
LOGARITHMES EN JEU : RAISONNEMENTS EN ACTION ET VERBALISATIONS

Emanuelle MAKDISSI¹

Université Laval

Hélène MAKDISSI²

Université Laval

Résumé. Cette étude se penche sur l'analyse de raisonnements mathématiques d'élèves ayant participé à un jeu, construit par la première auteure, portant sur les logarithmes. Cette étude de cas vise à circonscrire des raisonnements d'élèves, en cours de jeu, qui montrent une construction de connaissances entourant les logarithmes, tout en renforçant le lien d'opération inverse entre logarithme et exposant, et ce afin de justifier la pertinence d'un tel jeu au regard de l'enseignement des mathématiques. Cet article présente un double intérêt. Sous l'angle scientifique, il documente des raisonnements d'élèves au regard d'un concept mathématique avancé dans la progression des apprentissages scolaires, et ce dans un contexte de jeux de société à l'intérieur duquel les élèves verbalisent spontanément, en interactions entre eux ou avec l'enseignante, leurs actions mathématiques et leurs réflexions. Sous l'angle de la pratique pédagogique, il permet d'envisager des situations didactiques ouvertes aux raisonnements des élèves qui leur permettront d'induire des règles à partir de leurs actions réfléchies.

Mots-clés. Raisonnement mathématique, verbalisation, exponentiation, logarithme, jeu.

Abstract. This study focuses on analyzing students' mathematical reasoning while playing a game, created by the first author, that targets the concept of logarithm. This study aims to identify students' reasoning in regards of learning logarithm from knowledge relating to exponentiation while playing this specific game and to justify the relevance of the use of a logarithm math game in teaching logarithm in high school. This article presents a double interest. Scientifically, it documents students' spontaneous reasoning with regard to an advanced mathematical concept in the progression of school learning, and this, in a board game context within which students spontaneously verbalize their mathematical actions and their reflections. Pedagogically, it allows to consider teaching situation that are open to students' reasoning and that will allow them to induce rules from their reflective actions.

Keywords. Pedagogy, didactic, mathematics, logarithm, game.

Introduction

En 5^e secondaire³, le concept de logarithme fait écho à celui d'exposant. Il n'y a qu'à explorer les divers ouvrages de référence disponibles pour les élèves québécois pour constater que les logarithmes y sont définis comme étant inverses des exposants. Par exemple, les manuels scolaires *Visions*, les sites internet *Allo Prof*⁴ et *NetMath*⁵, amplement répandus au Québec, proposent des définitions faisant intervenir l'écriture exponentielle pour expliquer l'écriture logarithmique. À titre d'exemple, Boivin et al. (2010a, p. 182), expliquent que « l'exposant qu'il

¹ emanuelle.makdissi.1@ulaval.ca

² helene.makdissi@fse.ulaval.ca

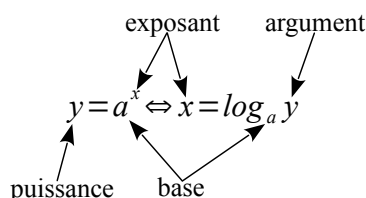
³ Les classes de 5^e année du secondaire au Québec accueillent des élèves de 16 ans et correspondent à la 1^{re} du lycée dans le système français.

⁴ <https://www.alloprof.qc.ca/>

⁵ <https://netmath.ca/fr/>

faut attribuer à une base pour obtenir une puissance donnée est appelé logarithme ». Ces auteurs ajoutent que, pour une puissance plus grande que 0 et une base supérieure à 0 et différente de 1, il est possible de transformer l'expression exponentielle en une expression logarithmique ou inversement.

Pour une puissance $y > 0$ et une base $a > 0$ et différente de 1, l'équivalence qui suit permet de passer d'une forme d'écriture exponentielle à une forme d'écriture logarithmique et vice versa (Boivin et al., 2010a, p. 182).



Cette définition⁶, mettant en exergue la relation entre l'expression exponentielle et l'expression logarithmique, provient des travaux d'Euler (1796) qui, selon Lomonte (2020), serait le premier à avoir fait le lien entre l'exposant et le logarithme. Cependant, dans la définition originale, Euler n'avait pas mentionné les valeurs que pouvaient prendre la base et l'exposant. Ces restrictions sont cependant présentes dans les définitions présentées aux élèves du secondaire, soit celles des manuels scolaires.

Tout au long du premier cycle du secondaire, les élèves sont amenés à manipuler et à utiliser les exposants entiers, c'est-à-dire les puissances de nombres, et à déduire les lois des exposants idéalement à la suite de manipulations d'expressions numériques (ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur : MEES, 2016). En effet, selon le programme, « *dans la manipulation d'expressions numériques, [l'élève] est amené à déduire les lois des exposants* » (MEES, 2016, p. 55). C'est en concordance avec cette progression des apprentissages que les logarithmes sont étudiés comme étant l'objet inverse des exposants. Bien que ce lien entre exposant et logarithme puisse paraître simple, Nguyen (2021) relate que le travail sur les logarithmes est difficile pour les élèves du secondaire. Or l'établissement de la relation entre les exposants et les logarithmes semble être tenu pour acquis, comme une porte d'entrée déjà ouverte, dans les tâches proposées dans les manuels scolaires aux fins de l'enseignement-apprentissage des logarithmes, manuels généralement utilisés dans les écoles secondaires du Québec. Ainsi, si l'utilisation des manuels permet d'exposer les élèves à ce lien par la verbalisation formelle de la définition, elle occulte l'obstacle de la construction même de ce lien. Pourtant, le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ, MELS 2007) et la progression des apprentissages en mathématique au secondaire (PDA, MEES, 2016) mettent en lumière que la pierre angulaire de l'enseignement des logarithmes repose sur cette opération inverse et donc sur les liens à construire entre logarithmes et exposants. Ce sont effectivement ces liens qui permettront à la fois de travailler sur les calculs des logarithmes, sur l'étude de leurs propriétés et sur les caractéristiques de la fonction (étant vue comme la réciproque de la fonction exponentielle). Malgré ces indications prescriptives du ministère de l'Éducation, il semble cependant difficile, tout autant pour le corps enseignant⁷ que

⁶ Cette équivalence est une reproduction de la figure du manuel. Les lettres ont été changées (Boivin et al., 2010a, p. 182).

⁷ Il est possible de souligner cette difficulté soulevée par les enseignants lors de discussions pédagogiques informelles soit en milieu de pratique, soit en cours de formation initiale ou continue, voire lors d'études supérieures, ou soit lors d'ateliers effectués auprès d'enseignants de mathématiques au secondaire en cours de congrès professionnels.

pour les concepteurs de manuels scolaires⁸, de planifier des contextes pédagogiques pragmatiques qui puissent promouvoir la construction de cette opération inverse.

Le lien entre exposant et logarithme semble donc être le fondement de la compréhension des logarithmes puisque la construction permet le plein sens du concept de logarithme lui-même (Chua et Wood, 2005). Dès lors, il paraît intéressant d'étudier la question suivante : comment peut-on enseigner les logarithmes en permettant aux élèves de construire en profondeur ce lien indispensable avec les exposants afin qu'ils s'approprient la verbalisation inhérente aux définitions exposées dans les manuels scolaires auxquels ils sont exposés ? Cet article vise précisément à circonscrire des raisonnements d'élèves en cours de jeu qui montrent une construction de connaissances entourant les logarithmes tout en renforçant le lien d'opération inverse entre logarithme et exposant, et ce, afin de justifier la pertinence d'un tel jeu au regard de l'enseignement des mathématiques.

Dans le cadre de ce questionnement, les logarithmes au secondaire ont été explorés par les élèves en utilisant un jeu qui a été construit dans l'optique de permettre aux élèves de manipuler les expressions exponentielles et logarithmiques afin d'en faire ressortir ce lien d'opération inverse entre exposants et logarithmes. Pour ce faire, il convient de présenter un cadre conceptuel entourant l'enseignement des logarithmes au secondaire puis d'analyser des raisonnements d'élèves ayant participé au jeu afin de valider si les raisonnements traduisent une construction du lien d'opération inverse entre exposants et logarithmes.

1. Cadre conceptuel

Les logarithmes entrent tardivement dans la progression des apprentissages scolaires (secondaire 4 ou 5). De plus, si les recherches portant sur les logarithmes sont souvent centrées sur l'analyse du concept en soi et sur les difficultés spécifiques aux propriétés des logarithmes, peu d'études proposent des contextes d'enseignement-apprentissage, ou toute autre manière propice pour enseigner les logarithmes (Nguyen, 2021), afin d'aider les élèves à surmonter les difficultés imposées par ce concept. D'ailleurs, Nguyen (2021) mentionne également que peu de recherches portent précisément sur les difficultés d'apprentissage liées à la construction du concept même de logarithme. Or la considération des difficultés inhérentes à la construction d'un concept demeure primordiale pour concevoir et planifier les situations d'enseignement-apprentissage (Bednarz et al., 1995). C'est pourquoi les difficultés des élèves quant aux logarithmes seront abordées. Par la suite, la place des logarithmes dans le programme sera discutée, suivi de la place des logarithmes dans les manuels scolaires. Ceci étayé, il sera possible d'envisager des variables didactiques à considérer dans les situations d'enseignement-apprentissage.

1.1. Difficultés en lien avec les logarithmes

Les quelques études qui se sont penchées sur l'enseignement des logarithmes semblent s'accorder pour dire que la principale difficulté concerne le lien exposant-logarithme peu construit chez les élèves.

Une étude de Chua et Wood (2005) a montré que les difficultés des élèves s'expliquent non seulement par une méconnaissance des réels usages pragmatiques des logarithmes, mais aussi par une incompréhension du concept, et ce, même si les jeunes peuvent utiliser mécaniquement

⁸ Du moins, ceci est le cas pour les manuels scolaires les plus utilisés au Québec qui seront analysés plus loin dans cet article.

les procédures de calcul. Kurniawan et Suhendra (2022) mentionnent que les élèves sont en effet plus ancrés dans les procédures calculatoires liées aux logarithmes (à l'application des logarithmes) plutôt qu'à la compréhension des logarithmes eux-mêmes (sur le lien entre les exposants et les logarithmes). Considérant alors que les élèves cherchent à appliquer des procédures sans réellement comprendre le concept de logarithme, il n'est pas surprenant de voir certaines erreurs surgir.

Chua et Wood (2005) ont relaté plusieurs erreurs commises par les élèves. La principale erreur a été la surgénéralisation de concepts et de lois (Chua et Wood, 2005). Les élèves qui faisaient ce type d'erreur opéraient sur les logarithmes comme s'ils s'agissaient de variables (en leur appliquant les mêmes lois et propriétés). Par exemple, n'ayant pas compris comme un nombre l'expression $\log 100$, un élève pouvait concevoir $\frac{\log 100}{\log 10}$ en pensant possible de simplement

« simplifier » les expressions écrites « $\log$ » pour obtenir $\frac{100}{10} = 10$. Ce genre de simplification

est erronée puisque l'on ne peut pas supprimer le « $\log$ » qui, ici, n'est pas une lettre à comprendre comme une inconnue ou une variable ; le $\log$ est bien un opérateur. D'ailleurs, $\log 100$ donne 2 et non pas 10. Ce genre d'erreur peut s'expliquer par une surgénéralisation des simplifications algébriques aux contextes mathématiques impliquant les logarithmes. Si la simplification des inconnues et des variables fonctionne en algèbre ($\frac{100a}{10a} = 10$) ; elle ne

fonctionne pas lorsqu'il est question de logarithmes puisque ce ne sont pas des inconnues ou des variables. En effet, la notation écrite $\log$ seule (sans base ou argument) ne représente aucun nombre, aucune variable, mais les élèves la traitent comme si elle l'était. Ces chercheurs relatent d'autres exemples de ce type d'erreur de surgénéralisation à partir de situations algébriques comme la factorisation suivante : $\log_a x + \log_a y = \log_a (x + y)$. Cette erreur relève encore une fois de la généralisation des opérations faites sur des variables. Une autre erreur a été celle de considérer que $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a \left(\frac{x}{y} \right)$. Il semble que les élèves ne voient pas que c'est l'ensemble

indissociable de la notation logarithmique ($\log$, base et argument) qui représente un nombre, ce qui amène les erreurs mentionnées plus haut qui proviennent d'une compréhension où l'expression écrite « $\log$ » est perçue comme une inconnue ou une variable (Chua et Wood, 2005).

Il convient dès lors d'essayer d'amener les élèves à éviter ces erreurs, à provoquer les erreurs pour que les élèves en prennent conscience ou, du moins, à proposer des contextes pédagogiques où ces conceptions erronées peuvent se manifester et être identifiées. Selon Chua et Wood (2005), la meilleure manière d'éviter cela est de passer par la verbalisation qu'un logarithme est l'exposant qu'il faut mettre à la base pour obtenir la puissance ($\log_2 32$ est un nombre ; c'est l'exposant qu'il faut mettre à 2 pour obtenir 32). Considérant l'importance du lien entre exposant et logarithme, il faudrait que ce lien soit au cœur de l'enseignement dans le programme de formation de l'école québécoise et dans les manuels scolaires utilisés en classe.

1.2. Place du logarithme dans le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ)

Les logarithmes sont vus dans les trois cheminements mathématiques au secondaire : culture, société et technique (CST), technico-sciences (TS) et sciences naturelles (SN). Plus précisément, dans la progression des apprentissages (PDA) du MEES (2016), on retrouve quatre éléments en lien avec les logarithmes :

- (1) « Représenter et écrire des nombres en notation logarithmique en utilisant, au besoin, l'équivalence⁹ » (p. 8) $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$;
- (2) « Manipuler des expressions numériques comportant des logarithmes (définition et changement de base, propriétés) » (p. 11) ;
- (3) « Résoudre une équation ou une inéquation exponentielle, logarithmique ou racine carrée à une variable en recourant aux propriétés des exposants, des logarithmes et des radicaux » (p. 16) ;
- (4) « Fonction logarithmique » (p. 19).

Le premier élément (1) montre que le lien entre exposant et logarithme est placé au cœur de l'apprentissage des logarithmes selon la PDA (MEES, 2016). Les trois premiers éléments réfèrent à la représentation d'un nombre ou à des manipulations d'expressions numériques ou algébriques, tandis que le dernier élément réfère aux logarithmes en tant que fonctions. C'est dire que l'usage des logarithmes se situe sur deux axes : 1. comme la manipulation d'expressions logarithmiques ou 2. comme une fonction (MEES, 2016). Dans tous les cas, le concept de logarithme est présenté comme étant l'inverse (ou la réciproque lorsqu'il est question de fonction) du concept d'exposant.

Dans l'enseignement des logarithmes au secondaire, le premier axe consiste principalement à manipuler les logarithmes comme des notations impliquant des techniques calculatoires sans s'attarder en profondeur sur la conceptualisation des propriétés y étant inhérentes et permettant de comprendre la manipulation d'une expression numérique. Dans cet axe, on voudra que l'élève envisage le logarithme comme l'inverse de l'exposant. On y retrouve également, l'utilisation de propriétés, comme celle du changement de base ($\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}$, où b est une base arbitraire,

souvent la base 10), à des fins calculatoires. Dans les classes secondaires québécoises, bien que cet axe puisse demeurer centré strictement sur le calcul, c'est-à-dire la simple recherche de réponse à une expression numérique, il pourrait toutefois permettre la manipulation d'expressions contenant des logarithmes (avec l'utilisation des propriétés et des lois les entourant). Ces manipulations (majoritairement algébriques) se retrouvent uniquement dans les cheminements TS et SN qui, souvent, regrouperont les élèves considérés forts en mathématiques. Le travail autour des logarithmes permet notamment la réflexion autour de la création de conjectures, en mettant les élèves (des séquences TS ou SN) en situation de recherche d'une règle (conjecture) s'appliquant aux logarithmes. Par exemple, suivant les prescriptions ministérielles, le manuel scolaire *Visions* destiné au cheminement TS (5^e secondaire) demande aux élèves de démontrer les deux propriétés suivantes à l'aide du lien $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$, au lieu de simplement les faire apprendre par cœur aux élèves :

- $z \log_a y = \log_a y^z$ (propriété du logarithme d'une puissance, où $z > 0$) ;
- $\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}$ (propriété du changement de base, où b est une base arbitraire)¹⁰.

On voit dans cette recherche de règle que le lien entre exposant et logarithme est indispensable.

⁹ La définition est tirée de la PDA, mais les variables ont été renommées dans l'expression qui suit.

¹⁰ Trois autres propriétés sont aussi enseignées comme des lois à tenir pour acquises en ce qui concerne les logarithmes : le logarithme d'un produit, le logarithme d'un quotient, le logarithme fonctionnaire. Par souci d'espace, les propriétés inhérentes à ces lois ne sont pas plus définies dans cet article étant donné qu'elles ne seront pas convoquées par les élèves en cours de jeu.

Le second axe vise à travailler les logarithmes dans le contexte de fonctions. Dans cet axe, l'accent n'est plus sur le calcul d'expressions logarithmiques ou sur la manipulation d'expressions, mais bien sur l'analyse de fonctions logarithmiques et sur la résolution de problèmes impliquant des fonctions logarithmiques (ou exponentielles). Cet axe est en continuité avec le premier puisque, pour la majeure partie des résolutions de problèmes impliquant une fonction logarithmique, il faut savoir calculer la valeur des expressions en jeu. Cependant, cet axe se distingue du premier en ce sens qu'on travaille ici les logarithmes comme « une fonction » (au même titre que les autres fonctions étudiées).

