

---

## GEOMETRIE ET TRAJECTOIRES : NEWTON ET LE PROBLEME KEPLERIEN

---

*Ou comment résoudre par la géométrie  
une équation du mouvement*

Frédéric CHANDELIER  
Groupe Mathématiques - Physique  
Irem de Besançon

### Introduction

Les lois de Kepler et les lois de Newton sont des grands classiques du programme de Terminale avec spécialité physique-chimie. Seulement, il n'est pas possible de traiter complètement et analytiquement le problème physique considéré sauf dans le cas de trajectoires circulaires (mouvement de satellites par exemple). En effet, bien que les élèves apprennent les rudiments de cinématique, il ne leur est pas encore possible d'intégrer les équations du mouvement sauf dans le cas d'un système ponctuel (ou assimilé) plongé dans un champ constant de type gravitationnel (ou électrostatique). Seuls les cas de la chute libre et du classique « tir balistique », ainsi que la loi de rappel élastique (de Hooke) peuvent être envisagés sous l'angle de la résolution analytique.

Mais le cas réaliste d'une force en inverse au carré de la distance est hors de portée. Tout au plus, peut-on introduire le système de coordonnées polaires (ou cylindriques) et faire apprendre à dériver des vecteurs tournants par projection sur un repère fixe.

D'ailleurs de plus en plus, la résolution analytique des équations du mouvement dans le cas képlérien n'est plus traité dans les programmes des premières années d'enseignement supérieur. Alors suivant l'idée de [1] et des précurseurs tels que Newton [2] et Hamilton [3], il nous a semblé intéressant de montrer que l'on pouvait avoir accès à une solution au problème de Kepler, c'est-à-dire, résoudre l'équation de Newton et déterminer la trajectoire dans le cas de la force de la gravitation de Newton, sans passer par la méthode analytique, mais uniquement en utilisant la géométrie du plan et des transformations géométriques abordables au lycée. Cela est rendu possible par la facilité à déterminer un hodographe simple des problèmes physiques considérés. L'hodographe a été largement employé dans le passé mais n'est presque plus évoqué pour la résolution de telles situations, sauf pour des spécialistes et dans des cas bien particuliers. Il nous a aussi semblé intéressant d'y revenir et de montrer que cet outil permet une étude simplifiée.

Dans un premier article, on s'attachera à faire des rappels sur les lois de Kepler et les lois de Newton, à définir quelques notions fondamentales (référentiels galiléens, principe de relativité), à poser le problème de Kepler et à expliquer comment amener une solution par la géométrie sans résoudre analytiquement. Ainsi les fluxions ou variations élémentaires de Newton sont introduits et l'hodographe est aisément déterminé grâce au vecteur de Hamilton, grandeur conservée au cours du mouvement.

On expose ensuite plusieurs façons de déterminer la trajectoire, d'abord point par point en utilisant la propriété de conservation des aires, puis de façon globale par des transformations géométriques. Ce qui est encore parfois enseigné est plutôt l'approche analytique par les lois de Binet que ce soit pour la résolution de l'équation vectorielle du mouvement de Newton, ou par l'approche énergétique, ce qui permet tout de même une résolution relativement abordable, ou une étude qualitative de la nature de la trajectoire.

Cependant, on montrera dans ce premier article que, par la connaissance d'une grandeur vectorielle conservée (le vecteur de Hamilton) on peut en utilisant des outils rudimentaires tels le produit scalaire et la conservation de l'aire d'un triangle, donc des notions géomé-

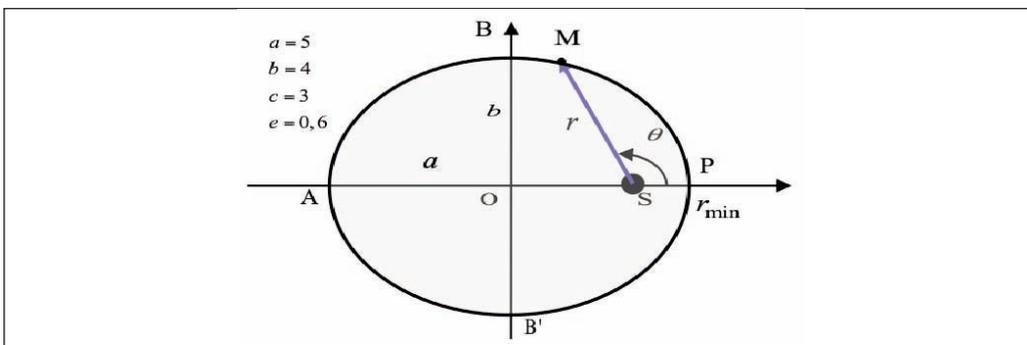
triques, obtenir une résolution plus illustrative, moins calculatoire et avec une plus haute portée pédagogique (illustration par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour la construction de la trajectoire).

Dans un second article à venir, on exposera le contenu d'un stage de formation proposé, un retour d'expérience, et on évoquera des activités pour amener la construction de trajectoire solution au problème pour des élèves ou des étudiants. On montrera également qu'une étude qualitative et presque quantitative de l'influence des conditions initiales était aisée par l'utilisation du vecteur de Hamilton, ce qui traditionnellement est fait par l'approche énergétique.

**A. — Eléments de mécanique Newtonienne – mise en place des notations**

**I. Les lois de Kepler**

*Johannes Kepler* est un astronome célèbre pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique de Nicolas Copernic, affirmant que la Terre tourne autour du Soleil mais surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas autour du Soleil en suivant des trajectoires circulaires parfaites mais des *trajectoires elliptiques*.



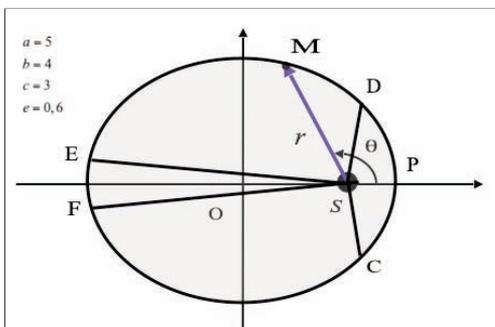
Kepler a découvert les relations mathématiques (dites *Lois de Kepler*) qui régissent les mouvements des planètes sur leur orbite. Les deux premières lois de Kepler sont publiées en 1609 et la troisième en 1618.

*Première loi – Loi des orbites*

Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques (donc contenu dans un plan), dont le Soleil occupe l'un des foyers. Dans le référentiel héliocentrique, le Soleil occupe toujours l'un des deux foyers de la trajectoire elliptique des planètes qui gravitent autour de lui. On donne ci-dessus le schéma d'une orbite elliptique, l'excentricité étant très exagérée vis-à-vis de celles des planètes du système solaire.

*Deuxième loi – Loi des aires*

Si *S* est le Soleil et *M* une position quelconque d'une planète, l'aire (de la surface) balayée par le segment [SM] entre deux positions *C* et *D* est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions *E* et *F* si la durée qui sépare les positions *C* et *D* est égale à la durée qui sépare les positions *E* et *F*. La vitesse d'une planète devient donc plus grande lorsque la planète se rapproche du Soleil. Elle est maximale au voisinage du rayon le plus court (*périhélie*), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (*aphélie*).



De cette deuxième loi, on déduit que la force exercée sur la planète est constamment dirigée vers le Soleil. Kepler écrira à un collègue : « Une chose est certaine : du Soleil émane une force qui saisit la planète ». On donne une illustration ci-dessus de la loi des aires.

*Troisième loi – Loi des périodes*

Le carré de la période sidérale *T* d'une planète (temps entre deux passages successifs devant une étoile) est directement proportionnel au cube du demi-grand axe *a* de la trajectoire elliptique de la planète :

$$T^2 / a^3 = \text{constante.}$$

Isaac Newton comprit le lien entre les lois de la mécanique classique et la troisième loi de Kepler et en déduisit la constante de proportionnalité.

**II. Newton, ses lois, l'attraction approximativement universelle**

Les lois de Kepler furent ensuite exploitées par Isaac Newton pour élaborer la *théorie de la gravitation universelle*. Pour rendre compte de ces lois [2], il propose deux axiomes qui posent les bases théoriques pour la résolution des problèmes physiques (ou mécanique Newtonienne) :

1°) Un corps *isolé* est en *mouvement rectiligne uniforme* (ou principe d'inertie de Newton : sa vitesse, sa direction et son sens ne varient pas au cours du temps, et donc, à ce vecteur vitesse constant près, son mouvement « est comme rien », c'était déjà une remarque de Galilée, contemporain de Kepler.

2°) A l'inverse, si la vitesse d'un corps *varie dans le temps*, c'est qu'il est soumis à l'influence d'une action : une force, ou une

résultante regroupant toutes les forces extérieures s'exerçant sur lui.

1°) *Quelques notations*

L'espace et le temps sont considérés absolus. Le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  a trois composantes exprimées dans un repère *orthonormé*  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  fixe par rapport au référentiel inertiel  $\mathfrak{R}$  (figure 1) et s'exprime comme la dérivée temporelle du vecteur position

$$\overrightarrow{OM}(t) \Big|_{\mathfrak{R}} = (x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z) :$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) \Big|_{\mathfrak{R}} &= v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y + v_z \cdot \vec{u}_z \\ &= \frac{dx}{dt} \cdot \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{u}_z , \end{aligned}$$

donnée par la dérivée des trois coordonnées (puisqu'il est fixe).

2°) *Seconde loi de Newton*

La *variation de la vitesse* par rapport au temps d'un *système ponctuel* de masse  $m$  dans un *référentiel inertiel* (ou *galiléen*) est reliée à la force résultante subie par :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i \quad \left| \begin{array}{l} m \text{ en kg} \\ \vec{v} \text{ en m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \vec{F}_i \text{ en N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \end{array} \right. \quad (1),$$

où  $\{\vec{F}_i, i \in \mathbb{N}\}$  est l'ensemble des forces extérieures appliquées au système.

