

Jérôme PROULX¹

Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique
Université du Québec à Montréal

Résumé. L'objectif de cet article est de conceptualiser la notion de pourcentage sous différentes facettes. À travers une exploration et une analyse d'écrits, autant des outils de référence (lexiques, dictionnaires, manuels) que des articles, les sens ratio, fractions, nombre décimal, opérateur et nombre-index sont abordés (et quelques autres en filigrane). Cette analyse permet de mettre en avant l'interrelation forte, voire la complémentarité, entre ces différents sens et la façon avec laquelle ils peuvent interagir entre eux. Cette conceptualisation permet aussi de faire ressortir le jeu qui existe dans la nature relative et absolue du pourcentage, soulignant le riche potentiel d'une flexibilité dans un passage de l'un à l'autre dans la compréhension du pourcentage.

Mots-clés. Pourcentage, ratio, fraction, nombre décimal, opérateur, relatif, absolu.

Abstract. The objective of this article is to propose a conceptualization of the concept of percentage under its different facets. Through analyzing various reference works (lexicons, dictionaries, textbooks), as well as scientific and professional articles, the ratio, fraction, decimal number, operator and index-number conceptions are addressed; showing the strong interrelation, and complementarity, existing between these different conceptions. Conceptualizing percentage along this way makes emerge the interplay that exists between both relative and absolute dimensions, putting forth the rich potential of flexibly engaging with both when working with percentage.

Keywords. Percentage, ratio, fraction, decimal number, operator, relative, absolute.

From discussion with colleagues, it is clear that there is not universal agreement on what *sort* of being a “percent” actually is. This might be merely one more academic quibble, except for the fact that *our disagreements about the kind of thing we are dealing with may contribute to our lack of success in teaching the concept to children* (Davis, 1988, p. 299 ; italiques dans l'original).

Introduction

Les pourcentages sont partout autour de nous. Nous les retrouvons dans les médias, à l'épicerie, dans les boutiques, avec les taxes, les rabais, voire sur les aliments eux-mêmes, tout autant que dans nos finances personnelles avec les impôts et les différents types de ponctions salariales. Et, évidemment, les pourcentages sont présents à l'école. Mais, au-delà de leur présence accrue dans notre entourage, que sont vraiment les pourcentages au plan mathématique ? Quels sens leur donner ? L'objectif de cet article est d'approfondir conceptuellement divers sens des pourcentages. Pour y arriver, des travaux tirés d'articles de revues sont réinvestis, combinés à une analyse d'outils de référence (manuels, lexiques, dictionnaires). Pour bonifier la construction de cette conceptualisation du pourcentage, tout au long de l'article des « notes réflexives » sont proposées sur des dimensions historiques, mathématiques et didactiques.

¹ proulx.jerome@uqam.ca

Note réflexive - pourcent ou pourcentage ?

En français comme en anglais, les mots *pourcent*, *pourcentage*, *percent* et *percentage* sont souvent traités comme des synonymes; et c'est le contexte de la phrase qui permet de les départager. Leurs racines étymologiques et historiques sont évidemment connectées, mais le suffixe « -age » est utilisé pour former un nom indiquant l'action de faire la chose, le processus à réaliser. Ainsi, un peu comme avec « jardin » et « jardinage », *pourcentage* signifie l'action de faire le *pourcent*. Leurs utilisations actuelles rend cependant quelque peu floue leurs différences : « *pourcentage* » est souvent associé à une chose (par ex. : un *pourcentage* comme résultat) et « *pourcent* » est fréquemment associé à un état à déterminer en insistant sur le « pour » (par ex. : tant *pour cent*). Bien que certains auteurs aient tenté de les distinguer pour éviter les confusions, et ce tant chez les anglophones que les francophones, ces formes dans le discours courant sont maintenant bien intégrées. Malgré leurs amalgames, il est plus naturel d'entendre « 30 *pourcent* » que « 30 *pourcentage* » ou « *pourcentage* 30 », et il est surtout question de l'étude des *pourcentages* à l'école et non des « *pourcents* ». Pour ces raisons, le symbole « % » est délibérément utilisé dans la suite de l'article, pour désigner autant les expressions « *pourcentage* » que « *pourcent* », et ce, au pluriel comme au singulier.

1. Conceptualiser le % : une richesse à amalgamer

Souvent perçus comme une notion simple, les % sont effectivement abordés tôt dans le cheminement scolaire des élèves (parfois même dès l'âge de 9 ans, par exemple au Québec). En même temps, les % représentent un défi d'importance pour eux, et en retour pour leurs enseignants, le sens à donner aux % étant fréquemment mis de côté au profit d'une série de calculs techniques. Tel que l'ont exprimé il y a plus de 30 ans Parker et Leinhard (1995), les % sont souvent « *oversimplified in instruction [... where] the richness of the topic has often been left unexplored, while heavy instructional emphasis has been placed on percent procedures* » (p. 429). Pour pallier cette situation touchant autant les élèves que les enseignants, des éducateurs et auteurs de manuels scolaires formulent, depuis de nombreuses années, des propositions, les unes plus variées et riches que les autres, sur les façons d'aborder et travailler la notion de % : segments gradués (Dewar, 1984), méthode d'équations (Kessler, 1960 ; Volpel, 1954), taux d'échange (Taurisson, 1976), liens mnémoniques (McGivney et Nitschke, 1988), fractions et décimaux (Fortier, 1988), carrés-unités (Bennett et Nelson, 1994 ; Zambo, 2008), méthodes de division (Chamberlain, 2005 ; Szymanski, 1998), règles et bâtons (Erickson, 1990 ; Wiebe, 1986), voire divers jeux et activités (Béland, 1976 ; Bloch, 2005 ; Lavallée, 1977), et ainsi de suite. Ces propositions insistent sur divers sens de la notion de *pourcentage*, comme ceux de fraction, ratio, nombre, opération, etc., et souvent tous à la fois, passant fréquemment d'un sens à un autre sans nécessairement tracer de distinctions entre chacun d'eux. Cette variété de sens et d'entrées sur le % soulève des questions relatives à sa nature : Est-ce une fraction de dénominateur 100 ? Est-ce un ratio spécial pour 100 ? Est-ce un simple nombre décimal ? Est-ce une opération ? Est-ce une unité de mesure ? Est-ce tout ceci à la fois, et plus encore ? Cette diversité se retrouve aussi dans les manuels et ouvrages de référence (lexiques, dictionnaires), où les % sont abordés de différentes façons et sous différents sens.

Loin de concevoir cette diversité de sens comme un éparpillement incohérent, celle-ci pointe sur un champ mathématique qui se révèle fort riche au plan conceptuel, mais qui est aussi touffu, où différents sens possibles du % s'entrecroisent sans nécessairement former un tout cohérent. Qui plus est, les écrits dédiés exclusivement à la notion de % sont rares, alors que les % sont plus souvent qu'autrement insérés timidement dans des travaux plus larges touchant les questions de nombres rationnels (par ex. : Behr et al., 1992 ; Moss, 2000) ou de statistiques générales (par

ex. : Gauvrit, 2014 ; Huff, 1954 ; Spiegelhalter, 2019). Cette situation soulève le besoin de regrouper toute cette variété sous un même toit, pour réussir à coordonner et prendre avantage de ce que Dole et al. (1997) appellent les multiples facettes du %.

C'est justement l'objectif de cet article, soit d'ouvrir ce champ mathématique relatif aux divers sens possibles du %, dans le but de mettre en valeur sa nature riche et variée. Pour aborder ces différents sens, une courte insertion historique sur la notion de % est préalablement proposée. Celle-ci est suivie par une analyse des sens ratio, fraction, nombre décimal, opérateur et nombre-index du %, qui permettent une discussion sur les complémentarités, voire les complicités, existant entre ces différents sens. Ces discussions mènent à aborder l'ambivalence existant au cœur de la nature relative et absolue de la notion de %, ouvrant sur des dimensions mathématiques clés à considérer lors de l'interprétation et du travail des %.