1.3. Place du logarithme dans les manuels scolaires *Visions*

Cette brève analyse de la place du logarithme dans les documents ministériels (PFEQ et PDA) qui permet de relever l'importance du lien entre exposant et logarithme peut aussi être éclairée par une seconde faite à partir de manuels scolaires. Dans les manuels *Visions*, en cohérence avec les prescriptions ministérielles, il est possible de retrouver les deux mêmes axes : l'axe de manipulation d'expressions logarithmiques¹¹ et l'axe de fonctions logarithmiques.

La figure 1 présente un réseau de concepts inhérents à l'enseignement des logarithmes dans les manuels *Visions*, utilisés dans les cheminements TS 4^e secondaire, TS 5^e secondaire, SN 5^e secondaire et CST 5^e secondaire (Boivin et al., 2009 ; Boivin et al., 2010b, 2010c ; Boivin et al., 2016).

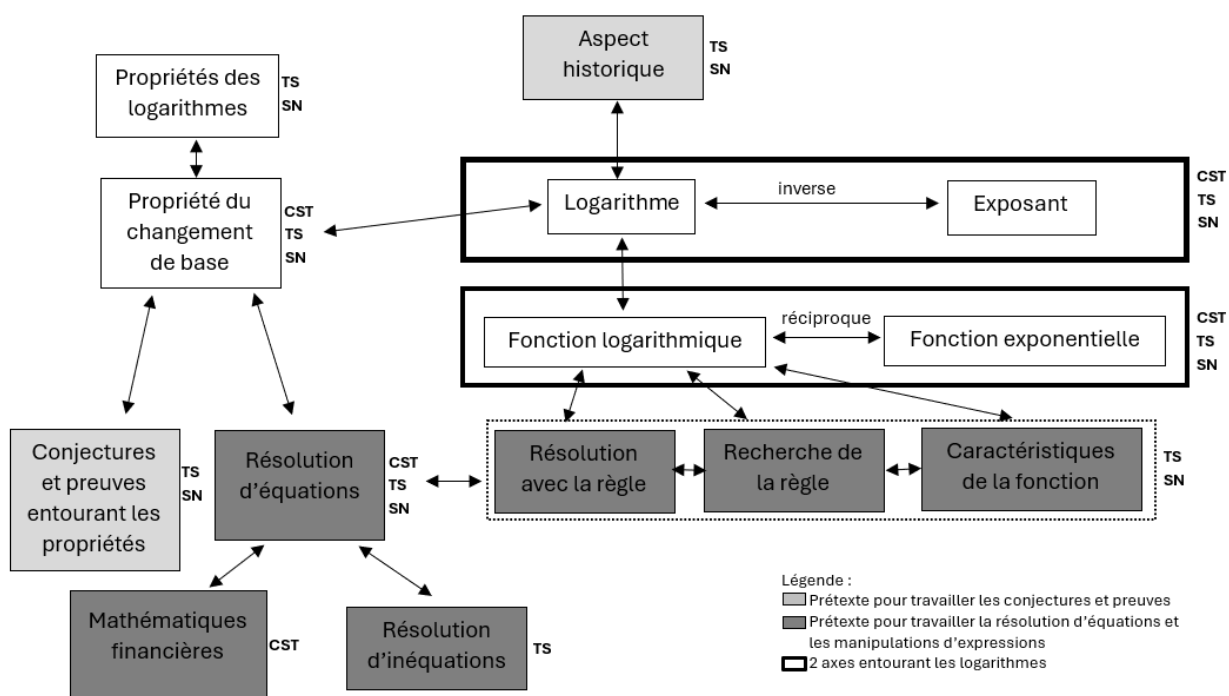


Figure 1 : Réseau de concepts de l'enseignement des logarithmes conceptualisé à partir de l'étude de quatre manuels scolaires.

Comme le montre la figure 1, issue de l'analyse des manuels, les logarithmes sollicitent plusieurs éléments (encadrés) et sont ciblés par des cheminements mathématiques variés (notés à droite

¹¹ Celles-ci peuvent être numériques (on s'intéresse alors à la représentation d'un nombre avec sa forme logarithmique) ou algébrique (on s'intéresse alors aux manipulations sur les logarithmes et sur les propriétés des logarithmes).

des encadrés). Tous ces éléments sont reliés par des flèches bidirectionnelles¹² parce qu'ils s'influencent les uns les autres. Dans ce schéma, on retrouve :

1. les deux axes au cœur des logarithmes (les logarithmes travaillés à travers la manipulation d'expressions logarithmiques ou comme une fonction), qui se retrouvent dans les deux encadrés aux lignes épaissies ;
2. le fait que le logarithme doit être conceptualisé comme l'opération inverse de l'exposant (flèche bidirectionnelle entre logarithme et exposant, puis entre fonction logarithmique et fonction exponentielle) ;
3. des éléments permettant de travailler les conjectures et les preuves (encadrés gris pâle) et de travailler la résolution d'équations ou la manipulation d'expressions (encadrés gris foncé).

Liaison entre logarithme et fonction logarithmique

Le schéma présente deux axes dans un encadré aux lignes épaissies : **les logarithmes** et **la fonction logarithmique**. Dans tous les manuels, les logarithmes sont présentés en premier, puis la fonction logarithmique est introduite par la suite. Comme mentionné dans la section précédente, le travail sur les logarithmes se situe, en premier lieu, sur les logarithmes eux-mêmes et consiste donc en un travail calculatoire (calculer des logarithmes) et en un travail de manipulations d'expressions logarithmiques. Ce travail nécessite l'utilisation de propriétés des logarithmes. En CST, la seule propriété qui est vue est celle du changement de base (qui permet de calculer un logarithme à l'aide d'une calculatrice). En TS et SN s'ajoutent la propriété du logarithme d'une puissance (énoncé plus haut) ainsi que les logarithmes d'une multiplication ou d'une division.

La fonction logarithmique est quant à elle introduite comme une « autre fonction » qui a des propriétés comme toute fonction. Cependant, contrairement à toutes les autres fonctions étudiées, elle est présentée comme une fonction réciproque, en l'occurrence celle exponentielle. Le travail sur la fonction logarithmique est conduit comme avec toutes les autres fonctions : on **résout des problèmes avec la règle** (recherche de la valeur de $f(x)$ ou de x dans une situation donnée), on **recherche la règle** de la fonction ($f(x) = a \log_c(b(x-h)) + k$ à partir d'un énoncé, d'une table de valeurs ou d'un graphique) et on **travaille les caractéristiques de la fonction** (domaine, codomaine, asymptote, etc.). Ces trois éléments sont donc plus près du travail sur les fonctions que sur celui des logarithmes eux-mêmes (ils ont été regroupés dans le schéma dans un encadré pointillé sous l'élément « fonction logarithmique » puisqu'ils relèvent de cette fonction). Tout comme le travail sur les autres fonctions, on retrouve un travail algébrique (lors de la résolution d'équations ou la recherche de la règle) ainsi qu'un travail numérique et graphique (lors du travail sur les tables de valeurs et sur les graphiques). Bien que ceci soit commun à toutes les fonctions, pour arriver à travailler sur la fonction logarithmique, les élèves doivent être capables de manipuler les logarithmes. C'est à cause de ce lien intrinsèque entre logarithme et fonction logarithmique que l'on retrouve, sur le schéma, une flèche bidirectionnelle entre ces deux

¹² La flèche bidirectionnelle prend le sens d'une implication signifiante. Dans la théorie piagétienne, l'implication signifiante désigne les liaisons construites progressivement par le sujet réfléchissant qui les complexifiera en une logique opératoire*, où notamment les opérations réversibles d'inverse et de réciproque sont au cœur de l'élaboration de la logique des opérations formelles du groupe INRC (Identique, Négation (inverse), Réciprocité, Corrélatrice) de Piaget**.

* https://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=382&IDMODULE=72

** https://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/oeuvre/index_notions_nuage.php?NOTIONID=123

encadrés. En outre, ce travail entourant les règles et les caractéristiques des fonctions logarithmiques devient par le fait même une réflexion sur la résolution d'équations et la manipulation d'expressions.

Liaison entre logarithme et exposant

Le lien entre exposant et logarithme est toujours au premier plan dans tous les manuels. C'est pour cela que, dans la figure 1, les deux axes au cœur des logarithmes (**logarithme** et **fonction logarithmique**) sont liés avec leur inverse ou leur fonction réciproque (**exposant** ou **fonction exponentielle**). En effet, dans les manuels scolaires analysés, le logarithme est toujours présenté comme l'inverse de l'exposant, puis la fonction logarithmique comme la réciproque de la fonction exponentielle (Boivin et al., 2009 ; Boivin et al., 2010b, 2010c ; Boivin et al., 2016).

Ceci est tout à fait logique puisque les élèves ont déjà travaillé avec les exposants et leurs propriétés ; ils sont donc capables de résoudre des équations logarithmiques correspondant à des expressions exponentielles connues. Par exemple, les élèves savent que $2^3=8$ et ils peuvent se servir de cette connaissance pour appréhender que $\log_2 8$ est égal à 3. Lorsqu'il est question de l'enseignement des logarithmes, on fait non seulement le lien entre la forme exponentielle et celle logarithmique, mais des observations de la première auteure du présent article et des échanges informels qu'elle a eu avec des enseignants du secondaire indiquent que ces derniers explicitent à leurs élèves que le logarithme est un exposant. Plus précisément, on dit aux élèves que le logarithme en base a de y est l'exposant qu'il faut mettre à a pour obtenir y ($\log_a y = ? \Leftrightarrow a^? = y$).

Logarithme comme élément pour travailler les conjectures et les preuves ou les résolutions d'équations

La figure 1 permet également de faire ressortir les éléments sous-jacents à l'enseignement des logarithmes. Bien que la résolution d'équations et la manipulation d'expressions soient décrites explicitement dans le programme pour toutes les séquences, le travail sur les conjectures, lui, n'est pas explicitement prescrit. Pourtant, l'analyse des manuels permet de constater le lien possible entre l'apprentissage des logarithmes et le travail sur les conjectures et les preuves. S'il est vrai que le travail sur les conjectures et sur la résolution d'équations enrichit la compréhension du concept de logarithme, l'inverse est également vrai : le travail sur les logarithmes amène la possibilité de réfléchir à des conjectures et amène celle de continuer à développer les habiletés de résolution d'équations (habiletés qui ont déjà été travaillées en lien avec d'autres objets comme les exposants ou les radicaux). Ceci explique la présence de la double flèche entre ces deux composantes de la figure 1.

Dans les documents ministériels, les logarithmes sont souvent placés avec d'autres concepts (généralement les exposants et les radicaux). Ceci permet donc de supposer que la place des logarithmes dans le programme n'est pas l'étude des logarithmes en soi, mais bien tous les raisonnements que l'étude des logarithmes permet. Notamment, dans une approche inductive, où l'élève cherche et déduit les propriétés des logarithmes, l'étude de ce concept devient alors une porte d'entrée intéressante pour faire des conjectures. Ce travail n'est pas unidirectionnel : il est certain qu'un travail sur les logarithmes peut nourrir le travail sur les conjectures, mais le travail de création de conjectures en lien avec les propriétés des logarithmes nourrit également la compréhension de ce concept chez les élèves. En ce sens, on peut considérer les logarithmes comme le concept mathématique et les conjectures comme un élément de raisonnement mathématique (Jeannotte (2015) parlerait plus précisément de généralisation). Le concept et les

divers raisonnements sous-jacents ne peuvent jamais être scindés puisqu'ils se nourrissent l'un et l'autre.

Dans la figure 1, en gris pâle, on retrouve les éléments qui peuvent être utilisés pour travailler les conjectures (ou tout ce qui entoure les preuves mathématiques). En gris foncé, on retrouve tous les éléments qui peuvent servir au travail de la résolution d'équations ou de la manipulation d'expressions. C'est notamment le travail de ces deux éléments qui justifie la pertinence d'enseigner les logarithmes au secondaire.

Deux éléments utiles au travail sur les conjectures et les preuves sont présentés en gris pâle dans la figure 1 : **les conjectures et preuves entourant les propriétés et les aspects historiques**. Les aspects historiques sont abordés dans les manuels afin de proposer aux élèves de faire des conjectures ou de prouver des résultats qui ont été marquants dans l'histoire des logarithmes. En ce sens, l'aspect historique est utilisé pour permettre les conjectures et les preuves.

Dans les manuels *Visions*, on présente la propriété du changement de base et celle du logarithme d'une puissance avec la preuve et on demande d'expliquer celle-ci (SN 5^e, p. 191). Lorsqu'elles sont simplement données aux élèves, les propriétés (**propriété du changement de base** ou **les autres propriétés des logarithmes**) n'amènent pas nécessairement le travail sur les conjectures et les preuves. Dans le cheminement CST, on donne directement les propriétés aux élèves. Cependant, dans le cheminement TS et SN, on leur demande d'expliquer les propriétés, se rapprochant ici de l'idée de preuve. En ce sens, la réflexion sur chacune des propriétés peut être un élément pour travailler la preuve (ou la conjecture si l'on essaie de faire découvrir la propriété aux élèves).

En plus de cela, dans le manuel de TS de 4^e secondaire, une discussion s'ouvre concernant l'aspect historique des logarithmes. Les explications concernant l'aspect historique peuvent laisser entendre que le concept de logarithme est né de l'inverse de la forme exponentielle. En effet, on mentionne que c'est en travaillant les expressions exponentielles et logarithmiques que les mathématiciens ont réussi à trouver des équivalences ou des lois. Cela laisse planer la confusion ; un élève interprétera ici probablement que le logarithme est apparu comme étant l'inverse de l'exposant et que cela a permis de découvrir certaines propriétés des logarithmes. Or, dans l'histoire des mathématiques, les logarithmes sont tout d'abord apparus sans lien avec les exposants ; ils étaient un objet mathématique « nouveau » découlant du domaine de l'analyse mathématique (Trompler, 2002). C'est John Napier qui a été le premier à officiellement publier des tables logarithmiques et, à ce moment, il ne faisait aucun lien avec les exposants. Ce n'est qu'en 1736 qu'Euler formula un lien entre la forme exponentielle et celle logarithmique. La définition qu'il utilisa à l'époque est d'ailleurs celle qui est encore utilisée dans les manuels scolaires (Lomonte, 2020). À ce moment, ce fut une véritable révolution dans le monde des mathématiques de constater que cet objet qu'on appelait « logarithme » était en fait étroitement lié aux exposants (Trompler, 2002). L'évolution historique est donc bien loin de s'appuyer dès le départ sur le lien entre logarithme et exposant. Elle ne se résume pas non plus à l'utilisation de tables logarithmiques (qui elles aussi découlent de l'analyse mathématique, pan des mathématiques qui n'est aucunement abordé au secondaire). Bien que les manuels scolaires puissent laisser croire à tort à un élève qui ne connaît pas le réel développement historique du concept de logarithme que celui-ci a été construit en réponse au concept d'exposant, ils permettent de mettre en lumière le fondement de l'enseignement des logarithmes au secondaire : le logarithme comme l'inverse de l'exposant. Ce lien entre les deux objets que sont les logarithmes et les exposants a été une réelle révolution sur le plan des mathématiques et a permis

une utilisation des logarithmes plus répandue et accessible. C'est en ce sens que les aspects historiques sont inclus dans la figure 1.

Plusieurs éléments peuvent permettre un travail incident sur la conceptualisation même des logarithmes : la résolution d'équations, la résolution d'inéquations, le travail sur les mathématiques financières et la fonction logarithmique (résolutions avec la règle, recherches de la règle $(f(x) = a \log_c(b(x-h)) + k$ et travail sur les caractéristiques de la fonction).

Bien que les élèves aient à manipuler le nouvel objet qu'est le logarithme, on présente ces manipulations dans les manuels de la même manière que l'on présente des équations algébriques à résoudre ou des manipulations algébriques. Ceci laisse donc penser aux élèves que les logarithmes peuvent être envisagés comme « les autres manipulations algébriques » qui ont déjà été vues et étudiées en classe avant même l'introduction aux logarithmes. Pourtant, les manipulations entourant les logarithmes et l'algèbre sont bien différentes.

Bref, l'analyse des difficultés des élèves, des documents ministériels (PFEQ, MELS, 2007 ; PDA, MEES, 2016) et celle des manuels *Visions* (Boivin et al., 2009 ; Boivin et al., 2010b, 2010c ; Boivin et al., 2016) mettent en relief trois faits saillants importants entourant l'enseignement des logarithmes au secondaire.

1. Les logarithmes sont utilisés sur deux axes : manipulation d'expressions logarithmiques ou fonction.
2. Les logarithmes sont toujours considérés comme étant l'inverse des exposants (ou la réciproque de la fonction exponentielle lorsqu'il est question de la fonction).
3. Les logarithmes sont un tremplin pour travailler deux éléments importants en mathématique : d'une part, la résolution d'équations ou la manipulation d'expressions et, d'autre part, les conjectures et les preuves. De plus, cette section a permis d'étayer l'importance indéniable du lien entre logarithme et exposant.

