
PAVAGES PENTAGONAUX CONVEXES AVEC LE CORPS

Stéphane VINATIER¹
Irem et Université de Limoges

*Ce texte est également consultable
en ligne sur le portail des Irem,
onglet : Repères IREM
<http://www.univ-irem.fr/>*

L'activité pour les scolaires que l'on va décrire a vu le jour en 2018, à l'occasion du centenaire de la première étude mathématique des pentagones convexes qui pavent le plan : le mathématicien allemand Karl Reinhardt, dans sa thèse en 1918, en avait déterminé cinq types. Elle permet d'évoquer les nombreuses surprises et les rebondissements qui ont émaillé la recherche de tous les types possibles, au cours des cent années suivantes, jusqu'à la découverte d'un quinzième type en 2015 et l'annonce fin 2017 par le mathématicien lyonnais Michaël Rao de la preuve de la complétude de la liste obtenue, preuve qui se révélera correcte contrairement aux tentatives précédentes.

L'activité met aussi les participants en action en leur offrant la possibilité de réaliser des pavages pentagonaux de deux types « à taille humaine », en manipulant de grandes pièces découpées dans un matériau de revêtement de

sol en vinyle ; enfin, on utilise les pavages ainsi construits pour paver « avec le corps » en plaçant les deux pieds, les deux mains et la tête aux cinq sommets des pentagones.

L'étude mathématique des pavages pentagonaux convexes

Quels polygones pavent le plan ?

Précisons tout d'abord que nous considérons ici des pavages du plan obtenus avec des copies d'une seule forme, qui sont toutes de la même taille et que l'on s'autorise à retourner ; nous supposons que la forme est polygonale et nous nous restreindrons rapidement au cas où elle est convexe.

¹ Irem de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges cedex - stephane.vinatier@unilim.fr

PAVAGES PENTAGONAUX
CONVEXES AVEC LE CORPS



Fête de la Science 2018 à Limoges, sur le parvis de l'ENSIL-ENSCI

Avant cela, rappelons que tous les triangles et tous les quadrilatères pavent le plan (y compris les quadrilatères concaves, voir Fig. 1). On sait depuis l'Antiquité que les seuls polygones réguliers convexes pavant le plan sont le triangle, le carré et l'hexagone. Reinhardt a établi dans sa thèse qu'il existe trois types d'hexagones convexes pavant le plan. Enfin on sait qu'aucun polygone convexe à strictement plus de six côtés ne le pave (voir les références citées en fin d'article, notamment Delahaye 2013 et Rao 2018).

Pour ce qui est des polygones convexes, il ne reste donc à régler que le cas des pentagones.

Une histoire d'un siècle

Pour les pentagones convexes, la première étude mathématique remonte à la thèse de doctorat de Karl Reinhardt à l'université de Francfort en 1918 : il liste cinq « types » de

pentagones convexes pavant le plan (voir Fig. 2), définis par des conditions comme :

- la somme des mesures de trois angles consécutifs vaut 360° (c'est-à-dire deux côtés sont parallèles !) – type 1 ;
- la somme des mesures de trois angles non consécutifs vaut 360° et deux côtés (bien choisis, voir ci-dessous) sont de même longueur – type 2 ;
- deux angles droits non consécutifs et les côtés formant chacun d'eux sont de même longueur – type 4.

Pour être un peu plus précis, donnons-nous les notations standard : notons A, B, C, D, E les sommets consécutifs du pentagone et a, b, c, d, e les longueurs des côtés EA, AB, BC, CD, DE. Les lettres A, B, C, D, E désignent également les mesures en radian des angles intérieurs aux sommets correspondants. La notion du type de pentagone (ou d'hexagone) ne semble pas avoir