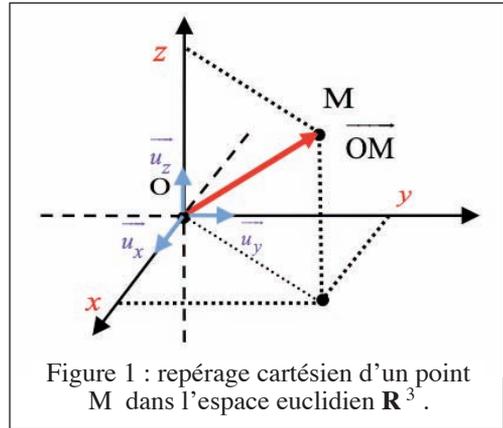


Figure 1 : repérage cartésien d'un point M dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .

3°) *Loi universelle de la gravitation*

A partir de la 3ème loi de Kepler, Isaac Newton développa sa théorie de la gravitation. La *loi universelle de la gravitation* est la loi décrivant la gravitation comme une force responsable de la chute des corps et du mouvement des corps célestes, et de façon générale, de l'attraction entre des corps ayant une masse [2]. Deux corps ponctuels de masses respectives  $m_A$  et  $m_B$ , situés respectivement en A et B, distants de  $r = AB$  s'attirent avec des forces de même valeur (mais *vectoriellement opposées*), *proportionnelles au produit des deux masses*, et *inversement proportionnelle au carré de la distance* qui les sépare.

La force exercée sur le corps A par le corps B est égale en intensité à la force exercée sur le corps B par le corps A. Elle est donnée par l'expression :

$$F_{B \rightarrow A} = F_{A \rightarrow B} = G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2} \quad (2) \quad \left| \begin{array}{l} m_A, m_B \text{ en kg} \\ r \text{ en m} \\ F_{B \rightarrow A}, F_{A \rightarrow B} \text{ en N} \\ G \text{ en N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \end{array} \right.$$

La constante  $G$  est la constante de Newton ou constante gravitationnelle. Elle est une *constante physique fondamentale*. Sa valeur connue en tenant compte d'une incertitude standard vaut :

$$G = (6,67408 \pm 0,00031) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

Remarques :

- On garde le qualitatif « *universelle* » car à l'époque de sa découverte, elle permettait d'expliquer à la fois les phénomènes célestes et l'attraction gravitationnelle à la surface de la Terre, les poids. Mais vers 1900, on sait qu'il reste à expliquer un résidu dans la *précession* de la trajectoire de la planète Mercure autour du Soleil. Bien qu'il n'ait pas cherché à résoudre cette anomalie, Albert Einstein expliquera ces fameuses 43 secondes d'arc par siècle, en inventant sa théorie de la gravitation appelée *relativité générale* en 1915. Il chercha en fait à expliquer comment cette interaction semble se transmettre « instantanément » alors que rien ne semble pouvoir aller plus vite que les ondes électromagnétiques (à la célérité de la lumière  $c$ ).
- On constate que l'expression (2) ne fait nullement intervenir le temps. Johannes Kepler ainsi que Pierre Simon de Laplace avaient déjà pensé à ce problème (pages 35-37 dans [4]) en considérant le concept de champs et non plus de force de gravitation. La théorie d'Einstein représente un changement majeur par rapport à la théorie newtonienne, puisqu'elle fait perdre au *temps* et à l'*espace* leur caractère d'*absolus*, de même que l'astronomie de Copernic modifiait radicalement la vision du monde de Ptolémée.

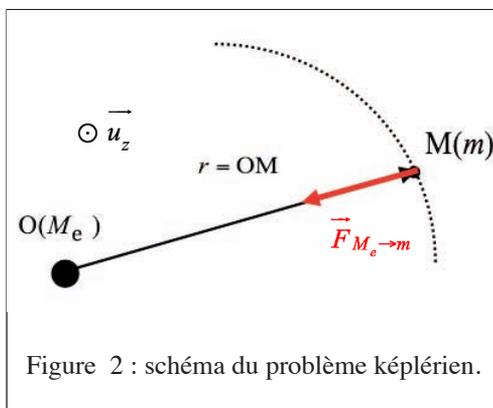
### III. Le problème à deux corps gravitationnel ou problème képlérien

#### 1°) Position du problème

On considère un astre (par exemple le Soleil), situé à l'origine  $O$  du référentiel  $\mathfrak{R}$  supposé inertiel et muni du repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  fixe précédent. On suppose la répartition de la matière uniforme si bien que l'on considère l'objet ponctuel de masse  $M_e$  concentrée en  $O$ . On s'intéresse au mouvement d'un second astre (par exemple la Terre), supposé aussi ponctuel au point  $M$  de masse  $m$ , subissant l'attraction gravitationnelle de la première masse (figure 2). La relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel inertiel ou seconde loi de Newton appliquée à la masse ponctuelle  $m$  située en  $M$  s'écrit alors :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{M_e \rightarrow m} \quad (3),$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse de l'astre situé en  $M$  dans le référentiel  $\mathfrak{R}$ .



De même, on peut l'appliquer à l'astre situé au centre du repère O :

$$M_e \cdot \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{F}_{m \rightarrow M_e},$$

où  $\vec{v}_e$  est la vitesse de l'astre situé en O.

En additionnant ces deux relations vectorielles :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + M_e \cdot \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{F}_{M_e \rightarrow m} + \vec{F}_{m \rightarrow M_e}.$$

On considère que les deux astres sont seuls et forment un système isolé  $\{O(M_e), M(m)\}$ .

Le principe d'action-réaction ou troisième loi de Newton s'applique et donc  $\vec{F}_{M_e \rightarrow m} + \vec{F}_{m \rightarrow M_e} = \vec{0}$ . Ainsi, on obtient :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + M_e \cdot \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{0}$$

ou 
$$\frac{m}{M_e} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{0} \quad (4)$$

au cours du mouvement.

On considère le cas (très fréquent)  $M_e$  très grand par rapport à  $m$  si bien que l'on a  $\frac{m}{M_e} \approx 0$  (rapport négligeable devant 1). On en conclut grâce à la relation vectorielle (4) que  $\frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{0}$ .

Approximativement, on obtient que  $\vec{v}_e$  est un vecteur constant, et donc que l'astre en O est animé

d'un *mouvement rectiligne uniforme*. Le cas général se traite également en considérant le barycentre du système des deux masses comme centre du repère. Ainsi, on se place dorénavant dans le repère supposé galiléen de centre O, et on étudie le mouvement de M dans ce référentiel.

## 2°) Equation de la trajectoire

Il suffit alors de choisir la description *géométrique* la plus adaptée pour décrire le problème physique. La force d'attraction gravitationnelle est une force dite *centrale*, car elle pointe vers le *centre attracteur* et ne dépend que de la distance à celui-ci (figure 2). Ce centre, qui correspond au centre du repère, possède donc une position particulière et singulière (il est considéré comme fixe), la symétrie du problème implique donc d'utiliser un système de coordonnées plus adaptées, comme le système sphérique ou cylindrique, dont O est le centre.

Si on définit le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  par  $\vec{OM} = r \cdot \vec{u}_r = \vec{r}$ , avec  $OM = r$ , alors la force d'attraction gravitationnelle s'écrit :

$$\vec{F}_{M_e \rightarrow m} = -G \cdot \frac{M_e \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r = -G \cdot \frac{M_e \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (5)$$

où  $\vec{r}$  est appelé *rayon vecteur* et l'équation du mouvement (3) devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -G \cdot \frac{M_e}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (6).$$

Les lois de Kepler et les observations préliminaires de Tycho Brahe stipulent que le *mouvement est plan* (contenu dans le plan défini par la vitesse et la position de M à un instant donné « initial »), ce qui ne semble pas évident au regard de l'expression de (6). On peut le démontrer rigoureusement avec l'introduction de la notion de *moment cinétique*, de *moment d'une force* et

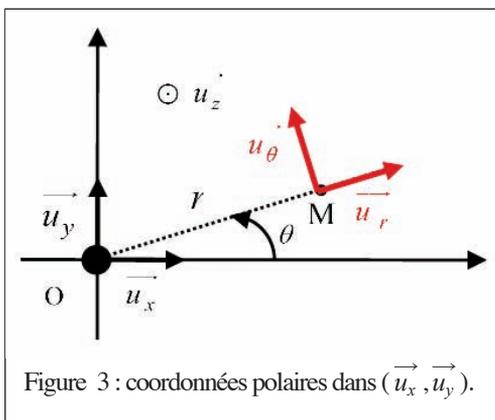


Figure 3 : coordonnées polaires dans  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .

de *théorème du moment cinétique* démontré à partir de la relation (3). Le mouvement plan est vraiment une caractéristique générale de toute force centrale, en particulier comme (5).

On choisit alors le plan  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  comme étant le plan de la trajectoire, ce qui permet alors de considérer des *coordonnées cylindriques*  $(r, \theta)$ , [voir figure 3], de centre O et d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ . Un repère de vecteurs orthonormés plus adapté, appelé *repère polaire local* (car dépendant du point M et de l'angle  $\theta$ ), est donné par  $\vec{u}_r(\theta)$  et le vecteur  $\vec{u}_\theta(\theta)$  *directement* orthogonal :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . On rappelle alors les relations de passages entre les deux bases de vecteurs :

$$(7) \quad \begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta \cdot \vec{u}_x + \sin \theta \cdot \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \cdot \vec{u}_x + \cos \theta \cdot \vec{u}_y \end{cases}$$

$$\text{ou } (8) \quad \begin{cases} \vec{u}_x = \cos \theta \cdot \vec{u}_r - \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_y = \sin \theta \cdot \vec{u}_r + \cos \theta \cdot \vec{u}_\theta \end{cases}$$

### B. — Solution « géométrique » de Newton

La vitesse n'est pas constante et dépend des coordonnées et du temps. Trouver les équations horaires (la donnée de  $M(r(t), \theta(t))$  au cours du temps), ou même la vitesse en fonction du temps n'est pas un problème aisé.

Newton ne pouvait procéder comme de nos jours puisque la notion même d'équation différentielle n'a été inventée que par ses successeurs ! Il a utilisé la géométrie uniquement en s'appuyant sur le cadre introduit dans les paragraphes II et III de la partie précédente. La difficulté du problème ainsi posé par Newton réside en partie dans le fait que le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$ , et donc  $\vec{u}_\theta$ , varie au cours du temps car ils dépendent de l'angle  $\theta(t)$  paramétrisant la place du point sur la trajectoire.