1.4. Place du logarithme dans le raisonnement de l'élève, sujet réfléchissant

Si les éléments importants entourant l'objet d'apprentissage « logarithmes » ont été précédemment étayés, il demeure encore nécessaire d'envisager l'apprentissage à partir du sujet réfléchissant¹³, l'élève. Dans cette optique, il convient de définir le raisonnement mathématique, la verbalisation et les obstacles qui se rattachent au concept.

Raisonnement mathématique

Jeannotte (2015) décrit le raisonnement mathématique selon deux aspects : l'aspect structurel (déduction, induction, abduction et analogie) et l'aspect processuel (généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer, classer, justifier, prouver, démontrer¹⁴ et exemplifier). L'aspect structurel s'apparente ici à l'idée de mouvement de la pensée de Henriques (2004) pour

¹³ L'appellation « sujet réfléchissant » est favorisée à celui du terme « élève » pour ne pas réduire le jeune à son simple rôle scolaire dans lequel il est, plus souvent qu'autrement, invité à exécuter des exercices. Il convient de rappeler que le terme « élève » sera considéré, tout au long de cet article, comme un sujet pleinement réfléchissant à partir de ses actions. Cela demeure en cohérence avec des assises piagétienne mettant en valeur les abstractions et les généralisations dans un mouvement inductif, puis déductif. Le jeu dont il sera question plus loin permettra de mettre en exergue de telles réflexions sur l'action élaborées par les jeunes.

¹⁴ Justifier, prouver et démontrer sont trois processus de validation selon Jeannotte (2015). Bien qu'une différence existe entre la preuve et la démonstration, elle ne sera pas décrite ici puisque l'on s'attardera à la justification. La justification permet d'expliquer la vraisemblance d'un propos alors que la preuve et la démonstration sont des activités plus formelles.

qui la construction de toute connaissance provient à la fois d'un mouvement inductif, c'est-à-dire d'une action contextualisée sur laquelle une abstraction et une généralisation peuvent être construites mentalement, et à la fois d'un mouvement déductif, c'est-à-dire une direction de l'action à partir des généralisations construites. La logique de la connaissance, selon lui, reposerait sur la structuration de ce mouvement dynamique entre induction et déduction. En ce sens, l'aspect structurel de Jeannotte (2015) s'intéresse à la globalité du raisonnement mathématique déployé. L'aspect processuel comprend les processus déployés par les élèves. En ce sens, il s'agit plutôt des manifestations contextualisées du raisonnement mathématique.

L'aspect structurel comprend quatre éléments (déduction, induction, abduction et analogie). Pour Jeannotte, la déduction et l'induction font intervenir des affirmations, des données et des règles. La déduction correspond à l'inférence d'une affirmation à partir de données et de règles. L'induction correspond à l'inférence d'une règle à partir de données et d'affirmations (en lien avec ces données) (Jeannotte, 2015).

Pour les logarithmes, on pourrait penser à ceci pour la déduction : l'élève qui connaît la loi de changement de base pourrait être questionné pour savoir comment cela pourrait être utile avec la calculatrice (qui est uniquement en base dix). Plus précisément, à la question suivante : « comment pourrais-tu calculer $\log_2 8$ sur ta calculatrice ? », l'élève pourrait alors se dire que la loi du changement de base fonctionnant avec toutes les bases, elle devrait alors fonctionner avec la base dix (base de la calculatrice) et en base deux (base dans la question). L'élève pourrait donc calculer un logarithme en base deux en le convertissant avec la loi du changement de base. On passe donc ici d'une règle (une propriété) et potentiellement de données (exemples ou problèmes que les élèves peuvent prendre de divers contextes) pour en venir à une affirmation plus précise (ici la manière de calculer un logarithme sur la calculatrice). Pour l'idée d'induction, on pourrait penser à donner des exemples illustrant une des propriétés des logarithmes, puis de demander aux élèves ce qu'ils remarquent. Le fait de passer de ces exemples (données) à la propriété générale (règle) constitue une induction.

L'aspect processuel comprend neuf éléments (généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer, classier, justifier, prouver, démontrer et exemplifier). Ces éléments peuvent facilement devenir interreliés et ils se rattachent toujours à un élément de l'aspect structurel. Les deux exemples donnés précédemment seront alors repris et décrits sur le plan des « processus ». Le problème de trouver comment l'on peut utiliser la propriété de changement de base avec la calculatrice amène les élèves à **exemplifier**. Les élèves doivent se donner un exemple contextualisé et associé à ladite propriété, puis travailler avec cet exemple pour faire le pont avec la calculatrice. L'idée de découvrir une propriété des logarithmes à l'aide de plusieurs cas précis amène les élèves à : généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer, classier, justifier. Les élèves doivent entrer dans un processus de **généralisation** puisque c'est le propre même de l'induction : observer plusieurs cas et arriver à une règle générale. Ils doivent **conjecturer**, ce qui est aussi inhérent à l'induction. En effet, les élèves doivent émettre une hypothèse sur ce qu'ils croient être la règle générale, ce qui correspond à conjecturer. Pour cela, ils doivent **identifier des régularités** dans les exemples, les **comparer** et les **classier**. Puis, une fois la conjecture émise, les élèves doivent tout au moins la **justifier**. Selon le niveau des élèves, une **preuve** ou une **démonstration** pourra même être effectuée.

Verbalisation

Après avoir soulevé la place du raisonnement mathématique, il convient de se pencher sur la « verbalisation » à adopter en lien avec les logarithmes, puisque toute verbalisation en lien avec un concept demeure primordiale lors de l'enseignement en mathématique (Bednarz et al., 1995).

Bien que, historiquement, le lien entre exposant et logarithme soit apparu tardivement, c'est ce lien qui est mis de l'avant dans tous les manuels scolaires analysés dans le cadre de cet article (Boivin et al., 2009 ; Boivin et al., 2010b ; Boivin et al., 2010c ; Boivin et al., 2016) et dans les documents ministériels québécois consultés (PFEQ, MELS 2007 ; PDA, MEES, 2016). Il semble donc pertinent de faire verbaliser ce lien par les élèves. Le terme « verbaliser » doit ici être compris comme une explicitation élaborée par le sujet réfléchissant, l'apprenant lui-même, au sens de Vermesch (2004), comme le fait de mettre en mots sa propre conceptualisation, elle-même issue d'une réflexion sur ses propres actions, ce que Piaget (1974) nomme la prise de conscience et, en prolongation, ce que Vermesch (2004) appelle la conscience réfléchie. Cette verbalisation fait d'ailleurs partie d'un processus d'apprentissage marqué par des situations d'action, de formulation (ici la verbalisation), de validation et d'institutionnalisation, situations décrites par Brousseau (2011) qui, considérées dans leur ensemble, sont conceptualisées ici comme constitutives d'un processus d'enseignement-apprentissage. Ici, verbaliser s'oppose donc totalement à la récitation de liens qui seraient explicitement mis en mots par l'enseignant pour les élèves. De plus, la verbalisation doit découler d'une action faite par les élèves. Ces derniers doivent être mis dans une situation où ils auront déployé leurs raisonnements mathématiques, notamment en comparant, en classant, en identifiant une régularité, en généralisant et en exemplifiant, c'est-à-dire cinq aspects processuels primordiaux du raisonnement mathématique (Jeannotte, 2015).

Il devient pertinent, dans cette optique, d'exposer les élèves à des situations d'enseignement où ils devront manipuler de multiples fois les exposants en les liant à l'écriture logarithmique afin qu'ils puissent créer des régularités, généraliser et construire les règles qui unissent les expressions exponentielles et logarithmiques. Il est ainsi possible de soulever l'hypothèse de travail que ce n'est qu'ainsi qu'on peut guider les élèves à exprimer leur propre verbalisation de ce qu'est un logarithme à partir de leurs actions réfléchies. Dans cette optique, comme Piaget (1974) le fait constater, il y a nécessairement un décalage entre ce que l'élève parvient à faire dans l'action réfléchie et la verbalisation réussie d'une règle. Ce temps de décalage entre les deux est absolument nécessaire dans l'apprentissage et dans la construction de la connaissance et il ne doit pas être détourné par souci d'économie de temps dans l'enseignement.

Pour permettre à l'élève de faire ce lien entre logarithme et exposant, il semble judicieux d'introduire le concept de logarithme en partant des exposants. Pour ce faire, il est possible d'exposer les élèves à de multiples situations problèmes de type « résoudre l'équation suivante : $2^x=8$ » dont la solution s'exprimera plus tard à l'aide de notation logarithmique ($\log_2 8=x$), mais qui peuvent être résolus par les élèves, par des essais et des ajustements. Cette exposition répétée à une même situation problème permet à l'élève de rechercher, *in situ*, un exposant (action), de réfléchir sur cette action permettant la résolution, voire de verbaliser (formulation) le processus pour y arriver. C'est d'ailleurs l'angle d'entrée de la majeure partie des manuels scolaires. Le fait que les élèves soient capables de résoudre des problèmes de ce type permet aux élèves une première compréhension des logarithmes ancrée dans leurs connaissances sur les exposants. Évidemment, cette compréhension est limitée à l'étude d'équations avec un exposant entier et une base relativement petite. Cependant, bien que limitée, cette compréhension permet

de donner un sens à l'objet logarithme, et ce, même lorsque des exposants non entiers seront introduits.

Lorsqu'ils sont initiés à l'écriture logarithmique $\log_2 8$, les élèves peuvent alors réinvestir leurs raisonnements et leurs verbalisations à partir de ce qu'ils ont fait et généraliser en utilisant l'écriture exponentielle. Autrement dit, il n'est pas nécessaire de toujours lire de manière linéaire ce que l'on voit « *le log en base 2 de 8 ($\log_2 8$)* ». Ainsi, l'enseignant amène la réflexion au regard des liens entre les concepts d'exposant et de logarithme. Bref, la verbalisation la plus importante en lien avec les logarithmes est la suivante : le résultat de $\log_2 8$ correspond à l'opération à faire sur 2, compris comme une base en attente d'un exposant, pour obtenir une puissance 8 (ou à la valeur de x dans l'équation $2^x = 8$).

Le but de l'enseignant est donc d'amener l'élève à formuler la relation de lui-même en fonction de sa propre manipulation : quel exposant dois-je mettre à 2 pour arriver à 8, ce qui correspond à parler de l'objet $\log_2 8$?

Obstacle conceptuel¹⁵

Un autre élément à considérer lors de l'enseignement de tout concept mathématique est de déterminer la présence d'obstacles (au sens de Brousseau, 2011) qu'il est possible de qualifier de conceptuels. Du côté des logarithme, un obstacle conceptuel est souvent observé : la tentative de générer les propriétés et lois des exposants aux logarithmes. La plupart des propriétés des logarithmes paraissent, à première vue, contre-intuitives si elles sont comparées aux manipulations algébriques connues des élèves (et donc aussi aux manipulations entourant les exposants). Comment mentionné par Chua et Wood (2005), les élèves ont tendance à arriver à l'égalité suivante : $\log_a x + \log_a y = \log_a (x + y)$. Cependant, la réelle propriété est $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \times y)$. Il faut alors amener les élèves à se questionner : est-ce que $\log_a x + \log_a y = \log_a (x + y)$? Ceci peut se faire notamment en se donnant des exemples qui contredisent la propriété.

Bien que la surgénéralisation en lien avec l'algèbre ou les exposants puisse devenir un obstacle lorsque l'on aborde les propriétés des logarithmes, il faut en profiter pour permettre la construction du réel lien entre les propriétés des exposants et des logarithmes, lien qui est porteur selon Chua et Wood (2005). On peut, par exemple, amener les élèves à émettre des hypothèses sur les propriétés de logarithmes, puis essayer de les valider. Les élèves vont alors avoir à les exemplifier en lien avec les propriétés qu'ils croient justes pour se rendre compte qu'elles ne le sont pas (par exemple en se donnant des valeurs précises de a, x, y et en validant si les propriétés

¹⁵ Le terme « obstacle conceptuel » est ici utilisé en paraphrasant quelque peu Brousseau (1997) qui, à l'instar de Bachelard, de qui il emprunte le premier terme du concept obstacle épistémologique, explique que les obstacles, en situation d'apprentissage, se manifestent bien par des erreurs qui sont liées entre elles par une conceptualisation : « mais ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte » (p. 19). Éclairé de la théorie piagétienne (Piaget, 1968) portant sur la structuration et incluant le mécanisme d'équilibration majorante, cet obstacle, défini par Brousseau, prend pleinement le sens d'un conflit cognitif issu d'une structuration conceptuelle insuffisante pour s'accommoder à un problème, mais suffisamment avancée pour saisir de nouvelles situations problèmes de même organisation. En ce sens, il est possible de parler d'obstacle conceptuel, car il parvient d'une structuration conceptuelle donnée tout en participant progressivement à sa complexification. Cet obstacle conceptuel conduit à des « erreurs » qui ne se manifestent pas au hasard, mais bien en fonction d'un niveau de structuration donnée insuffisant, pendant un moment du déséquilibre cognitif, et menant à ce que Piaget nomme des assimilations déformantes au lieu de mener à des accommodations ouvrant sur des solutions adéquates aux mêmes situations problèmes.

qu'ils croient vraies le sont réellement). De plus, un travail pourrait être fait pour découvrir les réelles propriétés en présentant des exemples bien choisis (par exemple en prenant une base a connue des élèves (2 ou 3) et de petits exposants entiers (ou puissances)), travaillant ici les conjectures.

L'obstacle devient ainsi une stimulation du raisonnement mathématique dont il était question précédemment, notamment dans son aspect processuel, tel que défini par Jeannotte (2015). En effet, le travail de comparaison entre les propriétés des logarithmes et celles des exposants par l'intermédiaire d'une confrontation par exemplifications des hypothèses émises par les élèves peut alors devenir une occasion de solliciter certains processus de raisonnement mathématique, au profit d'une généralisation qui finira par être nuancée et ultimement adéquate. En fait, les élèves font souvent l'hypothèse que les propriétés des logarithmes sont les mêmes que celles des exposants, mais la recherche de similitudes et de différences, de comparaisons, d'exemplifications et de recherche de régularités devrait permettre aux élèves de voir les différences, puis éventuellement d'induire les propriétés des logarithmes. Un tel travail est partie prenante d'un processus de généralisation, processus qui, non seulement a une importance considérable pour le raisonnement mathématique, mais qui est également peu (ou pas assez du moins) développé chez les élèves du secondaire (Squalli, 2021).

Bref, l'appui sur les exposants semble pouvoir être un tremplin dans la construction de sens pour le nouvel objet mathématique qu'est le logarithme, mais la comparaison de ces deux objets conceptuels peut mener à certaines confusions pouvant faire état d'obstacle puisque, bien que très liés l'un à l'autre, ils ont des propriétés différentes.

Cette section a permis de relater l'importance de construire le lien entre exposant et logarithme afin de permettre aux élèves de construire leur compréhension du logarithme, ce qui leur permettra notamment d'être en mesure de calculer des expressions logarithmiques et exponentielles en utilisant les propriétés adéquates et de faire des manipulations algébriques incluant des logarithmes.

2. Méthodologie

Au terme de ce qui précède, il est possible de mettre en exergue que l'enseignement des logarithmes au secondaire ancre les apprentissages dans le lien entre exposant et logarithme. Malgré ce lien pourtant présent dans les exercices proposés dans les manuels scolaires, Nguyen (2021), qui a analysé de manière exhaustive les manuels scolaires québécois au regard de l'enseignement des logarithmes, conclut que cela ne permettra pas aux élèves d'utiliser les fonctions logarithmiques en contexte ou dans des contextes autres que calculatoires. On peut penser que ceci peut reposer en partie sur un manque de conceptualisation en profondeur de ce lien entre exposants et logarithmes par une surenchère d'exercices qui amènent les élèves à demeurer en surface à un niveau de manipulations aux fins strictement calculatoires, du moins selon les manuels scolaires analysés dans le présent article et celui de Nguyen (2021). Dès lors, il convient de rappeler la question de recherche : comment peut-on enseigner les logarithmes en permettant aux élèves de construire en profondeur ce lien indispensable avec les exposants afin qu'ils s'approprient la verbalisation inhérente aux définitions exposées dans les manuels scolaires auxquels ils sont exposés ?

Un jeu de société mathématique sur les logarithmes a été créé¹⁶ par l'enseignante-chercheure. Une étude qualitative et exploratoire, ancrée dans le terrain pratique de l'enseignement des mathématiques, a été conçue dans une perspective ethnométhodologique. C'est dans cette perspective, qui met de l'avant l'étude d'une activité socialement organisée en se penchant sur les procédures que les individus utilisent pour réaliser cette activité (Corriveau et Bednarz, 2013), que des élèves se sont engagés dans un jeu et ont eu à interagir en cours de jeu (activité socialement organisée), puis que les manifestations de raisonnements mathématiques ont pu être soulevées (procédures des élèves).

À l'instar de Yin (1994), on considère ici l'étude de cas comme l'étude d'un groupe d'élèves de manière à décrire finement ce que ces derniers font et comment ils y parviennent. Les résultats ne pourront donc pas être généralisables empiriquement à grande échelle, mais ils permettront de mettre en relief certains constats empiriques au service d'une conceptualisation en lien avec l'enseignement des mathématiques au secondaire, plus spécifiquement situé en regard du concept de logarithme.