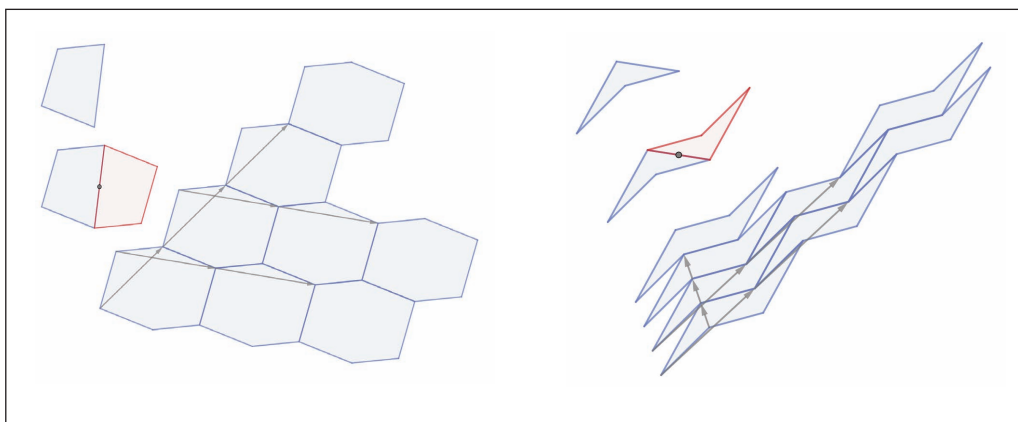


Fig. 1 - Paver le plan avec un quadrilatère convexe ou concave

reçu de définition générale de la part des mathématiciens qui ont travaillé sur le sujet, par contre chaque type est bien défini individuellement et le résultat de Rao est que tout pentagone convexe qui pave le plan appartient à l'un des quinze types que nous allons décrire.

Les conditions définissant chacun des types consistent en des égalités entre des mesures d'angles et des égalités entre les longueurs des côtés². Elles sont invariantes par isométrie et par homothétie, si bien qu'on peut considérer que le type d'un pentagone convexe qui pave

le plan correspond à l'idée intuitive de la forme de cette figure. Enfin les conditions données sont à prendre à permutation circulaire des noms des sommets et à retournement de la figure près.

Les dessins des quinze types reproduits ci-dessous ont été réalisés par Yves Martin (Irem de La Réunion) avec le logiciel DGPAD. On peut les consulter en ligne pour profiter des propriétés dynamiques du logiciel en suivant le lien indiqué en fin d'article (rubrique « Remerciements »). Les conditions définissant chaque type sont indiquées en dessous de l'illustration³.

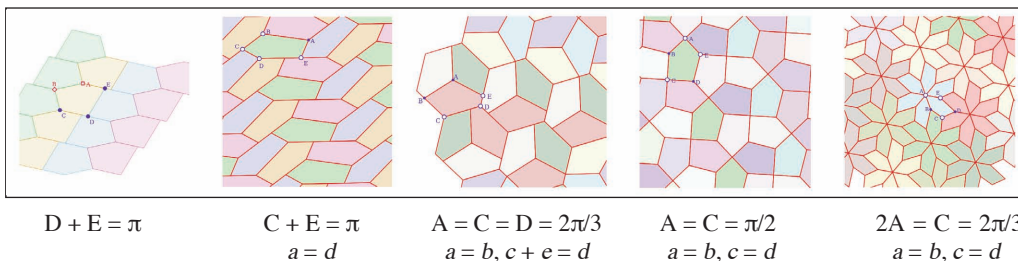


Fig. 2 - Les cinq types de Karl Reinhardt (dessins Yves Martin)

2 Par exemple la relation définissant le type 1 peut s'écrire $A + B + C = 2\pi$, ou encore $D + E = \pi$ puisque la somme des angles intérieurs d'un pentagone vaut 3π .

3 Les sources sont les articles de Kershner (1968), Schattschneider (1978) et Mann *et al.* (2018) cités dans la bibliographie, qui donnent parfois des relations différentes les uns des autres, certainement à cause de « coquilles ».

PAVAGES PENTAGONAUX
CONVEXES AVEC LE CORPS

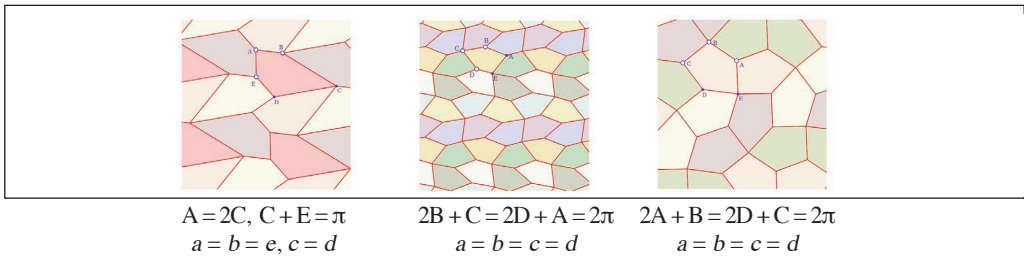


Fig. 3 - Les 3 types de Richard Kershner (dessins Yves Martin)