Il est donc important de considérer comment ils varient pour décrire le problème physique. Pour résoudre le défi du mouvement de la Terre autour du Soleil, il introduit sa *théorie des fluxions* : *fluxion* est le terme qu'il utilise pour désigner *la vitesse à laquelle une quantité variable (appelée fluente) varie au cours du temps*. Cette notion est une alternative à celle des infiniment petits proposée par Leibniz pour traiter le calcul différentiel.

Si  $x$  désigne une quantité variable, Newton désigne par  $\dot{x}$  sa fluxion. Le but du calcul différentiel selon Newton consiste en la comparaison des fluxions entre elles et en leur traitement. Si  $x$  et  $t$  sont deux quantités variables, le quotient  $\dot{x}/\dot{t}$  n'est autre que le  $dx/dt$  de Leibniz, « quotient ultime de deux accroisse-

ments évanescents » et correspond, au sens moderne, à la dérivée de la fonction  $x$  par rapport à la variable  $t$ .

### I. La seconde Loi de Kepler retrouvée

#### 1°) Vitesse aréolaire

On considère deux points de la trajectoire séparés par un intervalle *infinitésimal* de temps  $dt$ , repérés par les rayons vecteurs  $\vec{r}(t)$  et  $\vec{r}(t + dt)$  (voir figure 4), formant ainsi l'angle infinitésimal  $\hat{O} = d\theta$  (du même ordre que  $dt$ ). Avec l'origine, ils définissent un triangle *rectangle* (figure 5) en  $M(t)$  car, dans l'approximation au premier ordre, l'arc de trajectoire de longueur infinitésimale  $dl = r \cdot d\theta = \overline{M(t)M(t+dt)}$  peut être considéré rectiligne.

On en calcule alors aisément l'aire :

$$dA = r \cdot dl / 2 = r^2 \cdot d\theta / 2 \quad (9).$$

On pouvait également considérer la formule faisant intervenir le produit vectoriel des deux rayons vecteurs, on montre alors (9) par un développement au premier ordre en  $d\theta$  et  $dt$ .

La *vitesse aréolaire* est une grandeur qui exprime la limite du rapport de l'accroissement infinitésimal d'une aire correspondant à une surface balayée par le rayon vecteur d'un mobile sur un accroissement infinitésimal de temps. C'est donc la dérivée première par rapport au temps de l'aire balayée par le rayon vecteur d'un mobile (§68, §70 et §128 de [6], §14 de [8]).

En divisant par la *durée infinitésimale*  $dt$ , on trouve la *vitesse aréolaire*  $\dot{A} = dA/dt$  qui

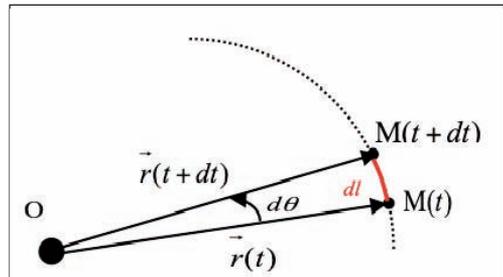


Figure 4 : déplacement du rayon vecteur pendant la durée  $dt$ .

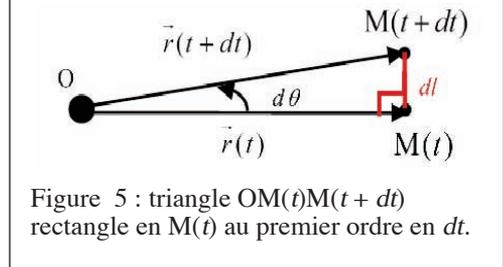


Figure 5 : triangle  $OM(t)M(t+dt)$  rectangle en  $M(t)$  au premier ordre en  $dt$ .

s'exprime en fonction de la *vitesse angulaire* « instantanée »  $\omega(t)$  :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r}{2} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \dot{\theta} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \omega \quad (10).$$

On rappelle que la *vitesse instantanée* est définie comme la limite du rapport d'une distance infinitésimale (longueur d'arc de trajectoire, ou abscisse curviligne) sur une durée tendant vers zéro :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \frac{\overline{M(t)M(t+dt)}}{dt} \right] \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} \right] = \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned}$$

Le secteur balayé peut être approximé par le triangle  $OM(t)M(t + dt)$  rectangle en  $M(t)$  dans la limite considérée  $dt \rightarrow 0$  ou  $d\theta \rightarrow 0$ . On trouve ainsi une seconde expression de l'aire balayée dans cette limite :

$$dA = r \cdot dl / 2 = r(t) \cdot M(t)M(t + dt) / 2 \\ = \left\| \overrightarrow{OM(t)} \right\| \left\| \overrightarrow{M(t)M(t + dt)} \right\| / 2 = \left\| \vec{r} \right\| \cdot \left\| d\vec{r} \right\| / 2 ,$$

donc de la vitesse aréolaire  $dA/dt = r(t) \cdot v(t) / 2$  (11), car  $\left\| \overrightarrow{M(t)M(t + dt)} \right\| \xrightarrow{dt \rightarrow 0} \left\| \vec{v}(t) \right\| dt$  .

Ces deux expressions ont été obtenues par des considérations géométriques et cinématiques. La dynamique entre en jeu pour justifier de la constance de la vitesse aréolaire. En effet, la force est centrale, elle pointe donc vers l'objet attracteur.

La justification passe par le théorème du moment cinétique dans la version « moderne » de la théorie classique, mais on considèrerait auparavant un vecteur perpendiculaire au plan de la trajectoire et de longueur égale au produit de la masse par l'aire balayée (voir §68, §70 et §128 de [6]) :  $m \cdot A \cdot \vec{u}_z$  . Le moment cinétique est donc une quantité de mouvement aréolaire, reportée sur l'axe perpendiculaire au plan du mouvement.

On peut montrer que son expression, par rapport au centre  $O$ , est, en coordonnées cylindriques :  $\vec{L}_O = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$  .

On a donc :

$$dA / dt = r^2 \cdot \dot{\theta} / 2 = L_O / (2m).$$

2°) Les fluxions de Newton :  
géométrie « différentielle » et cinématique

Suivant Newton, on peut utiliser la notion de fluxion (ou dérivée) des vecteurs unitaires  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  variables dans le temps (car  $\theta(t)$  et  $r(t)$  sont des fonctions du temps paramétrant le mouvement) exprimés dans le repère fixe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  dont les deux vecteurs sont indépendants du temps :  $d\vec{u}_x/dt = d\vec{u}_y/dt = \vec{0}$  . On peut alors exprimer la dérivée par rapport au temps du vecteur  $\vec{u}_r$  comme la dérivée de ses coordonnées dans le repère fixe en utilisant la dérivée de fonctions composées :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \\ = \dot{\theta} \cdot \left( \frac{d}{d\theta} (\cos\theta) \cdot \vec{u}_x + \frac{d}{d\theta} (\sin\theta) \cdot \vec{u}_y \right) \\ = \dot{\theta} \cdot \left( -\sin\theta \cdot \vec{u}_x + \cos\theta \cdot \vec{u}_y \right) = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \quad (12)$$

De même :

$$d\vec{u}_\theta/dt = -\dot{\theta} \cdot \left( \cos\theta \cdot \vec{u}_x + \sin\theta \cdot \vec{u}_y \right) = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_r \quad (13)$$

On pouvait aussi utiliser le fait que  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un repère orthonormé :  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$ .

En dérivant, on a :

$$\vec{0} = \frac{d\vec{u}_r}{dt} \cdot \vec{u}_\theta + \vec{u}_r \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta + \vec{u}_r \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dot{\theta} + \vec{u}_r \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} .$$

Le produit scalaire avec  $\vec{u}_r$  permet de retrouver le résultat. On remarque (figure 6) que l'opération de dérivation appliquée sur la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  se traduit par une rotation d'angle  $+\pi/2$  composée avec une homothétie de centre M et de rapport  $\dot{\theta}$  :

$$\left( \frac{d\vec{u}_r}{dt}, \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right) = {}_M(M, \theta) \circ \mathcal{R}(M, +\pi/2) \left[ (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \right].$$

Il est alors très facile d'exprimer la vitesse du mobile M et son accélération précédemment définies dans le plan du mouvement (choisi au départ comme étant  $z = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{u}_r) = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\vec{u}}_r = \\ &= \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta = v_r \cdot \vec{u}_r + v_\theta \cdot \vec{u}_\theta \quad (14) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta) = \\ &= \ddot{r} \cdot \vec{u}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{u}}_r + \left( \dot{r} \dot{\theta} \right) \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \\ &= \ddot{r} \cdot \vec{u}_r + r \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \left( \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right) \cdot \vec{u}_\theta - r \left( \dot{\theta} \right)^2 \cdot \vec{u}_r, \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{a} = a_r \cdot \vec{u}_r + a_\theta \cdot \vec{u}_\theta = \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \cdot \vec{u}_r + \left( 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right) \cdot \vec{u}_\theta$$

[formule (15)].

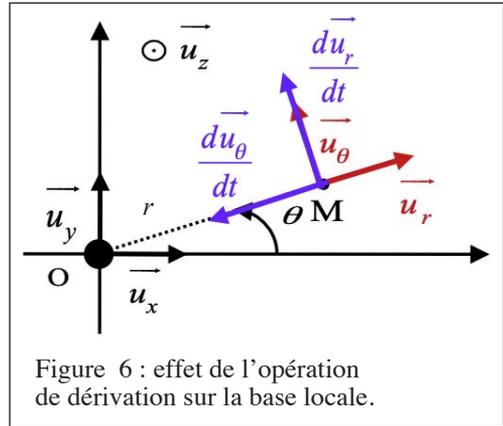


Figure 6 : effet de l'opération de dérivation sur la base locale.