2.1. But et objectifs spécifiques

Le but de cet article est de circonscrire des raisonnements d'élèves en cours de jeu qui montrent une construction de connaissances entourant les logarithmes tout en renforçant le lien d'opération inverse entre logarithme et exposant, et ce, afin de justifier la pertinence d'un tel jeu au regard de l'enseignement des mathématiques. Ce but se décline en deux objectifs spécifiques :

1. décrire des raisonnements d'élèves concernant les exposants et les logarithmes par l'intermédiaire de leurs verbalisations en cours d'action dans le jeu ;
2. analyser la pertinence de ces raisonnements émergents dans le jeu au regard de l'apprentissage des logarithmes.

2.2. Participants

Ce jeu a été déployé avec deux groupes d'élèves de deux écoles secondaires privées : des élèves de 1^{re} secondaire ainsi que des élèves de 5^e secondaire¹⁷. Les cinq élèves volontaires de 1^{re} secondaire ont participé au jeu de société dans le cadre de midis « jeux mathématiques¹⁸ » ($N=5$). Ils ont joué en utilisant seulement les cartes « exposants ». Le groupe de 12 élèves de 5^e secondaire était dans le cheminement SN et c'est la classe en entier qui a participé dans le cadre de leur cours de mathématique ($N=12$). Ils avaient vu formellement en classe les logarithmes et leurs propriétés. Le jeu a été utilisé à la fin de la séquence d'enseignement concernant les logarithmes.

Les participants identifiés par des codes A, B, C, D, E sont des élèves de 1^{re} secondaire. F1, F2, F3, G1, G2, G3, H1, H2, H3, I1, I2 et I3 sont des élèves de 5^e secondaire. P1 et P2 sont des enseignantes, incluant l'enseignante-chercheure.

¹⁶ La présentation de ce jeu de logarithme et des règles complètes ont été exposées et expliquées par Makdissi et Corriveau (2017). Le but et les règles du jeu tels que présentés aux élèves sont résumés en annexe A afin de faciliter la lecture et la compréhension des interactions discursives qui seront exposées dans la section des analyses.

¹⁷ Au Québec, la 1^{re} année secondaire correspond à la 5^e du collège dans le système français et la 5^e année secondaire à la 1^{re} du lycée.

¹⁸ Ici, il s'agissait d'une activité parascolaire qui se déroulait lors de la pause du midi. Les élèves venaient jouer à des jeux pour une période de 30 à 45 minutes.

2.3. Collecte de données

Les élèves ont joué au jeu de société des logarithmes créé par l'enseignante-chercheure. Il s'agit d'un jeu où les participants doivent créer des expressions exponentielles et leur associer une expression logarithmique. Il existe trois types de cartes¹⁹ (carte exponentielle (contour pointillé), carte nombre (contour plein) et carte logarithme (carte allongée))²⁰. Le but du jeu est d'obtenir le plus de points au terme de la partie (temps imposé par l'enseignant.e). Les joueurs ont en main des cartes de chaque type et peuvent à chaque tour soit : 1- piger plus de cartes, 2- déposer une combinaison valide pour avoir des points ou 3- déposer une carte logarithme associée à une combinaison déposée (ce qui permet de doubler les points de la combinaison valide). Les combinaisons valides correspondent à une combinaison d'une carte exponentielle à deux cartes nombres (pour exprimer l'exponentiation complète avec sa valeur)²¹. Par exemple, un joueur pourrait lier les cartes logarithmes suivantes dans la figure 2 :

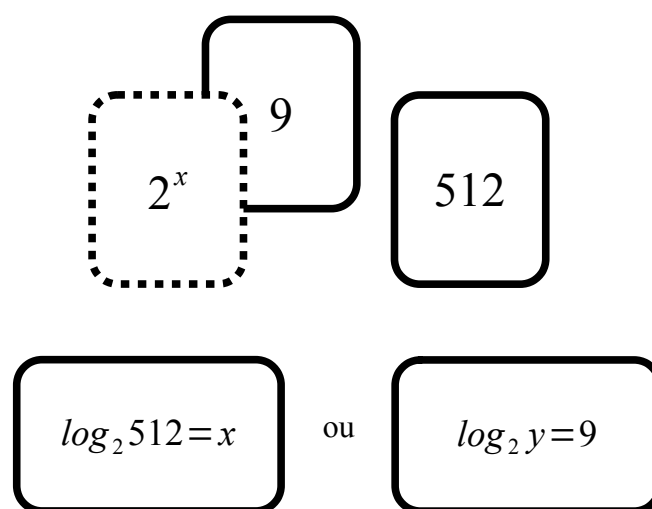


Figure 2 : Exemplification du jeu²².

¹⁹ Pour les cartes exponentielles, les valeurs vont de 2^x à 9^x . Pour les cartes nombres, les valeurs vont de 1 à 729 (et elles incluent toutes les valeurs possibles d'expression valide selon la grille de points (cf. annexe A). Pour les cartes logarithmes, il y a deux cartes logarithmes pour chaque expression valide possible (une contenant un x et une contenant un y).

²⁰ Dans la version originale, les cartes exponentielles sont mauves, les cartes nombres sont vertes et les cartes logarithmes sont bleues. Les élèves ont parfois utilisé les couleurs pour parler des cartes. Pour les fins de cet article, tout a été converti en noir et blanc.

²¹ L'annexe A présente la grille de pointage du jeu. Elle permet à la fois de voir les points associés à chaque combinaison, mais également de voir les combinaisons possibles du jeu.

²² Le fait de laisser un élément x ou y dans les cartes aux expressions logarithmiques obligera nécessairement les élèves à construire la relation inverse qui permet de regrouper la combinaison de cartes qui se retrouve éparées dans leurs mains au cours des pioches pendant le déroulement du jeu (cf. figure 4). Si les cartes logarithmiques avaient inclus tous les nombres, l'élève n'aurait plus à chercher la combinaison des cartes, car elle serait donnée d'emblée par l'expression logarithmique complète. C'est précisément cette démarche inductive exigeant la réflexion sur le lien inverse unissant l'expression exponentielle et l'expression logarithmique qui est sollicitée par le présent jeu pour servir une conceptualisation en profondeur ancrée dans la réflexion sur l'action.



Figure 3 : Exemple du jeu réel.



Figure 4 : Exemple des cartes dans la main d'un joueur.

La figure 2 présente une combinaison possible (2 à la 9 correspond à 512, ainsi que les deux cartes logarithmes associées). Les figures 3 et 4 présentent des exemples du jeu. La figure 3 fait référence à ce qui est visible pour tous (les cartes de la pioche en haut et les combinaisons valides d'un joueur en bas). La figure 4 présente les cartes qu'un joueur a en main. Il est à noter que la notation x et y (dans les cartes logarithmiques) a été choisie afin de demander aux élèves de calculer la valeur des expressions logarithmiques dans les cartes bleues/logarithmes afin de pouvoir les lier aux cartes d'exponentiation.

Il est à noter que les cartes nombres (contour plein) sont utilisées à la fois comme exposant et puissance. Dans la figure 1, on doit lire : $2^9 = 512$. De plus, il y a une part de stratégie dans ce jeu puisque les joueurs peuvent choisir les cartes qui seront utilisées pour faire leur combinaison. Il ne s'agit pas simplement d'associer une expression exponentielle à une expression logarithmique, mais bien de créer une expression exponentielle qui se tient (ce qui peut être un défi), puis éventuellement d'associer, voire de planifier consciemment, l'expression logarithmique équivalente. Les élèves ont été filmés en cours de jeu.

2.4. Design d'analyse

Les analyses visent à décrire les raisonnements a été faite dans le but de décrire les raisonnements (objectif 1) afin d'analyser leur pertinence au regard de l'apprentissage des logarithmes (objectif 2). La figure 5 présente le design d'analyse.

Le design d'analyse est itératif, d'où les flèches bidirectionnelles, et est guidé à chaque étape par les deux objectifs de recherche qui sont au cœur de la figure. Chaque vidéo a d'abord fait l'objet d'un montage pour garder seulement les moments où des raisonnements importants²³ entourant les logarithmes étaient audibles. La **sélection de ces extraits** a par la suite été **mise en verbatim** par une transcription des propos et des gestes pertinents par rapport aux objectifs de recherche. En ce sens, la mise en verbatim est une réelle étape d'analyse à part entière comme le conçoit Lapadat (2000) puisque le passage de l'expérience filmée à la mise en mots implique déjà des inférences guidées par les objectifs de recherche et par l'épistémologie inhérente à l'étude. La mise en verbatim porte ainsi des décisions interprétatives relevant du regard analytique et interprétatif. Ce sont ces extraits qui ont servi de corpus aux fins de l'étape de **classification par comparaison** entre eux. Il est à noter qu'il ne s'agit pas d'une analyse exhaustive des raisonnements d'élèves en continuité en cours de jeu, mais bien d'une analyse catégorielle visant

²³ Les raisonnements ont été considérés comme importants lorsqu'ils étaient axés sur des propriétés des logarithmes ou sur le lien entre exposant et logarithme.

à ressortir les raisonnements importants entourant les logarithmes. Enfin, dans un 2^e niveau d'analyse, l'**identification des catégories stabilisées** a permis de classer tous les extraits, de les définir et de leur associer des extraits typiques visant à exemplifier la définition de la catégorie. Ces catégories sont conceptualisantes au sens de Paillé et Muchielli (2011)²⁴ puisqu'elles sont éclairées par le cadre conceptuel avancé. Sans être des catégories prédéterminées à l'analyse et le début de la classification, il n'en demeure pas moins que les extraits sélectionnés ne sont pas abordés par un regard vierge du point de vue épistémologique. Ces extraits sont interprétés de manière théorique, permettant de mettre en relief des catégories, et ce au service d'une conceptualisation. Dès lors, les catégories sont considérées comme conceptualisantes en ce qu'elles ne sont pas simplement descriptives. De plus, comme le jeu de société n'a été enregistré sur vidéo qu'une seule fois, il ne s'agit pas non plus de tracer l'évolution d'un ou de plusieurs élèves. Cette brève étude se veut une amorce de réflexion entourant la pertinence de l'utilisation de jeux de société mathématique dans le contexte de l'enseignement des logarithmes.

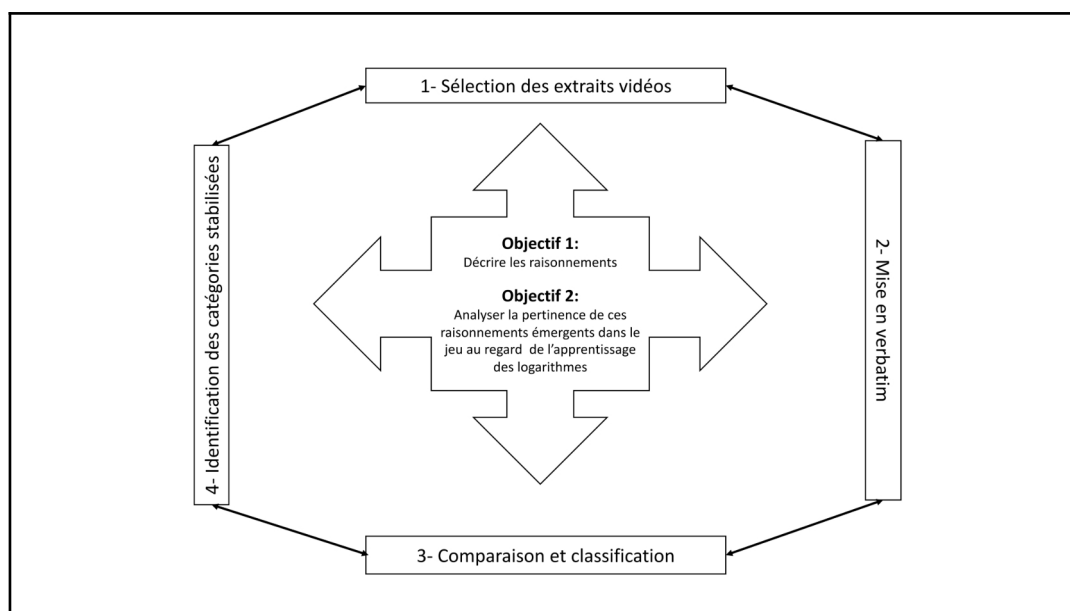


Figure 5 : Design d'analyse.

3. Analyse

Il convient de rappeler que les analyses visent à décrire les raisonnements des élèves par l'intermédiaire de leurs verbalisations en cours d'action dans le jeu (objectif 1) et à analyser la pertinence de ces raisonnements émergents au regard de l'apprentissage des logarithmes (objectif 2) afin de justifier la pertinence d'un tel jeu au regard de l'enseignement des mathématiques (but). L'analyse sera présentée en deux sections : l'analyse des raisonnements portant sur l'exponentiation et celle des raisonnements portant sur les logarithmes.

3.1. Analyse des raisonnements portant sur l'exponentiation

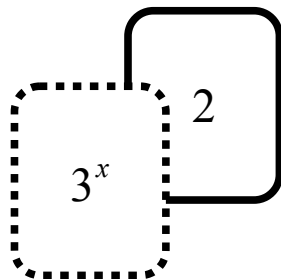
Deux erreurs ont été relevées en considération de l'exponentiation. Une confusion entre la multiplication et l'exponentiation ainsi qu'une confusion entre la base et l'exposant.

²⁴ Cette référence de Paillé et Muchielli est une réédition de la version originale parue en 2012.

Confusion multiplication/exponentiation

Chez les élèves de 1^{re} secondaire, on retrouve plusieurs réflexions propres à l'exponentiation qui mettent en relief une confusion entre la multiplication et l'exponentiation dans leurs verbalisations bien qu'ils procèdent adéquatement au calcul exponentiel pour trouver la puissance. Par exemple, l'élève D dit :

Extrait 1 : expression cible : $3^2=9$.



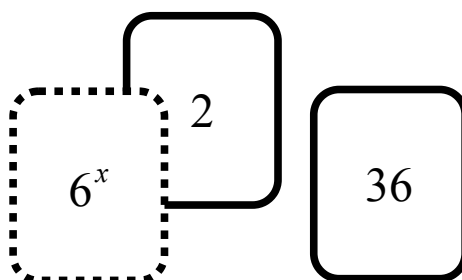
D : 3 exposant... fois 2, est égal à 9.

Manifestement, ici, l'élève D juge nécessaire de mettre en mots sa manipulation, comme une raison qui justifie²⁵ le placement de ses cartes de jeu. Toutefois, contrairement à ce qu'il verbalise dans une portion de son propos, il est loin de faire « 3 fois 2 », mais exécute bel et bien l'« exposant » à la base pour arriver à 9. *L'élève parvient à faire l'exponentiation adéquatement sans pouvoir la verbaliser adéquatement.*

²⁵ Dans les résultats présentés ici, les élèves posent une action (en geste) et donnent une raison oralement à leur action. Par exemple, l'élève ne dit pas la conséquence ou l'événement/expression cible, mais il met en action, sur la table, les cartes suivantes : le 3^x et le 2 un peu plus haut. Puis, il oralise « 3 exposant... fois 2, est égal à 9 ». Ceci n'est pas qu'une simple affirmation de l'égalité, mais peut être compris comme une justification complète. Bien que, du point de vue linguistique, la justification demeure incomplète dans la verbalisation (une portion est une action gestuelle et l'autre est oralisée), elle demeure présente totalement, car si l'on met en mots son action (« j'ai mis 3^x ici et 2 ici ») et qu'on le joint à l'oralisation « 3 exposant... fois 2, est égal à 9 », on obtient l'expression complète d'une justification. Même s'il n'y a pas de connecteur entre l'action (en geste) et la verbalisation orale, la suite permet de comprendre que : « j'ai mis 3^x ici et 2 ici PARCE QUE 3 exposant... fois 2, est égal à 9 ». La verbalisation orale est ici une raison à l'action faite avec les cartes (geste de déposer les cartes), l'oralité permettant en effet des usages extralinguistiques présents en contexte dialogique. Grize (1990) indique que la justification comprend un événement cible, ici identifié expression cible, *explanandum*, c'est-à-dire l'action gestuelle de déposer les cartes, conséquent à une cause ou plus précisément une raison dans le cas de la justification, *explanans*, ici la verbalisation orale de l'élève. Veneziano (1999, 2008), qui a étudié la justification chez les petits enfants, met précisément en perspective que, dans le langage en action, la justification peut porter une part de l'énonciation dans le contexte extralinguistique, l'*explanandum* (l'événement cible ou la conséquence, l'action gestuelle de déposer les cartes) peut être implicite dans le contexte dialogique et l'*explanans* (la raison) exprimé verbalement dans le contexte (« 3 exposant... fois 2, est égal à 9 »).

Une autre élève (C) dit :

Extrait 2 : expression cible : $6^2 = 36$.



C : *Nous on a 2 fois, euh 6 à la 2, ça fait 36.*

Cette confusion dans la *justification* mise en mots de sa propre procédure traduit une confusion, en partie saisie par l'expression « 2 fois, euh », de la compréhension de la multiplication et de l'exponentiation. Bien que l'expression proposée soit valide, on constate dans le discours de l'élève l'idée de multiplier « 2 fois ». D'ailleurs, dans une période de jeu antérieure à celle-ci (qui n'avait pas été filmée), cette même élève avait d'abord calculé $6^2 = 12$. En ce sens, l'élève est ici capable de trouver $6^2 = 36$, mais lorsqu'elle exprime sa combinaison au début, l'idée de multiplication revient (« nous on a deux fois »), puis l'élève se reprend « euh 6 à la 2 »²⁶. Sa première verbalisation ici semble correspondre à sa compréhension antérieure, et *son raisonnement effectif est un pas d'avance sur cette verbalisation*, qui demeure encore confuse. Tout comme cette élève l'avait fait auparavant, il n'est pas rare, en 1^{re} ou en 2^e secondaire, de voir un élève calculer une exponentiation en lui substituant une multiplication comme le souligne Deblois (2011).

