DES PROBLEMATIQUES AVANT DES AXIOMATIQUES : DES EXEMPLES DE « RAISONS D'ETRE »

Marc ROGALSKI
Irem de Paris,
Institut mathématique de Jussieu-Paris Rive Gauche
Laboratoire de Didactique André Revuz

N'écoutez pas la personne qui a les réponses. Écoutez celle qui a les questions.
A. Einstein

Résumé : Les introductions axiomatiques, dont les raisons ne sont jamais données, ont été longtemps de règle dans les enseignements universitaires français de mathématiques (et ce fut même parfois le cas au lycée). Elles se sont traduites par des incompréhensions pour de nombreux étudiants. Nous évoquons un panorama des difficultés qu'elles ont suscitées et suscitent encore. Qu'en est-il des possibilités de faire autrement, où en sont les évolutions de l'université sur ce sujet ? Après un rapide tour d'horizon, nous discutons d'évolutions possibles, parfois en partie esquissées, mais rendues très difficile par la parcellisation des enseignements.

Nous montrons par des exemples (parfois bien connus) qu'il est possible, a contrario de cette tendance à structurer les enseignements sous la forme de « réponses sans questions », de dégager des « raisons d'être » pour de nombreux concepts, et qu'on peut les faire vivre dans les enseignements. Il s'agit d'une synthèse de propositions d'enseignements « problématisés », développés depuis une trentaine d'années : les activités suggérées pour les enseignements sont donc parfois potentielles, sauf pour certains résultats expérimentaux qui sont publiés dans la littérature. Et bien sûr elles s'appuient sur de nombreux travaux de didacticiens des mathématiques que nous évoquerons, et demandent encore bien des recherches futures.

Nous terminons en montrant l'importance d'agir sur la formation des maîtres, y compris du supérieur, et donc sur les études universitaires de mathématiques, si l'on veut que problématiser l'enseignement des mathématiques devienne un objectif de l'Éducation Nationale.

Introduction

Il est notoire que nombre des concepts mathématiques enseignés à l'université (plus rarement au lycée) ont été pendant longtemps (depuis 1955) introduits et étudiés de façon essentiellement axiomatique, sans que la moindre motivation en soit donnée. Parfois (et cela se trouvait souvent dans un paragraphe dénoté « applications ») les motivations apparaissaient bien loin après l'introduction et l'étude de ces concepts, mais il n'était pas rare qu'on n'arrive jamais à ce stade, faute de temps, et on renvoyait alors les étudiants à ce qui devait (peut-être) être fait dans d'autres unités d'enseignement. Et de toute façon « applications » ne signifie pas « raisons d'être ».

Bien sûr on peut voir ici l'influence de ce qu'il faut bien appeler une « idéologie bourbakiste » largement répandue à l'époque, et maintenant dépassée [1]. Plus généralement, peut-être était-ce aussi conforme à la « monumentalisation » de l'enseignement des mathématiques (et peut-être des sciences) telle que la décrit Y. Chevallard dans (Chevallard 2019) : enseigner serait devenu organiser une visite de monuments mathématiques, et les raisons des conceptions de ces monuments, et les questions auxquelles elles devaient répondre, n'intéressent plus personne. L'enseignement des mathématiques serait ainsi devenu une *collection de réponses à des questions qui ne sont pas posées.*

Certains universitaires ont certes dénoncé cet état de choses. Ainsi G. Choquet écrivait déjà en 1973, date où la pertinence de la réforme des « maths modernes » dans le secondaire et le primaire commençait déjà à être questionnée :

> « L'enseignement mathématique à l'Université a subi, avec un peu d'avance, une transformation analogue à celle des lycées : les programmes ont été radicalement transformés ; on est passé de Goursat à Bourbaki ! Cette transformation s'est accompagnée, de façon assez générale, d'une parcellisation poussée des enseignements ; celui-ci est divisé en unités correspondant plus ou moins aux grandes structures au sens de Bourbaki : algèbre générale, algèbre linéaire, topologie générale, intégration, variétés différentielles, etc. Le professeur chargé d'un de ces enseignements est en général un spécialiste ; il en connaît fort bien l'ossature, les notions essentielles qui sont pour lui des notions naturelles et comme allant de soi ; il axe donc son cours sur leur introduction et leur développement logique ; et souvent il ne peut en donner d'applications substantielles, soit par manque de temps, soit parce que ces applications le feraient sortir de la structure étudiée. [Cette parcellisation] ne présente aux étudiants qu'une vue locale des mathématiques ; aussi comprennent-ils mal la motivation des notions introduites… et au bout de deux ou trois ans de tels enseignements, ils voient les mathématiques comme une juxtaposition de théories brillantes, mais tombées du ciel, dont les démonstrations sont en apparence faciles, mais qui de façon curieuse deviennent difficiles à appliquer dès qu'on sort des sentiers battus. [2]»

Il convient aussi de citer (Ovaert 1979) dans lequel l'auteur présente une analyse épistémologique du rôle des problèmes, théories, structures, axiomatiques dans le développement des mathématiques et leur place dans l'enseignement universitaire. Citons sa critique à propos de certains enseignements universitaires, justement :

> « L'essentiel des cours est axé sur l'exposé de définitions et théorèmes, et la mode est aux axiomatiques. Il est rarement fait référence aux grands problèmes qui leur ont donné naissance ou qui les mettent en jeu. Les exercices proposés sont le plus souvent des applications *ad hoc*, voire des *variations* sur les définitions, théorèmes et axiomatiques du cours. »

1 Pour voir en quoi le développement contemporain des mathématiques a rendu obsolètes les conceptions de Bourbaki, voir (Cartier 1997) et (Patras 2002).

2 Cette opinion de G. Choquet témoigne d'un changement net de position : quelques années avant, il militait encore pour l'introduction des structures mathématiques dès l'enseignement secondaire, et avait joué un grand rôle dans la "bourbakisation" de l'université dans les années cinquante : voir (Choquet 2002).

A l'opposé de cette pratique répandue, J.-L. Ovaert se référait à l'activité mathématique réelle :

> « L'essentiel de l'activité scientifique consiste à poser des questions, mettre en œuvre des outils pour les résoudre et évaluer les résultats obtenus au regard des problèmes posés. Les théories mathématiques ne sont donc pas des fins en soi, mais sont au service d'une efficacité accrue dans les résolutions de problèmes, que ces problèmes soient issus des mathématiques ou de tout autre domaine. Inversement, une attitude anti-théorique est un obstacle à l'approfondissement des problèmes. Approfondissement des problèmes et élargissement du champ théorique sont en rapport dialectique.
>
> Au niveau de l'enseignement, une insistance trop exclusive sur les théories (les résolutions de problèmes étant absentes, ou n'apparaissant que comme sous-produits) correspond le plus souvent à un discours du maître, ou, dans le meilleur des cas, à une maïeutique. Elle révèle une tendance dogmatique, ou idéaliste. A l'opposé, une étude peu structurée portant sur des problèmes épars, même chargés d'une certaine valeur esthétique, ou ludique, n'exercent la sagacité de l'étudiant que de façon purement formelle. Il s'agit d'une tendance empiriste. »

Ces réflexions de J.-L. Ovaert rejoignent tout à fait la dialectique outils/objets développée par R. Douady dans (Douady 1986), analysant tout un pan de l'activité des mathématiciens. *La théorie abstraite se constitue souvent* ***à l'issue d'un processus d'abstraction/réflexion*** *portant sur l'efficacité et les champs d'applications d'outils construits initialement* ***pour répondre à des questions ou résoudre des problèmes****.* Inverser ce mouvement dans l'enseignement, comme le fait l'approche systématiquement axiomatique, risque d'entraîner de graves incompréhensions chez les étudiants et de rendre difficile le processus de conceptualisation.

Bien entendu, il ne s'agit pas de remettre en cause la démarche axiomatique qui (dès Euclide !) a montré sa grande utilité tant pour l'enseignement des mathématiques que pour les progrès de la recherche mathématique. Il s'agit de lui donner sa juste place, dans les enseignements de licence, *d'aboutissement d'une démarche de problématisation* qui devrait la fonder.

Les critiques précédentes ont eu à l'époque peu d'influence sur l'enseignement supérieur français des mathématiques. Pourtant, une certaine inquiétude des collègues de l'université a commencé à poindre, dès les années 80 : ils ont pris conscience des résultats catastrophiques des étudiants dans certains enseignements particulièrement caricaturaux de cet état d'esprit « monumentaliste », par exemple celui de l'algèbre linéaire, étudié par des didacticiens : voir à ce propos (Robert et Robinet 1989), (Dorier 1997, 2011), (Rogalski 1994). En particulier le diagnostic fait en 1985 par A. Robert et J. Robinet et publié dans (Robert et Robinet 1989) était déjà très inquiétant, car il portait sur 183 étudiants de Lille, 50 étudiants de Paris VI, 147 étudiants de Paris VII, en début de deuxième année d'université : il était très représentatif. Citons-en un bref extrait :

> « Nous constatons que moins du quart des étudiants sait manipuler les notions d'image et de noyau d'applications linéaires et que moins de la moitié des étudiants sait résoudre un système d'équations linéaires 4x4 où le calcul numérique est simple [...] Environ le tiers des étudiants ne sait pas calculer la matrice d'une application linéaire, lorsque l'espace vectoriel n'est pas donné sous la forme de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ [...]. Moins du tiers des étudiants cite $\mathbf{R}^n$

comme exemple d'espace vectoriel [...]. Pour une majorité d'étudiants, enfin, l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter ; de plus, ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux ».