### 3°) Dynamique et « loi des aires »

L'équation de la dynamique de Newton (3) s'écrit, dans le problème considéré,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \cdot \frac{M_e}{r^3} \cdot \vec{r} = f(r) \cdot \vec{u}_r.$$

Alors, l'accélération est portée par le rayon vecteur car la force est centrale, ce qui impose que sa coordonnée selon  $\vec{u}_\theta$  soit nulle. On

a donc  $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$  et on remarque de

$$\text{plus que : } \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cdot r.$$

On obtient  $\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0$  soit :

$$2 \frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{L_O}{m} \right) = 0.$$

On retrouve donc le fait que la vitesse aréolaire est constante lorsque le mobile est soumis à une force centrale. La deuxième des lois de Kepler est que la vitesse aréolaire

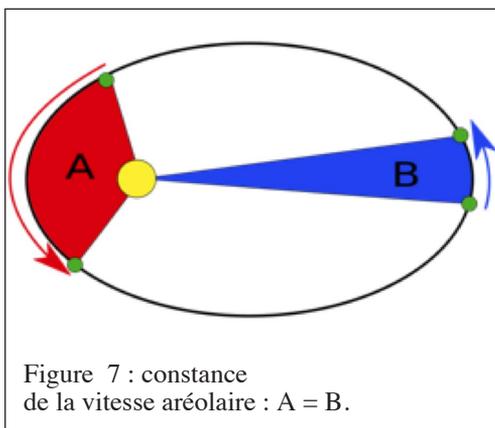


Figure 7 : constance de la vitesse aréolaire :  $A = B$ .

d'une planète par rapport au Soleil est constante (figure 7).

*Remarque :* On peut trouver des arguments et démonstrations uniquement géométriques sans calcul différentiel ou géométrie différentielle, sans résolution d'équation différentielle ni notion de moment cinétique (voir [7]).

## II. Vecteur de Hamilton et équation polaire

On reprend ici la solution de Newton qui a résolu le problème képlérien uniquement par la géométrie (cependant une solution analytique a été proposée *a posteriori*) en faisant ici abstraction des controverses (R. W. Hamilton avait trouvé l'hodographe avant Newton, et d'autres ont participé à la résolution du problème képlérien).

### 1°) Constantes du mouvement

L'équation de la dynamique de Newton (3) se réécrit grâce aux vecteurs locaux et à la relation (13) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -G \cdot \frac{M_e}{r^2} \cdot \vec{u}_r = G \cdot \frac{M_e}{r^2 \dot{\theta}} \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad (16).$$

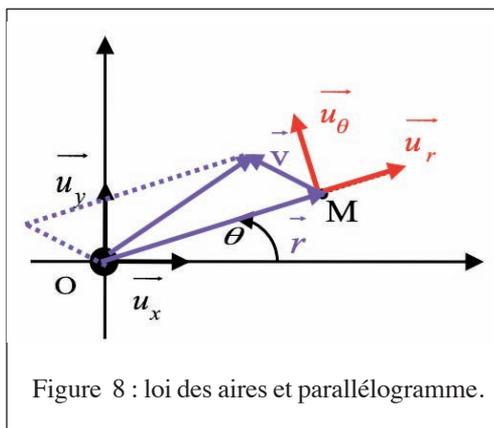


Figure 8 : loi des aires et parallélogramme.

La loi des aires est traduite par la constance du produit  $r^2 \dot{\theta}$  donné par les conditions initiales de position et de vitesse :

$$r^2(t) \cdot \dot{\theta}(t) = r^2(0) \cdot \dot{\theta}(0) = r(0) \cdot v(0) = L_0/m \quad (17)$$

Une telle quantité est appelée *constante du mouvement* (on montre qu'avec une force, dite conservative, comme la force de gravitation, l'énergie totale du mobile, cinétique plus potentielle, est aussi une constante du mouvement).

En notant  $C$  l'aire du *parallélogramme* formé par le vecteur  $\vec{r}(t)$  et la vitesse  $\vec{v}(t)$  du mobile  $M$  (figure 8), on trouve :  $r^2 \dot{\theta} = C$  (18). En remplaçant (18) dans (16), on obtient une relation simple :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{GM_e}{C} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{0} \quad (19),$$

où  $\vec{h} = \vec{v} - u \cdot \vec{u}_\theta$  (20) est le vecteur dit de « Hamilton » avec  $u = GM_e/C$  (21).

Grâce à (19), ce vecteur est une autre grandeur vectorielle *conservée* au cours du mouvement (tout comme le moment cinétique) et est contenu dans le plan du mouvement. Sa valeur peut donc aussi être déterminée par les *conditions initiales* :

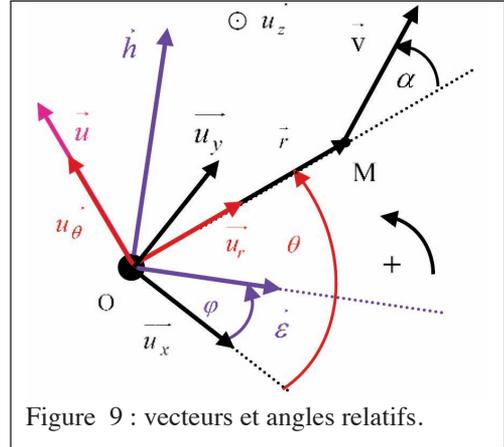
$$\vec{h}(t) = \vec{h}(t=0) = \vec{v}(0) - u \cdot \vec{u}_\theta(0) .$$

On peut trouver un troisième vecteur constant : la trajectoire est plane dans le plan donné par les conditions initiales de position et de vitesse :  $\Pi = (O, \vec{r}(0), \vec{v}(0)) \perp \vec{u}_z$ . On a (outre le vecteur moment cinétique) deux vecteurs constants :  $\vec{h}$  et  $\vec{u}_z$ . On peut former le produit vectoriel pour en définir un troisième :  $\vec{\varepsilon} = \vec{h} \wedge \vec{u}_z$  (voir figure 9) avec  $d\vec{\varepsilon}/dt = \vec{0}$  et  $\vec{\varepsilon} \perp \vec{u}_z$  pour tout  $t$ . On en déduit que, pour tout temps  $t$ ,  $\vec{\varepsilon} \in \Pi$  et  $\vec{\varepsilon} \perp \vec{h}$  tel que  $(\vec{\varepsilon}, \vec{h}) = +\pi/2$  (figure 9) et  $\|\vec{\varepsilon}\| = h = \|\vec{h}\|$ .

2°) *Equation polaire de la trajectoire : première loi de Kepler retrouvée*

Pour caractériser la trajectoire du mobile M, on peut utiliser les propriétés vectorielles du vecteur de Hamilton pour obtenir aisément l'équation polaire de la trajectoire, c'est-à-dire la fonction  $r = f(\theta)$ . Soit  $\vec{u}$  le vecteur du plan du mouvement défini par  $\vec{u} = u \cdot \vec{u}_\theta$  (22) de norme constante  $\|\vec{u}\| = u = GM_e/C$ .

Le vecteur de Hamilton s'exprime comme :  $\|\vec{h}\| = \vec{v} - \vec{u}$ . On peut exprimer de deux façons



différentes le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{h}$ .

— Par définition tout d'abord :

$$\vec{u} \cdot \vec{h} = u \cdot h \cdot \cos(\vec{u}, \vec{h}) \quad (23).$$

— Puis, on remplace  $\vec{h}$  par son expression (20) :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{h} &= \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= u \cdot v \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) - u^2 . \end{aligned}$$

Or  $\vec{u}$  est dirigé selon  $\vec{u}_\theta$  ( $u > 0$ ) et la relation de Chasles donne :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}_\theta, \vec{v}) = (\vec{u}_\theta, \vec{r}) + (\vec{r}, \vec{v})$$

d'où  $(\vec{u}, \vec{v}) = -\pi/2 + (\vec{r}, \vec{v})$ . On en déduit :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\pi/2 - (\vec{r}, \vec{v})) = \sin(\vec{r}, \vec{v})$$

et  $C = r \cdot v \cdot \sin(\vec{r}, \vec{v})$  (aire du parallélogramme défini par le rayon vecteur et vitesse, figures 8 et 9), on a alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{h} &= u \cdot h \cdot \cos(\vec{u}, \vec{h}) \\ &= u \cdot v \cdot C / (r \cdot v) - u^2 = u \cdot C / r - u^2 \end{aligned}$$

ou :  $h \cdot \cos(\vec{u}, \vec{h}) = C/r - u$  (24).

Soit  $\varphi$  tel que  $(\vec{u}_x, \vec{\varepsilon}) = \varphi$  (voir figure 9). Cela permet de déterminer et de positionner les vecteurs  $\vec{h}$  et  $\vec{\varepsilon}$ , une fois un repère cartésien fixe quelconque  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  choisi dans le plan de la trajectoire, et les conditions initiales de position et de vitesse choisies. On trouve alors :

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{h}) &= (\vec{u}, \vec{r}) + (\vec{r}, \vec{\varepsilon}) + (\vec{\varepsilon}, \vec{h}) = \\ &= -\pi/2 + (\vec{r}, \vec{\varepsilon}) + \pi/2 \\ &= (\vec{r}, \vec{u}_x) + (\vec{u}_x, \vec{\varepsilon}) = \varphi - \theta. \end{aligned}$$

Donc de (24), on obtient  $h \cdot \cos(\theta - \varphi) = C/r - u$ , ce qui se met sous la forme d'une équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta - \varphi)} \quad (25),$$

avec

$$p = C/u = C^2 / (G \cdot M_e) \quad (26)$$

et

$$e = h/u = h \cdot C / (G \cdot M_e) \quad (27).$$

Il s'agit donc bien de l'équation polaire d'une trajectoire conique de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e$  (voir [13]).

Newton a bien résolu l'équation du mouvement sans résoudre aucune équation différentielle (en fait si, mais très élémentaire (19) puisqu'il s'agit d'une primitivation élémentaire) et en ne faisant pratiquement que de la géométrie : vecteurs, trigonométrie, variations élémentaires de vecteurs (ses « fluxions »).

On retrouve ainsi la première loi de Kepler : les trajectoires elliptiques trouvent leur explication par une déduction basée sur l'axiome de la définition de la force appli-

quée au cas de la gravitation. Cependant, Newton avait déduit cette force des résultats de Kepler et d'une réflexion sur le mouvement de la Lune : il n'y aurait alors pas besoin de la force, donc de la dynamique, mais uniquement de la cinématique du mouvement pour établir ses trois lois à partir des trois lois de Kepler (voir chapitre VIII, § 127 et § 128 de [6] et [7]).

*Remarque :* comme premier projet numérique, on peut faire tracer la trajectoire en entrant les conditions initiales (sous forme d'une courbe polaire, ou d'une courbe paramétrée) ou la faire calculer à partir de la loi de la dynamique et les conditions initiales par une méthode numérique de résolution des équations différentielles (Euler...).