Dans le premier extrait et, pour l'élève C, au début de l'extrait 2, on voit comment le jeu invite les élèves à justifier ce qu'ils font, les amenant ainsi à tenter de verbaliser leur raisonnement. On voit toutefois que leur raisonnement est adéquat et que la verbalisation ne l'est pas. En effet, bien que les élèves soient capables d'effectuer l'opération, leur verbalisation l'entourant demeure plus difficile, voire inadéquate, et est visiblement travaillée et complexifiée à même l'action réfléchie dans le jeu.

Catégorie conceptualisante 1 : un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate (extrait 1 et C début extrait 2).

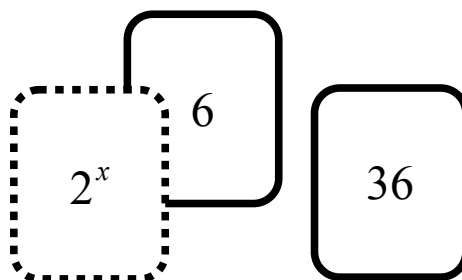
Catégorie conceptualisante 3 : un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate (suivi de C, extrait 2).

Confusion base/exposant

Certains élèves (H1) ont inversé la base et l'exposant dans leur calcul. Par exemple, un élève fait ceci :

²⁶ Cette expression est une formulation utilisée et acceptée au Québec pour dire 6^2 .

Extrait 3 : expression cible : $2^6=36$ (faux) et $6^2=36$.



H1 : 2 à la 6, égal 36.

[Plus tard P2 arrive]

P2 : 2 à la 6, ça donne pas 36.

H1 : On les a tu mélangées²⁷ ? Ça se peut pas, il marchait tantôt.

P2 : C'est 6 à la 2 qui donne 36.

H1 : Il marchait tantôt (incompréhension).

Dans cet extrait, spontanément l'élève *justifie* le placement de ses cartes de jeu. Même lorsque l'enseignante, P2, saisit cette justification spontanée pour provoquer le raisonnement de l'élève en soulignant l'erreur, H1 semble croire que sa combinaison doit être bonne ou avait pu être bonne au préalable : « ça se peut pas, il marchait tantôt » ceci référant à « 2 à la 6, égale 36 » exprimée juste un peu plus tôt. L'inversion de la base et de l'exposant est un élément qui peut être problématique avec les logarithmes (comme cela sera vu plus loin), mais on voit que cela arrive également sans logarithmes.

Ici, on voit que l'élève utilise une formulation mathématique d'exponentiation véhiculée en classe (2 à la 6). Cependant, sa verbalisation achoppe : 2 à la 6 ne donne pas 36, c'est plutôt 6 à la 2 qui donne 36. Cette *justification* de son action permet de mettre en relief que cette verbalisation inadéquate sous-tend une incompréhension des exposants chez l'élève. Qui plus est, même lorsque P2 donne une verbalisation adéquate, l'élève la rejette en disant que quelque chose avait dû changer puisque cela marchait avant. Ceci montre que c'est la verbalisation de l'élève qui est importante (celle de l'enseignante n'étant pas suffisante pour assurer la compréhension de l'élève, sans pour autant remettre en question son importance dans les situations d'enseignement-apprentissage). Donc, ici, un raisonnement inadéquat au regard du concept (action erronée) amène une verbalisation inadéquate de l'élève, et ce, malgré la guidance de P2 qui verbalise adéquatement l'opération.

Catégorie conceptualisante 2 : un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate.

3.2. Analyse des raisonnements portant sur les logarithmes et leurs propriétés

Les raisonnements des élèves portant sur les logarithmes ont été découpés en cinq catégories : l'expression du logarithme (base, exposant et puissance), les questionnements sous la forme logarithmique qui ont émergé, l'utilisation d'une technique (ou la démonstration de la

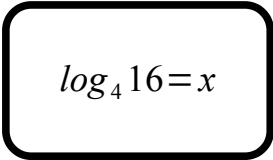
²⁷ Québécoisisme qui signifie : les a-t-on mêlées ?

compréhension), la validation, et les raisonnements sur des propriétés des exposants ou des logarithmes.

Expression du logarithme

Certains élèves (F2) ont de la difficulté à verbaliser ce qu'ils font (nommer le logarithme, base, puissance, exposant). Par exemple, l'élève F2 fait ceci :

Extrait 4 : expression cible : $\log_4 16 = 2$.


$$\log_4 16 = x$$

F2 : *Log de 4 à la 16* [calcule sur la calculatrice] *ça donne 2*.

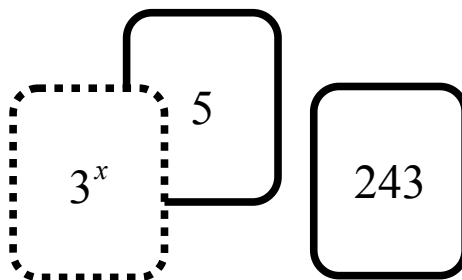
Bien qu'elle soit effectivement en train de calculer le log en base 4 de 16, il y a une confusion entre l'argument du log (16) et l'exposant (elle dit « à la 16 » comme si c'était un exposant) lorsque l'élève *justifie* spontanément la carte de jeu qu'elle dépose. Tout comme ce fut le cas au début des analyses avec l'exponentiation, encore ici, avec les logarithmes, l'élève parvient à faire correctement l'opération à l'intérieur du jeu, sans pouvoir encore la verbaliser adéquatement.

Dans cet extrait, on voit dans la *justification* élaborée par l'élève que le raisonnement est adéquat et que la verbalisation est inadéquate. En effet, l'élève est capable d'effectuer l'opération, tout en montrant un décalage avec la verbalisation qui, elle, demeure inappropriée à l'action adéquate réalisée en cours de jeu.

Catégorie conceptualisante 1 : un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate.

Par ailleurs, certains élèves (G1) verbalisent adéquatement ce qu'ils font.

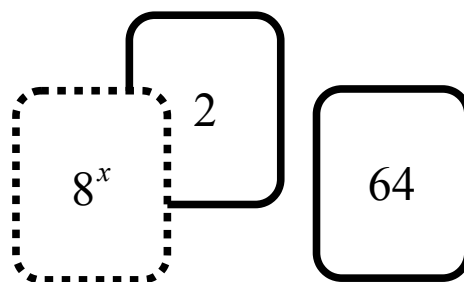
Extrait 5 : expression cible : $3^5 = 243$, puis $\log_3 ? = ?$.



G1 : *3 à la 5, ça fait 243. Est-ce que j'ai un log avec ça ? Est-ce que j'ai un log en base 3 ?*
Non, j'ai pas de log en base 3.

[Plus loin, en aidant un autre élève]

Expression cible : $8^2 = 64$, puis $\log_8 64 = 2$.



G1 : [Il essaie d'aider un autre élève à trouver un logarithme qui va avec cette combinaison : $8^2=64$]. *Log en base 8 qui donne 2. Est-ce que tu as log 8, log de 64 en base 8 qui donne 2. [...] non c'est en base 8, as-tu un log en base 8 ?*

Ici, l'élève G1 était à la recherche de cartes logarithmes pour ajouter à son jeu. Il a donc regardé la base qu'il avait à l'expression exponentielle et la base nécessaire au logarithme. Cette *comparaison* montre une compréhension du lien exposant-logarithme puisque l'élève sait que les deux logarithmes doivent avoir la même base. Cet élève n'a donc même pas besoin d'avoir la forme totale du logarithme pour valider l'équivalence avec la forme exponentielle. Il sait en effet que, si les cartes logarithmes en main n'ont pas la même base que l'expression exponentielle sur la table, alors les logarithmes sont différents. Et il commence une ébauche de *justification* : « Non, j'ai pas de log en base 3 », c'est-à-dire je n'ai pas de log qui va avec ma forme exponentielle parce que je n'en ai pas qui partage la même base. Cette *justification*, reposant sur le partage de la base, est également postulée à l'affirmative dans la seconde partie de l'extrait 5 : « c'est en base 8, as-tu un log en base 8 ? ». Bien que cette idée de base partagée ne soit pas explicitée, elle demeure implicite dans les énoncés de l'élève.

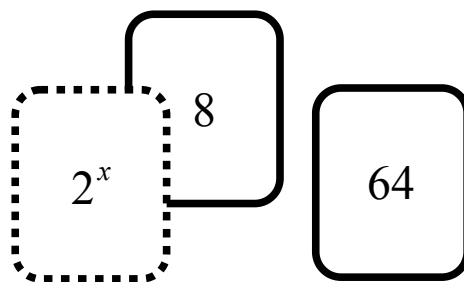
Cet élève a su verbaliser adéquatement sur la base et à sa manière (et d'ailleurs ce fut le cas toutes les fois qu'il intervenait), ce qui manifeste une *généralisation* concernant le lien entre la base de la forme exponentielle et la base de la forme logarithmique par l'intermédiaire d'une *justification* portant sur le partage de base (ce que peu d'élèves ont fait). Ceci porte donc à croire qu'un élève qui verbalise adéquatement à sa manière (sans une simple reprise d'une formulation consacrée en classe de mathématique) est un élève qui a une compréhension assurant un raisonnement adéquat pour résoudre le problème. Le présent extrait montre comment le jeu permet à l'élève de verbaliser le logarithme en cours d'action réfléchie, notamment ici, par l'intermédiaire de *comparaison* entre les expressions, montrant ainsi sa pertinence.

Catégorie conceptualisante 3 : un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate.

Questionnements sur la forme logarithmique

Dans certains extraits, on voit que le jeu amène réellement les élèves C et B à se questionner autour de la notion de logarithme, c'est-à-dire à chercher « quel exposant je dois avoir pour obtenir la puissance donnée ». Par exemple, une élève de 1^{re} secondaire fait ceci.

Extrait 6 : expression cible : $2^8=64$, puis $2^7=64$



C : *Je suis pas sûre que ça marche, 2 exposant 8, ça fait 64.*

[Discussion entre les élèves]

P1 : *Mais 2 à la quoi fait 64 ?*

C : *2 à la 8 !*

B : *Non.*

P1 : *2 à la quoi ?*

B : *2 à la 6 ! Je viens de le faire.* [B a multiplié 2 par lui-même jusqu'à obtenir 64].

On voit donc que l'élève B se met en action réfléchie et est en train de chercher sans en avoir conscience le logarithme en base 2 de 64, et ce même si elle ne connaît pas encore l'expression « logarithme ». À l'aide de tâtonnements impliquant la *comparaison* de plusieurs *exemplifications* (dont ici 2^8 et 2^6), le jeu permet donc à cette élève B de se questionner implicitement sur « quel est le log » en lien avec une expression exponentielle, et ce même si les logarithmes n'ont pas encore été introduits formellement dans l'enseignement en classe. Une question demeure en suspens ici : pourquoi la même question de l'enseignante n'a-t-elle pas provoqué les deux élèves de la même manière, l'une restant figée sur sa pensée (C) et l'autre étant provoquée dans une mise en action de son raisonnement (B) afin de trouver une *justification* ? On peut penser que c'est le niveau de raisonnement sur les exposants qui aura permis à l'une de saisir la question verbalisée par l'enseignante. La question de l'enseignante est assimilée différemment par chaque élève en fonction de leur structuration élaborée jusque-là permettant à l'une de se saisir du problème et de s'accommoder en cours d'action bien que l'autre demeure sur sa position, la menant à une assimilation déformante.

La situation de jeu, soutenue par le questionnement sous forme logarithmique de l'enseignante, a provoqué le raisonnement des élèves pour les engager dans un processus de *comparaison* d'*exemplifications*.

On a ici l'élève C qui manifeste au départ un raisonnement inadéquat la menant à une verbalisation inadéquate, raisonnement et verbalisation qui était initialement acceptés par B.

À la suite de la question verbalisée adéquatement par l'enseignante sous une forme logarithmique (« mais 2 à la quoi fait 64 ? »), l'élève C ne change pas son raisonnement (« 2 à la 8 », insiste-t-elle). Autrement dit, même si l'enseignante offre une verbalisation adéquate, cela ne donne en rien un raisonnement adéquat à l'élève C.

Toutefois, cette même question provoque l'action réfléchie de l'élève B. La verbalisation adéquate de la question logarithmique soulevée par l'enseignante (« 2 à la

quoi ») provoque une mise en action du raisonnement de B qui procède à une *exemplification* de 2 à la 6 qu'elle *comparera* avec l'affirmation de l'élève C.

Ce raisonnement adéquat de l'élève B soutiendra la justification à la suite d'une verbalisation adéquate externe aux élèves, car en réponse à l'enseignante.

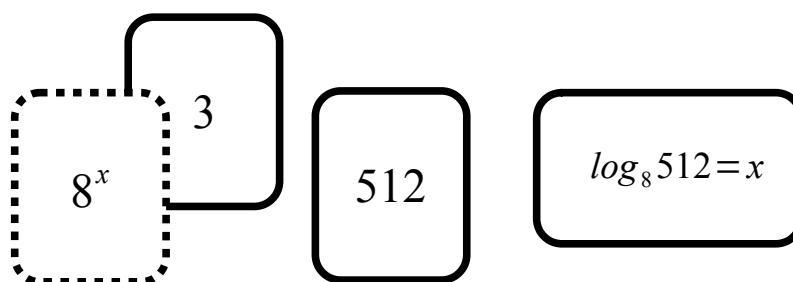
Catégorie conceptualisante 2 : un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate (pour élève C).

Catégorie conceptualisante 1 : un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate (pour l'élève B).

Utilisation d'une technique

L'utilisation de la calculatrice amène les élèves à essayer d'effectuer des opérations à tâtons sans nécessairement comprendre. À ce moment, il y a alors souvent confusion entre base/exposant/puissance. Par exemple, l'élève I3 fait ceci :

Extrait 7 : expression cible : $8^3=512$, puis $\log_8 512=3$.



I3 : Ça, ça marche tu ? ($8^3=512$, avec le logarithme correspondant), $\log 512$ divisé par $\log 8$, ça donne 3.

P1 : Ok, ça veut dire quoi ça, ça donne 3 ?

[...]

P1 : Ça veut dire que 8 à la...

I3 : C'est 8 à la 3 ? [Il calcule à la calculatrice].

P1 : Ah ouais.

I3 : 8 à la 3 égale 512.

[...]

I3 : Log 8, 512.

P1 : Ok, fait qu'il faudrait²⁸ que tu aies quelle carte mauve ($base^x$) pour aller avec ton $\log 8$, 512.

I3 : 8 (C'est adéquat).

[...]

P1 : Pis là, 512, ça serait quoi ton exposant, c'est 8 à la quoi qui fait 512 ?

I3 : [Il fait la multiplication 8 fois 8 fois 8].

L'élève sait utiliser la propriété du changement de base pour faire le calcul (divisé par) qui a été explicitement enseigné en classe par l'enseignante. Elle répète plusieurs fois l'expression exponentielle avec le bon exposant. Pourtant, lorsqu'un moment s'écoule entre cette réflexion et

²⁸ L'expression figée « fait que » fait partie des usages de la langue orale québécoise et exprime une relation causale prospective « ça fait que/alors ».

la question de l'enseignante, « Pis là, 512, ça serait quoi ton exposant, c'est 8 à la quoi qui fait 512 ? », elle se retrouve à se redemander quel est l'exposant qui va avec son expression et retourne à une procédure qu'elle comprend en passant alors par la multiplication répétée. Elle cherche à *se valider*, à *justifier*. L'élève ne semble pas remarquer au cours de l'interaction qu'il s'agit de la même question. Cependant, après s'être *justifiée et donc validée* avec la multiplication répétée, elle semble convaincue, alors qu'elle ne l'était pas lorsqu'elle *justifiait* avec la technique apprise par cœur pour l'utilisation de la calculatrice (impliquant le changement de base). Ici, l'élève essaie de chercher un sens à l'utilisation d'une technique de calcul qu'elle n'a pas conceptualisée d'elle-même, mais qui lui a plutôt été enseignée explicitement sans qu'elle ne la comprenne, et ce, même si elle l'utilise spontanément en contexte. En fait, il semble ici que l'élève soit à la recherche de sens d'une propriété démontrée et que, pour ce faire, elle *valide* cette procédure transmise en partant de ses propres procédures qu'elle comprend pour *justifier* l'adéquation de son choix de carte.

Cet exemple porte à croire que l'utilisation de la calculatrice, lorsqu'elle se limite à appliquer une technique transmise explicitement, n'aide pas à la compréhension. En effet, l'élève peut calculer la valeur du logarithme, mais ne sait pas l'interpréter (« que veut dire la réponse 3 ? »). L'élève ne parvient pas à répondre seule, l'enseignante devra étayer davantage sa question). Il faut que le lien entre la forme exponentielle (multiplication) et l'écriture logarithmique soit construit par l'élève elle-même, cette conceptualisation n'étant pas donnée directement. La recherche de sens entourant une technique de calcul transmise explicitement propulse l'élève dans une recherche de sens qui la pousse à *valider* la technique apprise en créant un pont avec ses propres procédures inhérentes à son raisonnement mathématique aux fins de *valider* sa réponse.

