie

*Après avoir suffisamment déclaré toutes les parties et pièces desquelles le graphomètre est composé convient maintenant enseigner l'usage et pratique d'icelui avec laquelle un homme pourra mesurer la longueur et distance qu'il y aura depuis le lieu où il sera posé jusqu'à un autre lieu de remarque assez éloigné comme serait une tour marquée à la figure suivante C. Pour ce faire vous choisirez un lieu commode duquel vous puissiez voir la tour susdite auquel vous planterez un bâton et appliquerez l'observateur dessus et cela sera dit point de première station noté à la figure A. Le graphomètre appliqué comme dit est, le demi-cercle d'icelui vers la chose dont vous voulez savoir la distance vous reconnaîtrez un autre lieu accessible à côté de vous, moyennement éloigné auxquelles vous puissiez transporter l'observateur en ligne droite et aussi que vous puissiez voir du lieu susdit la même chose que vous entendez mesurer et ce lieu-là doit être coté par une herbe ou une pierre où y ferez planter un bâton pour le mieux discerner ; ce lieu ainsi reconnu et pour servir de seconde station marqué à la dite figure B et d'autant que le dit lieu se trouve du côté de la fenêtre de mesureur vous y adresserez aussi le bout fenêtre de l'alidade des stations inclinant ladite alidade si besoin est par telle manière que vous puissiez voir par les trous des pinnules le dit lieu de seconde station et doit demeurer ferme la dite alidade en ce même état. Puis vous conduirez doucement l'alidade mobile laquelle tourne par-dessus ladite alidade des stations et adresserez l'un des bouts d'icelle vers la tour et viserez par ses pinnules C, coté à la dite tour, et reconnaîtrez au demi-cercle de l'observateur quel degré ou partie de degré est arrêté la ligne de l'alidade mobile. Puis vous prendrez le petit ais de bois blanc ci-devant dit dessus lequel doit être attaché la feuille de papier et tirerez une ligne droite avec la plume et la règle du travers de ladite feuille…*

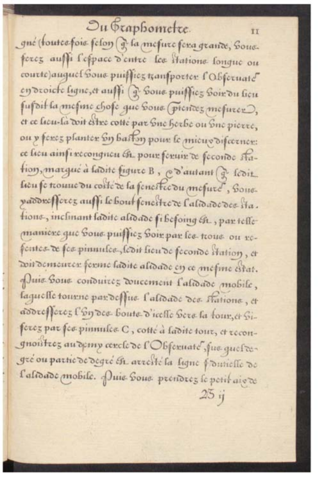


10 Declaration

La maniere de mesurer avec le Graphometre, la longueur et distance q̃l y aura depuis le lieu ou il sera posé dessus le baston, iusques à un autre lieu de remarque assez esloigné, q̃ le mesureur pourra discerner.

Chapitre ij.

Apres avoir suffisamment declaré toutes les parties et pieces desquelles le Graphometre est composé, il convient maintenant enseigner l'usage & pratique d'icelluy, laquelle un homme pourra mesurer la longue et distance qu'il y aura depuis le lieu ou il sera posé, iusques à autre lieu de remarque assez esloigné: comme seroit une tour marquee à la figure suyvante, C, pour ce faire vous choisirez un lieu commode, duq̃l vous puissiez voir la tour susdite, auquel vous planterez le baston, et appliquerez l'Observateur dessus, et ce lieu là sera dict poinct de premiere station noté à la figure A, le Graphometre appliqué comme dit est, le demy cercle d'icelluy, vers la chose dont vous voulez sçavoir la distance, vous recognoistrez un autre lieu accessible, à costé de vous, moiennement esloi-