### 3°) Caractéristiques de la trajectoire conique : première loi de Kepler retrouvée

On peut alors caractériser la nature de la trajectoire conique (même dégénérée) simplement en examinant les conditions initiales et la valeur de l'excentricité  $e = h/u = h \cdot C / (G \cdot M_e)$  donnée par les deux constantes du mouvement, la masse du centre attracteur et la constante universelle de la gravitation de Newton. On rappelle dans le tableau ci-dessous la nature des coniques (non dégénérées) :

|         |             |          |           |
|---------|-------------|----------|-----------|
| $e = 0$ | $0 < e < 1$ | $e = 1$  | $e > 1$   |
| Cercle  | Ellipse     | Parabole | Hyperbole |

On obtient plus d'information sur la trajectoire, comme la direction de son axe de symétrie qui correspond à l'axe focal (portant le ou les foyer(s) de la conique ainsi que son centre) en exploitant les deux intégrales pre-

mières vectorielles du mouvement situé dans le plan de la trajectoire :  $\vec{h}$  et  $\vec{\varepsilon}$ . En explicitant  $\vec{h}$ , on a :

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= \vec{h} \wedge \vec{u}_z = (\vec{v} - \dot{r}\vec{u}_r) \wedge \vec{u}_z \\ &= (r\dot{\theta} - u)\vec{u}_r - \dot{r}\vec{u}_\theta \\ &= (C/r - u)\vec{u}_r - \dot{r}\vec{u}_\theta \\ &= h \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot \vec{u}_r - \dot{r} \cdot \vec{u}_\theta . \end{aligned}$$

Lorsque la coordonnée radiale est extrême (minimale ou maximale), on a  $\dot{r} = 0$  d'où  $\vec{v} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$  donc  $\vec{\varepsilon} = r_{\text{extremum}} \cdot \vec{u}_r$  (28). Or les points correspondants sont situés (propriétés de la conique) sur l'axe de symétrie (contenant le centre s'il existe et le ou les foyers). Ainsi, le vecteur  $\vec{\varepsilon}$  dirige l'axe focal (ou axe de symétrie) de la conique solution du problème de Kepler.

*Remarque* : dans le cas d'une ellipse (mouvement des planètes),  $[O, \vec{\varepsilon}]$  est l'axe focal (le grand axe) et  $[O, \vec{h}]$  est le petit axe.

4°) *Similitude des trajectoires et lois de puissance : troisième loi de Kepler retrouvée*

On peut trouver des informations importantes à partir des équations du mouvement (en mécanique du point, des milieux continus...) sans les résoudre grâce à des méthodes utilisant des similitudes et les dimensions des grandeurs physiques (voir §10 de [8] et §11 de [9]). L'idée principale de ces méthodes est d'utiliser un changement d'échelle (de temps, de longueur,

de masse...) sous laquelle les équations du mouvement conservent leur forme.

— On considère à nouveau la relation (6)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G \cdot \frac{M_e}{r^3} \cdot \vec{r} = f(r) \cdot \vec{u}_r .$$

La fonction de la distance entre les deux points  $r$  est donnée par :  $f(r) = GM_e/r^2$  (29). Il s'agit d'une fonction dite *homogène (de degré -2)* car elle vérifie pour tout  $\alpha$  réel  $f(\alpha \cdot r) = \alpha^{-2} \cdot f(r)$ . Elle permet donc un tel changement d'échelle des coordonnées. Suivant la méthode du §10 de [8], on effectue la transformation, par laquelle, lorsque les coordonnées varient  $\alpha$  fois, le temps varie simultanément  $\beta$  fois :

$$\begin{cases} \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \alpha \cdot \vec{r} \\ t \rightarrow t' = \beta \cdot t \end{cases}, \text{ pour } (\alpha, \beta) \text{ réels positifs.}$$

On *dilate* ou *contracte* simplement l'échelle des variables. Tout comme les lois physiques ne dépendent pas du choix des coordonnées ou du référentiel inertiel d'étude, il n'y a pas de raison pour que cette transformation amène une modification des phénomènes et des lois physiques. L'équation du mouvement doit être *invariante* sous une telle transformation (on parle d'invariance conforme de façon plus générale). Ainsi, la relation (6) devient dans les nouvelles variables :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} &= \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot f(r) \cdot \vec{u}_r = \\ &= \frac{\alpha^3}{\beta^2} \cdot f(\alpha \cdot r) \cdot \vec{u}_r = \frac{\alpha^3}{\beta^2} \cdot f(r') \cdot \vec{u}_r \end{aligned}$$

car  $\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$  .

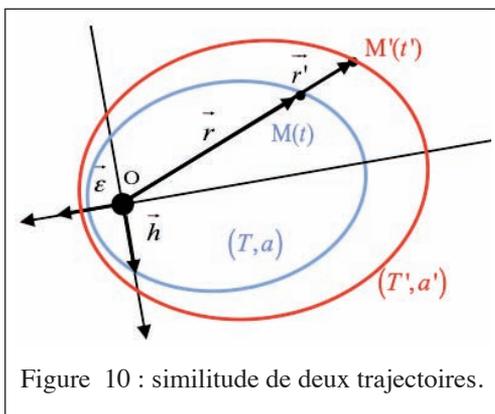


Figure 10 : similitude de deux trajectoires.

Pour que cette équation dans les nouvelles variables soit la même que dans les anciennes, on doit imposer :  $\alpha^3 / \beta^2 = 1$  ou  $\beta = \alpha^{3/2}$ .

Faire varier un même nombre de fois toutes les coordonnées du mobile signifie passer de certaines trajectoires à d'autres, *géométriquement semblables* aux premières, et n'en différant que par leurs *dimensions linéaires*.

On est alors amené au résultat que l'équation du mouvement considérée admet des trajectoires géométriquement semblables. Tous les temps du mouvement (entre les points correspondants des trajectoires) sont alors dans le rapport (figure 10) :

$$t'/t = (I'/I)^{3/2} \quad (30),$$

où  $I'/I$  est le rapport des dimensions linéaires de deux trajectoires (par exemple leur demi-grand axe dans le cas d'ellipses). Comme les temps, les valeurs des *diverses grandeurs mécaniques* aux *points correspondants des trajectoires* et aux instants correspondants sont aussi des *puissances déterminées* du rapport  $I'/I$  (on les appelle des lois de puissance). Ainsi pour les

vitesse et les énergies, pour la fonction (29),

$$v'/v = (I'/I)^{-1}, \quad E'/E = (I'/I)^{-2}.$$

Avec l'attraction gravitationnelle représentée par la fonction homogène (29), on trouve la relation (30) : les carrés des temps de révolution de corps sur leurs orbites sont proportionnels aux cubes des dimensions de celles-ci. Avec  $l = a$ , demi-grand axe de l'ellipse ou distance linéaire caractéristique de la trajectoire fermée et périodique, et  $t = T$ , période correspondante, on obtient la *troisième loi de Kepler* :

$$T^2/a^3 = T'^2/a'^3 = \text{constante}.$$

Cette constante ne dépend que des *paramètres physiques* du problème ( $m$ ,  $G$  et  $M_e$ ). Cependant elle ne dépend ici que du produit  $GM_e$ , et non de la masse du mobile car  $m$  est négligeable devant  $M_e$ .

En effet, son unité est  $GM_e \cdot [GM_e] = m^3 \cdot s^{-2}$ . En terme des dimensions, si  $L$  est une distance caractéristique du problème,  $T$  un temps caractéristique, il a pour dimension :  $[GM_e] = L^3 \cdot T^{-2}$  (31). On a :

$$T^2/a^3 = \alpha \cdot GM_e \quad (32),$$

$\alpha$  réel positif sans dimension (nombre pur).

— Une autre façon de retrouver ces résultats est de reprendre l'équation (6) et de la rendre « adimensionnée » pour trouver une équation « universelle », indépendante de paramètres physiques. On considère deux nouvelles variables adimensionnées :  $\vec{\xi} = \vec{r}/L$  et  $\tau = t/T$ , où  $L$  et  $T$  sont respectivement une dimension et un temps caractéristique du mouvement. Des manipulations identiques conduisent à :

$$\frac{L}{T^2} \frac{d^2 \vec{\xi}}{d\tau^2} = -\frac{GM_e}{L^3 \xi^3} L \vec{\xi} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 \vec{\xi}}{d\tau^2} = -\frac{T^2}{L^3} \frac{GM_e}{\xi^3} \vec{\xi}.$$

Au regard de cette équation, le terme  $GM_e T^2 / L^3$  est alors de nouveau bien adimensionné. On peut comme auparavant choisir le lien entre les deux grandeurs caractéristiques du mouvement comme étant donné par (32), et l'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2 \vec{\xi}}{d\tau^2} = -\frac{\alpha}{\xi^3} \vec{\xi},$$

$\alpha$  nombre (sans dimension) réel positif.

*Remarque* : la masse du mobile n'est jamais intervenue dans les discussions précédentes, elle est disparue de l'équation du mouvement. Physiquement, ceci est dû au *principe d'équivalence* entre masse gravitationnelle et masse inertielle, principe fondateur de la relativité générale d'Einstein [5]. Elle intervient par contre dans la détermination des constantes de mouvement comme les conditions initiales, ce qui permet de discriminer la solution physique par rapport à l'ensemble des solutions mathématiques de l'équation du mouvement.

**C. — Hodographe et constructions géométriques**

Le *lieu des vitesses* d'un mobile ponctuel M par rapport à un point fixe O est le lieu  $\mathcal{H}$  (ou l'ensemble) des points V tels que  $\overrightarrow{OV}(t) = \vec{v}(M(t))$  pour tout temps  $t$  ( $\overrightarrow{OV}(t)$  est donc le représentant du vecteur vitesse ayant pour origine le foyer O aussi origine du repère). On l'appelle *l'hodographe*.

On détermine la trajectoire point par point en partant de la connaissance à un instant ( $t$  quelconque ou initial  $t = 0$ ) de la *position et de la vitesse*. Il peut donc être très utile de connaître

ce lieu des vitesses, paramétré par le temps. Ainsi, on l'utilise en astronomie pour représenter géométriquement la trajectoire des planètes (voir en particulier [3], [6], [13] à [15]).

