
ACTIVITÉ DU N° 123

ÉCONOMIE D'EMBALLAGE ? SOLUTION

Simon MODESTE¹

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier, CNRS

Rappel de l'énoncé

Une célèbre marque de café biologique propose des conditionnements de son café arabica moulu en paquets de 250 g et de 500 g.

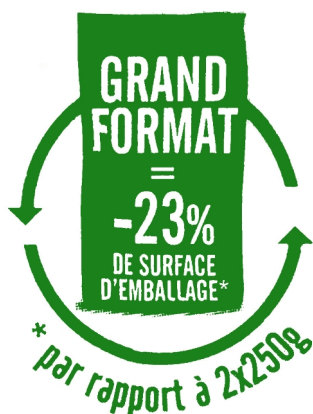


Paquet de 250 g.

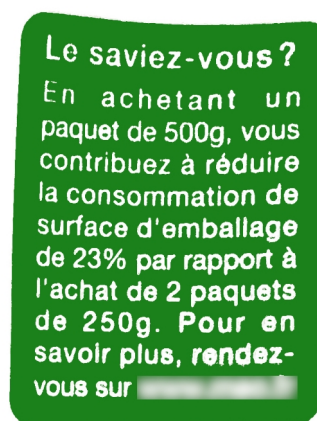


Paquet de 500 g.

Sur la face et sur le côté du paquet de 500 g, on trouve une vignette et un encart, indiquant ceci :



Vignette sur la face du paquet.



Encart sur le côté du paquet.

L'économie d'emballage annoncée vous semble-t-elle possible ? Peut-on vérifier mathématiquement ce qu'affirme le fabricant ?

¹ simon.modeste@umontpellier.fr

Résolution

1. Retour sur la question

Ce qu'on veut étudier, c'est le réalisme, la plausibilité, du résultat. Peut-on vraiment économiser 23 % d'emballage en remplaçant deux paquets de 250 g par un paquet de 500 g.

Commençons par expliciter quelques sous-entendus (pas si évidents que ça) :

→ Confronté à ce problème, on peut penser qu'on n'a pas les données nécessaires au calcul des surfaces concernées, et qu'on ne peut pas répondre (par exemple : « Je ne connais pas les dimensions initiales d'un paquet, ou la masse volumique du café moulu... donc je ne peux pas évaluer l'économie d'emballage »). En fait, la question n'est pas liée au produit contenu dans l'emballage, elle ne dépend pas de la masse, du volume ou de la masse volumique de café. Mais il faut déjà bien identifier, dans un premier temps, qu'un doublement de masse correspond à un doublement de volume, si on garde le même produit. La question est donc celle du doublement du volume du paquet, ou de la masse : Combien d'emballage (en proportion) est économisé entre les deux packagings, 1 paquet de 2 unités (de masse, de volume) par rapport à deux paquets d'une unité chacun. Ce n'est pas si évident de se dire qu'on peut étudier ce problème indépendamment des dimensions initiales, de la masse ou du volume. Alors, dans un second temps, on peut envisager qu'un changement d'échelle (de masse volumique, de masse ou de volume) ne changera pas le rapport des surfaces d'emballages.

→ Pourtant, cela dépend quand même de la **modélisation** du problème : si l'on prend le temps d'y réfléchir, on se rend compte qu'avec une culture mathématique, on fait rapidement et sans vraiment s'en rendre compte, de premiers choix de modélisation et de simplification du problème (par exemple, considérer les paquets comme des pavés droits dont on ne regarde que le volume et la surface). Ce pas si évident pour des personnes novices ou non-expertes, surtout que le paquet de 250 g sur l'image n'a pas complètement une forme de pavé droit... même si la plupart des paquets de café de 250 g que nous connaissons sont plus parallélépipédiques que celui de l'image.

De fait, comme on ne connaît pas les dimensions des paquets concernés, il faut modéliser le problème. Le problème peut d'ailleurs paraître manquer de données, mais si les dimensions des paquets étaient connues, il ne s'agirait plus que d'un « simple » exercice de calcul de surfaces et de pourcentages, avec des choix de modélisation implicites et déjà décidés.

→ On parle de 23 % de quoi ? La phrase « -23 % de surface d'emballage par rapport à 2 paquets de 250g » s'interprète comme : la surface d'emballage du paquet de 500 g est de 23 % inférieure à celle de deux paquets de 250 g. Il s'agit donc de 23 % de la surface d'emballage de 2 paquets de 250g. On peut facilement s'embrouiller, et il faut bien identifier quelle est la valeur qui sert de référence.