2. Quelques brèves origines du %

Situer davantage la notion de % dans son contexte historique peut aider à mieux comprendre son émergence et sa diversité actuelle au plan mathématique. L'utilisation du % semble tirer sa source des pratiques marchandes de taxation et d'imposition ; certains lient même les % à des pratiques ayant eu cours plus de 2000 ans avant notre ère chez les Babyloniens (voir les analyses dans Parker et Leinhard, 1995, et Lemay, 1995). Initialement, ces taxes et impôts ne réfèrent pas tout à fait à 100, mais plutôt à des ratios variés relatifs aux biens qui étaient taxés. Par exemple, les autorités pouvaient percevoir une taxe à un fermier du type « tu nous donnes une balle de foin pour chaque trois balles de foin que tu récoltes » ou encore « deux balles de foin par cinq produites », etc., selon l'endroit ou encore le type de produit taxé (fruits, métaux, etc.). Toutes ces taxations étaient fortement ancrées dans une idée de ratio et de calculs de proportions. La base 100 pour ces ratios semble s'être petit à petit établie par la suite, par exemple en Inde et en Chine de 300 avant notre ère à 1100 après (voir la note réflexive suivante).

Note réflexive - pourquoi 100 ?

Le passage au « pour cent » n'est pas bien détaillé dans l'histoire, c'est-à-dire ce qui peut expliquer que 100 ait été choisi comme base de comparaison pour ces calculs. Plusieurs hypothèses coexistent. Certaines de ces hypothèses sont évidemment reliées à notre système de numération en base 10. Par contre, il n'est pas évident de comprendre pourquoi 100 est précisément le nombre choisi. D'autres hypothèses associent la place du 100 à l'émergence des systèmes d'argent et de monnaies, qui utilisent fréquemment les centimes, les sous, les cents, etc. Plusieurs de ces systèmes ont toutefois émergé bien après la notion de pourcent, rendant cette justification plus incertaine. D'autres rattachent le 100 à des pratiques plus anciennes, par exemple aux taxations romaines de 1/100 perçues lors de certains échanges commerciaux (Lemay, 1995). Finalement, d'autres, comme Baruk (1995), affirment tout simplement, en tenant pour acquis notre système de numération actuel en base 10, que c'est le caractère raisonnable ou accessible du 100 qui en fait un choix privilégié, où 100 est vu comme un nombre qui n'est pas trop petit comme 10, mais pas trop gros non plus comme 1000. La question du 100 semble demeurer entière à ce jour, où des nombres tels que 12, 50 ou 60 auraient pu remplir facilement les mêmes fonctions, tout en se référant à d'autres besoins, tels les heures, la divisibilité, les habitudes sociales, etc.

La présence d'une référence à 100 dans les calculs de taxes et d'impôts était initialement une simple commodité, une certaine façon de faire pour obtenir la valeur à percevoir. En d'autres

mots, le pourcentage comme notion mathématique n’existait pas vraiment durant ces années, bien que des références à 100 parsemaient les calculs réalisés. En ce sens, l’idée de pourcentage n’était pas « représentée » en soi, elle n’était pas une chose à laquelle référer ni théoriser, et semblait plutôt être une habitude calculatoire, une pratique marchande. Ainsi, sans notion de pourcentage explicite au plan mathématique, aucune symbolisation spécifique lui référant ne pouvait vraiment voir le jour ; rendant par le fait même sa genèse un peu plus complexe à retracer dans les écrits (*cf.* Cajori, 2012, § 274). Par contre, il semble qu’à force de transcrire ces habitudes calculatoires reliées à 100 et de vouloir informer au sujet des différentes techniques pour exécuter ces calculs (par exemple dans les livres de commerce italiens, *cf.* Smith, 1970, p. 437-441, p. 458-459 et p. 475-477), les choses ont pu évoluer au plan symbolique. Ces évolutions ont participé à l’établissement graduel du % comme notion mathématique en elle-même, possédant sa symbolisation propre et ses techniques (plus de détails sur l’avènement du symbole « % » sont offerts dans Proulx (2024)).

Note réflexive - partie-partie ou partie-tout ?

Au-delà des questionnements sur l’origine du pourcentage, le fonctionnement lui-même des ponctions de taxes est assez flou. Lorsque la demande de taxe est de « 1 panier de fruit par 3 paniers produits », ce panier à donner en taxes est-il un des trois paniers produits ou un qui est supplémentaire aux trois ? Il y a là la distinction faite en didactique des mathématiques entre une conception partie-tout (1 pour 3 revient à 1 des 3, donc 1 donnée et 2 conservées) et une partie-partie (1 pour 3 devient 1 des 4, donc 1 donnée et 3 conservées). Avec les pourcentages, cette distinction n’est pas toujours simple non plus. Dans certains pays (par ex. au Canada), les taxes sont en surplus des montants à payer et donc en mode partie-partie. Ainsi, un jean à 100 € avec 15% de taxe coûte 115 € à l’acheteur. Au contraire, l’impôt sur le revenu est plutôt traité en mode partie-tout : un salaire annuel de 100 000 € imposé à 25 % implique que le contribuable conserve 75 000 € et donne 25 000 € à l’état (*cf.* Proulx (2025a) pour l’analyse de ces différences). Ainsi, tel que le souligne Spiegelhalter (2019), dire 3 % peut signifier autant 3 et 100 que 3 et 97 ou encore 3 et 103, selon le contexte.

L’établissement graduel du % comme notion mathématique a été particulièrement stimulé par une envie de communiquer différentes techniques de calculs et de les enseigner. Aussi, cette place de plus en plus présente dans les écrits marchands et ensuite dans les manuels d’enseignement (aux États-Unis par exemple, *cf.* Parker et Leinhard, 1995, p. 429-434) ont rendu le % un incontournable du paysage des mathématiques scolaires, autant à la formation des adultes (pour le commerce) que des enfants (à l’école). De cette présence accrue et grandissante dans l’enseignement sont nées différentes réflexions et idées sur la façon d’aborder les % pour les faire comprendre et montrer la façon de les utiliser dans diverses situations. C’est possiblement à travers ces contextes éducatifs, ces besoins de les enseigner et de les communiquer, que différents sens du % ont vu le jour et ont évolué ; dépassant par le fait même son entrée initiale comme « ratio », liée à ses origines dans les taxes et les impôts.

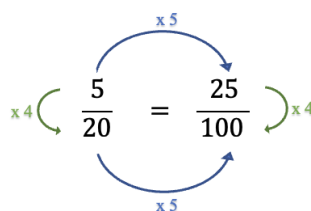
Sans prétendre aborder de façon exhaustive tous les sens possibles du %, ce qui suit offre une entrée sur ceux couramment rencontrés dans ce paysage des mathématiques scolaires. Tous ces sens, autant séparés que combinés, offrent un aperçu de la profonde richesse mathématique au cœur de la notion de %.

2.1. Le % comme ratio²

Le sens ratio est probablement le plus naturel et reconnu, voire celui considéré parfois comme étant le plus pur vu son origine dans les taxes et impôts. Interprétée de façon littérale, l'affirmation d'un % quelconque comme 22 % se lit « 22-pour-cent », pointant directement sur son sens ratio, sur une comparaison entre deux quantités, tel que le souligne Baruk (1995). Plusieurs lexiques et dictionnaires emboîtent ce pas³ :

- per cent - « *literally from the Latin 'in every hundred'* » (Earl et Nicholson, 2021) ;
- pourcentage - « *étant donné un réel positif a , la notation $a\%$ (lue « a pour 100* ») est appelée *pourcentage* » (Bouvier et al., 2009) ;
- percentage - « *a proportion, ratio or rate expressed with a denominator of 100* » (Borowsky et Borwein, 2002) ;
- pourcentage - « *rapport dont le second terme est 100* » (Dufour, 2011).

Vu ainsi, le % est fréquemment présenté comme une « *forme particulière de rapport* » (Champlain et al., 1996), un « *rapport spécial sur 100* » (Glatzer, 1984 ; Bergeron, 1994), où le % se lit comme étant « pour 100 » ou « par tranche de 100 » : 22 % est 22-pour-chaque-100. Dans cette lignée, Heuvel-Panhuizen (1994) le verbalise comme un ratio de *so-many-out-of-so-many*, une sorte de « tantième », donnant alors un *so-many-out-of-hundred*. Par cette entrée, le % est aussi traité sous l'angle des proportions pour trouver des ratios équivalents par transformation proportionnelle : 5 est à 20 comme 25 est à 100, donnant symboliquement la proportion $\frac{5}{20} = \frac{25}{100}$, avec ses relations multiplicatives, tel que représenté dans le schéma ci-dessous :



Ce sens ratio du %, tel que le présentent par exemple Heuvel-Panhuizen (1994) ou encore Baruk (1995), mène à transformer la situation en jeu vers une situation relative à 100. Par exemple, si dans un groupe il y a 230 enfants pour 575 personnes, la transformation en % implique de se demander « et si c'était pour 100 personnes? », ce qui donnerait 40 enfants : 40 % du groupe sont des enfants. De la même façon, calculer par exemple 27 % de 81 dans un sens ratio du % revient à poser une proportion pour déterminer la valeur recherchée, soit avec l'affirmation « 27 est à 100 tel que X est à 81 » pour trouver X , ou en se demandant « si j'ai un groupe de 27 à chaque groupe de 100, combien en ai-je pour un groupe de 81 ? », symbolisé entre autres par :

$$\frac{27}{100} = \frac{?}{81}$$

² L'expression « ratio » a été choisie pour éviter la polysémie attachée aux expressions « rapport » et « taux » dans les écrits francophones (scolaires et scientifiques). Ceci permet de faire des liens, sans s'y réduire, avec l'idée de « nombre rationnel », mais aussi avec le terme anglophone *ratio*.