Même si Reinhardt travaille à répondre à l'un des problèmes posés par Hilbert au début du XXe siècle, il est intéressant de constater que l'entreprise allemande Villeroy & Boch a créé un carrelage de carreau pentagonal (motif appartenant au type 4, avec la condition supplémentaire $b = c$, connu aujourd'hui sous le nom de « pavage du Caire »), qui a été utilisé pour paver l'entrée du Music Hall de Hambourg, construit au début du XXe siècle⁴.

Reinhardt ! Kershner sera plus explicite et affirmatif sur le fait que sa liste est complète, puisqu'il écrira en avoir la preuve, mais ne pas disposer d'assez de place pour la publier.

On ne sait si Reinhardt avait fréquenté ce lieu. Il semble en tout cas qu'il ait cru que sa liste était complète⁵... ainsi que beaucoup d'autres après lui puisqu'il faut attendre 1968 pour qu'un mathématicien de l'université de Baltimore, Richard Kershner, reprenne son étude... et trouve trois nouveaux types, oubliés par

Cette découverte sur un sujet relativement facile à expliquer fait du bruit en dehors du milieu mathématique via le magazine de vulgarisation scientifique Scientific American qui la relate au milieu des années 70, provoquant des recherches passionnées chez certains lecteurs... non sans succès : deux d'entre eux, l'informaticien Richard James et la mère au foyer Marjorie Rice, découvrent respectivement un et quatre nouveaux types ! Ou quand des amateurs mettent en défaut la rigueur du professionnel...

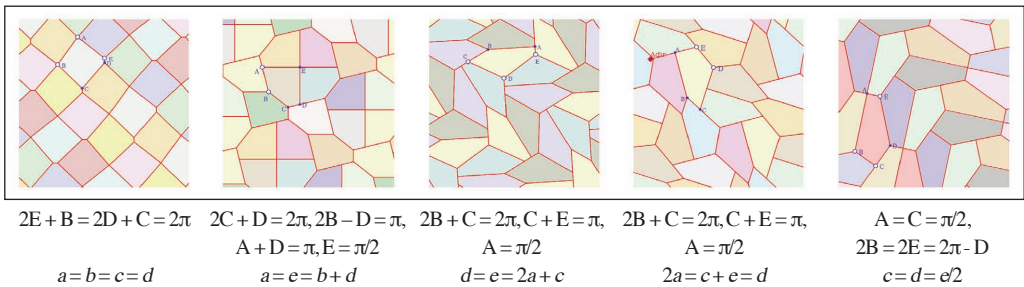
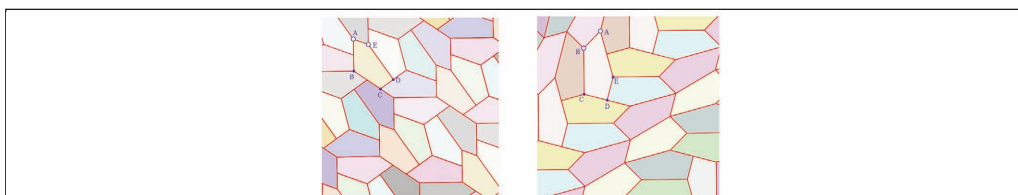


Fig. 4 - Les types n° 9 à 13 de Richard James (n° 10) et Marjorie Rice (dessins Yves Martin)

4 <http://www.tess-elation.co.uk/cairo-tiling/as-flooring>
 5 Il a montré qu'elle l'est si on impose de plus que dans le pavage tous les pavés ont un rôle « symétrique », au sens

où pour deux quelconques d'entre eux, il existe une isométrie préservant le pavage qui envoie l'un sur l'autre (voir par exemple Mann et al. 2018).



$$\begin{array}{ll}
 2E + A = 2\pi, & A = \pi/3, B = 3\pi/4, C = 7\pi/12, \\
 D = \pi/2, A + C = \pi & D = \pi/2, E = 5\pi/6 \\
 b = c = 2a = 2d & a = 2b = 2d = 2e
 \end{array}$$