Du Graphometre. 11

gné (toutesfois selon q̃ la mesure sera grande, vous ferez aussi l'espace d'entre les stations longue ou courte) auquel vous puissiez transporter l'Observateur en droicte ligne, et aussi q̃ vous puissiez voir du lieu susdit la mesme chose que vous pretendez mesurer, et ce lieu-là doit estre cotté par une herbe ou une pierre, ou y ferez planter un baston pour le mieux discerner: ce lieu ainsi recongneu est pour servir de seconde station, marqué à ladite figure B, & d'autant q̃ ledit lieu se trouve du costé de la fenestre du mesureur, vous y addresserez aussi le bout fenestre de l'alidade des stations, inclinant ladite alidade si besoing est, par telle maniere que vous puissiez voir par les trous ou refentes de ses pinnules, ledit lieu de seconde station, et doit demeurer ferme ladite alidade en ce mesme estat. Puis vous conduirez doucement l'alidade mobile, laquelle tourne par dessus l'alidade des stations, et addresserez l'un des bouts d'icelle vers la tour, et viserez par ses pinnules C, cotté à ladite tour, et recongnoistrez au demy cercle de l'Observateur, sus quel degré ou partie de degré est arresté la ligne fiducielle de l'alidade mobile. Puis vous prendrez le petit ais de

B ij

Figure 4. Illustration de la manière de mesurer avec le graphomètre

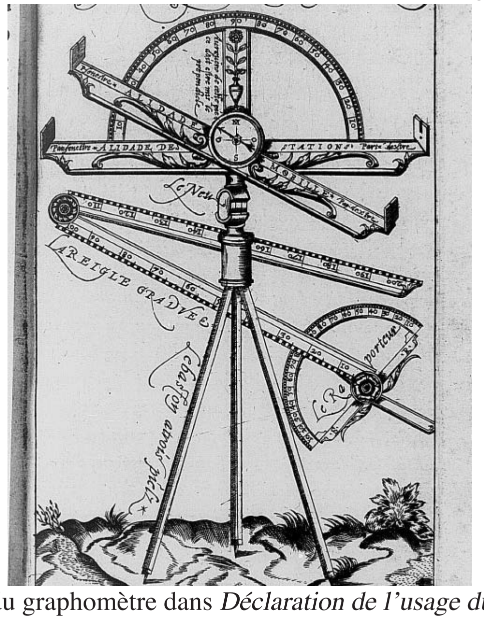


Figure 5. Illustration du graphomètre dans *Déclaration de l'usage du grafomètre* de Danfrie

**Grandes lignes d'un scénario possible**

Afin de décrire le scénario suivant lequel la séance se déroule, le plus simple est d'en présenter la feuille de route. Bien entendu, il ne s'agit que d'une proposition de mise en œuvre et bien d'autres choix sont envisageables.

| Minutage | Descriptif | Matériel nécessaire |
|---|---|---|
| 5 min | **Présentation de l'activité et son inscription dans la progression (lien avec les autres séances)** | Photocopies des documents de formation. |
| | **Première partie : mesure d'une distance inaccessible avec un miroir** | |
| 15 min (préparation) | Le travail est d'abord individuel. Les étudiants doivent lire les textes de la partie A et préparer l'expérimentation. | Vidéo projection des documents de formation (seule la partie A de la 1ère partie de la séance est étudiée). |
| 20 min (expérimentation) | Les étudiants sont répartis en 5 groupes de 4 étudiants environ (selon les niveaux de classes dont les étudiants ont la responsabilité lors de leur stage). On se rend devant le château de l'Inspé et on se met d'accord sur la hauteur à mesurer.<br><br>Les étudiants procèdent à l'expérimentation et en déduisent par le calcul la hauteur de l'édifice.<br><br>On remonte en salle de classe une fois les expériences terminées. | Les étudiants doivent posséder de quoi prendre des notes ainsi qu'une calculatrice.<br><br>L'enseignant fournit pour chaque groupe un miroir, un marqueur, un décamètre, un niveau à bulle et, si possible, un fil à plomb. |
| 5 min (exploitation) | Exploitation collective des résultats sous la conduite du formateur. | Tableur et vidéo projection de la page de calcul. |
| 20 min (preuve euclidienne et analyse) | Les étudiants étudient en groupes la démonstration d'Euclide (partie B). La mise en commun est suivie d'une analyse de l'activité traitée dans la partie A. | Vidéo projection des documents de formation (la partie B est désormais étudiée). |