³ En anglais, les concepts de *percent* (ou *per cent*) et de *percentage* se retrouvent souvent côte à côte dans les lexiques et dictionnaires. Tel que souligné, leurs différences sont toutefois subtiles, voire peu évidentes. Ils sont ici tous les deux abordés sans distinction.

C'est ce même sens ratio du % qui mène à parler de « parties par centaines », par exemple lors de l'évaluation de la concentration de solutions liquides : une solution à 5 % signifie que les ingrédients actifs constituent 5 parts pour chaque 100 parts de la solution. Ce « parts par 100 » s'inscrit ici dans une famille plus large de mesures de concentrés, tel que « parties par million » avec *ppm* ou « parties par milliard » avec *ppb* de l'anglais *billion*, traduisant toutes des entrées ratio entre les quantités en jeu⁴.

Que ce soit vu comme un ratio dont le second terme est 100, un rapport spécial à 100, ou toute autre forme de comparaison avec 100, cette entrée sur le % insiste sur la relation qui existe entre deux quantités, dont une est 100. En d'autres mots, dans le sens ratio du %, c'est la relation entre les deux quantités en jeu qui est centrale. Le % est alors un indicateur de cette relation à 100.

2.2. Le % comme fraction

Le sens fraction du % se retrouve tant de façon générale dans les utilisations familières du vocabulaire et du symbolisme liés aux fractions à l'école (fraction sur, fraction de, numérateur et dénominateur, $\frac{a}{100}$, etc.), que de façon précise sur la nature de la fraction en question. Sous cet angle, le % devient ici une fraction sur 100 :

- pourcentage - « *un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100* » (Côté et al., 2002) ;
- percent - « *a percent is a fraction in which the denominator is assumed to be 100* » (Downing, 2009).

La conversion d'une fraction quelconque à une ayant 100 au dénominateur passe alors par le travail des fractions équivalentes. Grignon (1970) affirme en ce sens : « *La fraction $\frac{1}{4}$ peut être exprimée avec 100 au dénominateur ; on dit alors qu'elle est exprimée en pourcentage. $\frac{1}{4}$ peut s'écrire $\frac{25}{100}$ (vingt-cinq centièmes) ou 25 % (vingt-cinq pour cent)* ». Dans la même lignée, Baruk (1995) présente quelques correspondances entre certaines fractions qu'elle nomme « *parlantes* » et les % associés, affirmant que :

- 25 % c'est exactement 1 pour 4 soit $\frac{1}{4}$;
- 50 % c'est exactement 1 pour 2 soit $\frac{1}{2}$;
- 75 % c'est exactement 3 pour 4 soit $\frac{3}{4}$;
- 33 % c'est approximativement 1 pour 3 soit $\frac{1}{3}$;
- 66 % c'est approximativement 2 pour 3 soit $\frac{2}{3}$.

Au-delà de l'utilisation du vocabulaire et du symbolisme associé aux fractions⁵ ou encore de l'affirmation qu'un pourcentage est « une autre façon d'exprimer une fraction », le pourcentage comme fraction peut prendre un sens plus précis. Bien que ceci puisse sembler en apparence évident, cette entrée sur les fractions sur 100 permet aussi de considérer le % non pas comme une fraction parmi tant d'autres, mais précisément comme une fraction décimale, liée aux

⁴ Il y a aussi la notion de pour-mille qui peut être citée, avec son symbole ‰; l'avènement historique du symbole % est tout autant curieux que contingent à celui du symbole ‰ (cf. Proulx, 2024).

⁵ Les expressions « numérateur » et « dénominateur » peuvent en effet créer une coupure importante avec le sens ratio du %, qui sont plutôt liés aux expressions « antécédent » et « conséquent », bien que moins usuelles. De plus, cette entrée sur le % comme fraction se limite aux valeurs entières, telles que 25 %, 65 %, 75 %, etc., laissant en plan une série de % possibles, tels que 21,87 %.

centièmes. Vu ainsi, 75 % devient 75 centièmes et s'écrit, sous forme de fraction décimale, $\frac{75}{100}$. Le % implique en ce sens une fraction décimale $\frac{a}{10^n}$, où $n=2$.

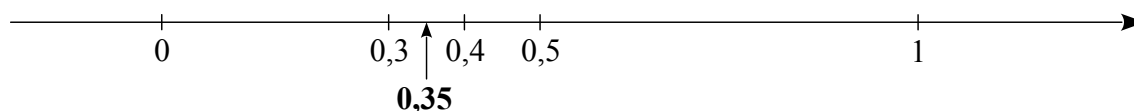
Chercher 27 % de 81 dans le sens fraction du % revient à une multiplication de fraction, soit ici à $\frac{27}{100} \times 81$. Tel que l'affirment Bouvier et al. (2009), « *Les a % d'un nombre A est le nombre $A \times \frac{a}{100}$, encore égal à $A \times 0,01a$* », ou encore Deledicq (2004), « *D'une façon générale, prendre p % d'un nombre A, c'est multiplier ce nombre par $\frac{p}{100}$* » (p. 232). Cette entrée fraction sur le % peut de plus être rendue explicite en l'abordant sous son angle fraction partie-d'un-tout. Ici, un tout est partitionné en 100 morceaux et le % représente le numérateur de la fraction, soit le nombre des morceaux choisis : 28 % signifie que 28 morceaux sont pris d'un tout découpé en 100, soit $\frac{28}{100}$. La conversion d'une fraction partie-d'un-tout vers le % se fait encore ici par l'entremise des fractions équivalentes, en raisonnant sur le tout et ses parties. Par exemple, avec la fraction $\frac{3}{4}$, un tout est découpé en 4 parties et trois de celles-ci sont prises. Pour passer au %, le même tout est maintenant découpé en des morceaux 25 fois plus petits, donc en 100 parties, et la conservation de l'équivalence exige alors de prendre 25 fois plus de ces petits morceaux, donc 75 de ceux-ci : $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$.

Finalement, alors que, dans la considération ratio, l'emphase est surtout mise sur la relation, dans celle où le % est une fraction l'emphase est davantage mise sur le partitionnement. Au-delà des conversions mécaniques entre % et fraction, et vice-versa, c'est l'idée que le % est un partitionnement, une partie ou un fractionnement qui prime.

2.3. Le % comme nombre décimal

Concevoir le % comme une fraction décimale ($\frac{a}{10^n}$, où $n=2$) mène à une autre perspective sur le %, soit celle comme nombre décimal. Si 35 % se lit « 35 centièmes », il peut aussi s'écrire 0,35. Cette conversion en nombre décimal permet de manipuler aisément le %, qui est obtenu, par exemple, en divisant le % par 100 : « *Un pourcentage s'exprime aussi sous forme décimale en divisant sa valeur par 100* » (Dufour, 2011). Ainsi, 35 % est converti en nombre décimal par $35 \div 100 = 0,35$ ou encore par une suite d'égalités avec les fractions décimales, où $35\% = \frac{35}{100} = 0,35$.

Comme nombre décimal, le % peut s'écrire ou se voir comme une puissance de 10, avec 10^n et $n=-2$: 35 % devient 35×10^{-2} . Cette perspective sur le % pris comme nombre décimal permet aussi de traiter le % directement comme un nombre en soi, par exemple en le positionnant sur la droite numérique. Le 35 % converti en 0,35 se place alors entre les nombres 0,3 et 0,4 sur la droite.



Un peu de la même façon qu'avec le sens fraction du %, déterminer 27 % de 81 revient à multiplier 81 par un nombre décimal, soit à faire $0,27 \times 81$: « *Prendre 12 % d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par 0,12* » (Deledicq, 2004, p. 232). Cette perspective du % comme nombre décimal insiste surtout sur la représentation numérique du %, sa dimension nombre, et particulièrement l'entrée que celle-ci permet pour ensuite opérer avec elle (par ex. : comparer, ordonner, calculer).