Voyons maintenant comment on peut aborder ce problème.

2. Un premier modèle du problème

On considère des emballages en forme de pavés droits (parallélépipèdes rectangles) et on s'intéresse au volume et à la surface de ces objets géométriques « idéaux ».

Ce faisant, on simplifie le réel, et on néglige ainsi les jointures pour souder l'emballage, les superpositions, les parties repliées ou « perdues » du patron...

A. Des exemples pour s'appropriier le problème, le comprendre, essayer...

Commençons par prendre un exemple simple, basé sur l'observation suivante : si l'on accole deux pavés identiques selon une face identique, comme sur la figure 1, on obtient un nouveau pavé de volume double. Et « on économise 2 fois la surface de la face superposée »).

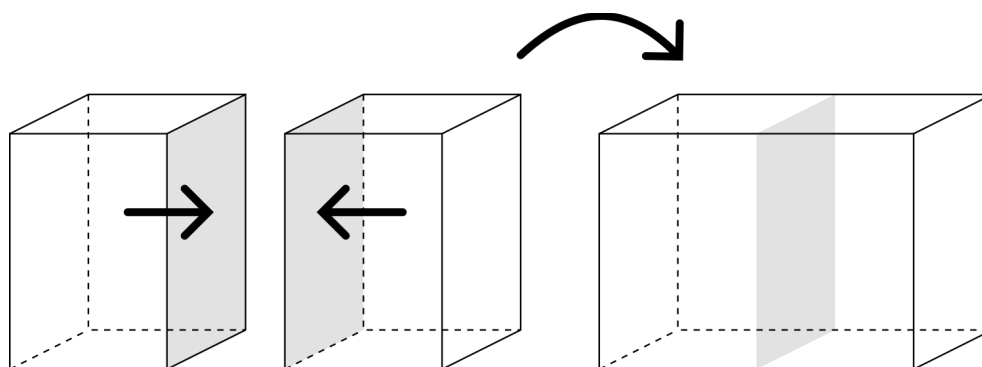


Figure 1 : Obtention d'un pavé droit de volume double en accolant deux pavés droits identiques selon une de leurs faces identiques.

De cette manière, on peut évaluer la surface d'emballage économisée par rapport à la surface totale. En proportion, on économise la surface de deux faces par rapport à la surface totale de deux paquets, ce qui est équivalent à la surface d'une face par rapport à celle d'un paquet.

On voit aussi que la solution la plus économique est d'accoler les deux pavés par leur face de plus grande superficie (on peut s'en convaincre encore plus nettement, de façon expérimentale, en comparant les 3 façons d'accoler deux emballages de tablettes de chocolat !).

Détaillons les calculs sur deux exemples avec des formats variés².

Exemple 1	Exemple 2
• Dimensions : $h=9$ cm, $L=8,5$ cm, $\ell=6$ cm. • Surface d'emballage de deux paquets : 726 cm². • Dimensions de l'emballage de volume double obtenu : $h=9$ cm, $L=8,5$ cm, $\ell=12$ cm. • Surface de l'emballage de volume double obtenu : 573 cm². • Économie d'emballage : $\frac{573}{726} \approx 0,79$, soit 21 % d'économie.	• Dimensions : $h=20$ cm, $L=10$ cm, $\ell=5$ cm. • Surface d'emballage de deux paquets : $1\,400$ cm². • Dimensions de l'emballage de volume double obtenu : $h=20$ cm, $L=10$ cm, $\ell=10$ cm. • Surface de l'emballage de volume double obtenu : $1\,000$ cm². • Économie d'emballage : $\frac{1\,000}{1\,400} \approx 0,71$, soit 29 % d'économie.

Ainsi, on peut déjà observer que la valeur de 23 % donnée sur l'emballage de café semble possible.

Cependant, même assimilés à des pavés droits, les paquets de 500 g présentés dans l'énoncé ne semblent pas avoir le format de deux paquets de 250 g accolés. Il faut approfondir notre recherche.

² Le premier a des dimensions mesurées approximativement sur un emballage disponible (de presque $\frac{1}{2}$ L), le second est construit arbitrairement pour avoir des calculs simples à réaliser (son volume est exactement 1 L). Le premier est un peu plus « ramassé » et le second plus « allongé » et « aplati ».