Bien que la verbalisation de l'élève ait été adéquate tout au long de cet extrait, la première ligne relève plutôt d'une verbalisation de l'enseignante apprise par cœur. C'est la suite des interactions qui a amené une verbalisation par l'élève et qui a permis de voir son raisonnement adéquat.

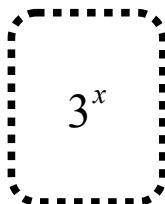
Catégorie conceptualisante 3 : un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate.

Comparaison entre expressions exponentielles et logarithmiques

Le jeu permet également aux élèves de *se valider* en *comparant* les expressions exponentielles et logarithmiques. Cette validation permet aux élèves de corriger certaines erreurs ou simplement de *justifier* leur réponse.

Par exemple, l'élève G1 montre une compréhension du concept de logarithme en *comparant* l'expression exponentielle et une éventuelle expression logarithmique qui lui donnerait des points supplémentaires dans le jeu.

Extrait 8 : expression cible : 3^x , puis $\log_3 y = x$.



$$3^x$$

G1 : *J'ai juste des bases 3. [...] Je peux pas doubler avec des log ! [...] Mais non parce que vu que j'ai juste des bases 3, j'ai pas de log (sous-entendu en base 3). [...] J'ai pas de log en base 3.*

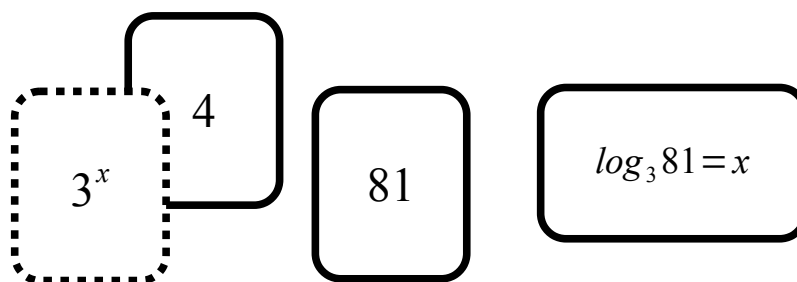
Ici, l'élève G1 cherche à mettre en relation les expressions exponentielle et logarithmique par l'intermédiaire de la base commune. L'élève verbalise à sa manière sa recherche d'expression logarithmique qui doit nécessairement être exprimée en base 3 étant donné son expression exponentielle en base 3. Ceci témoigne d'un raisonnement adéquat qui rend compte de l'identification d'une régularité, voire d'une généralisation, entre les deux formes d'expressions.

On voit ici que l'élève *se justifie* de manière pertinente en considérant la base. Sa verbalisation adéquate rend compte de son raisonnement adéquat qui sous-tend une *identification de régularité* concernant la base commune dans les deux expressions (exponentielle et logarithmique) et *généralisée*, lui permettant ainsi de l'actualiser dans la présente situation de jeu.

Catégorie conceptualisante 3 : un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate.

Une autre élève *valide* ses choix de carte en *justifiant*, avec l'utilisation de la calculatrice, le lien entre la forme exponentielle et logarithmique.

Extrait 9 : expression cible : $3^4=81$, puis $\log_3 81=4$.



I1 : *Moi, j'ai 3 à la 4 de 81, qui est égale à log de 4 (erreur) de 81 (valide avec la calculatrice) 3 à la 4, ça donne 81, p'is log de 3 de 81, ça me donne 4.*

Dans cet extrait, bien que l'élève fasse une erreur dans la verbalisation du log (donne l'exposant au lieu de la base), toute sa *justification* se tient, car elle est soutenue par des calculs faisant intervenir un raisonnement qui utilise adéquatement la bonne base et qui établit adéquatement les relations entre les deux expressions (exponentielle et logarithmique). Cela étant dit, toute la verbalisation concernant l'expression exponentielle qu'elle maîtrise davantage demeure adéquate.

L'élève se sert ici de la calculatrice pour *valider* l'équivalence dans ses *comparaisons* des expressions exponentielles et logarithmiques. L'élève tente de *justifier* ses réponses. Cette tentative de validation l'amène à verbaliser. Dans le cas présent, on peut observer deux catégories conceptualisantes en fonction d'un objet mieux connu (expression exponentielle) ou d'un objet relativement nouveau dans la construction de savoirs de l'élève (expression logarithmique).

Catégorie conceptualisante 3 : un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate (pour la verbalisation autour de

l'expression exponentielle).

Catégorie conceptualisante 1 : un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate (pour la verbalisation autour de l'expression logarithmique).

Raisonnements sur des propriétés des exposants ou des logarithmes

Le jeu laisse également place à certains questionnements entourant les propriétés concernant les exposants ou les logarithmes. On voit dans l'extrait suivant la confusion base/puissance mentionnée plus haut : pour une même puissance (ici 729), on peut avoir deux expressions exponentielles différentes (ici une en base 3 et une en base 9)²⁹. En effet, les élèves sont arrivés à des confusions lors de leurs interactions lorsqu'ils avaient une même puissance.

Extrait 10 : expressions cibles : $3^6=729$ et $9^3=729$.

$$\log_3 y=6$$

P1 : [En regardant une carte log] 3 à la 6, donne...

F1 : [Elle calcule 3 à la 6] [Elle pointe le 729 sur son jeu].

P1 : *Qu'est-ce qu'on remarque ?*

F1 : *Il est là* [dans ses cartes, on voit].

P1 : *Est-ce que c'est 3 à la 6 ou c'est...*

[L'élève ne voit pas la différence, elle ne regarde que la puissance « 729 » qui est égale.].

Ici, l'élève F1 est invitée par l'enseignante à comparer l'expression exponentielle et logarithmique en base 3. Toutefois, de manière erronée, l'élève *compare* l'expression exponentielle (de base 3) à une expression logarithmique dans une autre base (base 9) dont l'exposant est le même nombre que la base à considérer (3). L'élève constate qu'elle a dans ses cartes une expression qui vaut 729 ($9^3=729$). Elle ne voit pas de différence entre les deux expressions (3^6 et 9^3 « il est là », dit-elle en pointant inadéquatement 9^3) puisque les deux sont associées à une puissance de 729, pourtant il ne s'agit pas de la même base. Ce n'est donc pas la même expression logarithmique. Bien que la réponse à ces expressions soit la même (729), les expressions demeurent différentes ; $\log_3 y=6$ ne correspond pas à $\log_9 y=3$. En d'autres termes, bien que le « y » soit le même, l'expression est différente.

Ce type de *comparaison* permet de provoquer le raisonnement de l'élève en l'invitant à *justifier* l'équivalence, à *valider* son choix de réponse. On peut penser que, à long terme, ce type de problèmes poussera possiblement l'élève à induire une règle concernant les propriétés à force de comparaisons et de justifications et d'exemplifications en cours de jeu.

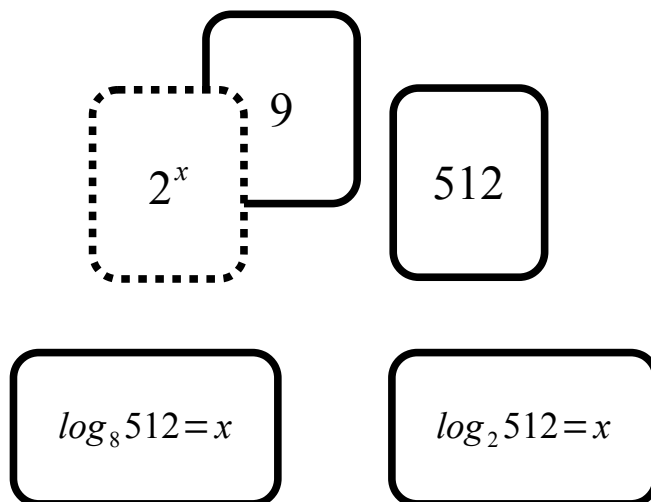
²⁹ Ce lien entre les bases est très important puisqu'il fait intervenir les propriétés des exposants. En effet, pour toute puissance de 9, il existe une puissance de 3 correspondante. Le jeu a d'ailleurs été construit pour faire ressortir cela (en mettant des bases 2, 4 et 8 ainsi que 3 et 9).

Dans cet extrait, l'élève est invitée à *comparer* les expressions, à *justifier* et à *valider* son choix. L'élève doit donc comparer deux expressions logarithmiques (ici non équivalentes) qui présentent le même résultat. Elle n'arrive pas à constater la non-équivalence des expressions 3^6 et 9^3 , pour la mise en relation avec l'expression logarithmique, bien que ces deux expressions aient la même puissance. La verbalisation associée à ce raisonnement est d'ailleurs absente. Son incompréhension par rapport à la non-équivalence de deux expressions a été manifestée par son pointage de l'expression 9^3 au lieu de 3^6 . En ce sens, cette verbalisation inadéquate (le 729 « il est là ») sous-tend un raisonnement inadéquat (considérer que les deux expressions sont égales). Ceci survient malgré le fait que l'enseignante ait proposé une verbalisation adéquate. C'est donc dire qu'une verbalisation adéquate de l'enseignante n'engendre pas directement le raisonnement adéquat de l'élève.

Catégorie conceptualisante 2 : un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate.

Ou encore :

Extrait 11 : expression cible : $2^9=512$, (confusion avec) $\log_8 512=x$, (carte log correcte)
 $\log_2 512=x$.



F3 : [dépose $2^9=512$].

F2 : *C'est moi qui ai ta carte de log, c'est 512 à la 8* [elle croit, à tort, que sa carte $\log_8 512=x$ correspond à l'expression exponentielle $2^9=512$].

[...]

F3 : *Hein, non c'est à la 9.*

F2 : [Elle montre sa carte] *c'est log de 8.*

F3 : [Il montre sa carte logarithme qui est en base 2 et qui correspond à son expression] *Je sais pas c'est quoi qui marche.*

F2 : *Log de 2.*

F3 : *Attends, (sur sa calculatrice) log de 512, divisé en log de 2, ça fait 9, ça marche.*

F2 : [Elle calcule] *Ah, c'est vrai, moi ça donne 3.*

F3 : *C'est moi qui ai la bonne carte pour le mien (base 2).*

Ces deux extraits qui sollicitent un raisonnement sur les propriétés montrent comment les élèves comparent en s'attardant à la puissance de l'expression exponentielle (ou à l'argument du logarithme) et elles cherchent à faire correspondre cet élément entre la forme exponentielle et logarithmique. Or ce n'est pas parce qu'une expression exponentielle a la même puissance que l'argument du logarithme qu'il s'agit de la même expression : il faut avoir la même base. Cette *comparaison* des deux objets se fait donc sur un élément qui, à lui seul, ne permet pas de déterminer l'équivalence des deux objets. Aux fins de *se justifier* et d'établir leur choix de cartes, on voit par la suite que les élèves *valident* leur réponse en reprenant la technique calculatoire qui leur a été enseignée. Sans pouvoir généraliser, bien que ces élèves aient reçu un enseignement explicite³⁰ des logarithmes en classe, ces deux empiries montrent qu'il reste encore beaucoup d'éléments à approfondir pour bâtir leur compréhension, leur conceptualisation de cet objet mathématique. En effet, bien que F3 initie la technique de calcul pour se valider, il affirme aussi précédemment « je sais pas c'est quoi qui marche », il ne peut pas mettre en mots ou en action un raisonnement faisant intervenir logiquement une même base dans ses deux expressions, car cette logique ne semble pas construite par ces deux élèves. F2 n'y parvient pas non plus bien qu'elle utilise aussi la technique calculatoire enseignée explicitement en classe. Ceci porte à croire, du moins dans le cadre spécifique des présentes empiries, qu'il demeure préférable de viser une verbalisation suivant des tâtonnements réfléchis et une explicitation par l'élève de l'avancée de sa pensée, et ce même si elle peut porter des méprises en cours de construction. En effet, la reprise d'une verbalisation de l'enseignante répétée par l'élève ($\log_2 512 = x$ c'est $\log 512 \div \log 2$) ne semble pas assurer la conceptualisation de l'enseignante dans la reprise par l'élève.

Les techniques calculatoires transmises ne suffisent pas aux élèves. En cours de jeu, les élèves procèdent à une *comparaison* de la forme exponentielle à deux expressions logarithmiques mettant à profit leurs raisonnements mathématiques en cours d'action réfléchie menant à une *validation* et une *justification* par la technique de calcul vue en classe et exécutée à la calculatrice. Toutefois, leur raisonnement demeure inadéquat dans la mesure où, aucunement, la calculatrice ne les amène sur le terrain nécessaire de comparer les bases. Bien plus, la technique de calcul les amène à penser que les logarithmes font fi de la comparaison des bases 2 et 8, et c'est précisément cet élément qui manque dans leurs verbalisations ($\log$ de 512 divisé par $\log$ de 2 — et l'autre exécute sans mot $\log 512 \div \log 8$) ; la base en soi n'apparaît plus dans cette verbalisation et c'est pourtant sur cette dernière que devrait reposer un raisonnement adéquat. On ne peut absolument pas présumer que l'utilisation de $\log 2$ ou de $\log 8$ dans la division implique une compréhension de la base dans ce contexte où les élèves précisément ne parviennent pas à identifier laquelle des deux expressions logarithmiques correspond à l'exponentiation de la base 2 dans les cartes exprimant l'exponentiation ($2^9 = 512$). En ce sens, bien que la technique de calcul enseignée en classe soit spontanément convoquée par les élèves, on voit comment non seulement un raisonnement inadéquat amène une verbalisation inadéquate, mais l'utilisation de la technique de calcul

³⁰ L'enseignement explicite n'est pas à confondre avec le concept d'explicitation. Il fait référence dans cet article à une stratégie pédagogique behaviorale qui consiste à étapiser une activité, à l'exécuter devant l'élève aux fins de *modélisation* en demandant par la suite à l'élève de s'y exercer sous la rétroaction de l'adulte, puis à l'exercer seul afin de viser une dite automatisation d'une procédure ou d'une stratégie en faisant l'inférence que si l'élève parvient à réutiliser la procédure ou la stratégie dans les exercices qui s'ensuivent, c'est que ce dernier a acquis la compréhension de la personne qui lui a exposée au préalable. Chaque apprentissage est fragmenté et pratiqué de manière isolée avant de s'intégrer à une activité complexe. Ceci rejoint le concept de *direct instruction* avancé par Engelmann (2006, notamment la section 2, p. 20-30) dans les années 1960.

encourage les élèves à apprendre des techniques calculatoires sans axer sur la recherche du sens donné à cette technique ou au résultat obtenu.

Catégorie conceptualisante 2 : un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate.

4. Discussion

D'entrée de jeu, il convient de rappeler que cette étude vise à circonscrire les raisonnements d'élèves en cours de jeu qui montrent une construction de connaissances entourant les logarithmes tout en renforçant le lien d'opération inverse entre logarithme et exposant. Dans cette optique, la description des raisonnements d'élèves et de leurs verbalisations en cours de jeu sera synthétisée et discutée afin de se prononcer sur la pertinence du jeu pour construire des connaissances relatives aux logarithmes.

4.1. Synthèse de la description des raisonnements d'élèves et de leurs verbalisations en cours de jeu (objectif 1)

Les analyses ont permis de classifier sept types de raisonnements d'élèves en cours de jeu :

1. confusion multiplication/exponentiation,
2. confusion base/puissance,
3. expression d'un logarithme,
4. questionnement sous la forme logarithmique,
5. utilisation d'une technique calculatoire,
6. comparaison entre expressions exponentielles et logarithmiques,
7. raisonnements sur des propriétés.

Dans un second niveau d'analyse, ces raisonnements *in vivo* se sont contextualisés par des manifestations d'aspects processuels (Jeannotte, 2015) et de verbalisations considérées comme très importantes pour Bednarz et al. (1995). Ce deuxième niveau d'analyse a offert un regroupement des premières classifications en catégories conceptualisantes. Le tableau 1 qui suit permet de synthétiser les analyses.

Classifications 1 ^{er} niveau d'analyse		Aspects processuels 2 ^e niveau d'analyse Jeannotte (2015)	Catégories conceptualisantes (CC) 2 ^e niveau d'analyse
Exponentiation	Confusion multiplication/exponentiation (Extrait [E] ; E1, E2)	Justification	CC1. Un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate.
	Confusion base/exposant (E3)	Justification	CC2. Un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate.
Logarithme	Expression d'un logarithme (E4, E5)	Justification Comparaison Généralisation	CC1. Un raisonnement adéquat une verbalisation inadéquate. CC3. Un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate.
	Questionnement sous la forme logarithmique (E6)	Comparaison Exemplification Justification	CC1. Un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate. CC2. Un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate.
	Utilisation d'une technique calculatoire (E7)	Validation Justification	CC3. Un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate.
	Comparaison entre expressions exponentielles et logarithmiques (E8, E9)	Identification d'une régularité Généralisation Validation Comparaison Justification	CC1. Un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate. CC3. Un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate.
	Raisonnements sur des propriétés des exposants et des logarithmes (E10, E11)	Comparaison Validation Justification	CC2. Un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate. CC3. Un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate.