2.4. Le % comme opérateur

Déoulant directement de l'aptitude à convertir le % en fraction ou en nombre décimal, le sens opérateur est centrée sur une lecture du % qui dicte une opération à effectuer. Cette opération peut être « $\times \frac{1}{100}$ », « $\div 100$ » ou encore « $\times 0,01$ ».

- pourcentage - « le symbole % se lit « pour cent » et signifie « $\times \frac{1}{100}$ » » (Côté et al., 2002) ;
- « the words “per cent” mean “per 100”, or divided by 100 » (Szymanski, 1998, p. 101) ;
- pourcentage - « expression graphique d'un nombre rationnel qui consiste à utiliser le signe % (pourcent) signifiant l'existence de 100 comme diviseur » (CREMER, 1983) ;
- pourcentage - « le symbole du pourcentage est « % » qui signifie « divisé par cent » [...] » (Champlain et al., 1996).

Dans ce cas, 27 % se lit comme étant « $27 \times \frac{1}{100}$ », « $27 \div 100$ » ou « $27 \times 0,01$ ». Cette lecture fait en sorte que le % est toujours à convertir. Poussé à l'extrême, ici le % n'est jamais conservé dans son état, mais devient plutôt une requête pour opérer : « voir » le signe % dans 27 % mène directement à multiplier le 27 par $\frac{1}{100}$ ou 0,01, ou encore diviser par 100 : $27\% = 27 \times \frac{1}{100}$ ou $27\% = 27 \times 0,01$ ou $27\% = 27 \div 100$. Et ainsi, déterminer 27 % de 81 dans le sens opérateur du % devient une requête pour multiplier, qui se fait par la transformation suivante : $(27 \times \frac{1}{100}) \times 81$ ou $(27 \times 0,01) \times 81$ ou $(27 \div 100) \times 81$.

Dans le sens opérateur, le symbole « % » appelle plus qu'à une simple conversion (en fraction, en nombre décimal, en ratio) et mène à une transformation ou une opération à effectuer : le symbole « % » n'est pas conservé, il appelle à une action. La même chose se voit fréquemment lorsque le symbole de la racine carrée est lu comme une demande de « faire la racine » : le nombre $\sqrt{8}$ devient 2,8284... (d'autres pourraient vouloir conserver $\sqrt{8}$ tel quel, comme nombre). En se traduisant par une opération, le sens opérateur du % est centrée sur le calcul à faire, sur comment le faire et sur ce qui est obtenu comme valeur.

Note réflexive - % comme nombre

Byrkit (1983) a proposé d'attribuer une valeur numérique indépendante au symbole « % ». Il propose de concevoir le symbole « % » non pas comme une requête de $\times \frac{1}{100}$ mais comme étant directement égal au nombre $\frac{1}{100}$. En d'autres mots, Byrkit (1983) propose l'égalité suivante : $\% = \frac{1}{100}$. Et, à ceci, il ajoute implicitement que puisque le symbole « % » suit toujours un nombre, ils sont reliés par la multiplication comme il est fait habituellement en algèbre. Ainsi, puisqu'en algèbre $25x$ signifie que 25 et x sont liés par la multiplication avec $25 \cdot x$, alors 25 % devient $25 \cdot \%$ et donc $25 \cdot \frac{1}{100}$. Sa façon de concevoir le symbole « % » comme nombre lui permet d'aborder diverses tâches de pourcentage avec une aisance surprenante. En particulier, cette égalité-association l'aide à expliquer la propriété $A\%$ de $B = B\%$ de A . En effet, si $\% = \frac{1}{100}$, alors $A\%$ de B devient une opération à trois nombres séparés, chacun écrits par Byrkit sous forme de parenthèses comme $(A)(\%)(B)$, qu'il transforme ensuite en $A \times \frac{1}{100} \times B$ et par commutativité et associativité de la multiplication en $B \times \frac{1}{100} \times A$ et donc $B\%$ de A . Avec 20 % de 85, ceci donne alors :
 20% de 85 = $(20)(\%)(85) = 20 \times \frac{1}{100} \times 85 = 85 \times \frac{1}{100} \times 20 = (85)(\%)(20) = 85\%$ de 20.
Cette façon de considérer le symbole « % » comme étant le nombre $\frac{1}{100}$ a de quoi surprendre et

n'est pas sans failles. Ces permutations par commutativité peuvent mener à des situations assez bizarres, telles que :

$$55\% \text{ de } 8 = (55)(\%)(8) = 55 \times \frac{1}{100} \times 8 = \frac{1}{100} \times 55 \times 8 = (\%)(55)(8) = \% 440.$$

Sa proposition a toutefois le mérite d'attiser notre curiosité !

2.5. Le % comme nombre-index

De façon un peu séparée des autres sens, une autre entrée « nombre » du % est celle où ce dernier est considéré comme un index, toujours et explicitement lié à un *autre* nombre qui agit comme tout de référence (Berry et al., 1999). Le % est alors vu comme un indicateur de ce qui doit être pris dans ce tout. Comme nombre-index, le % n'a pas de valeur prédéterminée : 4 % n'est pas un nombre en soi, par exemple placé sur la droite numérique, et il n'est pas nécessairement équivalent à $\frac{4}{100}$ ou à 0,04 dans l'absolu, car il peut prendre toutes sortes de valeurs en fonction de son tout de référence. Ainsi, 4 % peut valoir 12 (4 % de 300), 3 217 (4 % de 80 425), $\frac{107}{5}$ (4 % de 535), etc. La valeur de 4 % devient accessible lorsque connectée à son référent : 4 % seul ne veut pas dire grand-chose — Gauvrit (2014) dit même qu'« *Il est intraitable, vide* » (p. 27), si son référent, le 4 % *de quoi* ?, ne lui est pas annexé. Vus comme nombre-index, les % ne peuvent pas être utilisés pour faire des comparaisons, pour ordonner ou encore calculer avec eux : 4 % n'est pas nécessairement comparable à 12 % sans connaître leurs référents, car il peut être plus ou moins grand que 12 % selon ces référents ; 4 % ne peut pas s'additionner à 10 %, par exemple, sans — encore une fois — connaître leurs référents respectifs.

Chercher 27 % de 81 dans le sens nombre-index du % représente une certaine forme de fausse question ou une redondance, car un % doit toujours être accompagné de son référent. La valeur de 27 % de 81 est à déterminer à travers différentes conversions, soit par les ratios, fractions, nombres décimaux, etc., tel que souligné plus haut. Le % comme nombre-index insiste sur la relativité du %, centré sur la considération de son référent à travers lequel il est connecté.

Note réflexive - conversions en %

Comment exprimer 4,5 en % ? Voilà une question posée par Davis (1988) et qui recèle des questionnements permettant de faire intervenir différents sens du %. Dans un premier temps, il est possible d'affirmer que 4,5 se convertit en 450 %. En considérant que 4,5 vaut 4,5 fois le nombre 1, et que chaque « 1 » représente 100 %, alors 4,5 est 450 % (4 fois 100 % et 0,5 fois 100 %). Le « 1 » qui représente 100 % est ici le tout auquel le 450 % réfère. Le nombre 4,5 vaut donc 450 % du nombre 1. Toutefois, ce « 1 » peut aussi être vu comme étant le tout de référence. À ce moment, le « 1 » n'est pas nécessairement le nombre 1 sur la droite numérique, mais un tout quelconque. C'est « une » chose. Le « 1 » comme tout de référence peut être un carré, une bande, un nombre de billes, un prix, etc. Le 4,5 est ici aussi 4,5 fois ce tout de référence choisi, donc 450% de ce tout. C'est alors un « 4,5 de quelque chose », qui devient 450 % de ce même quelque chose : $4,5 = 450\%$. Par contre, une fois ouverte la notion du tout de référence, la question « comment exprimer 4,5 en % ? » implique aussi de connaître et d'établir ce qu'est ce tout de référence. Si ce tout est le nombre 1, la réponse est 450 % tel que mentionné plus haut. Toutefois, si le tout de référence est soudainement 10, c'est encore différent : 4,5 est 45 % de ce nouveau tout, car 4,5 est 45 % de 10. Et si le tout est 100, c'est encore différent, car 4,5 devient 4,5 % de ce tout. Le 4,5 peut alors s'exprimer en 45 % ou en 4,5 %. Mais ce 4,5 peut aussi s'exprimer en % de plusieurs façons, selon le tout choisi : 4,5 peut être 20 % (de 22,5) ; 25 % (de 18) ; 50 % (de 9) ; 150 % (de 6,75) ; 5 % (de 90) ; etc. Ce

4,5 peut même s'exprimer par 100 %, si son tout est 4,5 ! Le jeu peut continuer longtemps, très longtemps. Il y a une infinité de possibilités... selon le tout de référence choisi !