| | | |
|---|---|---|
| 50 min | **Deuxième partie : anciennes méthodes de mesures de distances inaccessibles**<br><br>Les groupes d'étudiants réalisés précédemment sont maintenus. Chaque groupe se voit attribuer un texte historique de la deuxième partie (le choix du texte est réalisé par le formateur en fonction des groupes). Les étudiants doivent comprendre le texte et analyser la méthode ancienne avant de concevoir les grandes lignes d'une activité pour la classe. | Documents de formation. |
| 15 min | Pause | |
| 45 min | **Deuxième partie : anciennes méthodes de mesures de distances inaccessibles**<br><br>Chaque groupe désigne un ou deux représentants pour venir expliciter devant le groupe classe la méthode ancienne de mesure sur laquelle ils ont travaillé ainsi que les idées pour une mise en œuvre dans la classe.<br><br>Chaque groupe dispose de 8 min au maximum pour sa présentation et pour répondre à d'éventuelles questions. | Le tableau est mis à disposition des groupes ainsi qu'un visualiseur si des notes écrites sont à projeter.<br><br>Vidéo projection des documents de formation. |
| 5 min | **Bilan de la séance**<br><br>Un bilan rapide de la séance est dressé de façon collective. | |

**Choix didactiques et pédagogiques, éléments d'analyse a priori**

Rappelons que la première phase de la séance, portant sur la mesure d'une hauteur avec un miroir, est, dans les grandes lignes, destinée à une classe du secondaire (fin de cycle 4 ou classe de seconde). Elle a d'ailleurs été expérimentée plusieurs fois en classe de seconde générale dans le cadre de MPS (mesures et pratiques scientifiques) sur le thème de la vision. Elle était alors complétée d'autres activités et notamment par la venue d'un géomètre expert qui mesurait la même hauteur inaccessible que les lycéens dans la cour du lycée, avec ses instruments lasers, afin de comparer cette mesure ultra précise à celles plus rudimentaires effectuées grâce au miroir. Les élèves étaient souvent surpris par le bon ordre de grandeur de leur résultat. Cette intervention extérieure permettait une ouverture sur la découverte d'un métier. Cette piste d'exploitation est évidemment suggérée aux étudiants lors de la phase conclusive de la première partie de la séance qui consiste à analyser l'activité élève. Les choix didactiques et pédagogiques qui vont être développés ci-après concernent les attentes du formateur envers les professeurs stagiaires pour cette première partie de la séance.

*Lecture des textes*
*et première représentation de la situation*

L'activité commence par la schématisation de la situation de la mesure de la hauteur inaccessible (en l'occurrence, pour les étudiants, il s'agit de celle du « château » de l'Inspé, qui est une bâtisse ancienne située sur le site de l'Inspé et qui est précédée d'une belle esplanade) à partir de la lecture croisée des documents n°1 et n°2. Les deux textes fournis apparaissent suffisamment compréhensibles pour être traduits par un schéma. Le texte de l'*Encyclopédie* conduit même à une figure, qui deviendra le support du raisonnement, grâce aux références précises à des points nommés par des lettres. Il est donc important ici de ne distribuer que la partie A de la première phase et d'éviter que l'exercice ne soit vidé de son sens avec la figure euclidienne donnée dans la partie B. Ce choix explique aussi pourquoi l'illustration originale contenue dans le manuscrit médiéval, bien que très jolie, n'accompagne pas la traduction du texte latin.