Tableau 1 : Synthèse des raisonnements d'élèves.

Les catégories conceptualisantes permettent de mettre en lumière un engrenage dynamique entre raisonnement et verbalisation. Chaque extrait a effectivement été analysé sous deux angles : 1- un raisonnement adéquat ou non et 2- une verbalisation adéquate ou non. À des fins de clarté, le tableau 2 montre les possibilités théoriques pour ce croisement ainsi que les catégories conceptualisantes qui ont été induites à partir des données de cet article.

Raisonnement Verbalisation	ADÉQUAT	INADÉQUAT
ADÉQUATE	CC3	∅
INADÉQUATE	CC1	CC2

Tableau 2 : Présence du raisonnement adéquat et de la verbalisation adéquate.

Le tableau 2 met en relief les quatre cas de figure logiquement possibles par un tel croisement. On retrouve à l'intérieur du tableau les trois catégories conceptualisantes (CC1, CC2 et CC3).

On note l'absence de catégorie conceptualisante pour un raisonnement inadéquat et une verbalisation adéquate. Au contraire, chaque fois que la verbalisation est adéquate, le raisonnement est nécessairement adéquat (1^{re} ligne du tableau), bien que l'inverse ne soit pas toujours le cas, c'est-à-dire qu'un raisonnement adéquat ne mène pas nécessairement à une verbalisation adéquate (1^{re} colonne du tableau, voir notamment CC1). Ces trois catégories et l'absence d'une catégorie 4 « un raisonnement inadéquat et une verbalisation adéquate » permettent d'émettre l'hypothèse suivante : le raisonnement adéquat précède la verbalisation adéquate. On débute ainsi par un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate (CC2). Puis la structuration progressive permet l'avancée d'un des deux pans, la seule option possible dans les présentes empiries étant un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate (CC1) en situation de déséquilibre cognitif. Enfin, l'on progresse avec un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate (CC3).

Ceci est en concordance avec la verbalisation vue comme l'aboutissement d'un processus de réflexion sur ses actions (et sur son propre raisonnement). En l'absence d'occurrence de verbalisation adéquate en présence de raisonnement inadéquat, mais plutôt la présence de l'inverse, c'est-à-dire une verbalisation inadéquate avec un raisonnement adéquat (CC1), à l'instar des travaux de Piaget (1974) concernant la prise de conscience, il est possible de mettre en exergue qu'il y a un décalage entre la verbalisation et le raisonnement, celui-ci montrant une avancée importante avant la réalisation de celle-là. En ce sens, les empiries de la présente étude semblent montrer que la verbalisation adéquate se manifeste si l'élève a un raisonnement adéquat (CC3).

Ceci étant dit, on aurait pu s'attendre à ce que les élèves puissent répéter les paroles de l'enseignant, ayant ainsi un discours qui se tient malgré un raisonnement inadéquat. C'est loin d'être le cas. D'une part, une telle répétition n'est pas considérée comme une *verbalisation* au sens de Vermesch (2004), mais bien comme une répétition sans réflexion en profondeur. D'autre part, les empiries de l'étude montrent que, même lorsque l'enseignante verbalisait adéquatement en cours d'interaction dans le jeu, les élèves manifestaient des raisonnements qui demeuraient inadéquats (cf. extraits 6, 10, 11). L'extrait 11 montre, de surcroît, que, même si spontanément les élèves réussissent à réutiliser des techniques de calcul reprises de l'enseignement explicite en classe, certes avec une verbalisation boiteuse (« log de 512 divisé par log de 2 »), les élèves ne comprenaient pas que la base entre l'expression exponentielle et celle logarithmique devaient être les mêmes : « Je sais pas c'est quoi qui marche », affirmait l'un d'eux ; c'est la réponse de la calculatrice (argument d'autorité) qui fait foi en quelque sorte pour les valider. L'utilisation de la technique de calcul les a même encouragés à ne pas convoquer, dans leurs verbalisations, de discussion portant sur la comparaison entre les bases dans les expressions logarithmiques en fonction de la base visible dans l'expression exponentielle. Cette absence d'empiries dans la catégorie verbalisation adéquate et raisonnement inadéquat peut soutenir l'hypothèse que l'enseignement explicite partant d'une verbalisation de l'enseignante (de techniques de calcul, de procédures, de stratégies, desdites stratégies métacognitives) vers une répétition de cette verbalisation par l'élève, ou de l'emploi d'une technique de calcul, ne fait pas nécessairement suivre l'évolution d'un raisonnement de l'élève vers le raisonnement mature de l'enseignante. Autrement dit, la verbalisation adéquate de l'enseignante ne donne en rien un raisonnement adéquat à l'élève. Toutefois, au mieux, comme on a pu l'observer par exemple dans l'extrait 6, cela provoque l'élève à retourner sur les chemins de son propre raisonnement de toute manière. Aussi bien, dès lors, partir de ce raisonnement de l'élève dans les *designs* didactiques et pédagogiques. Ainsi, les empiries de la présente étude permettent de mettre en exergue qu'il ne suffit pas que l'élève soit exposé à une verbalisation correcte de la part de l'enseignant.e lors de

ses enseignements pour déployer un raisonnement adéquat, ni même pour utiliser une verbalisation adéquate de manière autonome.

La catégorie conceptualisante 1, un raisonnement adéquat et une verbalisation inadéquate, a été observée dans plusieurs extraits (1, 2, 4, 6 et 9). À l'instar de Piaget (1976) qui indique qu'un avancement de la pensée est nécessaire pour l'élaboration du langage, les empiries de cette catégorie conceptualisante mettent en lumière non seulement l'importance capitale du raisonnement pour sous-tendre une verbalisation comme prise de conscience de l'action réfléchie, mais encore, en prolongation des travaux de Bednarz et al. (1995) qui insistent sur la verbalisation en classe de mathématique, elles indiquent que l'enseignant ne doit pas se satisfaire de la manifestation d'un raisonnement adéquat. Il faut se soucier également de la verbalisation en soi dans la construction de connaissances. En effet, lorsque les empiries de la présente étude sont éclairées des travaux de Piaget (1976) et de ceux de Bednarz et al. (1995), située dans ce contexte de jeu sur les logarithmes, une verbalisation adéquate semble suivre une seconde étape dans la construction de la connaissance mathématique offrant dès lors une nouvelle possibilité à l'élève, celle de convoquer adéquatement, par l'intermédiaire d'un langage mathématique approprié, son raisonnement. Cette catégorie conceptualisante 1 fait ressortir que, même si les élèves sont parfois capables de manipuler les logarithmes, manifestant alors une avancée du raisonnement mathématique, cela ne veut pas dire pour autant que les élèves seront capables de le verbaliser adéquatement. Cette première catégorie conceptualisante invite également à nuancer ce qu'un enseignant peut dire sur la compréhension d'un concept chez l'élève. En effet, si l'on considère sérieusement les implications pédagogiques de la catégorie conceptualisante 1, alors on admet qu'il est impossible de se prononcer sur la compréhension de l'élève simplement sur la base de ce qu'il dit ou de ce qu'il verbalise sur le concept, car on risque alors d'occulter nombre de raisonnements adéquats que l'élève manipule, et ce, sans pour autant les verbaliser adéquatement.

La catégorie conceptualisante 2, un raisonnement inadéquat et une verbalisation inadéquate, a été observée dans plusieurs extraits (3, 6, 10 et 11). Les empiries suggèrent ici que, pour les élèves observés dans le contexte situé de ce jeu exploitant les exposants et les logarithmes, les relances de l'enseignante n'ont pas eu d'effet dans la rectification des raisonnements des élèves. Dès lors, il est possible de penser qu'il faut miser sur le soutien au raisonnement de l'élève afin qu'il puisse y avoir une avancée qui tirera ultérieurement la verbalisation de l'élève dans son action réfléchie. Évidemment, cela n'empêche pas pour autant l'enseignant de verbaliser adéquatement, mais on a pu discuter, au tout début de cette discussion, les limites de cette verbalisation de l'enseignant pour promouvoir les avancées du raisonnement de l'élève. Les questions ouvertes de l'enseignant demeurent un chemin qui provoque l'élève en lui faisant prendre le chemin de son propre raisonnement. En ce sens, la verbalisation est conçue comme un outil de soutien pour l'enseignant qui doit pousser l'apprenant à retourner au raisonnement en action afin de le provoquer.

La catégorie conceptualisante 3, un raisonnement adéquat et une verbalisation adéquate, a été observée dans plusieurs extraits (5, 7, 8 et 9). Cette catégorie met encore une fois en lumière l'importance de la verbalisation dans l'usage des connaissances entourant les logarithmes. Elle fait ressortir que les élèves sont capables de verbaliser adéquatement si un raisonnement mathématique adéquat est suffisamment avancé. La verbalisation semble être un second niveau de maîtrise du concept qui pourrait montrer une maîtrise accrue de l'objet comme l'affirme Piaget (1974). De surcroît, dans la tradition des travaux de Vygotsky (1997)³¹, il est possible de

³¹ Cette référence est une réédition du texte de Vygotsky paru en 1934, année de son décès.

penser que cette avancée de la verbalisation, du langage mathématique, assure un terreau fertile pour promouvoir la complexification même de nouveaux raisonnements plus complexes. À titre d'illustration, l'extrait 7, notamment, montre comment l'élève arrive à appréhender une technique de calcul complexe et avancée qu'il ne maîtrise pas encore, c'est-à-dire « $\log 512$ divisé par $\log 8$, ça donne 3 ». L'élève, questionné par son enseignante sur la signification du résultat 3 (« ça veut dire quoi, ça donne 3 ? »), n'arrive pas d'emblée à répondre. L'élève part d'une verbalisation adéquate assise sur son propre raisonnement adéquat (« c'est 8 à la 3 ? 8 à la 3 égale 512 »), et ce au regard des exposants pour créer un pont vers le nouvel apprentissage complexe que représente l'entrée des logarithmes. C'est en effet par la suite et avec le soutien de l'enseignante qui rehausse cette verbalisation de l'élève par l'exposant (« il faudrait que tu aies quelle carte mauve ($base^x$) pour aller avec ton $\log 8$, 512 ») en le poussant vers un lien avec l'expression logarithmique que l'élève comprend qu'il doit rechercher une carte logarithme avec une base 8 pour avoir une combinaison de cartes mettant en relation les expressions exponentielle ($8^3=512$) et logarithmique ($\log_8 512=x$). En ce sens, en favorisant la verbalisation, le jeu pourrait favoriser également la complexification de connaissances, ici, de l'expression exponentielle à la construction d'un lien avec l'expression logarithmique.

4.2. Un engrenage dynamique entre raisonnement et verbalisation

À l'instar de Bednarz et al. (1995), l'analyse entourant les catégories conceptualisantes permet de mettre en relief qu'un travail sur la verbalisation demeure nécessaire même quand les élèves produisent des raisonnements mathématiques adéquats dans des activités silencieuses en classe par exemple. La simple manipulation de l'objet mathématique explicité par l'enseignante en reprenant la verbalisation de l'enseignante (par exemple ici le calcul de logarithme à l'aide de la calculatrice) ne garantit en rien une compréhension en profondeur du concept. En ce sens, la verbalisation de l'élève semble tributaire de sa compréhension du concept et, de surcroît, une compréhension ne peut être considérée comme aboutie sans verbalisation adéquate. Ceci est en concordance avec la verbalisation au sens de Piaget (1974), vue comme l'aboutissement d'un processus réflexif autour des actions (ou raisonnements) du sujet réfléchissant. Il est donc logique, avec cette vision de la verbalisation, que celle-ci apparaisse à la suite d'un raisonnement adéquat. À partir des empiries de la présente étude et des catégories conceptualisantes induites, il est possible d'émettre l'hypothèse d'une ligne développementale d'un système ouvert (Piaget, 1968) à partir d'un engrenage dynamique spiralaire mettant en exergue les raisonnements et les verbalisations dans la construction de concepts mathématiques. La figure 6 permet de synthétiser cette conceptualisation.



Figure 6 : *Engrenage dynamique entre raisonnements et verbalisations.*

La figure 6 doit être comprise comme un système ouvert par le bas et par le haut au sens du structuralisme piagétien (Piaget, 1968). Bien que les empiries ici ne soient pas longitudinales et ne permettent ainsi pas de statuer une ligne développementale sur la base empirique, elles peuvent être discutées sous les angles logique et théorique. Dès lors, des expérimentations ultérieures demeurent nécessaires pour valider empiriquement la présente discussion. Les apprentissages en cours se bâtissent sur la base des constructions déjà élaborées. Dans la construction d'un concept mathématique, les empiries de la présente étude semblent montrer un mouvement partant de raisonnements et de verbalisation tous deux inadéquats (CC2). Sous l'angle logique, l'absence de la catégorie verbalisation adéquate et raisonnement inadéquat semble indiquer que le raisonnement adéquat doit avoir primauté. Ainsi, l'arrivée de nouvelles connaissances, concernant les logarithmes notamment, provoque un déséquilibre cognitif dans le jeu plaçant les élèves dans une recherche de sens qui semble montrer dans un premier temps une

avancée du raisonnement qui met en exergue la catégorie conceptualisante raisonnement adéquat et verbalisation inadéquate (CC1). C'est par la suite que l'avancée de la verbalisation permet de mettre en exergue la catégorie raisonnement et verbalisation tous deux adéquats. Ceci semble mener à une structuration stabilisée qui permet le rééquilibre cognitif et une ouverture de la structuration vers la construction et la complexification du savoir mathématique.

4.3. Pertinence du jeu sous l'angle de la didactique des mathématiques

Le contexte de jeu a permis :

1. de faire travailler le lien entre exposant et logarithmes aux élèves, leur permettant donc d'approfondir leur compréhension du concept de logarithme,
2. de donner l'espace aux raisonnements spontanés des élèves, ce qui leur a même permis de les complexifier
3. de pousser la réflexion sur l'action pour travailler la verbalisation en lien avec le raisonnement déployé.

Le jeu a permis aux élèves d'élaborer des raisonnements personnels et de les complexifier tout en travaillant la verbalisation (et donc la réflexion sur l'action pour y arriver). En effet, différents aspects processuels des raisonnements des élèves, comme définis par Jeannotte (2015), se sont manifestés en contexte situé de jeu. On retrouve des manifestations d'identification d'une régularité, de généralisation, de validation, de comparaison, de justification et d'exemplification. En ce sens, au-delà même de l'apprentissage du concept de logarithme qui était l'objet d'apprentissage mathématique cible, le jeu a permis de stimuler les raisonnements mathématiques. Ce jeu mathématique semble être un contexte permettant un aspect important du raisonnement mathématique (Jeannotte, 2015). Dans cette optique, il pourrait être pertinent d'intégrer l'exploitation d'un tel jeu de société dans des situations d'enseignement-apprentissage en classe de mathématique. Cela exige certes du temps, mais cela implique de permettre des raisonnements et des verbalisations momentanément inadéquats afin d'en favoriser l'élaboration et la complexification en profondeur. Le jeu permet à la fois de travailler la résolution d'équations et de manipuler ces équations. Les analyses montrent la résolution d'équations à la fois exponentielles et logarithmiques. Par exemple, dans l'extrait 10, le simple fait de trouver la « valeur » de la carte logarithmique correspond à une résolution d'équation. En effet, l'élève qui a la carte $\log_3 y = 6$ et qui trouve que l'argument est 729 a résolu cette équation logarithmique. La manipulation d'équations intervient elle aussi. Avec le même exemple, on a vu que cette élève a cherché à transformer la forme logarithmique en forme exponentielle, essayant ainsi de faire certaines manipulations sur la forme. Bien qu'elle n'ait pas réussi à faire cette transformation, on voit que le jeu amène ce travail chez les élèves. Dans un tel contexte, l'économie de temps pour penser accélérer les apprentissages est définitivement à proscrire et elle est incompatible avec l'objectif de provoquer plus largement les raisonnements des élèves et de miser sur leurs propres verbalisations.

La figure 6 met en relief les deux piliers de la construction et de complexification de concepts mathématiques, raisonnement et verbalisation. Théoriquement, et demeurant à valider par de futures expérimentations, ceci présente potentiellement une pertinence didactico-pédagogique puisque ces deux piliers concordent également avec les éléments qui interagissent dans une séquence d'apprentissage selon Brousseau (2011) : action, formulation, validation, institutionnalisation (le jeu permettant les phases d'action, de formulation et de validation). Ici,

le raisonnement mathématique s'apparente à ce que Brousseau appelle la phase³² d'action. En effet, le raisonnement mathématique pris au sens de Jeannotte (2015) amène à analyser les productions d'élèves en soulevant les manifestations du raisonnement mathématique, ce qui correspond à ce qu'elle nomme l'aspect processuel. Ces manifestations du raisonnement mathématique correspondent à ce que Brousseau nomme « action ». Ici, les verbalisations des élèves sont comprises comme la mise en mots de l'élève d'énoncés en lien avec un concept donné. Cette verbalisation doit être comprise au sens de Piaget (1974) et qui provient donc d'une réflexion de l'élève sur ses propres actions qui mènent à la verbalisation au sens de Vermesch (2004). Cette manière de verbaliser correspond à ce que Brousseau appelle la phase de formulation. Dans les deux cas, on s'intéresse à un élève qui met en mots, par lui-même, sa compréhension des actions posées par rapport à un concept donné. L'analyse des extraits permet donc de faire ressortir ces deux phases d'une situation didactique provoquant les apprentissages. Il est à noter que la phase de validation de Brousseau sera parfois incluse dans ce qui est appelé « verbalisation » dans cet article en ce sens que la verbalisation au sens de Piaget inclut tout autant les verbalisations d'actions (ce que Brousseau nomme la formulation) et la verbalisation de validation (ici les éléments de validation selon Jeannotte). La phase d'institutionnalisation n'est pas intrinsèque au jeu et ne sera donc pas discutée.