3. Variétés, complémentarités, complicités et flexibilité des sens du %

Bien que présentés de façon individuelle, ces différents sens du % n'ont pas à être conçus de façon séparée : ils s'entrecroisent constamment et autant leurs complémentarités apparaissent naturelles que leur dissociation peut sembler maladroite. Cette complémentarité transparaît dans plusieurs articles et lexiques abordant les %, où il n'est en effet pas rare de retrouver des égalités du type « $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\% = 0,75$ » ou « $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,2$ », mentionnant au passage leur relation à un tout de référence à déterminer.

Au-delà des dimensions numériques ou de conversions, le % est souvent présenté et défini à travers ses différents sens, simultanément, où le passage d'un sens vers l'autre est proposé de façon fluide. En d'autres mots, les différents sens du % semblent coexister. Par exemple, Champlain et al. (1996) définissent le % sous l'angle ratio en tant que « *rapport dont le second terme est 100* » pour ensuite enchaîner avec un sens opérateur et fraction avec « *Le symbole du pourcentage est « % », qui signifie « divisé par cent » ou « sur cent » et qui se lit « pour cent »* ». Côté et al. (2002) offrent quant à eux deux phrases successives maillant les sens fraction et opérateur : « *Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100. Le symbole % se lit « pour cent » et signifie « $\times \frac{1}{100}$ »* ». Des choses similaires se retrouvent chez Deledicq (2004), qui affirme « *On appelle « p pour cent du réel x » le nombre $\frac{px}{100}$, noté « p % de x »* ». (p. 553), faisant intervenir simultanément un sens nombre, un sens fraction, voire même un sens index pour le %. Dans les premières pages de son manuel, Deledicq présente les opérations en faisant intervenir cette fois-ci, toujours de façon interchangeable, les sens nombre décimal, fraction et index avec « *Prendre 15 % d'un nombre A, c'est multiplier ce nombre A par $\frac{15}{100}$ ou encore par 0,15* » (p. 15). C'est aussi ce qui se retrouve chez Bouvier et al. (2009), qui indique que « *Les a % d'un nombre A est le nombre $A \times \frac{a}{100}$, encore égal à $A \times 0,01 a$* ».

Ces exemples de maillages, et ils sont légion, pointent vers cette complémentarité naturelle des différents sens du %. Cette complémentarité permet en particulier d'aborder diverses situations de manière flexible, avec une entrée sur le % pouvant s'adapter aux particularités de ces situations. Cette complémentarité entre les façons de donner un sens au % peut devenir une certaine complicité, nécessaire pour faire aboutir l'interprétation voulue du % et sa compréhension. La relation entre les différents sens se veut donc dynamique, où chaque sens peut se voir comme étant en dialogue continu avec les autres, voire en être teinté. En d'autres mots, chacun des sens n'est pas isolé ni scellé, et est ouvert à une transition vers les autres sens en fonction de ce qui est recherché.

À ces sens du % peut s'annexer la distinction proposée par Parker et Leinhardt (1995) d'un % comme *statistique* pour décrire une situation (par ex. : 75 % des enfants ont des lunettes *versus* 56 % des adultes) et d'un % comme *fonction pour opérer et créer* un autre nombre (par ex. : 75 % de 520 enfants ont des lunettes, soit 390, et 56 % de 950 adultes ont des lunettes, soit 532). Lors de l'utilisation du % comme statistique, il est fréquent que le référent soit mis de côté : à ce moment, le % est utilisé pour décrire une grandeur relative et représente davantage un nombre-index. Dans une situation de comparaison de %, celle-ci est réalisée entre les % comme grandeurs relatives (par ex. : 75 % *vs* 65 %). Avec l'utilisation du % comme fonction, le % sert à produire un autre nombre à partir de son référent : les comparaisons dans ce cas se font entre les

nombre obtenus (par ex. : 390 vs 756). Ici encore, différents sens peuvent être mis à contribution, quelle que soit la nature du % (statistique ou fonction) dans la situation, pour interpréter ou calculer le % en jeu. Ces deux entrées sur l'utilisation du % offrent une couche supplémentaire sur ce que peuvent être un %.

À l'instar de Janvier (1983), et de ses différents modes de représentation des fonctions vus comme complémentaires, il est possible d'aborder les différents sens du % comme représentant chacun une pointe d'une étoile immergée (cf. figure 1). Selon le sens mis en avant, celui-ci est rendu saillant, émerge, mais demeure connecté aux autres sens qui peuvent à leur tour être mis en avant lorsque nécessaire (chaque sens traîne avec lui les autres, voire s'y associe). Les autres sens sont immergés mais ne disparaissent pas, représentant des potentialités inséparables pouvant être exploitées et rendus explicites dans le travail effectué si nécessaire. De plus, la versatilité potentielle du % en tant que « statistique » ou « fonction », placée ici au centre de l'étoile du %, montre que le sens émergé peut tirer profit de chacune des utilisations statistique ou fonction au besoin.

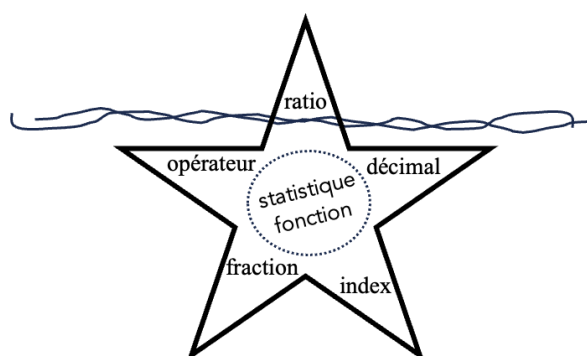


Figure 1 : L'étoile immergée du % avec ses divers sens interconnectés.

Qui plus est, ce sont ces sens tous ensemble qui peuvent être pris comme constitutifs de la nature même du %. Sous cet angle, le % n'est pas à concevoir comme relevant davantage d'un sens plus que d'un autre, mais plutôt que tous ces sens, ensemble, le composent; bien qu'un des sens puisse paraître davantage à l'avant-scène qu'un autre selon la situation en jeu. Cette étoile du % montre toute la variété, complémentarité et complicité des différents sens, mais aussi la nécessaire fluidité mise à profit lors de l'interprétation et du travail des %.

Note réflexive - % et unité de mesure

Est-il possible de concevoir le % comme une sorte d'unité de mesure, tel que le radian, le centimètre, le dollar ou l'euro ? Il est en effet possible d'aborder les % de façon multiplicative, leur donnant une apparence implicite d'unité de mesure (une idée possédant de vieilles origines, cf. Butler (1936)). Ainsi, 36 % est souvent parlé en termes de « 36 fois le % » ou encore « 36 fois le 1 % ». Le 1 % en devient ici une certaine unité de référence, qui permet de connaître combien de cette unité est prise : ici, 36 de celle-ci. Cette entrée sur les % s'aligne avec ce qui est fréquemment fait avec le centimètre, où le 1 *cm* sert d'unité de référence pour la mesure. Lire 36 *cm* comme « 36 fois le 1 *cm* » permet de comprendre que l'unité 1 *cm* est répétée 36 fois. L'aspect possiblement surprenant dans cette façon de voir les % est que, contrairement au 1 *cm* qui est une longueur établie ou un étalon fixé, le 1 % ne l'est pas. Le 1 % représente davantage une unité de mesure de partitionnement, à appliquer sur un tout : une sorte d'unité de mesure « relative ». L'utilisation du % comme statistique permet ce type de comparaisons relatives. Dans ce cas, les % ne sont pas comparés en tant que valeurs précises

(par exemple, avec 40 % de 75 = 30 et 30 % de 150 = 45 dans une utilisation fonction), mais sont plutôt maintenus comme statistiques et la comparaison est réalisée entre ces statistiques pour leur partitionnement (ici 40 % vs 30 %). Si quelqu'un affirme que 40 % de son budget est mis sur son hypothèque et qu'une autre affirme qu'elle y investit plutôt 30 %, il est possible d'affirmer que la première dépense davantage sur son hypothèque, *relativement* parlant. Toutefois, ces statistiques en disent peu sur le montant réel investi dans l'hypothèque, qui est relatif au budget lui-même (et qui résulterait d'une utilisation fonction du %). Est-ce que tout ceci est suffisant pour affirmer que le % peut être conçu comme une unité de mesure ?