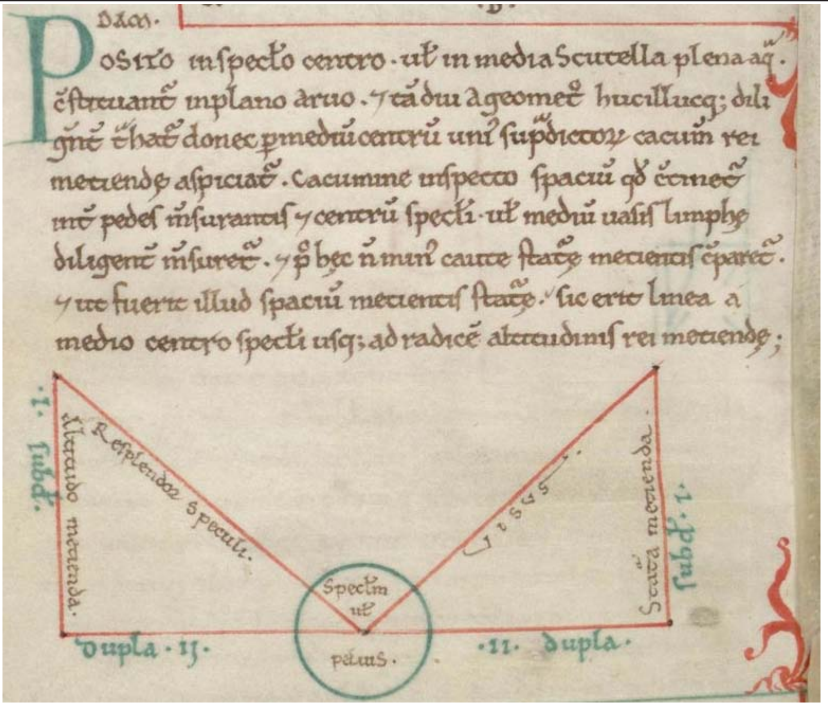



Figure 6. Extrait du *Manuscrit du Mont-Saint-Michel*, ms n°235, Bibliothèque patrimoniale d'Avranches

*Interprétation des textes et contenus mathématiques sous-jacents*

La formulation « cet intervalle sera à la taille de l'homme comme la longueur qui s'étend du point vers la base de la hauteur sera à la mesure de la hauteur » du manuscrit du Mont-Saint-Michel doit être interprétée comme une expression de la proportionnalité. Cette façon de formuler les choses est usuelle pour qui lit régulièrement des textes historiques, mais peut poser problème à un élève ou à un étudiant stagiaire. Ce point justifie le choix d'une comparaison des deux textes : celui de l'*Encyclopédie* parle de façon explicite d'une recherche de quatrième proportionnelle, ce qui éclaire sur la façon d'obtenir la distance inaccessible à partir des distances accessibles, sans pour autant indiquer la méthode de calcul de cette quatrième proportionnelle.

Une fois la figure réalisée (et au besoin contrôlée par le professeur), il est indispensable de demander de produire une justification mathématique de cette méthode, l'idée étant de mettre en perspective un raisonnement contemporain avec un raisonnement ancien (en l'occurrence celui d'Euclide). Le texte médiéval se présente comme un protocole expérimental à destination de l'utilisateur (pour ce dernier la justification n'est pas utile) car il s'agit d'une géométrie pratique. Le texte du XVIII$^e$ introduit quelques éléments de preuve, notamment en ce qui concerne la loi d'optique sur l'égalité des angles d'incidence et de réflexion qui n'est pas nécessairement connue des élèves. Lors de la réalisation en classe de l'activité, les élèves doivent donc comprendre pourquoi, dans une figure analogue à celle du document n°3, il suffit d'un calcul de quatrième proportionnelle pour trouver la hauteur cherchée. Le fait de laisser la question ouverte en terme de justification autorise, selon le niveau de classe, une diversité de pistes : le recours aux triangles semblables, l'utilisation de la tangente dans un triangle rectangle ou celle du théorème de Thalès (après une étape de transformation de la figure qui consiste à emboîter le petit triangle dans le grand ou à se ramener à la configuration papillon en symétrisant un triangle par rapport à l'horizontale du sol). Certains élèves se servent de ce célèbre théorème sans transformation préalable de la figure pour se ramener à l'une des configurations canoniques du théorème Thalès. C'est l'occasion de montrer la plus grande souplesse du recours à la similitude des triangles qui ne nécessite pas de configuration spéciale. Il suffit en effet de prouver que les deux triangles sont équiangles : ce qui est précisément assuré par le fait que les deux triangles sont rectangles – condition qui provient de la bonne verticalité du bâtiment et de l'observateur ainsi que de la bonne horizontalité du sol – et par la loi de réflexion des rayons lumineux sur un miroir plan. L'intérêt de la mise en commun réside précisément dans la diversité des méthodes utilisées (ce qui implique leur repérage par l'enseignant lors de la phase de recherche individuelle).