**I. Hodographe du problème de Kepler**

La vitesse est donnée grâce au vecteur de Hamilton (20) :  $\vec{v} = \vec{h} + \vec{u}$ . La norme de  $\vec{v} - \vec{h} = \vec{u}$  est donc constante *pour tout temps* :  $\|\vec{v} - \vec{h}\| = \|\vec{u}\| = u = GM_e/C$  (22). Le vecteur de Hamilton est aussi constant (19). Le point V définissant  $\mathcal{H}$  appartient donc au cercle de rayon  $u$  et de centre le point H défini par le vecteur de Hamilton  $\overrightarrow{OH} = \vec{h}$  (on a  $\vec{v} - \vec{h} = \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{HV}$ ). L'hodographe est ainsi contenu dans ce cercle :  $\mathcal{H} \subset C(H, u)$ . Il sera ce cercle en entier si l'angle  $\theta(t)$  parcourt  $[0, 2\pi]$  sinon seulement un arc, car avec (8) :

$$\vec{v}(t) = \left( h_x - u \sin \theta(t) \right) \cdot \vec{u}_x + \left( h_y + u \cos \theta(t) \right) \cdot \vec{u}_y \quad (33).$$

Pour les orbites périodiques des planètes autour du Soleil, l'hodographe est le cercle entier.

**II. Constructions point par point de la trajectoire**

En fait, la possibilité de déterminer un hodographe aussi simple pour le problème de Kepler permet de construire point par point *à la règle et au compas* la trajectoire, une fois les conditions initiales fixées. Cela permet d'envsager une construction purement géométrique « *à la main* », ou par un *algorithme* de traçage avec un logiciel de géométrie dynamique ou par un *programme informatique* de type Python.



1°) *Méthode numérique*  
à l'aide du logiciel GeoGebra

On met en œuvre le procédé expliqué précédemment. Dans un fichier GeoGebra, on se donne l'origine  $O$ , le périhélie  $P$  (position la plus proche du foyer pour une trajectoire elliptique) et l'hodographe  $\mathcal{H}$  (qui est déduit du vecteur de Hamilton et des conditions initiales : position et vitesse en  $P$ ). Ce choix de conditions n'est pas restrictif mais permet de simplifier la démarche, on pourrait commencer à n'importe quel point de la trajectoire.

Par l'étude précédente du II 3°, on connaît l'axe focal, le foyer  $O$  et on connaît l'hodographe, donc on peut vérifier que pour une distance minimale, la vitesse est orthoradiale et maximale (voir aussi la remarque ci-dessous). Il est alors possible de choisir (juste par commodité dans cette partie) le repère cartésien donné par  $\vec{u}_x = \vec{\varepsilon} / \|\vec{\varepsilon}\|$  et  $\vec{u}_y = \vec{h} / \|\vec{h}\|$ .

On détermine grâce au logiciel (ou en la calculant) la valeur de l'aire du triangle  $OPV_{\max}$  (rectangle en  $O$ ), formé par les rayons vecteurs  $\vec{r}_{\min} = \vec{OP} = r_{\min} \cdot \vec{u}_x$  et  $\vec{v}_{\max} = v_{\max} \cdot \vec{u}_y = \vec{OV}_{\max}$  (figures 11 et 12).

On considère un point courant  $V$  de l'hodographe pointé par le vecteur vitesse  $\vec{v}$  à un temps quelconque. On fait tracer le vecteur  $\vec{u}$  par soustraction vectorielle avec  $\vec{h}$ , puis la perpendiculaire passant par  $O$  à ce vecteur  $\vec{u}$  (colinéaire à  $\vec{u}_\theta$ ) donnant la direction de  $\vec{u}_r$  (voir figure

11). Ensuite, on place dessus un point courant  $M$  et on fait tracer le triangle  $OVM$ . L'aire est donnée par le logiciel et on déplace donc le point  $M$  jusqu'à l'obtention de la valeur de l'aire de  $OPV_{\max}$  le plus précisément possible. On fixe le point obtenu. Il suffit finalement de reproduire le processus autant de fois que l'on souhaite de points pour la trajectoire. On peut le faire de façon automatisée avec un logiciel de géométrie dynamique ou par construction manuelle.

*Remarque :* On a noté la condition initiale de vitesse  $v_{\max}$ . La norme de la vitesse vaut

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}. \text{ Lorsque } r(t) \text{ est extrême, } \dot{r}(t) = v_r(t) = 0 \text{ et la vitesse est orthoradiale,}$$

dirigée ici par  $\vec{u}_y$  avec le choix du repère cartésien. Le mouvement étant périodique (et on sait ici que c'est une ellipse), cela ne peut se produire qu'à la demi-période par rapport aux conditions initiales choisies, donc pour les angles  $0$  ou  $\pi$ . On connaît alors un second point de la trajectoire qui est le point le plus éloigné de l'origine noté *aphélie* (point  $A$ ) sur  $(OP)$ , de l'autre côté de  $O$ , sur l'axe focal. Grâce à l'étude de l'hodographe (figures 11 et 13) ou de l'expression de la vitesse en fonction de l'angle (33), la valeur est maximale quand le rayon est minimal et réciproquement, ceci étant confirmé par la loi des aires :

$$C = r_{\min} \cdot v_{\max} = r_{\max} \cdot v_{\min} \quad (35).$$

Les deux points  $A$  et  $P$  sont les deux seuls points où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur ( $\alpha = \pm \pi/2$ ). On détermine aisément la place de  $A$  par la conservation des

aires. Deux autres points particuliers peuvent être déterminés. L'axe focal (AP) est un axe de symétrie de l'ellipse et correspond au grand axe. On peut trouver le petit axe, par l'obtention de deux autres points particuliers de la trajectoire (les points C et D sur la figure 13). Ils sont aussi symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe (AP). La vitesse en ces points est portée par le vecteur  $\vec{u}_x$ . On les a également recherchés par la conservation des aires pour la conception de la figure 13. On a alors assez d'éléments connus par tous ces points pour caractériser l'ellipse trajectoire : un foyer O, le grand axe [AP] et le petit axe [CD], le centre de l'ellipse qui en est l'intersection.

En fait, le logiciel permet de trouver la conique en passant par cinq points (propriété des coniques en tant que courbes quadratiques : cinq points sont suffisants pour déterminer l'unique ellipse passant par ces points). La figure 13 montre le résultat obtenu pour la détermination de cinq points particuliers de la trajectoire A, P, C, D et M.

2°) Méthode purement géométrique à la règle et au compas

Le procédé précédent est approximatif et propre au logiciel car il faut comparer des aires évaluées par celui-ci et pointer au jugé. Cependant, on peut réellement tracer point par point

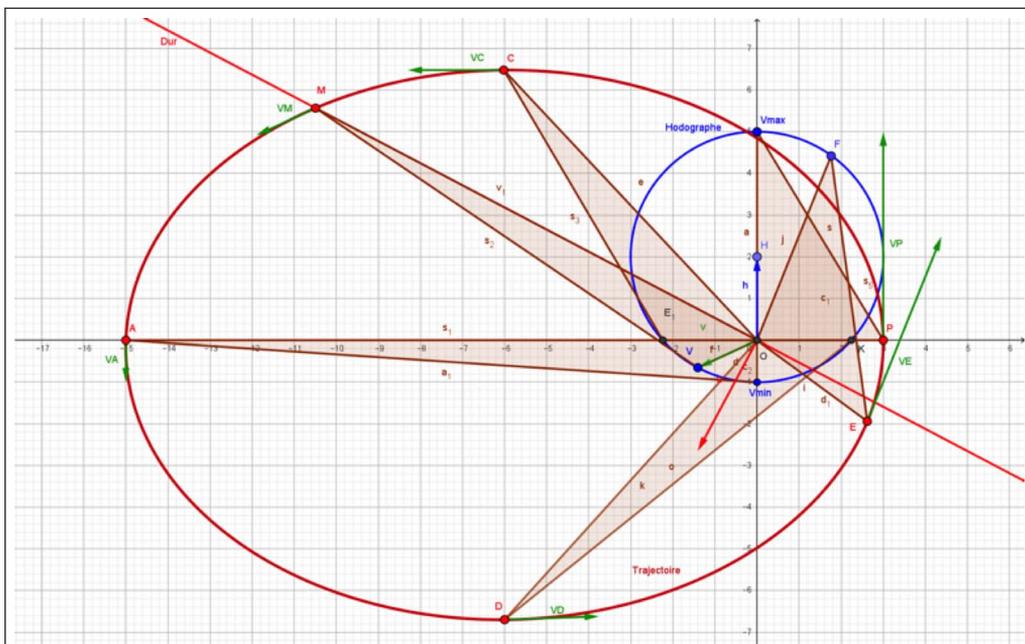


Figure 13 : trajectoire déterminée à l'aide du logiciel GeoGebra.

la trajectoire *uniquement à la règle (équerre) et au compas*. Les constructions à réaliser sont des opérations élémentaires de *géométrie plane et affine*. On utilise dans ce paragraphe un cadre et des notations mathématiques générales. Le triangle ABC est donné (voir la figure 14). Le problème géométrique à résoudre consiste à tracer une succession d'autres triangles génériques AVM tous de même aire et dont un côté est la vitesse à un instant  $t$  donnée par l'hodographe, et dont un autre côté est porté par la droite (AM) que l'on arrive à déterminer pour chaque

choix de vitesse, l'angle  $\alpha = \widehat{MAV}$  entre le rayon vecteur et la vitesse étant alors *fixé* (voir procédé précédent). La figure 14 (page ci-contre) a été réalisée en considérant deux exemples (triangle rouge ADI et triangle vert AJO). Peu importe ici la longueur réelle des côtés et l'angle fixé, la méthode de tracé est très générale et on l'ajustera au problème physique considéré étant entendu le choix d'unités adaptées, ou de grandeurs adimensionnées pour le faire sur feuille libre ou grâce à un logiciel.

On commence par tracer les deux cercles  $(C_1) = C(A, AB)$  et  $(C_2) = C(A, AC)$  permettant ensuite de reporter aisément les longueurs AB et AC correspondant au triangle du départ. On considère le cas du triangle ADI. La longueur AD et la direction [AI] notée (j) sur la figure 14 sont données. Il faut trouver l'emplacement du point I tel que l'aire des deux triangles soit la même :  $\mathcal{A}(ADI) = \mathcal{A}(ABC)$ . On reporte la longueur AB sur [AD] en déterminant le point E = [AD] ∩ (C<sub>1</sub>) : on a donc AE = AB. On trace la normale en A à la droite (AD), elle est notée (g), elle intercepte le cercle C<sub>2</sub> en F = (g) ∩ C<sub>2</sub> : on a donc AF = AC.