Ce bilan était un signe frappant d'échec de l'approche axiomatique de l'algèbre linéaire. Nous nous posons donc la question : la situation a-t-elle évolué, la problématisation des concepts enseignés à l'université a-t-elle prévalu sur un enseignement « bille en tête » de l'axiomatique ? La réponse n'est pas facile à obtenir, tant les universités françaises (et leurs départements de mathématiques) sont diverses. En particulier *la parcellisation des enseignements* en unités (parfois en micro-unités !) rend difficile un bilan global. J'ai essayé de faire un petit sondage, qui malheureusement n'a touché que peu d'universités. Voici quelques réponses obtenues, mais qui sont parfois assez peu détaillées.

Aussi bien pour l'algèbre linéaire que pour la convergence ou l'intégrale, il semble bien que l'enseignement reste de façon dominante directement axiomatique. La motivation principale reste « cela servira plus tard », et permet donc à l'axiomatique de rester prépondérante, les illustrations restant assez anecdotiques.

Il y a une exception, d'une autre nature, et d'ailleurs *commune à bien des départements de mathématiques* : au premier semestre du L1, il y a un rabattement sur des techniques de « calculus » (convergence naïve, calcul matriciel, etc.) qui semble un prétexte pour démarrer axiomatiquement au second semestre (« ils ont vu des exemples » …).

Il faut nuancer ce tour d'horizon très succinct par le constat qu'on trouve en d'assez nombreux endroits des enseignements (assez souvent animés par des collègues ayant une solide culture en didactique des mathématiques) qui innovent sur certains points, et dont la compréhension des concepts est la préoccupation principale. Mais il s'agit la plupart du temps d'unités isolées, et souvent facultatives.

Le bilan global me paraît néanmoins assez négatif : l'université mathématique française résiste, le courant directement axiomatique reste prédominant, la problématisation comme moteur de l'enseignement reste marginale.

Il est clair que la *parcellisation écrasante des enseignements de mathématiques favorise l'axiomatique* : comment par exemple enseigner en moins de 12 semaines une notion de convergence sans partir de la définition brutale en $\varepsilon - N$? Passer de problèmes à résoudre à la construction progressive d'outils et les faire évoluer en objets mathématiques alors axiomatisables, cela demande du temps et de créer des situations mathématiques capables de faire entrer les étudiants dans cette démarche scientifique. Nous reviendrons sur cette question lors de notre proposition pour l'algèbre linéaire.

Peut-on changer cet état dominant et persistant l'université mathématique française ? Nous allons essayer de proposer dans la suite de ce texte une réponse partiellement optimiste. Nous nous proposons donc, d'abord au moyen de quelques exemples, de montrer comment on pourrait rétablir *les questions manquantes* dans certaines théories enseignées plus ou moins axiomatiquement ; ou du moins d'y insérer des *problématiques* susceptibles, par une autre organisation de l'enseignement, s'appuyant sur des questions fondatrices ou des articulations de problèmes, de faire comprendre aux étudiants en quoi les axiomatiques qu'on leur propose sont des réponses à certains problèmes qui sont ensuite théorisées. Il s'agirait donc de répondre plus ou moins au cahier des charges que proposait J.-L. Ovaert dès 1978 (dans un colloque Irem sur la formation des maîtres, voir la citation antérieure).

Pour chaque exemple d'enseignement que nous voulons étudier, nous résumerons d'abord brièvement son approche traditionnellement axiomatique, puis nous présenterons celle que certains collègues (parfois des collectifs : groupes Irem, Commission Inter Irem Université) ont proposée, fondée sur une ou des questions, enfin, dans chaque cas, nous essaierons d'évaluer les potentialités des propositions faites en matière de conceptualisation possible chez les étudiants. Bien entendu, bien d'autres choix de *questionnements* pour déboucher sur telle ou telle théorie sont possibles, ceux que nous proposons ici ne sont que des exemples, validant peut-être des « théorèmes d'existence ».

Dans une dernière partie, nous situerons la question des problèmes manquants ou des raisons d'être — telle que suggérée par les exemples proposés — par rapport à la nécessité du « méta » dans l'enseignement, et par rapport aux changements nécessaires dans la formation des maîtres.

1. — L'algèbre linéaire

Le cours typique sur l'algèbre linéaire démarre brutalement en donnant la définition axiomatique des espaces vectoriels. Les nombreux exemples alors donnés ne disent pas pourquoi il a paru nécessaire d'unifier, généraliser et formaliser ces exemples de cette façon, quels buts on poursuit ainsi. Rapidement, on définit l'indépendance linéaire de vecteurs par une double négation qui laisse perplexes bien des étudiants, et dont *on ne dit pas à quoi elle va servir* :

« il n'y a pas de combinaison linéaire des u_1, $u_2, \dots, u_n$ nulle dont les coefficients ne soient pas tous non nuls » !

Cette présentation classique en première année d'université (qu'on retrouve dans de nombreux manuels, malgré quelques exceptions, comme (Pham et Dillinger 1996) ou (Lehman 1984)) a été étudiée, du point de vue de l'épistémologie, de l'histoire et de la didactique dans les travaux cités plus haut. Nous n'allons pas en faire un résumé ici, renvoyant à l'excellente synthèse de (Dorier 2006), et à (Dorier, Sierpinska 2001), pointant juste ici comment la présentation axiomatique renverse le cours de l'histoire, et donc contribue à cacher toutes les motivations à l'origine des concepts.

Nous présentons ici *un exemple d'une présentation globale restituant des questions et des problématiques*. Bien souvent dans l'organisation de l'enseignement l'intervention directe des enseignants sera inévitable, compte tenu du caractère formalisateur, unificateur, généralisateur des concepts de l'algèbre linéaire, voir (Dorier 1992), (Dorier et al. 1994), (Rogalski 1995). Cet aspect peut être notablement compensé par une problématisation des notions par des *activités préalables* organisées en travaux dirigés, ou même, si on le peut, en ateliers (travail autonome et collectif en petits groupes d'étudiants travaillant à leur propre rythme).

0/ En préalable, la *géométrie cartésienne dans* $\mathbf{R}^3$(ou plutôt l'espace euclidien affine de dimension 3), qui a pour but de familiariser les étudiants avec le point de vue des équations implicites et celui de la représentation paramétrique pour des objets géométriques, avec les aspects de logique et de théorie des ensembles que ces approches exigent : condition nécessaire et suffisante d'appartenance, conjonction d'équations et intersections d'ensembles, union et produit d'équations, présentation en compréhension-équations implicites, et en extension-paramétrique, rapports entre nombre de paramètres et nombre d'équations... Ces aspects sont loin d'être évidents pour les étudiants, ils demandent un apprentissage effectif qu'il est opportun de réaliser d'abord dans un contexte "concret" et géométrique.

1/ Une motivation première pour l'algèbre linéaire proprement dite nous paraît devoir être *la résolution d'équations linéaires*. Les exemples ne manquent pas : équations de droite et plans en géométrie cartésienne, circuits électriques, modèles économiques, interpolations polynomiales…, leur utilisation sera omniprésente en algèbre linéaire, et leur origine historique est très lointaine (de la méthode de fausse position aux systèmes linéaires de deux équations) ou plus proche et plus fondamentale dans l'histoire : recherche par Cramer des courbes de degré n passant par $\frac{n(n+3)}{2}$ points. La méthode générale « *tirer une inconnue d'une équation et la porter dans les autres* » se formalise bien dans le cas linéaire par la méthode du pivot de Gauss (utilisée déjà dans $\mathbf{R}^3$). Tout de suite des problèmes se posent aux étudiants, dont les enseignants doivent se saisir pour *organiser une problématique qui va piloter l'étude* : c'est quoi ce nombre ***r*** qui apparaît à l'issue de la triangulation ? Dépend-il des combinaisons d'équations faites ? Des pivots choisis ? Et quid du nombre de conditions de résolution qui apparaissent sur les seconds membres ?