*Intérêts de l'expérimentation*

L'exercice pourrait se limiter à cette activité « papier crayon » suivie d'une application numérique, mais le fait d'expérimenter en plein air constitue une véritable plus-value. L'idée est de marquer les esprits sur le caractère pratique de cette géométrie, sur le fait qu'elle s'appuie sur des instruments et des gestes mais aussi, dans ce cas précis, sur la possibilité d'obtenir, avec des outils très ordinaires, un résultat tout à fait honorable en terme de précision. Rares sont les occasions d'expérimenter de la sorte en mathématiques : notre enseignement abonde de situations abstraites ou pseudo-concrètes. Mais ici, les théorèmes justifient une technique de mesure effective, qui est avérée dans l'histoire. Invoquer l'histoire des mathématiques, c'est donner du sens aux notions : elles ne constituent pas simplement un savoir scolaire, mais de véritables ressources pour résoudre des problèmes que les hommes se sont posés dans le passé, bien avant la mise au point des outils performants que nous connaissons actuellement.

L'expérimentation sur le terrain nécessite naturellement que les étudiants, comme les élèves, soient répartis par groupes (4 étudiants au maximum par groupe). Il faut, en effet, au moins un observateur et deux mesureurs à l'aide du décamètre, mais il est utile qu'un dernier étudiant vérifie les verticales et les horizontales, et prenne note des mesures effectuées avant de passer au calcul. À l'occasion de cette expérience, ils doivent mettre en œuvre un protocole expérimental et mieux comprendre la pertinence de chacun des outils mis à disposition. Avant de débuter, tous les groupes se mettent d'accord sur la hauteur à mesurer afin que la comparaison des résultats ait un sens. On observe souvent, même avec les étudiants pourtant mieux aguerris, que de nombreux groupes se contentent d'une unique mesure et viennent, inquiets, s'enquérir auprès du formateur de la justesse de leur résultat ! Un des enjeux pour ce dernier de leur faire comprendre qu'une seule mesure ne suffit pas : il faut mettre en place un système de contrôle de l'ordre de grandeur. Pour cela, d'autres mesures sont nécessaires en déplaçant le miroir, en changeant les écartements, ce qui donne aussi l'occasion de permuter les rôles des individus au sein des groupes et de faire manipuler tout le monde. Cette multiplicité de mesures est d'ailleurs nécessaire pour l'étape suivante de la séance.

Une fois les expériences terminées, de retour dans la salle de classe, l'enseignant propose une exploitation des résultats avec un tableur (lors des formations, les étudiants proposent spontanément de recourir à cet outil logiciel). Les différentes mesures de chacun des groupes sont saisies par le professeur et affichées. Cela lui donne la possibilité d'évoquer avec les professeurs stagiaires la question du traitement des données : ces dernières sont d'abord ordonnées, puis, après avoir supprimé les valeurs extrêmes ou aberrantes, une moyenne est calculée, ce qui permet d'obtenir une valeur approchée de la hauteur du bâtiment mesurée.

*Étude du texte d'Euclide et réflexion sur une exploitation en classe*

À l'issue de cette phase d'exploitation des données, les élèves ou les étudiants sont conviés à un deuxième temps de réflexion sur la justification du protocole expérimental, à partir de la lecture d'un texte d'Euclide extrait de son *Optique*. Il est assez simple de repérer que l'outil utilisé par Euclide est la similitude des triangles (d'autant que cette méthode a été mise en évidence dans la première phase démonstrative). L'intérêt du texte se situe ailleurs. D'abord, cela montre que la méthode de mesure d'une hauteur à l'aide d'un miroir plan ne date pas du Moyen Âge comme le manuscrit du Mont-Saint-Michel pourrait le laisser penser. Et puis, que les élèves aient déjà lu un texte euclidien ou non, l'idée est de souligner son organisation et de discuter la rigueur du discours, les mots et les notations utilisés, ainsi que certaines formulations.