Fig. 5 - Les types n° 14 et 15 de Rolf Stein et Mann et *al.* (dessins Yves Martin)

En 1985 un mathématicien de l’université de Dortmund, Rolf Stein, découvre un 14^{ème} type et propose une nouvelle preuve d’exhaustivité... qui se révèle bientôt fausse (il avait eu du moins l’honnêteté de la publier, la soumettant ainsi à l’analyse de ses collègues). Cependant il devient vraiment difficile de faire progresser la liste et ce n’est que trente ans plus tard en 2015 qu’une équipe menée par Casey Mann à l’université de Washington peut exhiber un 15^{ème} type à l’aide d’un programme d’ordinateur.

Michaël Rao, de l’université de Lyon, entre alors dans le jeu et met au point un programme susceptible de décrire tous les types, après une première phase de restriction théorique des possibilités (infinies donc inaccessibles à l’ordinateur a priori). Il espère à la fois découvrir un nouveau type et boucler la liste, finalement son programme révèle qu’elle est déjà complète ! Proposée pour publication⁶ en 2017, sa preuve a été validée (du moins la partie la plus essentielle) par un des experts du domaine.

Un siècle ou presque après la thèse de Reinhardt, ce résultat termine la longue et tumultueuse histoire de cette recherche.

6 Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane, Michaël Rao, soumis pour publication – préprint en ligne : <https://arxiv.org/abs/1708.00274>

On voit que l’histoire de l’étude mathématique des pentagones convexes qui pavent le plan est à la fois riche de rebondissements et porteuse de thèmes de réflexion sur la recherche mathématique :

- quel crédit et quel intérêt apporter à un résultat dont la preuve n’a pas été publiée ? On est tenté de faire le rapprochement avec le « dernier théorème de Fermat » dont l’énoncé sans preuve (à cause de l’exigüité de la marge !) a pourtant suscité tant de recherches fructueuses, qui l’ont finalement confirmé. Toutes proportions gardées, la publicité faite au résultat de Kershner a également permis de faire avancer la recherche sur le sujet ;
- sur le rôle de l’erreur dans la découverte : d’abord un frein lorsque les mathématiciens ont considéré à la suite de Reinhardt que la liste était complète, ensuite peut-être un passage obligé, pour continuer à avancer sur le problème, avant de le percevoir dans toute sa complexité ;
- sur l’expertise des mathématiciens professionnels, éventuellement mise en défaut par de simples amateurs... ce qui n’est pas fréquent !
- sur la preuve utilisant l’ordinateur comme outil essentiel pour étudier un nombre gigantesque de cas possibles.

Jouer avec les pavages pentagonaux convexes ??

Si l'histoire de l'étude mathématique des pavages pentagonaux convexes est riche et intéressante à plus d'un titre, comment lui associer une activité qui mette les participants en action et leur fasse, si possible, expérimenter ou du moins sentir les contraintes et les difficultés pour réaliser un pavage ? Un pentagone convexe pouvant être réalisé avec le corps humain (la tête, les deux mains et les deux pieds pour figurer les cinq sommets), l'idée s'est dégagée de réaliser des pavages avec le corps, mais les modalités de mise en œuvre sont longtemps restées floues... Finalement on a choisi de découper des pentagones de type 3 et 4 dans deux grands rouleaux de revêtement vinyle pour les sols, à charge pour les groupes d'élèves participant de les assembler (par type) pour retrouver chacun des deux pavages correspondants, puis de s'installer sur les pavés pour les réaliser avec le corps.

Réalisation des tuiles

Le découpage des tuiles dans les rouleaux de vinyle (de 4 m de large) est, en soi, un exercice de mathématiques pratiques. On a choisi de commencer par découper un gabarit en carton pour les tuiles de chaque type de pavage choisi (3 et 4), en visant deux tailles de tuiles différentes pour que l'atelier puisse s'adapter à des élèves d'âges différents (finalement seul le pavage avec les plus grandes tuiles, d'une envergure d'environ 1m80, a été utilisé pour paver avec le corps, les élèves auxquels l'autre pavage aurait pu correspondre pour la taille n'ayant pas les concepts mathématiques nécessaires pour mener à bien l'activité). La réalisation pratique du gabarit n'est pas aisée, dans la mesure où on travaille à une assez grande échelle, ce qui demande de réussir les tracés avec une bonne précision (en particulier pour les angles

droits) ; le résultat final, quand on assemblera les tuiles obtenues à partir du gabarit, montrera que la précision obtenue était peut-être légèrement insuffisante... ce qui n'affecte pas finalement la réalisation du pavage (on laisse bien des vides – le joint – entre les carreaux quand on pose un carrelage !).