B. Des paquets optimaux en termes surface/volume

Explorons d'autres possibilités pour les dimensions des pavés droits qui modélisent les paquets de café. On sait³ que, pour un volume donné, le parallélépipède de plus petite surface est le cube. Considérons donc le cas de deux « petits » cubes de même volume V et d'un « gros » cube de volume $2V$. Comparons les surfaces extérieures de ces cubes.

Les petits cubes ont un côté de longueur $\sqrt[3]{V}$ et le gros cube a un côté de longueur $\sqrt[3]{2V}$. Et leurs surfaces respectivement sont donc $6\sqrt[3]{V^2}$ et $6\sqrt[3]{2V^2}$.

Le rapport de la surface du gros paquet par rapport à 2 petits paquets est donc :

$$\frac{6\sqrt[3]{2V^2}}{12\sqrt[3]{V^2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt[3]{2V^2}}{\sqrt[3]{V^2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2^2}.$$

Ce qui donne un rapport d'environ 0,79, c'est-à-dire une diminution d'environ 21 %.

C. Cas général des emballages aux mêmes proportions

Supposons maintenant que les paquets ne soient pas cubiques, mais que les paquets de 250 g et de 500 g aient les mêmes proportions. On peut faire le même raisonnement que précédemment, et le résultat obtenu se généralise. En effet, pour doubler le volume, chacune des trois dimensions sera multipliée par $\sqrt[3]{2}$. Ainsi, les surfaces de chacune des faces, et donc la surface totale, seront multipliées par $\sqrt[3]{2^2}$.

On obtient le même rapport que précédemment entre la surface S_G d'un gros paquet et le double de la surface S_P du petit paquet :

$$\frac{S_G}{2 \cdot S_P} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot S_P}{2 \cdot S_P} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2^2},$$

soit, comme dans le cas précédent, une économie d'emballage de 21 % environ.

3. D'autres modèles possibles

D'autres modèles de la situation sont possibles, notamment en envisageant des formes d'emballage plus complexes : le paquet de 250 g proposé n'a pas vraiment une forme de pavé droit sur l'image. On peut le tasser, et marquer plus nettement les plis de l'emballage, pour qu'il prenne la forme d'un pavé, et donc supposer qu'on a la même surface d'emballage qu'un pavé droit (et qu'on n'a pas d'air dans la paquet). Mais on pourrait par exemple lui donner une forme de « maisonnette » : un pavé droit avec un prisme droit à base triangulaire posé sur le dessus, sur une de ses faces rectangulaire qui se superposerait avec la face supérieure du pavé (cf. figure 2). Notons que si on suppose que le paquet de volume double est un modèle similaire en proportion, ça ne changera rien au raisonnement et aux calculs précédents, et l'économie restera de 21 %.

³ Ou on le peut le retrouver par soi-même, mais nous l'admettons ici. Un raisonnement possible est de voir que chaque face doit être un carré...

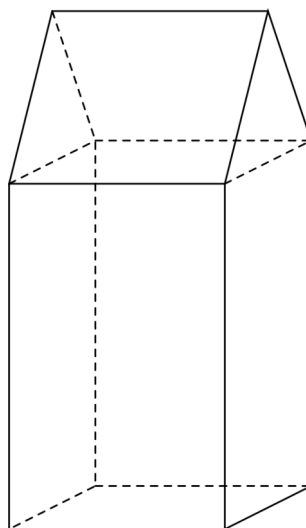


Figure 2 : Un modèle de paquet plus complexe (format « maisonnette »).

Une autre idée peut être de chercher à prendre en compte dans le modèle les jointures pour souder l’emballage, les superpositions de matière, et les parties repliées ou qui sont « perdues » dans un patron. On peut alors comparer les surfaces d’emballage en comparant les surfaces des patrons.

Par exemple, en observant de près les emballages de ces paquets de café, on peut retrouver les pliages et superpositions de matériaux collés du patron rectangulaire qui a permis de le réaliser. La figure 3 donne un exemple d’emballage faisant apparaître les superpositions et les parties repliées , ainsi qu’un schéma du patron rectangulaire associé.