Pour les étudiants, la question de la comparaison du texte euclidien avec une preuve moderne est posée de façon assez ouverte car ils ont déjà eu l'occasion d'étudier des extraits des *Éléments* au cours de leur formation dans cette unité d'enseignement d'histoire et d'épistémologie. Ils peuvent donc pointer les différences de vocabulaire et de notation : la droite AB (pour le segment [AB] ou la longueur AB selon le contexte), l'angle compris sous les droites AG, GB (pour l'angle

$\widehat{AGB}$ ), mais également les différences de formulation : « donc, la droite AB est à la droite BG comme la droite CH est à la droite HG » pour exprimer la proportionnalité. Ces éléments peuvent constituer quelques obstacles pour une exploitation avec des élèves. Souvent les stagiaires se focalisent sur les notations et les mots, et ont peur que la lecture de tels textes encourage les élèves à ne plus être rigoureux avec les règles d'écriture des droites, des segments et des longueurs. En réalité, en en débattant, on parvient à les convaincre que, d'une part, l'absence de notations et la polysémie des mots n'empêchent en rien les élèves de comprendre le sens du texte (souvent, les élèves se comprennent entre eux sans utiliser un vocabulaire ni des notations rigoureuses). D'autre part, c'est au contraire l'occasion de mettre en évidence la nature des objets manipulés et de faire constater qu'à cette époque l'usage et les préoccupations étaient différents. En réalité, les notations actuelles constituent davantage un dispositif pédagogique qui préoccupe plus souvent le professeur que l'élève (on peut faire des mathématiques sans ces notations, comme le font Euclide ici ou, plus près de nous, les anglo-saxons).

En revanche, on peut avoir envie de souligner la rigueur de la structure de la preuve euclidienne : énoncé de la proposition, construction de la figure avec le protocole de construction, les arguments enchaînés en pas déductifs et enfin la conclusion, à l'image de la structure de chacune des propositions des *Éléments*. On peut aussi profiter de cette lecture pour distinguer production de la preuve et rédaction de la preuve.

Les étudiants doivent alors imaginer des exploitations possibles du texte euclidien à destination d'une classe de collège ou de lycée. Au-delà des simples questions de compréhension de certaines expressions ou passages, ils peuvent penser à des exercices de comparaison (comparer le texte euclidien à un texte contemporain ou à celui de l'*Encyclopédie*), de traduction (traduire le texte euclidien dans un langage contemporain), ou d'imitation (écrire à la façon d'Euclide un certain nombre de phrases données dans le langage contemporain) … L'idée d'une remise en ordre de la proposition euclidienne afin de mettre en évidence la structure du texte et la démarche déductive est une autre possibilité.

### *Conception d'une activité pour la classe*

Les échanges conclusifs sur cette exploitation laissent place au second temps de la séance durant lequel les étudiants doivent concevoir les grandes lignes d'une activité à destination de la classe, à partir de textes historiques d'époques diverses, mais tous en lien avec le problème des distances inaccessibles. Faute de temps, il ne leur est pas demandé de produire une séance en entier (énoncé de l'activité, trace écrite, analyse *a priori*, etc.), mais seulement un scénario sommaire de mise en œuvre dans une classe à un niveau donné, en précisant les tâches envisagées et les objectifs visés. Il n'est pas non plus demandé un document écrit formel, mais une simple présentation orale, ce qui autorise une prise de notes lors du travail de groupe. Lors des exercices de conception d'activités historico-mathématiques, un soin particulier est réclamé aux stagiaires sur des éléments spécifiques à ce type d'activités, à savoir : les objectifs visés en terme d'introduction d'une perspective historique et épistémologique, la façon dont le texte est utilisé, les tâches éventuellement demandées (comprendre, traduire, comparer, imiter…), et enfin, la trace écrite fournie aux élèves tirant un bilan historique et épistémologique de l'activité. Ces points peuvent être abordés lors de l'interaction orale avec chacun des groupes, mais il est également possible de demander qu'ils soient développés dans une synthèse écrite (remise postérieurement à la séance).