2/ Un pas décisif est alors l'énoncé suivant : si un système S a des solutions, et si en rajoutant à S une équation L on ne change pas l'ensemble des solutions, alors L est une combinaison linéaire des équations de S. C'est ce fait qu'en 1750 Euler a pressenti sans arriver à le dégager clairement (dans un texte où il conteste qu'un système de *n* équations linéaires à *n* inconnues ait toujours une solution unique, voir dans (Dorier 2006) le paradoxe de Cramer-Euler). Et ce constat sur les systèmes a pu être abordé dès l'étude des faisceaux de plans dans l'espace, lors des préalables de géométrie cartésienne. Ce fait amène naturellement à étudier, inversement, ce qui se passe si une équation d'un système est combinaison linéaire des autres équations du système : on peut alors la supprimer sans changer les solutions ! Et alors on peut recommencer… jusqu'au moment où « *aucune des équations qui restent n'est combinaison linéaire des autres* ». Quelle définition simple et qui porte du sens de *l'indépendance linéaire d'équations* ! (Par ailleurs, on retrouve la définition axiomatique classique comme un *critère permettant les calculs*). Et alors se pose immédiatement *une question* qui s'insère dans la problématique déjà posée par la méthode du pivot : resterait-il exactement autant d'équations linéairement indépendantes si on avait enlevé successivement d'autres équations ? Prouver que la réponse est oui va alors piloter le reste de l'enseignement, et le structurer autour des notions d'indépendance et de *rang*.

3/ En particularisant au cas des équations linéaires et homogènes, un changement de point de vue consiste à remarquer qu'à une équation $\Sigma_k^n a_i x_i = 0$ on peut faire correspondre le vecteur constitué par ses coefficients, et que combiner linéairement les équations c'est combiner linéairement les vecteurs. C'est ce point de vue que Frobenius a initié en 1875 : voir (Dorier 2006). Ainsi les notions d'indépendance et de rang sont naturelles – comme questions – pour les équations, leur introduction *directe* pour des vecteurs ne correspond pas à une problématique autre qu'axiomatique ; c'est une étape historique de *changement de point de vue sur un problème portant sur les équations* qui a fait surgir ces concepts après seulement pour les vecteurs. Et le *rang* apparaît alors naturellement comme un invariant par combinaisons linéaires réversibles.

Et cela mène directement à l'étude des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, avec leur double définition duale.

4/ Dans le même esprit, l'introduction des espaces vectoriels abstraits à l'étape suivante peut se motiver, non pas par de multiples exemples (certes utiles), mais par une étude (à faire faire par les étudiants en travaux dirigés avant toute approche axiomatique) dans plusieurs contextes de ce qu'on fait vraiment quand on fait des *calculs linéaires*, et quand on veut résoudre des équations « qui semblent linéaires » ; les axiomes sont alors une vraie démarche formelle unifiante, généralisante et *simplificatrice.* Ce questionnement des étudiants sur leur activité dans les calculs linéaires amène à une étude approfondie, *nécessairement abstraite, mais motivée par bien des questions*, des équations générales $T(x) = y$. Pour plus de détails, on peut se reporter à (Dorier 1992), (Dorier, Robert, Robinet, Rogalski 1994) et à (Rogalski 1994), (Rogalski 2011), dans lesquels est étudié l'impact de cette approche sur l'apprentissage des étudiants, selon les dispositifs didactiques adoptés. En particulier on y discute *l'intérêt didactique de préparer certains cours magistraux par des créations de problématiques en travaux dirigés ou en ateliers.*

On voit dans tout ce scénario l'importance, dont nous reparlerons plus tard, d'utiliser avec les étudiants une démarche « méta » pouvant aller jusqu'à les faire réfléchir sur des aspects historiques et épistémologiques de l'algèbre linéaire. Signalons par exemple l'intérêt de présenter aux étudiants le schéma ci-dessous, à l'issue de ces premières étapes ; cela peut favoriser une prise de conscience de la démarche suivie : *une problématique, et des concepts construits peu à peu pour y répondre.*

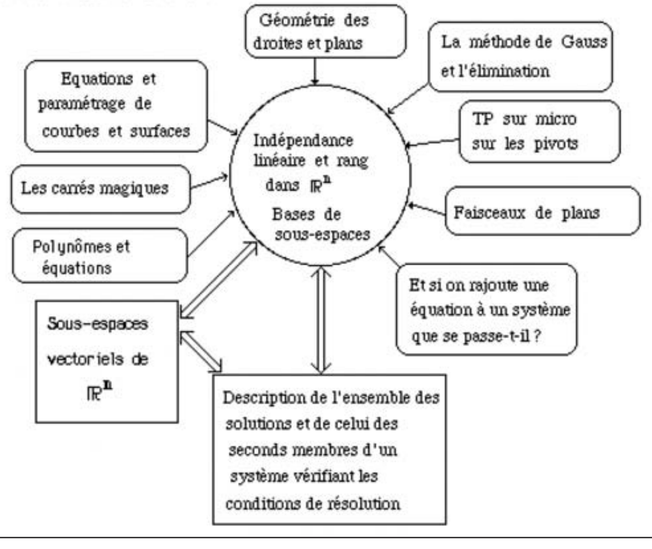

Figure 1

On voit clairement sur cet exemple à quel point il est complexe d'articuler des situations susceptibles de prendre du sens pour les étudiants, et de les préparer par des problématisations variées à ce qui vient après : les espaces vectoriels abstraits (axiomatisés mais certes problématisés par les calculs) et leur capacité à résoudre de nombreux problèmes, y compris très concrets. On voit aussi à quel point l'articulation dans le temps est essentielle, et bien peu compatible avec la parcellisation en unités d'enseignement plus ou moins isolées.

2. — L'intégrale de Riemann

Elle est introduite en terminale, pour une fonction continue positive f (mais le rôle de la continuité est passé sous silence sauf pour le théorème de dérivation), comme la mesure de l'aire sous la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Puis elle est introduite en première année d'université par les sommes de Riemann et un difficile passage à la limite. Mais, tant en terminale qu'à l'université, *la notion d'aire n'est pas interrogée*[3], donc on ne sait pas clairement *à quelle question répond ce concept d'intégrale*, dont il n'est pas difficile de constater qu'il se résume rapidement pour les étudiants à la notion de primitive. De plus l'expérience des physiciens montre clairement que les étudiants ont bien de la peine à utiliser cette intégrale comme moyen d'étude de problèmes physiques, voir à ce sujet (Legrand 1990), (Rogalski 2018).

Nous proposons d'enseigner l'intégrale de façon totalement différente, *en partant d'une question de mesure de grandeurs associée à un problème physique* : la situation du barreau mise au point par D. Grenier, M. Legrand et F. Richard à Grenoble. Nous renvoyons à (Grenier et *al.* 1986), à l'étude détaillée de (Decroix et Rogalski 2013), et à l'aspect interdisciplinaire présenté dans (Rogalski 2013 et 2018). Il s'agit d'une *co-construction entre mathématiques et physique* de l'instrument privilégié de la mesure des grandeurs : l'intégrale.

On pose à des étudiants de première année d'université (après leur avoir rappelé la loi de Newton d'attraction entre deux masses *ponctuelles*) la question :

> « Quelle est l'attraction exercée par un barreau très fin homogène, de masse 18 kg et de longueur 6m, sur une masse ponctuelle de 2kg située à 3m dans le prolongement de la barre ? ».

Figure 2

Nous ne détaillons pas ici le type de « débat scientifique » que l'on peut alors animer avec les étudiants, qui va faire surgir le centre de gravité, puis son inadéquation (lorsque un étudiant propose de couper la barre en deux et d'utiliser le centre de gravité de chaque morceau, le résultat n'est plus le même), puis le besoin d'encadrement en découpant la barre en morceaux et en concentrant toute la masse des morceaux à l'une ou l'autre de ses extrémités ; nous renvoyons à (D. Grenier, M. Legrand et F. Richard 1986), ou à (Decroix et Rogalski 2013).

L'idée essentielle qui généralise cette activité (qui peut se situer dans un travail dirigé avant le cours) est la suivante (nous l'empruntons à (Rogalski 2018)) : quand on veut mesurer une *grandeur* totale dont l'intensité est donnée par une fonction *f non constante* en chaque point d'un domaine Ω muni d'une mesure m (par exemple la pression en chaque point d'une sur-

3 Rappelons-nous qu'H. Lebesgue protestait contre le fait qu'en parlant du "tarababoum" du disque plutôt que de son aire, les programmes du secondaire resteraient cohérents (Lebesgue 1915).

face plane mesurée par l'aire, la hauteur d'une surface plane au-dessus d'un segment mesuré par la longueur, etc), on ne peut éviter une certaine procédure dite *procédure intégrale* :

découper en petits morceaux, sommer, encadrer, passer à la limite.

Il s'agit d'une procédure intuitive, qui d'une part est indispensable en physique et permet de modéliser des mesures de grandeurs, et de l'autre peut se décliner en mathématiques en plusieurs théories de l'intégrale (intégrale des fonctions réglées, intégrale de Darboux, intégrale de Lebesgue) selon la nature des ensembles qu'on sait mesurer (intervalles, ensembles mesurables) et le mode de convergence adopté pour approcher par des fonctions étagées (convergence uniforme, convergence au sens de l'intégrale). On voit que *les théories de l'intégration apparaissent comme des réponses à des questions, d'abord physiques* (comment passer du ponctuel de la loi de Newton à un calcul global, en passant par du local et en contrôlant les erreurs de méthode), *puis mathématiques* (précisant là encore des questions : quelles mesures ? et quels passages à la limite ?).