4. Nature relative et absolue du %

Le travail de conversions directes entre %, fractions, nombre décimal et ratio fait a souvent été la cible de critiques acerbes, car ce travail en fini souvent par devenir une application purement mécanique de recettes à suivre, soustraites de compréhensions quelconques. Tel que l'affirment Ginsburg et al. (1997) :

This reflects the view taken by many teachers and textbooks (in both K-12 and adult education) that the study of percent is only an extension of the study of fractions and decimals. This approach leads to an emphasis on the mechanics of percent-related calculations or converting between percents, fractions, and decimals, rather than on conceptual understanding (p. 1).

D'autres critiques vont même jusqu'à questionner la pertinence mathématique de ce type de travail, tel que l'affirme Heuvel-Panhuizen (1994, p. 350).

Do students, for instance, understand percentage if they can convert a percentage into a decimal? And can one state without restriction that this question is mathematically correct? (p. 350).

À travers ce type de critiques se retrouvent aussi des arguments forts soulignant que le % seul n'a pas de valeur précise hors de son référent, qu'il ne peut pas être considéré dans l'absolu, tel que souligné plus haut, et qu'il implique un certain questionnement concernant la valeur de ce tout de référence. Il est alors vu comme un nombre-index. Cette situation est complexe et remplie de nuances, car un % est peut-être vide sans référent, pour reprendre les mots de Gauvrit (2014), mais il est tout autant difficilement interprétable sans réaliser certaines conversions vers les fractions, ratios ou nombres décimaux pour établir sa valeur résultante : déterminer la valeur de 31 % d'un tout quelconque, par exemple du nombre 728, ne peut pas être déterminée sans faire intervenir quelques conversions et calculs. Ainsi, il existe une nécessaire interaction à établir entre le travail de conversion numérique (entre %, fraction, nombre décimal et ratio) et la relativité du % à son tout de référence, qui met à contribution la nature absolue et relative du % (cf. figure 2).

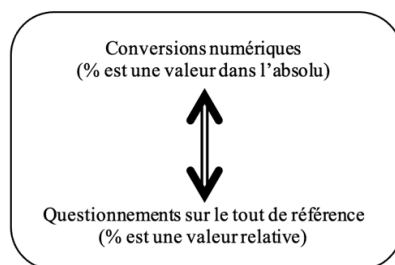


Figure 2 : L'interaction au cœur de la nature relative et absolue du %.

En fonction du travail à effectuer, chacune de ces dimensions peut être mise en avant. Déterminer la valeur de 31 % de 728 peut impliquer dans un premier temps de convertir

numériquement le 31 % en quelque chose de manipulable pour opérer, par exemple par 0,31 ou $\frac{31}{100}$. Toutefois, dans cette conversion, le 31 % n'en est pas équivalent au nombre 0,31 ou à $\frac{31}{100}$, mais bien à « 0,31 de quelque chose », « $\frac{31}{100}$ d'un tout » ou encore « une relation de 31 parties pour chaque 100 parties ». Que ce 31 % ne soit pas équivalent au nombre 0,31, par exemple, devient évident dans le cas d'un rabais de 31 % sur un canapé de 728 € : ce rabais appliqué au prix du canapé donnerait 727,69 € à déboursier ($728 - 0,31$), ce qui ferait difficilement le bonheur du client ! Dans cette conversion numérique, la référence à un tout est mise entre parenthèses, faisant un peu « comme si » le 31 % valait 0,31 ou $\frac{31}{100}$ dans l'absolu. Cette étape de conversion, nécessaire à la réalisation des calculs, met en arrière-plan la place du tout de référence à ce % le temps d'obtenir un matériau manipulable pour effectuer les calculs voulus. Une fois cette conversion réalisée, ce 0,31 ou $\frac{31}{100}$ est ici à multiplier avec le tout de 728 pour obtenir la valeur définitive du 31 %, soit ici 225,68⁶.

Cette interaction entre absolu et relatif permet de faire émerger une troisième perspective, située « à mi-chemin ». Celle-ci implique de considérer le tout de référence *en le fixant* à « un » ou à une unité, qui peut être par exemple une valeur quelconque, une figure géométrique comme un carré, une collection choisie, etc. Le fait de fixer le tout à une unité prédéterminée permet de conserver la place du tout de référence du %, en le stabilisant le temps du travail à effectuer. La valeur du % n'est pas vue ici comme étant absolue et prédéterminée, tel qu'avec les conversions numériques, mais elle n'est pas variable et conditionnelle non plus, c'est-à-dire relative à un tout de référence changeant d'une situation à une autre : elle est fixée temporairement, voire artificiellement, le temps de la tâche. Le tableau 1 présente ces trois perspectives sur le travail du %.

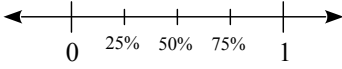
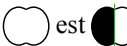
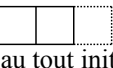
Perspective absolue	Perspective mi-chemin	Perspective relative
Référent implicite (ou non mentionné).	Référent fixé temporairement (pour la tâche de jeu).	Référent variable (à déterminer dans la tâche).
% comme nombre, sa valeur est obtenue par une conversion.	La valeur du % est liée à une unité fixée.	% comme indicateur, où sa valeur est relative à son référent.
$50\% = \frac{50}{100} = 0,5$. $50\% > 25\%$. $50\% + 25\% = 75\%$. 	50 % de  est . 50 % de  est . 50 % de  est . $50\% > 25\%$ $50\% + 25\% = 75\%$.	Le carré pointillé  est un ajout de 50 % au tout initial autant qu'un de $33, \bar{3}\%$ du nouveau tout. Si Jean dépense 50 % de son argent et Marie 25 % du sien, qui dépense le plus ? « Ça dépend ». 50 % > 25 % au plan proportionnel et relativement à leur tout.

Tableau 1 : Trois perspectives pour considérer les %.

Cette stabilisation temporaire du tout dans la perspective à mi-chemin permet aussi d'opérer plus facilement sur les % (par ex. : comparer, ordonner, calculer). Il est ainsi possible de comparer

⁶ Ces conversions suivies de calculs peuvent être vues d'une certaine façon comme étant encapsulées dans le sens opérateur du %, qui ici aussi rend le % « manipulable » pour obtenir les valeurs recherchées. Bien qu'il puisse être utilisé pour décrire une situation (par ex. : 29 % des 516 enfants sont âgés de 12 ans et plus), présenté avec la réalisation des calculs, le sens opérateur dépeint davantage une utilisation du % comme fonction, pour opérer et créer un autre nombre par ces calculs (cf. Davis, 1988).

deux %, car ceux-ci sont relatifs au même tout ($25\% < 50\%$ du même tout, ce qui tel que souligné n'est pas nécessairement vrai si les référents des % sont différents), ou encore d'additionner deux % ($10\% + 5\% = 15\%$ du même tout, ce qui n'est pas nécessairement vrai non plus), etc. Cette perspective à mi-chemin a l'avantage de se placer au centre de l'interaction entre absolu et relatif, conservant la relativité du % à un tout de référence (en le fixant temporairement) et prenant avantage des conversions directes pour établir, temporairement pour ce tout fixé, la valeur numérique qui découle du %.

Ce qui ressort aussi du tableau 1 est que chacune des trois perspectives dépend des autres. La perspective absolue sur les conversions numériques met la nature du tout de référence entre parenthèses, le temps de convertir le % pour y revenir ensuite. La perspective relative soulève quant à elle la relativité variable du tout (ce qui peut faire intervenir des tout différents pour chacun des % impliqués dans la même situation, voire les faire varier). Et, la perspective à mi-chemin fixe ce tout temporairement, et nécessite un passage par les conversions numériques dans l'absolu pour réaliser le travail voulu, soit pour opérer avec les % en jeu. En d'autres mots, chacune des trois entrées sur le % possède ses forces, mais est aussi insuffisante en soi pour interpréter les %, impliquant un certain aller-retour d'une perspective à l'autre : le tout du %, bien que variable d'une situation à une autre, doit être fixé pour une situation précise, bien qu'il ne soit pas toujours lié au tout choisi dans d'autres situations (il n'est pas toujours le % d'un carré, d'un montant précis, d'une collection, etc.) ; les conversions numériques permettent le travail avec ces % pour réaliser des opérations, bien qu'offrant des valeurs relatives et non définitives ; l'interprétation des % requiert un retour constant aux tout de référence de ces %.