La deuxième partie de la séance va permettre d'enrichir les connaissances des étudiants sur les méthodes de mesures inaccessibles au cours du temps et sur d'éventuels instruments utilisés pour cela. Le choix d'un travail de groupe avec courte présentation orale permet à l'ensemble du groupe classe de découvrir plusieurs méthodes alors qu'un travail collectif plus approfondi sur l'une d'entre elles aurait l'inconvénient de masquer cette diversité. Pour gagner du temps, les groupes de travail constitués lors de la première partie de la séance, et notamment pour l'expérimentation à l'extérieur, sont conservés. Il est donc important d'anticiper la constitution de ces groupes en fonction des niveaux de classes des étudiants lors de leur stage en responsabilité. Ainsi, chaque texte de la deuxième partie est attribué aux groupes selon ce critère : le carré géométrique (document n°4), conduisant à l'utilisation de triangles semblables, est approprié pour des classes de 3$^{e}$ ; le bâton de Jacob (document n°5) peut illustrer une utilisation du théorème de Thalès dans la configuration des triangles emboîtés en classe de 4$^{e}$ ; la flèche d'Alberti (document n°6) peut aussi être abordée avec le même outil en 4$^{e}$ mais donnera également l'occasion d'y voir une application des homothéties, elle se prête donc aussi au niveau 3$^{e}$ ; la mesure de la profondeur d'un puits avec ou sans perche (documents n°7 et 8) conduit à nouveau à l'utilisation de triangles semblables ; le graphomètre de Danfrie (document n°9) évoque autant les réductions à l'échelle que la similitude des triangles, et peut donc être envisagé tout au long du cycle 4 selon les outils mis en jeu. Toutes les situations proposées peuvent aussi être abordées en classe de seconde lorsqu'il faut réactiver certaines connaissances de géométrie. Il est important de signaler au lecteur intéressé l'étendue des possibles en ce qui concerne les mesures de hauteurs inaccessibles : on peut en effet trouver une situation adaptée à chaque niveau de classe. Par exemple, l'utilisation du bâton de Gerbert, non présentée ici, peut s'envisager dès la classe de 6$^{e}$ car l'explication de la procédure ne nécessite que la connaissance des propriétés du triangle rectangle isocèle. Pour des classes de lycée, il y possibilité de proposer des procédures plus astucieuses, sous la forme de récréations mathématiques, comme la mesure d'une hauteur inaccessible à l'aide de deux bâtons inégaux que l'on trouve dans le *Dictionnaire mathématique* d'Ozanam.

### *Éléments d'analyse a posteriori*

Qu'il s'agisse d'élèves ou d'étudiants stagiaires, la première partie de l'activité avec l'expérimentation en extérieur est toujours grandement appréciée. Comme cela été dit, outre le plaisir de la manipulation qui sort de l'ordinaire, la crédibilité des résultats obtenus par la mesure à l'aide du miroir étonne au regard de la simplicité de la méthode. On observe toujours un grand enthousiasme lors de cette phase.

La compréhension des textes historiques proposés dans l'ensemble de la séance ne pose pas de réelle difficulté aux professeurs stagiaires. Si ces derniers ont acquis une certaine aisance lors de leur formation à force de lectures, cela s'explique aussi par la thématique restreinte de la séance : les outils mathématiques utilisés sont souvent les mêmes et certaines formulations (comme celle de la proportionnalité : « *a* est à *b* comme *c* est à *d* ») reviennent régulièrement. En ce sens, la lecture et l'analyse des textes de la première partie permettent d'aborder plus sereinement la seconde partie durant laquelle les stagiaires sont autonomes.

Mais ces variations autour d'un même thème constituent également un désagrément lors de cette séance : en effet, les courtes présentations orales se révèlent être un peu répétitives. Une fois la méthode présentée par les étudiants et le schéma réalisé au tableau, les explications mathématiques apparaissent évidentes et accessoires. Certes quelques groupes développent des idées assez originales dans l'exploitation des documents proposés, mais en général les scénarios des séances conçues sont assez semblables les uns aux autres et l'enchaînement des exposés peut lasser.