On donne en fin d'article un plan de réalisation des gabarits de pentagones de types 3 et 4 qui ont été utilisés pour l'animation.



Une fois le gabarit découpé pour un type de pavage, on le reporte sur le rouleau de vinyle pour y tracer le pavage souhaité, ce qui permet de ne pas avoir de pertes entre les différentes pièces et de minimiser le nombre de coupes à effectuer. Mais où placer la première pièce pour minimiser les pertes sur les bords ? Disons tout de suite que si cette question pratique a effectivement été assez clairement posée, elle n'a été résolue que de façon très empirique, ce qui explique qu'un certain nombre de tuiles aient été finalement obtenues en deux morceaux, qu'on a accrochés l'un à l'autre par des morceaux de scotch pas très esthétiques (visibles sur la photo en début d'article).



Description de l'activité

Pour préparer la réalisation des pavages par les participants, on leur fait chercher les figures plus simples qui apparaissent en regroupant plusieurs tuiles dans les pavages, par exemple à l'aide des dessins reproduits ci-dessus dans la figure 2 : on trouve facilement les hexagones réguliers formés de trois tuiles dans le pavage de type 3 et les hexagones un peu allongés formés par quatre tuiles dans le pavage de type 4. Il est un peu plus difficile, mais utile pour la construction qui suit, de repérer la croix formée par quatre tuiles du pavage de type 4 se touchant toutes à un sommet formant un des deux angles

droits. Cette première phase de concertation met déjà en jeu le vocabulaire de la géométrie (hexagone) et la notion d'angle droit.

On sépare ensuite les participants en deux groupes, un pour chacun des deux types, pour l'émulation et pour que le plus grand nombre d'élèves soient actifs. Pour le pavage de type 3, ils s'organisent souvent spontanément en équipes de trois élèves tentant d'ajuster trois tuiles pour former l'hexagone régulier, ce qui n'est en général pas immédiat. Ils doivent ensuite assembler les hexagones produits comme dans le pavage hexagonal (« des abeilles »). Pour le pavage de type 4, il est intéressant de les inciter à

PAVAGES PENTAGONAUX
CONVEXES AVEC LE CORPS

repérer les angles droits de chaque tuile, dont l'un d'eux va permettre de réaliser la croix de départ, puis les sommets formant un angle légèrement plus ouvert pour continuer le pavage. La notion d'angle obtus prend ici un sens pratique très utile pour la construction.

La plupart des élèves (de l'école élémentaire ou du collège) se prennent au jeu et réussissent assez rapidement la construction de chacun des pavages, certains en s'aidant des notions mathématiques sous-jacentes, qu'on leur a suggérées (angles droits ou obtus, côtés de même longueur...), d'autres de façon beaucoup plus empirique, en tournant les pièces jusqu'à ce qu'elles s'ajustent. Dans les deux cas ils ont la satisfaction de parvenir presque tous au résultat escompté.

Une fois les pavages réalisés, la dernière étape consiste à utiliser celui de type 4 pour « paver avec le corps » et prendre une photo de groupe extrêmement originale, en demandant à chaque élève de placer les deux pieds, les deux mains et la tête aux cinq sommets d'une des tuiles

du pavage. La consigne n'est pas toujours parfaitement exécutée mais cela permet de terminer l'activité de façon ludique. C'est une proposition inattendue qui surprend les élèves et, la plupart du temps, leur plaît bien. On peut d'ailleurs espérer que cette association d'une activité mathématique et d'une activité corporelle permette de toucher des élèves qui n'auraient pas du tout été intéressés par la seule approche plus classique qui précède.

Comme on le voit, l'activité se prête bien à être réalisée en extérieur, ce qui permet souvent de disposer de beaucoup de place, mais aussi dans certains cas à l'intérieur.