On trace d'abord la droite (DF) puis la parallèle à (DF) issue de E, elle coupe (g) en G. Ensuite, on mène la perpendiculaire à (g) issue de G. Celle-ci coupe la droite portant le rayon vecteur (j) au point cherché I. Pour le justifier, on vérifie l'égalité des aires. Par construction, l'aire du triangle ADI est :

$$\mathcal{A}(ADI) = \frac{AD \cdot AG}{2}.$$

La méthode de construction précédente permet d'identifier une *configuration de type théorème de Thalès* dans ADF qui est l'élément à la source de la conservation des aires :

$$E \in [AD], G \in [AF] \text{ et } (EG) \parallel (DF).$$

Par application du *théorème de Thalès*, on obtient :  $\frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF}$  ou  $AG = \frac{AE \cdot AF}{AD}$ . En remplaçant, on obtient :

$$\mathcal{A}(ADI) = \frac{AD \cdot AE \cdot AF}{2 \cdot AD} = \frac{AE \cdot AF}{2}.$$

Comme AE = AB et AF = AC, l'égalité des aires en découle :

$$\mathcal{A}(ADI) = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \mathcal{A}(ABC).$$

Il suffit donc de construire autant de triangles de même aire que de points de trajectoires souhaités.

*Justification* : On peut trouver une justification en identifiant la transformation affine  $f$  qui envoie le triangle fondamental ACB sur le triangle générique AMV et qui possède A comme point fixe :  $f(A) = A$ . Les transformations affines conservent le rapport des aires de triangles. En choisissant le cas particulier où le rapport vaut un, on justifie la construction faite (voir [10]).

### III. Construction globale par composée de transformations géométriques du plan

On peut trouver une *façon globale* pour construire la trajectoire en utilisant diverses transformations géométriques du plan à partir de l'hodographe circulaire obtenu (33) (par exemple voir a) et b) de [11] et [3]) et les propriétés des ellipses car on a au préalable déterminé la nature de la trajectoire (équation polaire, ou première loi de Kepler, ou résolution numérique...). Toutes les constructions se font au compas et à l'équerre ou de façon automatique avec un logiciel (GeoGebra), avec un

choix de données initiales simplificatrices, mais la méthode reste générale (conditions initiales de position et de vitesse, paramètres physiques).

Il est utile d'effectuer une *rotation* de centre O et d'angle  $-\pi/2$  de l'hodographe  $\mathcal{H}$  (cf. figure 15, page suivante). Le centre de  $\mathcal{H}$  se retrouve en  $H'$ , et le vecteur de Hamilton devient donc

$$\vec{h}' = \overrightarrow{OH'} = \mathcal{R}(O, -\pi/2) [ \vec{h} = \overrightarrow{OH} ] = \vec{\varepsilon},$$

colinéaire à  $[Ox)$  et pointant en direction du point de la trajectoire P (figure 15). Ce vecteur a déjà été rencontré et a servi à déterminer

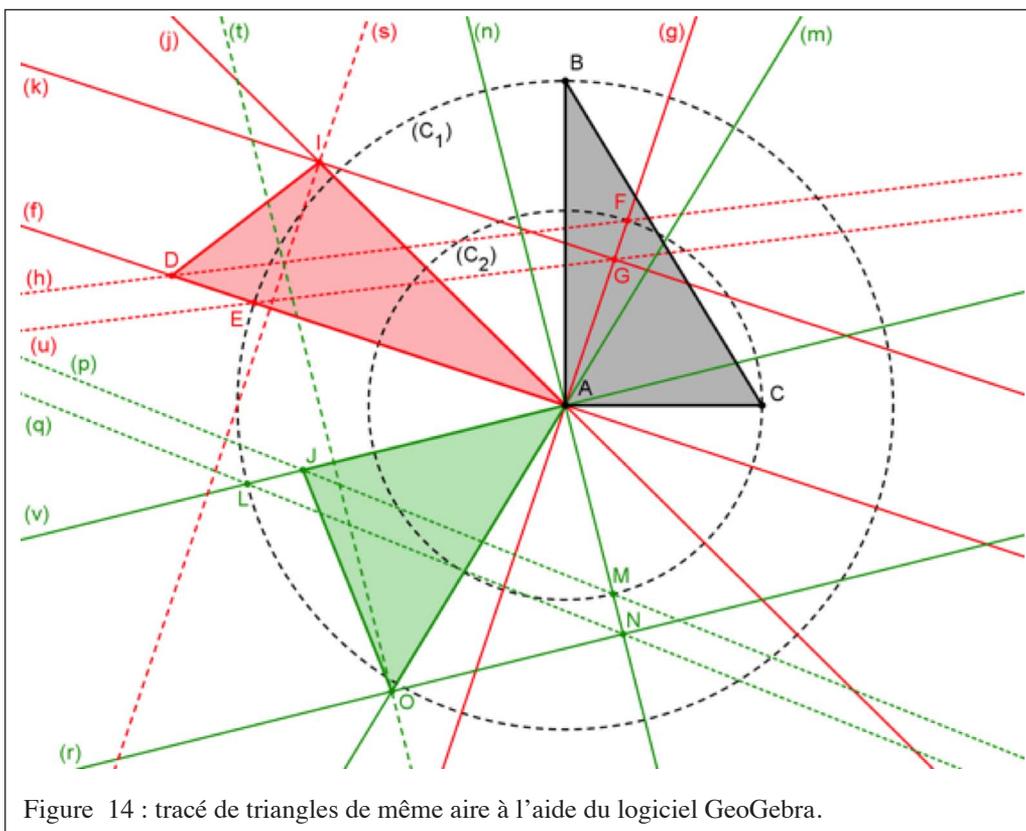


Figure 14 : tracé de triangles de même aire à l'aide du logiciel GeoGebra.

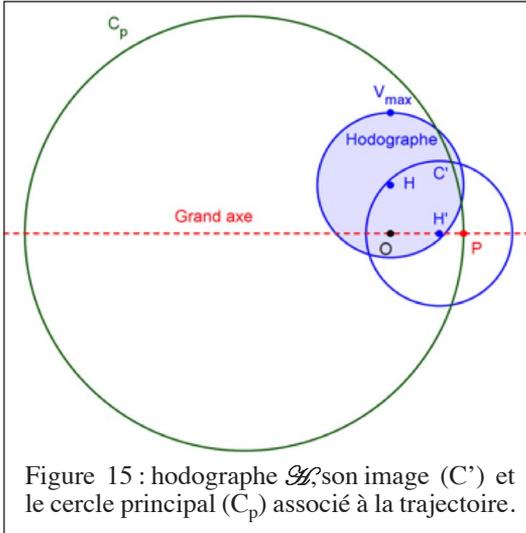


Figure 15 : hodographe  $\mathcal{H}$ , son image  $(C')$  et le cercle principal  $(C_p)$  associé à la trajectoire.

rapidement l'équation polaire et les caractéristiques de la trajectoire. Le lieu des points  $V'$  tels que

$$\overline{OV'}(t) = \vec{v}' = \mathcal{R}(O, -\pi/2) [ \vec{v} = \overline{OV} ] ,$$

soit l'image de  $\mathcal{H} = C(H, u)$ , noté  $(C')$  sur la figure 15.  $C'$  est donc le cercle de centre  $H'$  et de rayon  $u$ . On construit ensuite l'image  $(C_p)$  du cercle  $(C')$  par l'inversion géométrique  $\mathcal{I}$  de centre  $O$  et de rapport (ou puissance) la constante des aires  $C$ . Le lieu des points  $V'' = \mathcal{I}(V')$  est donc l'ensemble des points  $V''$  tels que  $\overline{OV'} \cdot \overline{OV''} = C$ ,  $V'$  décrivant le cercle  $(C')$ , car cette transformation est définie par :

$$\Pi - \{O\} \xrightarrow{\mathcal{I}} \Pi - \{O\}$$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \overline{OM'} = C / \overline{OM}$$

Une inversion est une transformation qui inverse les distances par rapport au pôle de

l'inversion. Or, on démontre que l'image d'un cercle ne contenant pas le pôle est encore un cercle. De plus, une inversion conserve l'alignement des points avec le pôle. Comme  $(OP) = (OH') = (O, \vec{\epsilon})$  est un axe de symétrie et contient un diamètre de  $(C')$ ,  $(C_p)$  est alors

un cercle dont  $(OP) = (O, \vec{\epsilon})$  est aussi un diamètre (figure 15) : il contient son centre, le périhélie  $P$ . En fait, comme on l'a déjà vu, il s'agit, dans le cas d'une ellipse, de l'axe focal. Ainsi, l'autre point d'intersection est l'apogée  $A$ , le point le plus éloigné de la trajectoire. Mais, on peut prouver ce résultat grâce à l'hodographe et à la définition de l'inversion. On considère alors les deux points particuliers de l'hodographe correspondant aux vitesses maximale et minimale  $v_{\max}$  et  $v_{\min}$  que l'on peut repérer par les points  $V_{\max}$  et  $V_{\min}$  sur la figure 15 :

$\{V_{\max}, V_{\min}\} = \mathcal{H} \cap (O, \vec{h})$ . Les points images correspondants par la rotation :

$$V'_{\max} = \mathcal{R}(O, -\pi/2) [V_{\max}]$$

et  $V'_{\min} = \mathcal{R}(O, -\pi/2) [V_{\min}]$

sont l'intersection de l'axe  $(O, \vec{\epsilon})$  avec  $(C')$ .

On détermine leur image par l'inversion  $V''_{\max} = \mathcal{I}(V'_{\max})$  et  $V''_{\min} = \mathcal{I}(V'_{\min})$  sur cet axe, alignées avec le pôle (par définition), et définies par :

$$\overline{OV''_{\max}} = C / \overline{OV'_{\max}}$$

et  $\overline{OV''_{\min}} = C / \overline{OV'_{\min}}$ .