Le travail avec une calculatrice de poche apporte une lunette supplémentaire sur ces trois perspectives du %. Par exemple, si l'expression ambivalente au plan mathématique « $50\% + 3$ » est entrée dans une calculatrice, la plupart abordent le 50 % dans l'absolu et donnent 3,5 comme réponse (où $50\% = 0,5$). Si, toutefois, « $3 + 50\%$ » est entré dans la même calculatrice, il est fort probable que cette dernière associe le 50 % au 3, donnant 4,5 comme réponse. Cette deuxième réponse représente la perspective à mi-chemin : le « 3 » est choisi comme référent pour la tâche. Et, dans quelques cas, si « $50\% + 3$ » est entré, certaines calculatrices ne permettent pas de compléter l'opération, car dès l'entrée de « 50% » elles indiquent « ERREUR » à l'écran. Il est possible d'assumer que ces calculatrices exigent que le % soit en tout temps lié à un tout de référence et que l'entrée initiale de « 50% » ne leur offre pas d'emblée cette information, de là la mention « ERREUR ».

Note réflexive - ChatGPT et les %

Poser des questions dans ChatGPT se révèle un exercice intéressant. Avec « $50\% + 3$ », la réponse a été « $0,5 + 3 = 3,5$ ». Et, avec l'entrée permutée « $3 + 50\%$ », une question a plutôt été retournée, à savoir si ce qui est demandé est « $3 + 50\%$ tout court », donnant 3,5, ou bien si c'est « $3 + 50\%$ de 3 », valant 4,5. Le résumé suivant a ensuite été proposé :

« Si tu veux juste ajouter le nombre 50 % (0,5) à 3 → résultat = 3,5 » ;

« Si tu veux augmenter 3 de 50 % → résultat = 4,5 ».

Les expressions « juste » et « tout court » peuvent laisser songeur...

Les trois perspectives du tableau 1 se retrouvent au cœur de certains résultats préliminaires obtenus lors de la réalisation d'une série d'entrevues individuelles avec des élèves et des enseignants autour du % (rapportés lors de CERME-14, dans Proulx (2025b)). Durant ces entrevues, enregistrées sous format audio et d'une durée de 10 à 20 minutes chacune selon la

disponibilité des participants, différentes tâches sur le % ont été données à résoudre. Une des tâches donnée aux participants était justement cette même question ambivalente « Que vaut $50\%+3$? », avec l'objectif d'investiguer le rôle joué par le tout de référence du % dans les réponses des participants. Les réponses de Marco et de Julie permettent d'aborder chacune des trois perspectives du tableau 1 (« Int. » désigne l'intervieweur).

Les réponses de Marco

Marco est un garçon de 14 ans ayant tout juste terminé sa 8^e année, et qui a travaillé avec les % durant son année scolaire. Lorsque questionné sur la valeur de $50\%+3$, ses explications ont été les suivantes :

Marco : *3 et 50. Parce que 50 % est équivalent à $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ est équivalent à 0,5. Et, $0,5+3=3,50$ donc 3 virgule 5. Mais si tu fais « de quelque chose », ça va pas donner la même chose. [...] Admettons 50 % de 10, plus 3, donc $5+3=8$.*

Int. : *C'est 8 ou 3,5 la réponse ?*

Marco : *Non, ça c'était un exemple !*

Int. : *3,50 ce n'est pas un exemple ?*

Marco : *Non, ça c'est la question. [...] [La réponse 8] c'est si le 50 % c'est « de quelque chose ».*

Int. : *Et ce n'est pas la même chose ?*

Marco : *Non, c'est 50 %, c'est tout. C'est pas « de » ou « sur » quelque chose. [...] Ça pourrait être de 100, 50 % de 100 égal 50, plus 3 donne 53.*

Int. : *C'est 8 ou 53 la réponse ?*

Marco : *Aucune des deux, ça c't'un exemple. C'est 3,5 la réponse. Ça [$50\%+3=3,5$] c'est la question. Après, moi, j'ai décidé de faire comme si le 50 % était « de quelque chose ».*

Int. : *Est-ce qu'il y a un exemple qui donnerait 3,50 ?*

Marco : *Oui, 50 % de 1.*

Marco exprime ici implicitement que « $50\%+3$ » est à considérer dans l'absolu, où $50\%=0,5$, et s'additionne directement à 3 pour donner 3,5. Ensuite, il offre ce qu'il appelle des exemples, en expliquant que le % peut être « de quelque chose », menant vers la relativité du %. Il offre ensuite des exemples concrets de ce « quelque chose », pour illustrer ce qu'il veut dire et obtenir des réponses à ces exemples : 50 % de 10 donnant $5+3=8$, 50 % de 100 donnant $50+3=53$, 50 % de 1 donnant $0,5+3=3,5$. Ici, le référent du 50 % est fixé uniquement pour chacun des exemples, temporairement, donnant des réponses précises (telle la perspective à mi-chemin, tout en affirmant qu'il est possible de donner plusieurs autres exemples, comme dans la perspective relative). Marco navigue ici avec aisance entre les trois perspectives.

Les réponses de Julie

Julie est une enseignante d'expérience (de 7^e à 11^e année, élèves de 11 à 17 ans), qui a aussi été personne-ressource dans son école et sa commission scolaire. Lorsque la question « Que vaut $50\%+3$? » lui a été posée, elle a répondu d'entrée de jeu :

Julie : *Si je le prends au mode numérique purement, $50\%+3$, ça pourrait être 350 % [...] Si on prenait 50 % et puis on prenait son écriture décimale, ça ferait 50 centièmes, 0,5, puis plus 3 ça fait 3 plus 50 centièmes, donc 350 centièmes, donc 350 %.*

Questionnée à savoir s'il y avait d'autres réponses possibles, elle répond :

Julie : *Si on raisonne le % par rapport à un tout, le 3 peut aussi être relatif à ce tout-là, ça peut influencer la réponse. Donc, il faudrait que j'aie à quoi réfère le 50 % [...] si mon tout est 80, là $50\%+3$ ça fait 50 % de 80, donc $40+3$ ça ferait 43. [...] Si j'ai un tout qui est 6, le 3 est*

alors 50 %, 50 % plus 50 % ça serait 100 % ou $6 : 3$ est 50 % et 50 % est 3, donc 6. [...] Si le tout est 18, 50 % de 18 ça vaut 9, $9+3$ donne 12. Réponse 12 ou 12 dix-huitièmes. Ou, mon 3 par rapport à 18 est $\frac{1}{6}$, ou $\frac{3}{18}$, et trouver $\frac{1}{6}$ combien de %, 16,6 %. Donc 66,6 en %.

Dans son cas, Julie intègre aussi la relativité du 3 dans « 50%+3 ». Et, de la même façon que Marco, elle offre une entrée dans chacune des perspectives : dans l'absolu avec ce qu'elle nomme un « mode purement numérique » ; de façon relative, en affirmant que le % est lié à un tout de référence ; et à mi-chemin en offrant des exemples de ce que peut donner de fixer précisément le tout de référence. Tout comme pour Marco, il n'y a pas de contradictions dans les différentes réponses de Julie, alors que le % « vit » dans chacune des perspectives, allant d'une à l'autre pour offrir différentes réponses possibles à « 50%+3 ». En ce sens, Marco et Julie s'engagent tous les deux avec chacune des trois perspectives, naviguant entre chacune d'elles de façon fluide.

Ce que l'analyse des trois perspectives sur le % fait particulièrement ressortir est que le cœur de la notion de % se retrouve au carrefour de dimensions conceptuelles et calculatoires. Interpréter les % en donnant un sens à leur tout de référence fait intervenir nécessairement des aptitudes calculatoires et, en retour, les calculs et conversions numériques avec les % impliquent de bien comprendre le rôle du tout de référence associé à ces %. Les deux ne vont pas sans l'autre, d'où émerge une interaction entre le relatif et l'absolu. Et, de cette interaction émerge une perspective à mi-chemin, qui fixe temporairement le tout de référence du % en jeu. La transition, la navigation, entre ces trois perspectives sur le % (conversions numériques, fixation du tout, tout variable) jouent un rôle clé dans le traitement fluide des %, tel que les réponses de Marco et Julie le montrent.