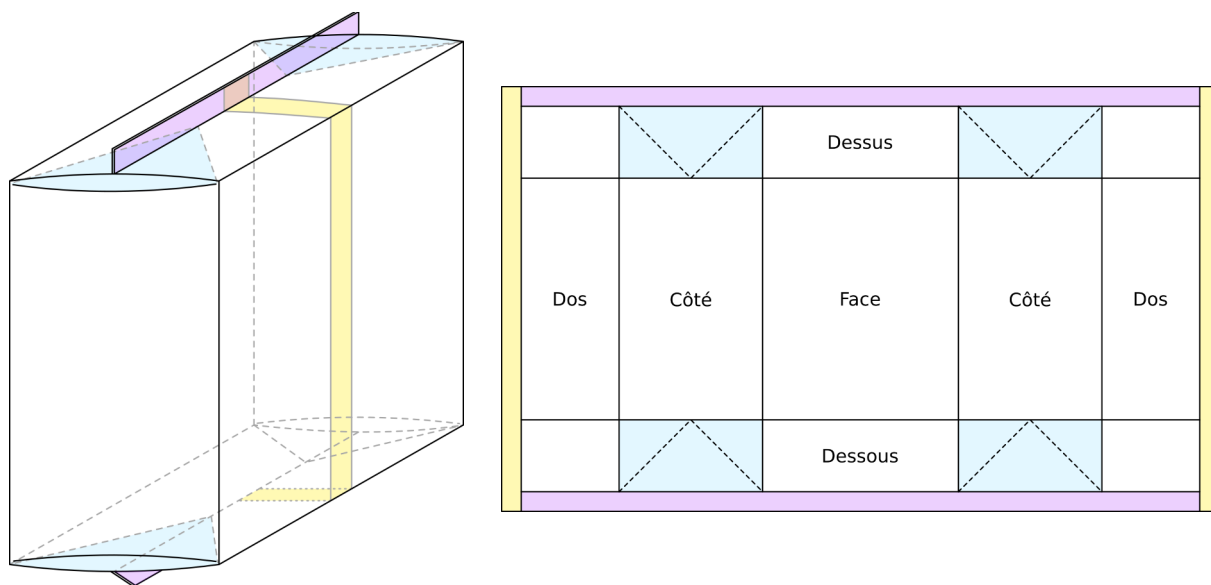


Figure 3 : Exemple de modélisation d’une forme l’emballage plus complexe et prenant en compte les pertes et superpositions. Schéma du paquet et patron associé.

Si l’on suppose maintenant qu’on prend des petits paquets et des gros de mêmes proportions, mais en gardant des largeurs fixes (par exemple 1 cm) pour les languettes/replis (en jaune et violet dans la figure 3), alors la surface d’emballage ne varie plus proportionnellement aux

volumes. On pourra avoir un rapport différent de 21 %, et sa valeur dépendra cette fois-ci des dimensions du paquet⁴.

4. Approche expérimentale (ou retour à la réalité)

Pour tester la véracité de l'annonce d'économie d'emballage de la marque de café, on peut aussi mesurer empiriquement les surfaces des deux emballages concernés. Cela permettra vérifier l'affirmation, et de mettre à l'épreuve de la réalité, les résultats théoriques obtenus dans nos modèles.

Pour cela, bien sûr, il faut avoir accès aux emballages. Il faut ensuite les déplier méticuleusement en décollant les parties qui sont scellées entre elles, et mesurer la surface d'emballage (heureusement, c'est un rectangle !). C'est ce que nous avons fait, et la figure 4 montre les deux emballages à plat avec leurs dimensions mesurées.



Figure 4 : Les deux emballages de café du problème (250 g et 500 g), dépliés et mis à plat, avec leurs dimensions mesurées. Le petit paquet n'est pas celui de la photo de l'énoncé, mais il s'agit bien d'un paquet de 250 g de café de la même marque.

⁴ D'ailleurs, si on cherchait le paquet de surface minimale à volume constant, on verrait aussi qu'on obtient des paquets aux proportions différentes en fonction du volume choisi.

Calculons les surfaces des deux emballages :

- paquet de 250 g : $27,3 \times 25,5 \approx 696,2 \text{ cm}^2$;
- paquet de 500 g : $36,6 \times 28,5 \approx 1\,034,6 \text{ cm}^2$.

Le rapport de surface entre 1 paquet de 500 g et 2 paquets de 250 g est donc d'environ 0,74.

Ce qui donne une économie relative de 26 % d'emballage.

Ce résultat est sensiblement supérieur à ce qui est annoncé par la marque. On peut se demander d'où vient cette différence. Est-ce que la marque ne veut pas prendre de risque ? Y a-t-il des variations selon les paquets produits ? A-t-elle fait une erreur de calcul ?

Quoi qu'il en soit, on a vu que l'économie de 23 % annoncée sur l'emballage est bien plausible, et qu'elle est même supérieure en réalité, pour les emballages qu'on a mesurés.