Les expériences d'enseignement de cette façon de l'intégrale semblent montrer que les étudiants conceptualisent ainsi une bonne représentation de celle-ci, évitant les deux écueils classiques : la ramener uniquement au calcul des primitives, être incapable de modéliser avec elle des phénomènes physiques (voir (Grenier et *al.* 1986) et (Legrand 1990)).

Par ailleurs, dans le cas de la barre comme dans de nombreux exemples interdisciplinaires, la mise en œuvre de *la procédure physique de l'accroissement différentiel* est une bonne motivation au « théorème fondamental de l'analyse » sur la dérivation de l'intégrale : voir (Rogalski et al. 2001).

Enfin signalons qu'au niveau de la terminale, une autre approche possible de l'intégrale consiste à la construire à partir des statistiques et des histogrammes pour introduire les lois de probabilité continues, voir (Drouet 2016) et (Drouet 2019).

3. — La convergence

S'agissant par exemple de la convergence d'une suite u_n vers un nombre ℓ, de très nombreux manuels destinés aux étudiants français (on peut lire une étude détaillée d'une dizaine d'entre eux dans CI2U 2017 ; une exception étant un ouvrage du canadien James Stewart) partent de la définition donnée *ex-abrupto* :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \textit{ tel que } \forall n \geq N \textit{ on ait } |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Même si un enseignement de la notion de convergence a été introduit dès la première et repris en terminale, cette définition laisse bien des étudiants perplexes et incapables de voir *pourquoi* cette définition et *comment* l'utiliser. Dit autrement, quelle *conceptualisation* les étudiants peuvent-ils élaborer à partir de cette définition ? Le même problème se pose pour la question des limites de fonctions, avec le « $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ *tel que* $\forall x$ … ».

De nombreux travaux didactiques se sont intéressés, soit à l'enseignement de la convergence des suites, soit à celui des limites de fonctions en un point à distance finie ou à l'infini. Pour les suites, nous nous référons au travail pionner de (Robert 1982,1983), pour les fonctions, à la contribution de (Robinet 1983). Des actualisations de ces travaux ont été publiées plus récemment : (Commission Inter-Irem Université 2015), (Bridoux 2015). Dans le même esprit, il convient aussi de citer (Lecorre 2016). Toutes les ingénieries proposées par ces travaux s'appuient *sur l'idée de motiver la définition formelle de la convergence parce* *qu'elle paraît comme indispensable pour faire des démonstrations de résultats considérés comme intuitifs par les étudiants, mais qu'ils n'arrivent pas à prouver* ; le parachutage de la bonne définition par l'enseignant intervient à l'issue de toute une activité ayant pour objectif de familiariser les étudiants avec un maniement de certaines propriétés plus ou moins intuitives de la convergence, préalables à la définition.

Certains travaux s'appuient nettement plus sur *l'idée d'approximation* qui est au cœur du renversement de l'idée de limite proposée par Cauchy. Citons l'exemple du flocon de Von Koch dans (Bloch 2000) ou dans (Commission Inter-Irem Université 2017), les travaux de (Ghedamsi 2008), (Rogalski 2014, 2016, 2016b).

Avant de proposer une approche de la convergence par un questionnement concernant l'approximation, il faut encore citer comme travaux didactiques sur la convergence, par exemple : (Cornu 1991), (Tall et Vinner 1981), (Mamona-Downs 2001), (Sierpinska 1985), (Chorlay 2019).

Nous proposons ci-dessous une approche fondée sur **la problématique de l'approximation**, telle que présentée dans (Collectif IREM 2015), (Rogalski 2016b).

(a) En classe de première

Les programmes proposent d'introduire la notion de dérivée avant celle de limite. Cet ordre peut sembler absurde aux tenants des structures bourbakistes, mais en fait cela peut être une extraordinaire motivation pour l'idée de limite, à condition que la dérivée ne soit pas introduite brutalement comme la *limite* d'un taux (bien que des considérations physiques pourraient conduire à cette approche), mais **par le besoin d'identifier l'objet mystérieux qu'est la tangente à la courbe représentative d'une fonction**. Nous renvoyons pour cette approche à l'ingénierie de Sylvie Alory et Renaud Chorlay présentée dans (Collectif IREM 2015) (une ébauche de cette présentation apparaît dans (Dofal et al. 1991)).

En bref, il s'agit d'introduire la tangente comme l'objet idéal qu'on devine par des activités de zoom des élèves au moyen d'un logiciel graphique (comme GeoGebra) ; puis par des manipulations on comprend qu'il s'agit de voir comment se comporte le taux d'accroissement $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lorsque h est de plus en plus petit. L'adégalité de Fermat apparaît comme un bon moyen, en simplifiant par *h supposé non nul* et faisant ensuite $h = 0$. Les élèves restent souvent *inquiets* devant cette méthode, qui semble marcher malgré *son caractère illégitime* (« diviser par 0 ! »), et semble résister dans certains cas apparemment non simplifiables à ce niveau (exemple avec des racines carrées). On peut alors, *à partir de cette insatisfaction des élèves*, faire développer des activités d'**approximation** à 10^{-n} près de cette pente de la droite idéale devinée, en cherchant des petitesses de h qui *garantissen*t cette approximation. Cela devrait permettre de faire se construire chez les élèves quelques ingrédients du concept de limite : chercher des approximations *aussi petites qu'on veut*, chercher des conditions *suffisantes* sur la variable, exprimées en termes de « *suffisamment proche de* », sans nécessairement aller jusqu'à la formalisation complète.

Il s'agirait donc de rendre didactiquement efficace l'apparente inversion des programmes (dérivée avant limite) en jouant sur le questionnement suggéré par l'insatisfaction des élèves. On peut voir divers exemples de ce type d'activités dans (Collectif Irem 2015, ch. 4) ou dans (Rogalski, 2016) ; voir aussi (Dofal et al. 1991), un manuel du second degré.

(b) En première année d'université, pour les suites.

On peut imaginer un scénario, tel que proposé dans (Rogalski 2016b) ou dans (CI2U 2017), fortement axé sur la *problématique de l'approximation des nombres*. Certains préalables sont nécessaires compte-tenu de la disparition de ce thème dans l'enseignement secondaire (au moins jusqu'à une date récente) : usage de la valeur absolue, introduction du langage de l'approximation des nombres, avec pour but de faire (re)découvrir aux étudiants l'usage de l'expression : « a est une approximation à ε près du nombre x » (on peut commencer par $\varepsilon = 10^{-n}$).

Il faut probablement aussi revenir sur ce que sont les réels et la nécessité d'approximations par des rationnels ou des nombres décimaux, en s'imposant des ordres d'approximations de plus en plus petits. Ceci doit faire comprendre l'utilité du quantificateur $\forall \varepsilon > 0$. Le premier pas décisif, ensuite, est de regarder ce qui se passe si on dispose d'une suite u_n de nombres rationnels dont on pense qu'ils permettent d'approcher un nombre *irrationnel* x : *pour trouver avec la suite des approximations de plus en plus proches de x, il faudra nécessairement prendre des n de plus en plus grands*. Une généralisation naturelle est alors (que les u_n et x soient rationnels ou non) la notion de *valeur d'adhérence* : on peut trouver des termes de la suite d'indices de plus en plus grands arbitrairement proches de x.

Ceci devrait amener à une formulation du type $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, N\ \exists\, n \geq N$ *tel que* $|u_n - x| < \varepsilon$. Et il faudra alors travailler cette notion sur de nombreux exemples. Il est important de noter que la *problématique de l'approximation mène d'abord à cette notion (valeur d'adhérence), et non directement à celle de limite*.

Une dernière étape est de comparer deux suites ayant vocation à permettre d'approcher $\sqrt{2}$, par exemple. On peut d'abord utiliser la suite de Hénon ou une suite non monotone ($u_{n+1} = 1 + 1/(1 + u_n)$, par exemple), dont on puisse plus ou moins facilement évaluer la vitesse de convergence. Puis une suite bien plus agitée, telle par exemple $v_n = 2\cos(n)$, en en faisant *une étude numérique* avec un logiciel et un programme simple : on voit facilement (numériquement, on peut admettre le résultat) qu'il existe des n aussi grands qu'on veut tels que v_n approche arbitrairement $\sqrt{2}$ (ou $\pi/2$ ou n'importe quel nombre de $[-2, 2]$) mais qu'on ne peut rien dire sur leurs rangs, ni sur le degré d'approximation. La comparaison de ces deux types d'approximations devrait faire pencher la balance vers la notion de limite plutôt que vers celle de valeur d'adhérence : c'est *pour tous les n assez grands* qu'on peut approximer à un ordre choisi arbitrairement petit.

La jonction avec l'approche par la démonstration peut alors se faire aisément en prouvant les premiers théorèmes algébriques sur la convergence (unicité, addition, inégalité), qui sont faux pour la notion de valeur d'adhérence, comme le montrent de nombreux exemples simples.

Cette approche comme introduction de la convergence, par des préoccupations d'approximations, n'a pas encore été testée *in vivo*.