Un inconvénient du matériau choisi, le revêtement de sol en vinyle, est à signaler : lors des manipulations, son envers peut être irritant pour la peau, provoquant une légère démangeaison qui heureusement disparaît rapidement. En dehors de cela, c'est un matériau peu coûteux, vendu en rouleaux de grande largeur et facile à découper, ce qui lui confère aussi des avantages.





En extérieur (*Fête de la Science 2018* et journée *École en fac 2019*), ou en intérieur dans le très beau Musée National Adrien Dubouché (*Fête de la Science 2019*), le tout à Limoges

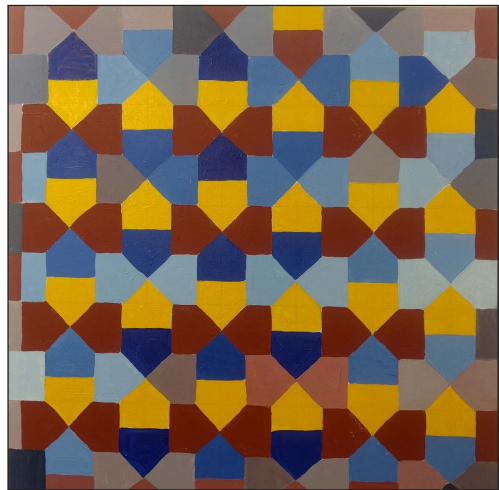
Compléments

L'activité a d'abord eu lieu dans le cadre d'un événement : « le 5 dans tous ses états », porté par l'Irem de Limoges et soutenu financièrement par la Région Nouvelle Aquitaine, dans le cadre de l'appel à projet « Pour tous et par tous » 2018. Elle était enrichie de puzzles mathématiques présentant les 15 types de pavages pentagonaux convexes, réalisés par les jeux EFCE⁷, ainsi que de tableaux du peintre Reg Alcorn. Enfin elle était accompagnée d'un autre atelier autour du pentagramme et son symbolisme.

Les tableaux ci-dessous présentent deux pavages avec un pentagone de type 1, dans lequel les élèves de tous âges reconnaissent le dessin simplifié d'une maison, ce qui leur rend la notion de pentagone immédiatement familière. Les puzzles ont été proposés au grand public de la Fête de la Science 2018, ils ont été très appréciés.



Le double coffret EFCE présentant les 15 types de pavages pentagonaux



Deux des tableaux de Reg Alcorn présentant deux pavages possibles avec des pentagones de type 1

⁷ <https://www.jeux-efce.com/>

Gabarits

Commençons par le gabarit du pentagone de type 3 (les dimensions données sont en cm).

Rappelons que pour un bon étiquetage ABCDE des sommets successifs, on doit avoir :

$$A = C = D = 2\pi/3, \quad a = b \quad \text{et} \quad c + e = d.$$

Voici une façon d'obtenir cette figure.

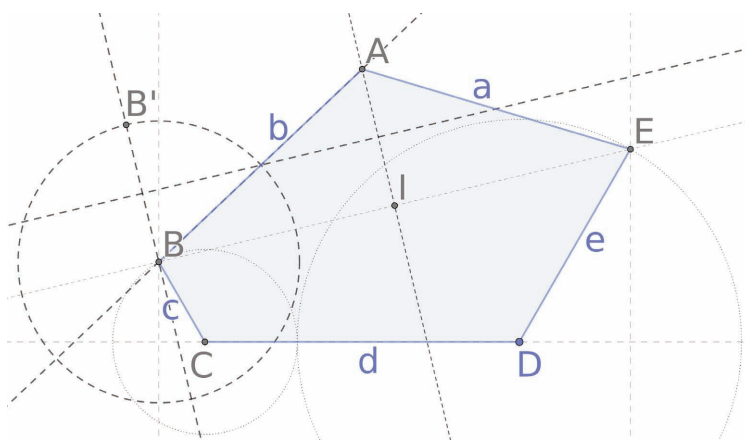
Tracer une droite et y placer deux points C et D à distance 86 l'un de l'autre. Tracer un cercle de centre C de rayon 25 et un cercle de centre D tangent au précédent. Les points B et E se trouvent chacun sur un de ces deux cercles (de sorte que la condition $c + e = d$ soit satisfaite).

Pour les placer de façon à obtenir les mesures d'angles souhaitées en C et D, tracer pour chacun des deux cercles la médiatrice du rayon contenu dans la droite (CD) et extérieur au segment [CD], leurs intersections avec les cercles sont les points B et E.