Conclusion

Cet article a permis de mettre en relief différents raisonnements d'élève situés en contexte de jeu de société spécifiquement conçu par l'enseignante-chercheuse aux fins des apprentissages liés aux logarithmes. Le jeu a permis aux élèves de raisonner sur le lien d'opération inverse entre logarithme et exposant, lien qui est crucial dans la compréhension des logarithmes.

Dans un tel contexte de jeu ouvert aux raisonnements des élèves, un engrenage dynamique entre raisonnements et verbalisations a pu être observé. Prenant appui sur les travaux de Jeannotte (2015), les aspects processuels du raisonnement des élèves se sont contextualisés en cours de jeu permettant d'observer des justifications, des comparaisons, des exemplifications, des validations, des identifications de régularités et des généralisations. Ces raisonnements ont été accompagnés de verbalisations. Trois catégories conceptualisantes semblent indiquer un sens développemental à cet engrenage entre raisonnements et verbalisations :

1. raisonnement et verbalisation inadéquats (CC2),
2. raisonnement adéquat et verbalisation inadéquate (CC1),
3. raisonnement et verbalisation adéquats (CC3).

Ainsi, une avancée du raisonnement semble prendre le pas sur la verbalisation et l'avancée de cette dernière semble nécessaire pour une compréhension accomplie.

La pertinence d'un tel jeu mathématique a été discutée étant donné qu'il a permis aux élèves d'élaborer des liens inverses entre les expressions exponentielles et les expressions logarithmiques, travaillant ainsi le concept mathématique des logarithmes. De plus, ce jeu a provoqué divers raisonnements nécessaires à la complexification de la pensée mathématique selon Squalli (2021) d'une part, et d'autre part, il a raffiné la verbalisation mathématique jugée essentielle par Bednarz et al. (1995). Ainsi, la présente étude contribue tant à la classe de mathématique, en proposant un tel dispositif exploitant le jeu de société au service de

³² Brousseau (2005) fait également référence à des « situations » d'action (ou de formulation) lorsque la tâche entière est tournée vers un seul de ces éléments. Il parle de « phase » lorsque plus d'un élément intervient dans une même tâche.

l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, qu'à la recherche en didactique des mathématiques en mettant en exergue des raisonnements d'élèves en cours de jeu et une théorisation ancrée sur des empiries situées et non généralisables qui demeurent à être validées par des expérimentations ultérieures. Dans cette avenue prospective, la présente étude propose enfin une méthodologie originale utilisant un *design* d'analyse qualitative ajustée à partir de réelles situations d'enseignement-apprentissage et traçant son chemin en fonction des besoins des participants et non en fonction de perspectives méthodologiques prédéterminées à l'action pédagogique et souvent empruntées à d'autres champs d'études.

Références bibliographiques

Alloprof (2024, août 12). Allo prof aide aux devoirs.

<https://www.alloprof.qc.ca/>

Bednarz, N., Gattuso, L. & Mary, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin AMQ*, 35(1), 17-30.

<https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/bulletin/archives/1995-1-part5.pdf>

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, E., Ricard, N. & Roy, V. (2009). Visions (cinquième secondaire, TS, guide en un coup d'œil 4). Éditions CEC.

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, E., Pomerleau, F. & Roy, V. (2010a). *Visions* (cinquième secondaire, SN, manuel de l'élève 1). Éditions CEC.

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, E., Pomerleau, F. & Roy, V. (2010b). *Visions* (cinquième secondaire, TS, manuel de l'élève 1). Éditions CEC.

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, E., Pomerleau, F. & Roy, V. (2010c). *Visions* (cinquième secondaire, SN, guide en un coup d'œil 3). Éditions CEC.

Boivin, D., Cadieux, R., Boivin, C., Ledoux, A., Meyer, E., Paul, D., Ricard, N. & Roy, V. (2016). *Visions* (cinquième secondaire, CST, manuel de l'élève 3). Éditions CEC.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.

<http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>

Brousseau, G. (2005). Recherches en éducation mathématique. *Bulletin de l'APMEP*, 457, 213-224.

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et Didactique*, 5(1), 101-104.

<https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1005>

Chua, B. L. & Wood, E. (2005). Working with Logarithms: Students' Misconceptions and Errors. *The Mathematics Educator*, 8(2), 53-70.

<https://repository.nie.edu.sg/entities/publication/d1a9ce55-afd3-4140-90ac-8733ced56610/details>

- Corriveau, C. & Bednarz, N. (2013). Manières de faire des mathématiques comme enseignants : une perspective ethnométhodologique. *For the Learning of Mathematics*, 33(2), 24-30.
- Deblois, L. (2011). *Enseigner les mathématiques. Des intentions à préciser pour planifier, guider et interpréter*. Presses de l'Université Laval.
- Engelmann, S. (2006). *Rubric for Identifying Authentic Direct Instruction Programs*.
<https://zigsite.com/trainingvideos/PDFs/rubric.pdf>
- Euler, L. (1796). *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Volume 1. Chez Barrois. Repéré à :
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3884z.texteImage>
- Grize, J.-B. (1990). *Logique et langage*. Ophrys.
- Henriques, G. (2004). La signification et les raisons. Une démarche de définition informelle. Dans G. Henriques, S. Dionnet & J.-J. Ducret (dir.), *La formation des raisons* (p. 113-153). Pierre Mardaga éditeur.
- Jeannotte, D. (2015). *Proposition d'un modèle de raisonnement mathématique pour l'apprentissage au primaire et au secondaire dans une perspective commognitive*. [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal].
- Kurniawan, S. & Suhendra, S. (2022). Difficulties of Pre-Service Mathematics Teacher Students in Determining the BASE and Numerus of Logarithmic Materials. *EDUMATICA | Journal Pendidikan Matematika*, 12(02), 195-201.
<https://doi.org/10.22437/edumatica.v12i02.17778>
- Lapadat, J. C. (2000). Problematizing transcription: Purpose, paradigme et quality. *International Journal of Social Research Methodology*, 3(3), 203-219.
- Lomonte, S. (2020). À propos de l'histoire et l'enseignement des logarithmes et des exponentielles. [Mémoire de maîtrise, Université de Liège].
<http://hdl.handle.net/2268.2/12678>
- Makdissi, E. & Corriveau, C. (2017). Un jeu de carte logarithmique. *Envol*, 169, 28-31.
- Netmath (2024, août 12). *Apprendre les mathématiques en ligne en s'amusant*.
<https://netmath.ca/fr/>
- Nguyen, T. N. H. (2021). *La fonction logarithmique dans les manuels scolaires québécois de 3^e année du 2^e cycle du secondaire : une analyse praxéologique*. [Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke].
https://savoirs.usherbrooke.ca/bitstream/handle/11143/18876/nguyen_thi-ngoc-huong_MA_2021.pdf?sequence=4&isAllowed=y
- Piaget, J. (1968). *Le structuralisme*. Presses universitaires de France.
- Piaget, J. (1974). *La prise de conscience*. Presses universitaires de France.
- Piaget, J. (1976). *Le langage et la pensée chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé éditeurs.

- Paillé, P. & Mucchielli, A. (2021). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales*. Armand Colin.
- Squalli, H. (2021). La généralisation algébrique : un processus mathématique peu développé chez les élèves à la fin de l'école secondaire. *ITM Web Of Conferences*, 39, 1-11.
<https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901002>
- Trompler, S. (2002). L'histoire des logarithmes. *Les Cahiers du CeDoP*. Université Libre de Bruxelles.
<http://tomlr.free.fr/Math%E9matiques/Fichiers%20Claude/AwebMaths050601/LibreCours/HistoireLogarithmes.pdf>
- Veneziano, E. (1999). L'acquisition de connaissances pragmatiques : Apprendre à expliquer. *Revue Parole*, 9-10, 1-27.
- Veneziano, E. (2008). Émergence des explications dans l'interaction naturelle mère-enfant : méthodes d'analyse et un modèle d'acquisition basé sur les situations conflictuelles. Dans C. Hudelot, A. S. Orvig & E. Veneziano (dir.), *L'explication. Enjeux cognitifs et interactionnels* (p. 151-172). Peeters.
- Vermersch, P. (2004). Aide à l'explicitation et retour réflexif. *Éducation Permanente*, 160, 71-80.
https://www.expliciter.org/wp-content/uploads/2022/05/aide_a_l_explicitation_et_retour_reflexif_pierre-vermersch.pdf
- Vygotsky, L. (1997). *Pensée et langage* (trad. F. Sève). La Dispute.
- Yin, R. K. (1994). *Case study research: Design and methods*. SAGE Publications.
- Ministère de l'Enseignement et de l'Éducation supérieure (MEES) (2016). *Progression des apprentissages au secondaire : mathématiques*. Gouvernement du Québec.
<https://cdn-contenu.quebec.ca/cdn-contenu/education/pfeq/secondaire/progressions-apprentissages/PFEQ-progression-apprentissages-mathematique-secondaire.pdf>
- Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (MELS) (2007). *Programme de formation de l'école québécoise [PFEQ]*. Enseignement secondaire 2^e cycle. Gouvernement du Québec.

Annexe A - Règles du jeu (version élève)

Nombre de joueurs :

de deux à quatre joueurs

Durée :

environ 30-40 minutes

But du jeu

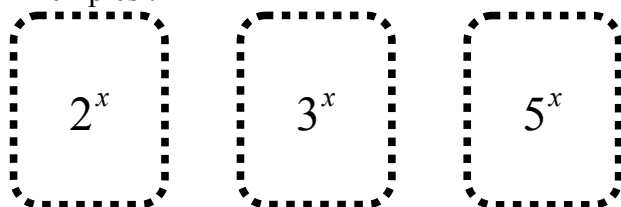
Il faut faire correspondre des cartes (exponentielles, nombres et logarithmiques) pour accumuler des points. Le gagnant est celui qui a totalisé le plus de points. Les points se comptent à la fin du jeu.

Composition du jeu

Répartition des cartes :

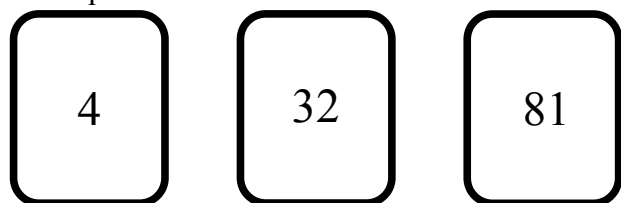
- Cartes « exponentielles » (base 2 à 9)

Exemples :



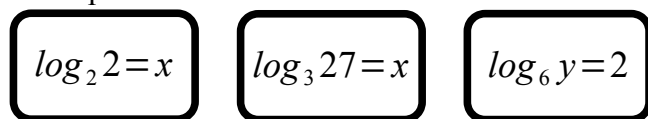
- Cartes « nombres » (1 à 729, seulement les nombres qui sont des puissances de 2 à 9)

Exemples :



- Cartes « logarithmiques »

Exemples :

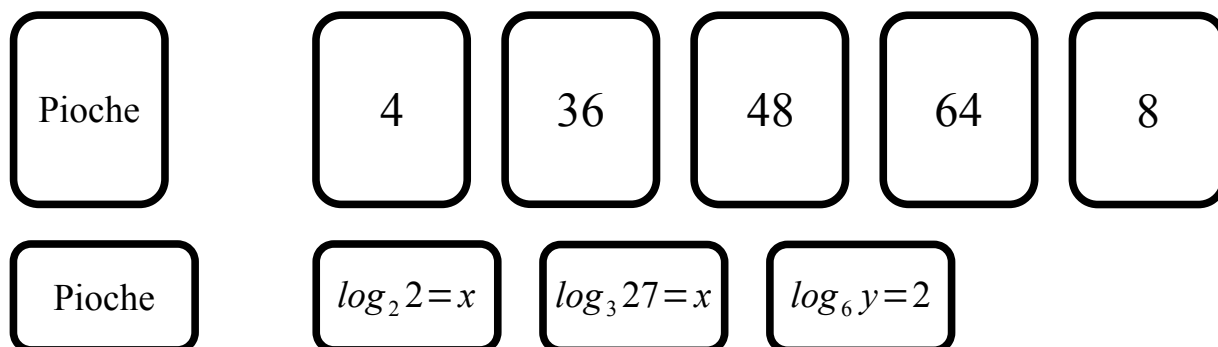


Mise en place du jeu

Lorsque les trois paquets de cartes (exponentielles, nombres et logarithmiques) sont bien brassés, chaque joueur prend trois cartes de chaque paquet (pour un total de neuf cartes qu'il garde en main).

Faire des piles faces cachées avec le reste de chaque paquet. On place 5 cartes nombres et 3 cartes logarithmes faces visibles au centre du jeu (tous les joueurs ont accès à ces cartes).

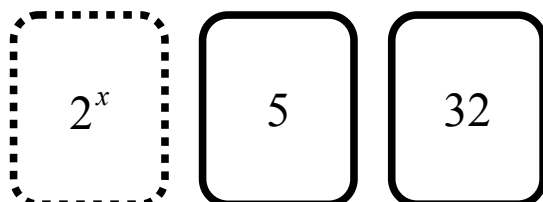
Le plus jeune joueur commence.



Déroulement du jeu

Premier tour

Le but d'un tour est de combiner une carte exponentielle et deux cartes nombres. La combinaison est faite de manière à ce qu'une des deux cartes nombres représente la valeur donnée à l'exposant x de la carte exponentielle et l'autre à la valeur correspondante à la puissance qui en résulte. Par exemple, un joueur peut faire la combinaison $2^5=32$ avec les cartes suivantes :



S'il est impossible pour le joueur de faire une combinaison, il peut piger :

- deux cartes nombres,
- OU deux cartes logarithme,
- OU trois cartes exponentielles.

Il ne peut effectuer de mélange. Les autres joueurs poursuivent de la même manière.

Lors de la pige de cartes nombres ou de cartes logarithmiques, un joueur peut prendre des cartes de la pioche (faces cachées) ou des cartes ouvertes (faces visibles). Aussitôt qu'un joueur prend une carte ouverte, celle-ci doit être remplacée par une carte de la pioche (la première carte sur le paquet faces cachées).

- ➡ Lorsqu'un joueur fait une combinaison, les autres joueurs s'assurent de valider la proposition de combinaison de celui-ci. Un joueur qui détecte une erreur fait automatiquement un point (et l'autre joueur doit évidemment éliminer sa combinaison et perdre son tour). Si la combinaison est acceptée, le joueur la place devant lui et il gagne des points (voir la section « points »).

Deuxième tour et les suivants

À partir du deuxième tour, chaque joueur a la possibilité de faire les actions suivantes :

- faire une nouvelle combinaison (exponentielle, nombre, nombre),
- OU piger des cartes (voir « premier tour »),

- OU ajouter une carte logarithmique sur une combinaison déjà faite.

Le joueur ne peut cumuler les actions, une seule des trois actions lui est permise. S'il décide d'ajouter une carte logarithmique sur une combinaison déjà faite, celle-ci doit évidemment correspondre à l'expression proposée. Dans l'exemple précédent, un joueur pourrait ajouter l'une des deux cartes suivantes à la combinaison $2^5=32$.

$\log_2 32 = x$

$\log_2 y = 5$

- ➡ L'ajout d'une carte logarithme permettra au joueur de doubler les points accumulés pour la combinaison. De plus, lors d'un tour suivant, il peut ajouter une autre carte logarithmique à la combinaison, ce qui lui permet de quadrupler les points accumulés pour la combinaison. Il devient donc stratégique d'utiliser les cartes logarithmiques aux fins de gagner la partie.

Fin du jeu

Le jeu se termine **lorsque la pile des cartes nombres est terminée**. Lorsqu'un joueur pige la dernière carte du paquet, tous les joueurs complètent un dernier tour.

Points

Les joueurs comptent leurs points selon la grille ci-dessous. Par exemple, pour la combinaison effectuée précédemment, $2^5=32$, le joueur accumule 3 points. S'il a ajouté une carte logarithme à sa combinaison, il double ses points et obtient 6 points. En utilisant cette grille, les joueurs peuvent par ailleurs valider leurs combinaisons. La colonne *exposant* indique la valeur de la carte nombre utilisée comme exposant et les colonnes *base* permet de voir quelles était la carte exponentielle utilisée. Toute combinaison fautive doit être éliminée du calcul.

Pointage du jeu des logarithmes

Base Exposant	2^x	3^x	4^x	5^x	6^x	7^x	8^x	9^x
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	3	4
3	2	2	3	3	4	4	6	6
4	2	3	4	4				
5	3	4						
6	3	5						
7	4							
8	5							
9	5							

De plus, chaque carte logarithme placée sur une combinaison double les points (avec l'expression $2^5=32$, on aurait 2×3 points), ce qui encourage les joueurs à piocher des cartes bleues/logarithmes et à chercher à les disposer sur la table.