Elle pourrait aussi sans doute être tentée comme ingénierie d'*après coup*, en formation des maîtres, par exemple. La prise de conscience *qu'il y avait une raison d'être à cette formulation aussi rébarbative* (du point de vue en particulier des quantificateurs) ne pourrait, me semble-t-il qu'améliorer la conceptualisation de cette notion de convergence par les futurs maîtres (de nombreux tests ont montré qu'elle posait encore souvent problème à l'issue d'une licence). Bien entendu, cet usage des quantificateurs répondant à une problématique demandera un travail spécifique supplémentaire, compte tenu de son rôle essentiel en mathématiques.

4. — La fonction exponentielle

Depuis 2002, les programmes incitent fortement les enseignants de lycée à aborder la fonction exponentielle comme solution unique de l'équation différentielle y' = y valant 1 en 0, en admettant son existence, et la plupart des manuels prennent pour prétexte l'équation de la radioactivité, *mais aucune activité de modélisation n'est sérieusement envisagée*. Et pour cause : le phénomène de la radioactivité est bien trop complexe pour être compris et modélisé par les élèves, même bons en physique (sur ce point, il se peut que physiciens et mathématiciens soient en désaccord). On trouvera dans (Magnin et Rogalski 2011) une discussion sur cette présentation, et une proposition alternative.

C'est cette dernière que nous proposons d'abord, en donnant le résumé qui figure dans (Collectif Irem 2017). Dans une deuxième partie, nous proposerons une autre version, s'appuyant sur des principes généraux de physique, conduisant au contraire à l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)f(y)$, étudiée quant à son extension à $\mathbf{R}$ dans le contexte d'une initiation à la construction de celui-ci, par les nombres décimaux : voir (Rogalski et al. 2001) et (Collectif Irem 2017).

(a) Le scénario de la dilution du sel (en terminale et/ou première année d'université)

Ce scénario se trouve dans (Rogalski 2006), et sa mise en œuvre en terminale S est analysée en détail dans (Magnin et Rogalski 2011), auquel nous renvoyons le lecteur ; la présentation que nous en donnons ici est un résumé. Il semble d'ailleurs qu'un scénario voisin ait été repris dans certains manuels de terminale S (voir par exemple Math X 2010). L'idée est que l'introduction à partir de la radioactivité risque de perdre les élèves peu physiciens, car il s'agit d'un phénomène physique très complexe (il est discret et probabiliste, et on le modélise comme un phénomène globalement continu et déterministe, sans expliquer comment on passe de l'un à l'autre… et ce n'est pas simple !). Nous proposons donc un phénomène physique n'utilisant aucune physique autre qu'intuitive. Voici le scénario.

Dilution d'une solution saline

> *Un bassin contient* 100 *litres d'eau, dans lesquels sont dissous* 10 *kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de* 10 *litres/mn, démarre à l'instant* 0. *En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de* 10 *litres/mn. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur. Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste-t-il dans le bassin ?*

L'intérêt de ce scénario est qu'il engage d'abord les élèves dans une activité de *discrétisation physique du phénomène*, en raison-

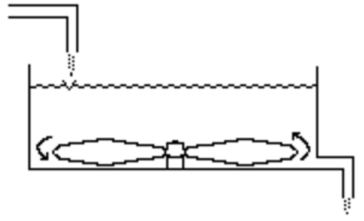

Figure 3

nant de minute en minute, puis de seconde en seconde. En effet, il n'y a aucune loi physique à appliquer. Les étudiants procèdent donc par étapes d'une minute, pendant laquelle ils supposent, soit la *quantité de sel constante*, soit la *concentration en sel* constante. On constate souvent (et le travail en petits groupes est essentiel pour voir surgir ce phénomène) que pour justifier cette approche ils imaginent deux expériences de pensée (EP pour abréger).

Dans la première (EP1), ils arrêtent le robinet d'eau pure au début de la minute, laissent couler le robinet de vidange pendant une minute (la concentration en sel est alors constante pendant cette minute), puis complètent de façon instantanée avec 10 l d'eau pure. Dans la seconde (EP2), ils font l'inverse : arrêt de la vidange pendant une minute (pendant laquelle la quantité de sel est constante), puis vidange instantanée.

Il est facile de voir que EP1 débouche sur le résultat final pour le sel restant :

$$S(60) = 10\,(0{,}9)^{60} = 0{,}01797\ldots,$$

alors que EP2 débouche sur

$$S(60) = 10\left(\frac{10}{11}\right)^{60} = 0{,}03284\ldots,$$

ce dernier résultat étant presque le double du premier.

Si cette divergence ne suffit pas à augmenter la conscience que la méthode n'est qu'approchée et entachée d'erreur, on peut faire tracer aux élèves l'idée qualitative qu'ils ont de la courbe donnant la quantité de sel $S(t)$ en fonction du temps. L'hypothèse de la constance de $S(t)$ pendant chaque minute (cas de EP2), qui donne un graphe en escalier dont les marches ont des hauteurs en décroissance géométrique, contredit fortement le sentiment des élèves que la fonction S est continue ("le sel est évacué peu à peu"). Dans le cas de EP1, on a une diminution affine de cette quantité de sel pendant chaque minute (donc un graphe affine par morceau), contradictoire avec le précédent, et dont les ruptures de pentes heurtent l'intuition du phénomène réel qu'ont les élèves (« la vitesse de diminution de la quantité de sel doit être continue ! »).

L'idée de diminuer la durée de chaque étape pour diminuer les erreurs devrait alors surgir d'elle-même, et en général les élèves passent à des étapes d'une seconde, et trouvent un encadrement plus serré.

Si le temps manque, l'enseignant peut alors passer directement à l'étape différentielle, en faisant travailler les élèves sur ce qui se passe entre les instants t et $t + \Delta t$, et les amener à encadrer le rapport $\Delta S/\Delta t$, puis à passer à la limite quand Δt tend vers 0, pour trouver l'équation différentielle

$$S'(t) = -\frac{1}{10}\,S(t).$$

L'expérience (voir Magnin et Rogalski 2011) montre que cette étape demande *une forte intervention de l'enseignant*, car c'est la première fois que les élèves ont à modéliser de la physique par *la procédure de l'accroissement différentiel* (voir (Rogalski 2006)), et il leur est alors difficile de l'inventer !

On peut aussi (mais cela demande plus de temps, c'est une version plus ambitieuse), "pour y voir plus clair", passer du cadre numérique

(100 litres, 10 l/mn,…) au cadre symbolique (volume V, les débits égaux à v, sel initial S_0, durée t, n étapes de durée t/n). Il faut là, certainement, *une intervention de l'enseignant pour proposer ce changement de cadre*, et il faut pouvoir en convaincre les élèves ; on peut par exemple dire que c'est le seul moyen de comprendre précisément d'où viennent les erreurs, quels facteurs les déterminent ; on peut aussi évoquer le besoin de généralité dans la compréhension du phénomène étudié. Il s'agit là d'une rupture avec le slogan "pas de paramètres !" des programmes, d'autant plus absurde qu'en physique on incite les élèves à travailler avec des formules à paramètres littéraux, pour "réduire les erreurs de calcul numérique" et, surtout, vérifier les formules par des considérations sur l'homogénéité des dimensions.

On obtient alors, dans le cas de EP1,

$$S_{1,n}(t) = S_0\left(1 - \frac{v}{V}\,\frac{t}{n}\right)^n,$$

et dans le cas de EP2

$$S_{2,n}(t) = \frac{S_0}{\left(1 + \frac{v}{V}\,\frac{t}{n}\right)^n}.$$

L'*institutionnalisation* de cette première branche de la situation devrait alors être, au plan particulier du phénomène étudié, une *conjecture* : les deux fonctions précédentes devraient, pour chaque valeur de t, converger quand n tend vers l'infini, vers une quantité $S(t)$ qui devrait être la vraie quantité de sel à l'instant t. Et c'est ce phénomène de convergence éventuelle (hors du niveau de la terminale S pour sa preuve, mais voir néanmoins une approche simple possible dans (Collectif Irem 2017)), qui peut motiver le recours à la méthode différentielle présentée plus haut.

Nous n'entrons pas plus dans les détails de ce scénario et de son passage en classe, renvoyant au compte rendu cité précédemment dans le bulletin de l'APMEP. Son bénéfice principal est de faire un lien entre l'approche discrète de la fonction exponentielle et son approche différentielle. Par ailleurs, les observations faites en classe montrent que les élèves apprécient cette présentation, et qu'elle peut servir de point de repère tout au long de l'année scolaire auquel l'enseignant peut renvoyer les élèves.

(b) Approche par l'équation fonctionnelle, avec motivations physiques et aperçu sur les réels

Nous commençons par quelques considérations physiques, reprises de (Collectif Irem 2017).