En faisant intervenir les valeurs précédentes de la vitesse (la rotation conserve les valeurs des vitesses), on trouve :  $\overline{OV''_{\max}} = C / v_{\max}$

et  $\overline{OV''}_{\min} = -C/v_{\min}$ . Or, la relation (35) donne  $C/v_{\max} = r_{\min}$  et  $C/v_{\min} = r_{\max}$ , ce qui permet de les éliminer en fonction du rayon maximal et minimal de la trajectoire :  $\overline{OV''}_{\max} = r_{\min}$  et  $\overline{OV''}_{\min} = r_{\max}$ . On démontre ainsi le résultat important : l'image par la composée de la rotation et de l'inversion des deux points de l'hodographe de valeurs maximale et minimale donne le périhélie et l'apogée de la trajectoire :  $V''_{\max} = P$  et  $V''_{\min} = A$ . De plus le diamètre du cercle image de  $(C')$  vaut :

$$V''_{\max} + V''_{\min} = PA = r_{\max} + r_{\min} = 2a,$$

$a$  étant le demi-grand axe de l'ellipse. On a donc construit :

$$\begin{array}{c} \mathcal{H} \xrightarrow{\mathcal{R}} (C') \xrightarrow{\mathcal{I}} (C_p) \\ V_{\max} \xrightarrow{\mathcal{R}} V'_{\max} \xrightarrow{\mathcal{I}} P \\ V_{\min} \xrightarrow{\mathcal{R}} V'_{\min} \xrightarrow{\mathcal{I}} A \end{array}$$

Les points  $A$  et  $P$  sont donc les *sommets principaux* de l'ellipse, et le segment  $[AP]$  est le *grand axe* de l'ellipse mais aussi un diamètre de  $(C_p)$ . On démontre ainsi que  $(C_p)$  est le *cercle principal* de la trajectoire.

Tracer la médiatrice de  $[AP]$  permet de trouver son milieu  $\Omega$ , le centre de l'ellipse. De plus  $O$  est un foyer de l'ellipse, on peut alors trouver aisément la position du second foyer, noté  $F$  par la suite, en reportant la distance  $OP$  à partir de l'apogée  $A$  sur le segment  $[AP]$ . On rappelle qu'avec la connaissance des deux foyers et du diamètre du cercle principal, on peut

par la technique du « jardinier » tracer l'ellipse par sa *définition bifocale*.

Néanmoins, on poursuit dans l'esprit du paragraphe : se pose la question classique de construire l'ellipse inscrite dans son cercle principal, connaissant celui-ci et les deux foyers, uniquement avec des transformations géométriques simples du plan. Suivant le §5 VII de [12], on peut déterminer le *cercle directeur* de l'ellipse par rapport au foyer  $O$ , noté  $(C_{dO})$ .

Il est obtenu comme image du cercle principal par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $2$  :  $(C_{dO}) = \mathcal{H}(0,2)[(C_p)]$  :

$$\begin{array}{c} \mathcal{H} \xrightarrow{\mathcal{R}} (C') \xrightarrow{\mathcal{I}} (C_p) \xrightarrow{\mathcal{H}} (C_{dO}) \xrightarrow{g} \mathcal{T} \\ V \rightarrow V' \rightarrow V'' \rightarrow V''' \rightarrow M \end{array}$$

Le milieu  $\Omega$  du segment joignant les deux foyers est le centre du cercle principal (et de l'ellipse), alors on a  $\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{O\Omega}$  d'où  $F = \mathcal{H}(0,2)[\Omega]$ . Or  $(C_p) = C(\Omega, a)$  ainsi  $(C_{dO}) = C(F, 2a)$ , ce qui se vérifie sur la construction (figure 16 de la page suivante). Il est aisé de déterminer autant de points souhaités de la trajectoire et leur tangente. Pour cela, il suffit de considérer un point courant du cercle principal, noté  $V''$  sur la figure. La demi-droite  $[OV'']$  intercepte, par construction, le cercle directeur  $(C_{dO})$  en un point  $V'''$  (on aurait pu utiliser les deux points d'intersection, donnant deux points de la trajectoire et deux tangentes). On trace la médiatrice  $(\Delta)$  du segment  $[OV''']$  de milieu  $V''$ , puis la droite  $(FV''')$  qui intercepte la droite  $(\Delta)$  en  $M$ . On peut montrer que ce point  $M$  est sur la trajectoire, et donc la droite  $(\Delta)$  est la tangente au point  $M$  à la trajectoire cherchée. Le *lieu des points*

$M = g(V''') = f(V)$  ( $f, g$  fonctions de  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ) est la trajectoire et peut donc être tracé globalement grâce au logiciel par transformations successives lorsque le point  $V''$  décrit le cercle principal ( $C_p$ ) et  $V'''$  le cercle directeur ( $C_{dO}$ ) comme sur la figure 16. En déterminant plusieurs points et leur tangente grâce au compas et à la règle, on peut aisément esquisser l'ellipse trajectoire pour une construction à la main.

Remarque :

En fait, la trajectoire-conique trouvée est l'enveloppe de la famille des tangentes, ou médiatrice d'un segment joignant un point du cercle directeur au point  $O$ , centre du repère et foyer. Or, la courbe orthotomique d'une conique à centre par rapport à l'un de ses foyers est le cercle directeur centré en l'autre foyer.  $C'$  est ce que l'on a utilisé comme propriété.

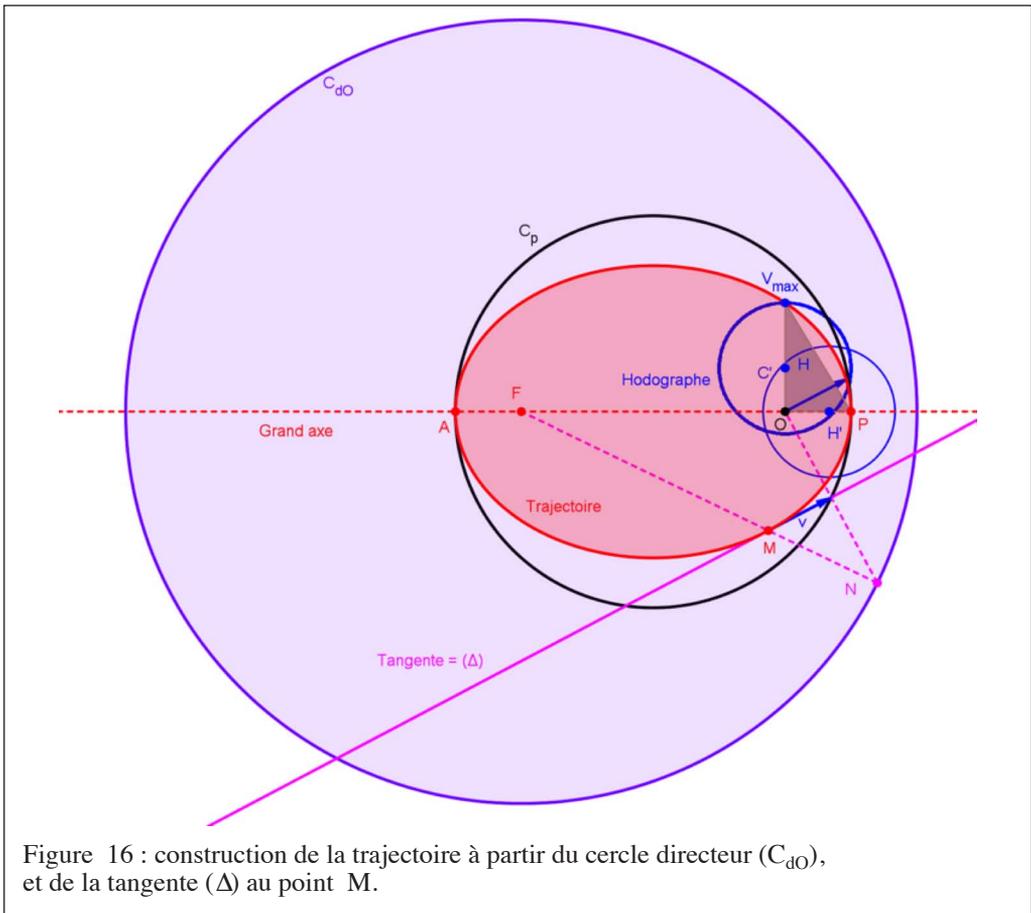


Figure 16 : construction de la trajectoire à partir du cercle directeur ( $C_{dO}$ ), et de la tangente ( $\Delta$ ) au point  $M$ .

### Bibliographie

- [1] Jérôme Perez « La méthode synthétique de Newton », Tangente HS 69, janvier 2019 : Mathématiques et physique, Destins croisés, article pages 34-37.
- [2] Isaac Newton, « Principes mathématiques de la philosophie naturelle », Trad. La Marquise du Châtelet, Paris, Dunod 2011.
- [3] W. R. Hamilton, « The hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the newtonian law of attraction », Proceedings of the Royal Irish Academy, 3 (1847), p. 344-353.
- [4] Jean Pierre Luminet, Le Destin de l'Univers I, folio essais.
- [5] Albert Einstein, La théorie de la relativité restreinte et générale, Dunod.
- [6] James Clerk Maxwell, Matter and Motion, Dover 1991.
- [7] Brian Beckman, Feynman Says: "Newton implies Kepler, No Calculus Needed!", The Journal of Symbolic Geometry Volume 1 (2006). "Feynman's Lost Lecture, The Motion of Planets Around the Sun," by David L. Goodstein and Judith R. Goodstein, W. W. Norton & Company, New York, 1996.
- [8] L.D. Landau, E. Lifchitz, Mécanique, Tome I cours de Physique Théorique, Ellipses.
- [9] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Graduate Texts in Mathematics, Springer.
- [10] Anne-Marie Marmier, AIRES ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, IREM de Lille- Groupe Collège - Janvier 2011.
- [11] Claude Terrien, Bulletin de l'Union des Professeurs de physique et chimie a) n° 965 de juin 2014 et b) n° 989 de décembre 2016.
- [12] Bruno Ingrao, Coniques projectives, affines et métriques, Calvage & Mounet.
- [13] Jean-Pierre Provost, Gérard Vallée, Les maths en physique, la physique à travers le filtre des mathématiques, Dunod
- [14] Jean-Pierre Provost, Christian Bracco, A simple derivation of Kepler's laws without solving differential equations, Eur. J. Phys. 30 (2009) 581-586.
- [15] Jean-Marcel Rax, Mécanique analytique, collection Sciences Sup, Dunod, chapitre 2.