En tout cas, un point positif qui ressort des productions des groupes d'étudiants, c'est l'idée d'expérimenter avec la classe dès que cela est possible. Le fait d'avoir eux-mêmes manipulé dans la première phase de la séance, les convainc de la faisabilité de l'expérience en extérieur. Ainsi, plusieurs groupes imaginent jusqu'à faire construire l'instrument aux élèves (bâton de Jacob, flèche d'Alberti, graphomètre…) avant de l'utiliser en pratique. En ce sens, ils conçoivent des situations d'imitation (« mesurer à la façon de… ») très formatrices. Ces situations s'apparentent à celles déjà imaginées par certains groupes de recherche des Irem, vers lesquelles il est possible de les diriger, grâce à une bibliographie, pour approfondir le sujet. L'autre élément positif est de voir que chaque groupe réussit à utiliser le texte historique comme un outil d'apprentissage et non simplement comme une illustration à caractère anecdotique. Il reste à espérer que les jeunes enseignants qu'ils deviennent se souviennent de cette formation et conservent cette volonté de faire vivre dans leurs classes ce genre de séances, à la fois expérimentales et teintées d'histoire, pour le plus grand plaisir des élèves !

## Bibliographie

*Sources primaires*

ALBERTI LEON BATTISTA, *Divertissements mathématiques*, Seuil, Paris, 2002.

DANFRIE PHILIPPE, *Déclaration de l'usage du graphomètre*, Danfrie, Paris, 1597 (consultable sur https://www.e-rara.ch).

DUC DE BOURGOGNE, *Élémens de géométrie*, Ganeau, Boudot & Rondet, Paris, 1722 (consultable sur https://gallica.bnf.fr)

ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE, nouvelle édition enrichie de remarques, dédiée à la Sérénissime République de Venise, Mathématiques, Tome second, Padoue, 1789.

EUCLIDE, *L'optique et la catoptrique*, trad. Paul Ver Eecke, Paris, Albert Blanchard, 1959.

FINE ORONCE, *De re et praxi geometrica libri tres, figuris et demonstrationibus illustrati*, ae. Gourbinum, Paris, 1556 (consultable sur https://gallica.bnf.fr).

MANUSCRIT DU MONT-SAINT-MICHEL, ms n°235, Bibliothèque patrimoniale d'Avranches (consultable en ligne sur https://www.unicaen.fr/bvmsm)

OZANAM JACQUES, *Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques*, Huguetan, Amsterdam, 1691.

*Sources secondaires*

BARBIN ÉVELYNE (dir.), *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*, Paris, Vuibert Adapt-Snes, 2010.

BARBIN ÉVELYNE (dir.), *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*, Paris, Vuibert Adapt-Snes, 2012.

BARBIN ÉVELYNE (dir.), *Les constructions géométriques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses, 2014.

BARBIN ÉVELYNE, BÉNARD DOMINIQUE & MOUSSARD GUILLAUME (dir.), 2018, *Les mathématiques et le réel, Expériences, instruments, investigations*, Rennes, PUR, 2018.

BARBIN ÉVELYNE, « L'instrument mathématique comme invention et connaissaince-en-action », *Repères IREM*, n°110, janvier 2018, p. 59-77.

CHATELON DAVID & TROUDET MARC, « Levé de plan au graphomètre : de la cour à la feuille de papier ou à l'écran d'ordinateur », *Repères IREM*, n°94, avril 2014, p. 63-77.

COMMISSION INTER-IREM collège, 1995, « Autour de Thalès », IREM de Lyon.

EVEILLEAU THÉRÈSE, « Mesurer des longueurs inaccessibles avec des bâtons », *Repères Bulletin de l'APMEP*, n°510, 2014, p. 424-428.

HÉBERT ÉLISABETH, *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Ellipses, Paris, 2004.

JOHAN PATRICE, « Géomètres en herbe "à l'ancienne" », *Repères IREM*, n°23, avril 1996, p. 31-42.