Une occupation fréquente des physiciens est *d'étudier la loi de variation d'une grandeur physique scalaire*, notée y, qui dépend d'une autre grandeur scalaire, notée t (temps) ou x (espace) ou… Nous supposons que le phénomène étudié vérifie les principes *physiques et/ou philosophiques suivants* :

(1) Le déterminisme

On suppose que pour toute donnée initiale y_0 à un instant (ou position…) initial(e) t_0, et tout autre instant t la valeur $y(t)$ est parfaitement déterminée (autrement dit il y a bien une loi physique). Remarquons que ceci impose aussi le déterminisme vers le passé (ou les positions antérieures…) : de $y(t_0)$ on peut remonter à $y(t)$ même si $t < t_0$.

Remarque. On suppose ici que la donnée initiale suffit à déterminer l'évolution de la grandeur y. Le cas où on a aussi besoin de la valeur initiale de la dérivée de y (par exemple en mécanique) se ramènera au cas des grandeurs vectorielles en posant $Y(t) = (y(t), y'(t))$. Nous n'en traitons pas ici.

(2) Le principe de réalité

Le phénomène, et donc sa loi, ne dépend pas de l'observateur, et en particulier de l'origine des temps (ou espace…) choisi par lui pour repérer la variable t (ou x…). *Ce principe ne s'applique pas à toutes les recherches de lois physiques* (si l'observateur déclenche à un *moment donné* un phénomène extérieur artificiel qui *force* celui étudié).

(3) Le principe de superposition

Si on ajoute des données initiales $y_1(t_0)$, $y_2(t_0)$, le résultat en t est la somme des deux résultats obtenus par les données initiales séparées $y_1(t_0)$ et $y_2(t_0)$.

(4) Le principe de continuité

On suppose que la loi $t \to y(t)$ est une fonction continue, et que la valeur en t de $y(t)$ dépend continûment de la valeur initiale y_0 en t_0.

(5) Le principe de non nullité

On suppose que la grandeur $y(t)$ ne s'annule jamais : pour tout t, $y(t) \neq 0$.

Bien entendu, il faut que si possible *les élèves contribuent eux-mêmes*, par des discussions et avec l'aide d'exemples concrets proposés par l'enseignant, à établir ces principes ou certains d'entre eux.

Alors il est facile de montrer que la fonction $t \to y(t)$ est continue et qu'elle s'exprime (à un facteur constant près) au moyen d'une fonction F qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(t+s) = F(t)\,F(s), \quad F(0) = 1.$$

D'où l'importance de cette équation fonctionnelle, car plusieurs phénomènes physiques relèvent de ce modèle : absorption de la lumière dans un milieu semi-transparent, radioactivité (modélisée par un phénomène continu et déterministe), phénomènes de dilution, loi de Newton pour les échanges de chaleur, etc.

Posons alors $a := F(1)$. On voit facilement que pour r rationnel, $F(r) = a^r$, et en particulier que pour $n \in \mathbf{Z}$ on a $F(n) = a^n$. On voit aussi que F est croissante ou décroissante sur $\mathbf{Q}$ selon la place de a par rapport à 1, donc on peut supposer $a > 1$ (si F n'est pas constante). *Il s'agit donc de prolonger continûment cette fonction à tous les réels*, et donc de situer les réels par rapport aux nombres dont on dispose déjà. Cela peut permettre *d'introduire la nécessité des réels* (voir à ce propos (Durand-Guerrier et al. 2019) qui développe un scénario suscitant le besoin des réels pour prolonger l'exponentielle). Il faut donc plus ou moins rigoureusement introduire l'ensemble **R** des réels. La présentation la plus simple est sans doute par les développements décimaux illimités, notés par exemple $p{,}a_1a_2 \ldots a_n\ldots$ avec p $\in$ **Z** (partie entière) et $a_n \in \{0,1,\ldots,9\}$, ce qu'un élève de terminale ou un étudiant peut aisément concevoir après discussion, sans entrer dans la théorie. On trouvera dans (CI2U 2017) les manières dont différents manuels de L1 introduisent les réels : dans les dernières versions, c'est une présentation axiomatique de **R** qui est souvent choisie. Là encore, *nous préconisons une introduction mettant en avant des raisons d'être, et sinon une construction complète, trop fastidieuse, une ébauche s'appuyant sur ces raisons d'être*, comme par exemple dans (Rogalski et al. 2001). On trouvera dans (CI2U 1990) une liste d'activités à développer avec les étudiants (utilisée dans l'université de Lille 1) propre à susciter chez les étudiants le *besoin de comprendre* de façon plus précise ce que sont les nombres réels ; mais on peut aussi s'appuyer sur l'article cité (Durand-Guerrier et al. 2019).

Revenons alors à notre problème de prolongement de la fonction F vérifiant notre équation fonctionnelle. Si $\mathbf{D}_n$ est l'ensemble des décimaux avec n décimales, on peut facilement prolonger F à $\mathbf{D}_{n+1}$ si on la connaît sur $\mathbf{D}_n$:

si $x = p{,}a_1a_2 \dots a_n$, et si $y = x + 10^{-n}$, alors
sur le décimal $z = p{,}a_1a_2 \dots a_na_{n+1}$ on a :

$$10z = (10 - a_{n+1}).x + a_{n+1}.y, \quad \text{donc}$$

$$F(z)^{10} = F(x)^{10 - a_{n+1}} F(y)^{a_{n+1}}.$$

Il suffit donc d'extraire une racine dixième pour calculer $F(z)$, qui est ainsi bien déterminé (remarquons qu'avec une écriture des réels en base 2, la racine carrée suffirait).

Soit alors x un nombre réel,

$$x = p{,}a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$$

« son » développement décimal illimité, et soit $x_n = p{,}a_1a_2a_3 \dots a_n$ « son » développement décimal à n décimales. On a calculé les $u_n = F(p{,}a_1a_2a_3 \dots a_n)$, et il est clair que cette suite est croissante et majorée par $F(p+1) = F(1)^{p+1}$.

Donc la suite converge vers un nombre qui va être le prolongement cherché de F au point x si on suppose (et souhaite) ce prolongement continu sur $\mathbf{R}$, et donc croissant.

Bien sûr, il y a certaines vérifications élémentaires à faire, en particulier que la valeur de $F(x)$ ne dépend pas du développement décimal illimité de x choisi (quand il y en a deux possibles, si x est décimal). L'avantage de cette présentation est le côté intuitif pour les élèves ou étudiants, car correspondant à toute une pratique (qui devrait sans doute être plus développée qu'aujourd'hui dans l'enseignement) des approximations décimales des nombres.

5. — La topologie

Le cours standard de licence (L3) présente la topologie sous l'axiomatique classique des ouverts/fermés ou celle des voisinages, avec parfois une approche préalable des espaces métriques (mais il n'est pas rare aussi que leur cas soit présenté comme cas particulier-application de la topologie générale). On peut voir par exemple (Saint Raymond 2008). En L2, on voit apparaître la convergence uniforme des fonctions et un embryon de la topologie de $\mathbf{R}^n$. Mais les raisons de ces théories sont rarement enseignées, ou alors n'apparaissent qu'après.

Nous discutons la possibilité de deux approches, à partir de problèmes si possible fondateurs.

(a) La topologie plane et le problème du passage des frontières.

Nous empruntons in extenso le passage suivant de la thèse de Stéphanie Bridoux, avec son aimable autorisation (voir (Bridoux 2010)). Le lecteur pourra s'il le veut interpréter ce passage comme un dialogue interactif entre un professeur et ses étudiants.

> « On cherche à étudier le *problème* suivant : Une île I est la réunion de deux pays A et B séparés par une frontière. Une automobile part de la capitale du pays A, notée C_A, et suit une route qui la mène à la capitale du pays B, notée C_B. Aucune des deux capitales ne se situe sur la frontière entre les deux pays. Le conducteur a dans son coffre une marchandise qu'il se propose d'importer de A vers B. Peut-il le faire sans la déclarer en douane, sachant que les douaniers sont sévères et visitent les coffres de toutes les voitures ? On dispose d'un plan de l'île reproduit sur la page ci-contre (figure 4). Il s'agit d'une carte assez vieille où la route joignant les deux capitales est en par-

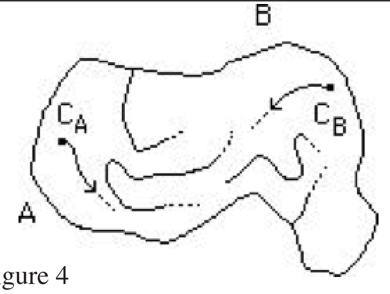

Figure 4

tie effacée, ainsi que la frontière. On peut s'attendre à ce qu'un certain nombre d'étudiants pensent que la route va forcément croiser la frontière. L'enseignant peut semer le doute en proposant une frontière et donc une route si tortueuses que l'existence de l'intersection des deux ne va pas de soi, comme sur le deuxième dessin ci-dessous (figure 5).