Tracer la droite (BE) et sa médiatrice, sur laquelle A doit se trouver pour avoir $a = b$.

Si on note I le milieu de [BE], l'angle en I dans le triangle ABI est droit, celui en A est de mesure $\pi/3$, donc l'angle en B est de mesure $\pi/6$. Pour l'obtenir, tracer la perpendiculaire à (BE) en B, y placer un point B', tracer le cercle de centre B passant par B'.

La droite issue de B passant par le point d'intersection de ce cercle avec la médiatrice du segment [BB'] fait un angle de mesure $\pi/6$ avec la droite (BE), donc A est le point d'intersection de cette droite avec la médiatrice de [BE].

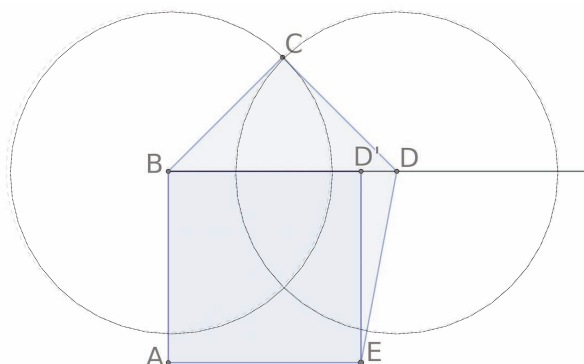


Pour finir voici un bref plan de réalisation du gabarit de pentagone ABCDE de type 4 utilisé pour les animations (les dimensions données sont en cm). Rappelons qu'on veut avoir :

$$A = C = \pi/2, \quad a = b \quad \text{et} \quad c = d.$$

- Tracer un carré ABD'E de côté 113 ;
- placer le point D sur la demi-droite [BD') de façon que le côté BD mesure 134 ;
- C est le point en dehors du quadrilatère ABDE à même distance 95 de B et D.

Prouver qu'on obtient bien un angle droit en C (à peu de choses près...) ! Le gabarit réel est très légèrement différent de ce plan : le point D y est placé environ 2 cm au-dessus de la demi-droite [BD'), le reste de la construction est identique.



Remerciements

L'auteur tient à remercier Yves Martin, de l'Irem de La Réunion, qui a réalisé les dessins des pavages à l'aide du logiciel de géométrie dynamique DGPaD et les a mis à disposition.

On peut accéder aux versions dynamiques de ces dessins en suivant les liens sur la page :

<http://www.irem.unilim.fr/animation/le-5-dans-tous-ses-etats/>

où l'on trouvera également des images des deux panneaux réalisés pour l'activité, ainsi que des liens vers divers documents utilisés pour la préparer (listés également ci-dessous).

Références

- Delahaye J.-P. (2013). Les pavages pentagonaux : une classification qui s'améliore. Pour la Science, n° 432, 78-83.
- IREM de Poitiers (2016), Maths et puzzles. Créez des maths de toutes pièces !, APMEP et ACL - Les éditions du Kangourou : Paris
- Honner P. (2017). The (Math) Problem With Pentagons. Quantamagazine. En ligne :
<https://www.quantamagazine.org/the-math-problem-with-pentagons-20171211/>
- Kershner, R. B. (1968), On paving the plane. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 839–844.
- Mann C., McLoud-Mann J., Von Derau D. (2018), Convex pentagons that admit i-block transitive tilings. Geom. Dedicata 194 (2018), 141–167.
- Rao M. (2018), L'énigme des pentagones résolue. La Recherche, 533, 62-66. En ligne :
<https://www.larecherche.fr/mathématiques-prix-la-recherche/lénigme-des-pentagones-résolue>
- Schattschneider D. (1978), Tiling the plane with congruent pentagons. Math. Mag. 51 (1978), no. 1, 29–44.
- Wolchover N. (2017), Pentagon tiling proof solves century-old math problem. Quantamagazine. En ligne :
<https://www.quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves-century-old-math-problem-20170711/>
- Wolchover N. (2017), Marjorie Rice's secret pentagons. Quantamagazine. En ligne :
<https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/>
- On retrouvera plusieurs de ces références et quelques autres sur le court article de Wikipédia consacré aux pavages pentagonaux :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Pavage_pentagonal