Note réflexive - différentes combinaisons de %

La plupart des tâches scolaires à résoudre sur le % sont fréquemment de trois types : $A\%$ de $B=?$; $A\%$ de $?=C$; $? \%$ de $B=C$. Évidemment, celles-ci couvrent difficilement tout ce qu'il est possible de faire avec des %. Déjà, l'exploration des différents sens du % permet de soulever des questions d'une autre nature, où plusieurs % sont combinés et interviennent dans la même situation. Quelques exemples connus sont les suivants :

- Le prix d'un article augmente de 25 % et diminue la semaine suivante de 25 %. L'article est-il revenu au même prix ?
- Le prix d'un article est en rabais de 25 % et sa taxe de vente est de 15 %. Quel est le prix final de l'article ?
- Le prix d'un article est en rabais de 25 % et le magasin donne un rabais additionnel de 5 %. Est-ce identique à un rabais de 30 % ?
- Dans une équipe, 25 % des joueurs sont gauchers et 40 % des gauchers portent des lunettes. Quel est le % de joueurs dans l'équipe qui sont gauchers et qui portent des lunettes ?
- Le salaire d'un employé a augmenté de 12 % l'année dernière et uniquement de 11 % cette année. Comment expliquer que l'employé préfère l'augmentation de 11 % à celle de 12 % ?

Et il existe bien d'autres situations de ce genre, certaines impliquant plus de deux % à la fois. Les % dans ces situations font particulièrement intervenir des questionnements touchant la nature relative et absolue du %.

Conclusions

Le % est une notion très utile dans la vie de tous les jours et fort présente dans notre société. En même temps, elle est souvent réduite à un travail calculatoire qui peut masquer plusieurs de ses facettes, tel que l'affirme Parker (1997) : « *A focus on the computational features of percent may mask the very nature of the concept itself* » (p. 406). L'analyse des % offerte dans cet article

pointe dans un premier temps la complémentarité riche qui existe entre les différents sens du % (fractions, nombre décimal, ratio, opérateur, nombre-index, voire mesure et quantité), où la flexibilité de passage d'un sens à l'autre s'avère cruciale pour le développement d'une aisance avec les %. Au-delà de leur complémentarité, la simultanéité de traitement des différents sens met en avant une certaine complicité entre chacun de ceux-ci, un sens menant à un autre, tel que représenté par la métaphore de l'étoile immergée. À ces différents sens s'ajoute la nature absolue et relative du %, à travers trois perspectives du % présentées au tableau 1 et la navigation de l'une à l'autre.

Toute cette conceptualisation de la notion de % permet de mettre en avant des éléments clés au cœur du %, soulignant par le fait même sa richesse inhérente comme notion mathématique. Au-delà d'une approche numérique axée majoritairement sur des calculs arithmétiques, la prise en compte de cette richesse ouvre la voie au développement d'une sensibilité grandissante envers les multiples facettes de la notion de %, autant à l'école avec les élèves que dans la vie de tous les jours.

Références bibliographiques

- Baruk, S. (1995). *Dictionnaire des mathématiques*. Seuil.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 296-333). Macmillan.
- Béland, R. (1976). Une activité de consommation immédiate pour le P.C. *Bulletin de liaison - GRMS*, 17, 11-29.
- Bennett, A. B. & Nelson, L. T. (1994). A conceptual model for solving percent problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1(1), 20-25.
- Bergeron, G. (1994). *Le pourcentage - recherche bibliographique*. Département de mathématiques et d'informatique : UQAM.
- Berry, J. & Wainwright, P. (1999). *Dictionary of mathematics*. Fitzroy Dearborn.
- Bloch, I. (2005). Activité... Le jeu des pourcentages. *Petit x*, 67, 77-78.
- Borowski, E. J., & Borwein, J. M. (2002). *Dictionary of mathematics* (2nd ed.). Collins.
- Bouvier, A., George, M. & Le Lionnais, F. (2009). *Dictionnaire des mathématiques*. Presses Universitaires de France.
- Butler, C. H. (1936). Some observations on teaching percentage. *The Mathematics Teacher*, 29(7), 330-333.
- Byrkit, D. (1983). Teaching percent. *The Mathematics Teacher*, 76(1), 8.
- Cajori, F. (2012). *A history of mathematical notations*. Dover Publications.

- Chamberlain, N. (2005). Multiplication & percentages without a calculator. *Mathematics in School*, 34(4), 26-27.
- Côté, R., Gagnon, M., Perreault, N. & Roegiers, X. (2002). *Leximath : lexique mathématique de base (2^e édition)*. Beauchemin.
- Davis, R. B. (1988). Is “percent” a number? *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 299-302.
- de Champlain, D., Mathieu, P., Patenaude, P. & Tessier, H. (1996). *Lexique mathématique - enseignement secondaire (2^e éd.)*. Éditions Triangle d’Or.
- Deledicq, A. (2004). *Maths - Lycée*. Éditions de la Cité.
- Dewar, J. M. (1984). Look at the teaching of percent. *The Arithmetic Teacher*, 31(7), 48-49.
- Dole, S., Cooper, T., Baturo, A. R. & Conoplia, Z. (1997). Year 8, 9 and 10 students’ understanding and access of percent knowledge. *Proceedings of MERGA-20* (p. 7-11). MERGA.
- Downing, D. (2009). *Dictionnaire of mathematics terms (3rd ed.)*. Barrons.
- Dufour, N. (2011). *Dictionnaire mathématique CEC*. Éditions CEC.
- Earl, R. & Nicholson, J. (2021). *Concise dictionary of mathematics (6th ed.)*. Oxford University Press.
- Erickson, D. K. (1990). Percentages and cuisenaire rods. *The Mathematics Teacher*, 83(8), 648-654.
- Fortier, M. (1988). La fraction « décimale » avant la fraction « ordinaire » : pourquoi pas ? *Instantanés Mathématiques*, 25, 5-9.
- Gauvrit, N. (2014). *Statistiques, méfiez-vous !* Ellipses.
- Ginsburg, L., Gal, I. & Schuh, A. (1995). What does 100 % juice mean? *Technical report TR95-06*. National Center on Adult Literacy, University of Pennsylvania.
- Glatzer, D. (1984). Percentage: ideas and suggestions. *The Arithmetic Teacher*, 31(6), 24-26.
- Grignon, J. (1970). *Lexique mathématique*. Centre de psychologie et pédagogie de Montréal.
- Heuvel-Panhuizen, M. (1994). Improvement of (didactical) assessment by improvement of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 341-372.
- Huff, D. (1954). *How to lie with statistics*. Norton.
- Janvier, C. (1983). Représentation et compréhension. *Bulletin AMQ*, 23, 22-28.
- Kessler, R. V. (1960). The equation method of teaching percentage. *The Arithmetic Teacher*, 7(2), 90-92.
- Lavallée, P. (1977). Une activité sur le pourcentage. *Bulletin de liaison - GRMS*, 19, 27-34.

- Lemay, S. (1995). *Analyse de la notion de pourcentage et de son utilisation dans les médias*. [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].
- McGivney, R. J. & Nitschke, J. (1988). Is-Of, a mnemonic for percentage problems. *The Mathematics Teacher*, 81(6), 455-456.
- Moss, J. (2000). *Deepening children's understanding of rational number*. [Thèse de doctorat, University of Toronto].
- Parker, M. (1997). The ups and down of percent. *School science and mathematics*, 97(8), 406-412.
- Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: a privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421-481.
- Proulx, J. (2024). Le symbolisme en questions : le pourcentage. *Envol*, 184.
<https://revueenvol.ca/envol-membres/numero-184/le-symbolisme-en-questions-le-pourcentage>
- Proulx, J. (2025a). Musing on percentages: sales and income taxes. *Ontario Mathematics Gazette*, 63(3), 29-30, 48.
- Proulx, J. (2025b). Toward a conceptualization of %: Some preliminary advances. *Proceedings of CERME-14*. Bolzano, Italy.
- Smith, D. E. (1970). *Rara Arithmetica* (4th ed.). Chelsea.
- Spiegelhalter, D. (2019). *The art of statistics*. Pelican Books.
- Szymanski, T. (1998). The teaching of percent. *Research and Teaching in Developmental Education*, 15(1), 101-103.
- Taurisson, A. (1976). Les fractions en ssecondaire 1 et 2. *Bulletin de liaison - GRMS*, 14. 1-17.
- Volpel, M. C. (1954). Solving percentage problems by the equation method. *The Mathematics Teacher*, 47(6), 425-427.
- Wiebe, J. H. (1986). Manipulating percentages. *The Mathematics Teacher*, 79(1), 23-26, 21.
- Zambo, R. (2008). Percents can make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(7), 418-422.
- CREMER [comité des responsables de l'enseignement des mathématiques à l'élémentaire de la région 04] (1983). Les nombres rationnels. *Instantanés Mathématiques*, 19(4), 36-3