La production d'une preuve mathématique de l'existence de l'intersection requiert une modélisation du problème. La route est modélisée par un chemin continu

$$\gamma : [0,1] \to I$$
$$t \longmapsto \gamma(t).$$

La question se pose de caractériser la frontière F entre les deux pays A et B. Une idée

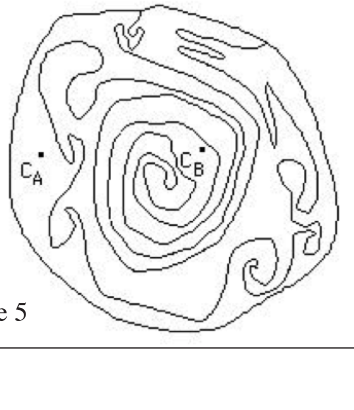

Figure 5

est de commencer par décrire un point p de A∪B qui n'est pas sur la frontière en termes de points voisins. On peut aussi faire émerger l'idée suivante : si $p \in$ A mais $p \notin$ F, alors on ne peut pas trouver des points de B aussi proches de p qu'on veut. De là, la notion de point intérieur peut être introduite en termes de boule.

La réponse suivante peut apparaître pour caractériser la frontière : F = A∩B. Cependant, rien n'assure que les points de la frontière sont communs : les deux pays auraient pu se répartir les points de F, par exemple pour partager les frais d'installation d'une clôture. L'appartenance d'un point p à F peut émerger sous la forme suivante : toute boule B(p,r) coupe à la fois C_A et C_B, c'est-à-dire B et A. La notion de point adhérent peut être introduite ici. L'enseignant peut ensuite caractériser l'intérieur (respectivement l'adhérence d'un ensemble) comme l'ensemble des points intérieurs (respectivement l'ensemble des points adhérents). On peut alors répartir les points de l'île en trois ensembles disjoints, à savoir *int*A, *int*B et F et y situer les capitales des deux pays.

En décrivant la route de la manière suivante : $\gamma(0) = C_A \in int\text{A}$ et $\gamma(1) = C_B \in int\text{B}$, on peut envisager de montrer par l'absurde que R, l'image de γ, ne coupe pas F. Le passage suivant amènera sans doute des difficultés chez les étudiants et nécessairement l'aide de l'enseignant :

Supposons que R ne coupe pas F. On a alors $R \subseteq int\text{A} \cup int\text{B}$. On a $R = \gamma([0,1])$. Posons $G = \gamma^{-1}(int\text{A})$ et $H = \gamma^{-1}(int\text{B})$? et soit $p \in G$. Alors il existe $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\subseteq G$. Donc $p \in int\text{G}$. Comme $int\text{G} \subseteq G$, on en déduit que $G = int\text{G}$. La notion d'ouvert peut être définie. L'ensemble H est également ouvert. Les points de R se répartissent donc entre *int*A et *int*B, ceux de [0,1] entre G et H. De plus, $G \cap H = \emptyset$, $0 \in G$ car $\gamma(0) = C_A$ et $1 \in H$ car $\gamma(1) = C_B$. L'intervalle [0,1] est donc la réunion de deux ouverts G et H non vides et disjoints, ce qui est impossible. Ce dernier résultat est admis à ce stade. Le théorème suivant peut alors être énoncé comme bilan :

> Soit $I \subseteq \mathbf{R}^2$ partagé en deux sous-ensembles A et B disjoints dont les intérieurs (dans I) sont non vides, un chemin continu joignant un point de l'intérieur de A à un point de l'intérieur de B coupe nécessairement la frontière $F = I \setminus (int A \cup int B)$.

Dans ce problème, les notions de points intérieur et adhérent, d'intérieur, d'adhérence, de frontière et d'image réciproque d'un ouvert par une application continue interviennent comme des *outils* pour résoudre un problème via une *modélisation* de la situation dont l'évidence première peut être combattue par des dessins compliqués évoqués par l'enseignant.

Il subsiste une ambiguïté sur le caractère relatif des notions par rapport à l'ensemble I. Ce problème peut être réglé plus tard dans le cours proprement dit. La notion de connexité peut être définie et on peut démontrer quelques propriétés à son propos qui prolongent le travail entrepris : la connexité des intervalles [a,b], des exemples de connexes dans $\mathbf{R}^2$, etc. »

Ce début de la topologie propose donc *une introduction des notions dans leur dimension outil*, conformément à (Douady 1986), pouvant selon nous amener les étudiants à donner un autre sens aux notions de base de la topologie que celui amené par la présentation en termes axiomatiques classiques, qui ne serait donnée qu'en un second temps.

(b) Approche par des problèmes de convergence de fonctions ?

Une autre origine historique de la topologie (voir (Robinet 1984)) se situe dans divers « problèmes de choix » concernant des fonctions, c'est-à-dire souvent des problèmes dont la solution a été d'extraire des sous-suites convergentes de suites de fonction, autrement dit (mais cela ne pouvait pas alors être interprété ainsi), des énoncés de compacité pour certains ensembles de fonctions (tels les « familles normales de Montel »). Peut-on reprendre cette idée pour proposer une introduction à certains aspects de la topologie, en particulier des topologies sur des ensembles de fonctions (voir (Dorier 1996)) ?

L'un des cas les plus simples auxquels on puisse songer est d'essayer de faire résoudre le problème suivant : étant donné une suite f_k de fonctions définies sur **N** et à valeurs dans $[a,b]$, peut-on trouver une sous-suite de la suite f_k qui converge (simplement) sur tout entier *p* de **N** ? Mais on se rend compte que ceci revient à espérer faire plus ou moins inventer par des étudiants, comme outil de résolution, le procédé diagonal de Cantor ! Quelles situations construire, pouvant amener les étudiants à être partie prenante active de la création du concept, pour obtenir ce résultat ? Cela semble bien difficile à imaginer…

Et s'il s'agit simplement d'arriver à introduire « naturellement » les topologies de la convergence simple ou de la convergence uniforme sur les fonctions, on se trouve devant des notions qui se présentent avec un caractère FUG assez marqué, donc difficiles à introduire de façon adidactique[4] : n'est pas Fré-

3 Rappelons ici que le terme "adidactique" qualifie une situation proposée aux étudiants, qui a pour but apparent de résoudre un problème qui ait du sens pour eux, mais qui leur demande, en général après certains échecs, de mettre en place, en partie eux-mêmes, certains outils de résolution, qui auront vocation à être généralisés comme des concepts nouveaux (et qui étaient les *vrais objectifs* de l'enseignement, mais n'étaient pas dits *a priori* aux étudiants). Voir (Brousseau 1998).

chet qui veut, même le collectif d'un groupe de travaux dirigés ! Par contre la convergence uniforme peut s'introduire par une situation de type « extension de concept » (avec en vue en fait plusieurs modes de convergence), mais sans visée directe d'introduire des topologies sur des ensembles de fonctions (voir Robinet (1984b)).

Donc, dans la situation actuelle, *l'approche de la topologie motivée par des questions sur la convergence des fonctions (qui obligerait par exemple à préciser les différents voisinages possibles d'une fonction) reste didactiquement conjecturale.*

6. — Les fonctions trigonométriques en terminale du lycée

Dans les programmes récents, les fonctions trigonométriques sinus et cosinus, en tant que fonctions définies sur **R**, et périodiques de période 2π, sont introduites en terminale. Leur construction nécessite d'introduire, avant, *l'enroulement de la droite sur le cercle.* Des constats fréquents, et une étude didactique précise dans (Loeng 2019), montrent que cet enroulement est un point qui soulève de grandes difficultés pour les élèves, en particulier, selon nous, parce qu'il ne répond à aucune question, aucune motivation. Nous proposons de l'introduire comme un cas particulier d'un problème général de description du mouvement uniforme d'un point sur le cercle (ce qui correspond au cas typique d'utilisation des fonctions trigonométriques en mécanique).

On regarde donc un point M(t) (t est le temps) *qui se déplace sur le cercle de rayon R et centre* O *avec une vitesse uniforme w* (la notion de longueur d'un arc de cercle étant *admise comme une notion préconstruite*). En prenant l'origine des temps en 0 et le point de départ du mouvement étant choisi en I = (R,0), on peut arriver à faire *modéliser* par les élèves que la longueur de l'arc parcouru (dans le sens direct) est donnée par $s = wt$. Bien entendu quand on a circulé pendant un temps $T = 2\pi R/w$, on a fait un tour complet, et on se retrouve sur le même point du cercle. Le *problème* est d'étudier comment varient les coordonnées du point M(t) quand le temps t varie.

Il est vraisemblable que cette considération du *temps qui s'écoule* soit plus simple à saisir pour les élèves que « d'enrouler la droite sur le cercle », ce qui est une démarche assez abstraite et sans but apparent. Des rotations uniformes sur des cercles sont des mouvements *familiers* (les manèges), et *la périodicité de tels mouvements* se conçoit bien. On est alors bien parti pour décrire les coordonnées du point M(t), et donc (quand R = 1 et w = 1) d'accéder aux fonctions sinus et cosinus, à leur périodicité et à leurs variations. Bien entendu, il faut établir *un lien étroit avec la partie des enseignements de physique* qui concerne la cinématique, puisqu'on y recherche l'origine du problème qui va motiver l'étude des fonctions trigonométriques. Par exemple, la position et la grandeur de la vitesse (selon la tangente au cercle) permettent une « preuve physique » de la dérivation des fonctions cosinus et sinus…

Dans un scénario d'après-coup, par exemple en formation des maîtres, il faudrait sans doute faire le lien avec l'exponentielle complexe e^{it}, avec la mesure des angles, le radian, le nombre π, etc., tous points qui restent délicats pour les enseignants et donc les élèves. A ce propos on peut voir (Rogalski 2001, chapitre III), où toutes ces relations sont étudiées avec un point de vue essentiellement problématique.

7. — Quelques considérations à partir de ces exemples

Nous nous sommes ici limités à quelques exemples. D'autres auraient pu être développés, par exemple en ce qui concerne le calcul différentiel et ses rapports avec la physique, l'approximation numérique, les probabilités… en s'inspirant de problèmes historiques ou interdisciplinaires.

D'abord, il importe de préciser la nature des exemples présentés. Répétons que ce ne sont que des propositions montrant la *faisabilité mathématique* : on peut présenter certaines notions à partir de *problématiques ou de questionnements* restituant à ces concepts leurs rôles d'outils de résolution, de réponses, susceptibles, peut-être, d'être en partie initialisées par les étudiants. Ces propositions, sauf pour quelques-unes qui renvoient à des expériences plus ou moins anciennes (voir (CI2U 1990), (Dorier et al. 1994), (Rogalski 1994, 2011), (Magnin et Rogalski 2011), (Grenier et al. 1986)), et qui ont parfois été reprises par certains manuels, sont très loin d'être des scénarios d'enseignement précis. Les conditions didactiques de leurs expérimentations ne sont guère soulevées ici, elles demandent évidemment un fort travail de recherche, et sans doute pour une partie d'entre-elles une coordination d'approches mathématiques et d'options didactiques s'étalant sur un temps assez long (par exemple voir (Dorier et al. 1994)), et donc probablement difficile à réaliser dans le contexte actuel d'un enseignement universitaire souvent très parcellisé.

Cette dernière réalité est sans doute un obstacle sérieux, que seule une coordination importante de plusieurs unités d'enseignement (voire leur fusion) permettrait de surmonter. On n'insistera jamais assez sur les nombreux dégâts épistémologiques et didactiques qu'a causé la parcellisation des enseignements des mathématiques, initiée par le découpage en unités décidé par le ministre L. Jospin et son conseiller C. Allègre, en dépit des nombreuses expériences de « rénovation des DEUG », et aggravée par le LMD et ses micro-crédits !

Nous voulons maintenant essayer de situer ces propositions par rapport à diverses questions épistémologiques ou didactiques, ou par rapport à l'évolution des injonctions des institutions impliquées dans l'enseignement.

(a) Le « paradigme de questionnement du monde » et la possible adidacticité des situations

Le « manifeste » de (Chevallard 2019) est probablement assez radical, bien que sa contribution n'entre pas dans des propositions détaillées. Les exemples que nous avons succinctement évoqués sont évidemment bien moins profonds que le serait *l'idée ambitieuse de refonder l'enseignement des mathématiques sur le paradigme du questionnement du monde*. Mais il me semble qu'ils devraient pouvoir convaincre qu'il est possible d'enseigner à partir de questions et de problèmes une grande partie des concepts enseignés en licence à l'université ou en fin de secondaire, sans nuire à la nécessaire présentation des axiomatiques, mais seulement comme abstraction des réponses apportées à de vraies questions. Ce qui serait déjà un petit pas réaliste et réalisable dans la direction d'une amélioration de l'enseignement.

Bien entendu, les propositions concernant l'université laissent un assez grand rôle aux enseignants, ou du moins sont parfois muettes sur la part d'initiative et de recherche qui peut être laissée aux étudiants dans le questionnement. Cela n'est pas complètement du hasard : certains concepts mathématiques du supérieur, même s'ils peuvent être présentés comme des réponses à de vraies questions, ont un haut niveau d'abstraction ou de formalisation, les démarches de généralisation ou d'unification qu'ils mettent en œuvre ne sont pas toujours évidentes à initier par les étudiants ; la nécessité d'un guidage didactique restera sans doute nécessaire. Mais cela n'empêche pas *un renversement nécessaire entre un point de vue principalement axiomatique et un point de vue essentiellement problématique*, comme nous le proposons par exemple pour l'algèbre linéaire. Par contre, pour d'autres notions (telles l'intégrale ou la fonction exponentielle), il semble possible d'introduire les notions par une dialectique outil/objet avec une forte composante adidactique dans l'enseignement, allant même jusqu'à la mise en place du « débat scientifique » impliquant fortement les étudiants dans la construction et donc l'appropriation des concepts, voir (Legrand 1990b) ou (Magnin et Rogalski 2011).

(b) Le recours au « méta »

Rappelons ici ce qu'on appelle "méta". Il s'agit de moments de l'enseignement, soit en cours, soit en travaux dirigés ou en ateliers de travail en petits groupes, soit même sous la forme de devoirs à la maison, où le travail des enseignants et des étudiants est axé sur une *réflexion sur les mathématiques.* Il ne s'agit donc pas d'énoncés mathématiques au sens strict, mais de faire surgir chez les étudiants des réflexions sur des conditions générales ou particulières à certains domaines de l'activité mathématique. Voilà un exemple simple et classique :

> "Problème : étant donnée la suite récurrente $u_{n+1} = 1 + u_n^2/4$, $u_0 = 1$, montrer que, $\forall\ n \geq 0$, $u_n \leq 3$ ". Une récurrence directe ne marche pas.
> L'idée "méta" alors *à faire surgir de la recherche des étudiants* sur cet exemple est : "quand dans une récurrence on n'arrive pas à prouver le pas $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, chercher une propriété $Q(n)$ plus forte que $P(n)$ telle que l'implication $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ soit plus facile à prouver".

Expliquer ce qu'est l'activité des mathématiciens, quels sont les buts qu'on se donne, quels vont être les rôles de telle ou telle question, ou de tel outil construit dans des objectifs de résolutions, c'est favoriser la réflexion des étudiants sur leur propre pratique son rapport avec celle des mathématiciens. Par exemple l'utilisation par ceux-ci des changements de cadres ou de la dialectique outils/objets, voir (Douady 1986) et (Rogalski 2002), est un aspect important du "méta". Il faut aussi tirer des bilans sur les chemins suivis (voir par exemple le schéma présenté dans l'algèbre linéaire), expliquer l'importance de démarches générales (généraliser, unifier, formaliser, changer de cadres, changer de perspective ou de point de vue...), pointer l'importance des détours théoriques, développer des démarches méthodologiques dans des domaines mathématiques précis (par exemple le raisonnement par récurrence dans notre exemple ; pour des exemples plus ambitieux - convergence des suites, entre autres - voir (Rogalski et Rogalski 2015)). Sur le "méta", on peut voir (Dorier 1995), (Rogalski 2002), (Rogalski et Rogalski 2015), (Robert et Robinet 1996).

Compte-tenu de l'enjeu des propositions que nous avons présentées, il apparaît nécessaire d'avoir un fort recours au "méta". Utiliser des questions ou des problèmes pour introduire des notions demande un *changement de contrat didactique* important. Certes celui-ci s'établit en partie à partir d'une pratique prolongée. Mais l'annoncer aux élèves ou étudiants, le motiver en expliquant ce qu'est l'activité des mathématiciens, c'est favoriser la réflexion des étudiants sur leur propre pratique et ses rapports avec celle des mathématiciens.

(c) Enseigner en partant de questions et la formation des maîtres

Ce type d'enseignement est depuis un certain temps une forte injonction des institutions comme le ministère, l'inspection générale, etc., en particulier dans les sciences physiques. La pression est moins forte en mathématiques, même si tout un courant de la didactique y pousse. Mais les incantations des programmes officiels restent souvent plaquées, prisonnières de la notion « d'applications », et sont très rarement vues comme **des raisons épistémologiques à la construction des concepts**.

Divers bilans globaux ont été tentés ici ou là, citons par exemple (Grangeat 2013). Certaines conclusions pour la physique, parfois uniquement orales, sont assez négatives. Il semble que, par exemple, ceux qui se sont penchés sur l'expérience de « La main à la pâte », soient assez sévères, non seulement du point de vue didactique, mais même du point de vue épistémologique.

Plus généralement, on constate souvent, chez les enseignants de mathématiques, une forte résistance à faire manipuler par les étudiants des notions pas encore clairement définies. Cela peut être un fort obstacle à essayer de faire fonctionner dans l'enseignement une dialectique outil-objet telle qu'elle semble indispensable pour partir de questions ou de problèmes, voir (Douady 1986). Cela peut aussi constituer une obstruction à développer avec les étudiants des discours et des activités « méta ». De ce point de vue, il faut comprendre que de nombreux enseignants, du secondaire comme de l'université, restent nourris et formés dans l'idéologie « bourbakiste » imprégnant la plupart des enseignements universitaires. Pour eux, les notions mathématiques restent souvent formelles, et leurs raisons d'être ne leur ont été que bien rarement présentées.

Voici à ce propos une anecdote révélatrice. Dans les années 1990, enseignant à la préparation à l'oral d'analyse de l'agrégation (à Lille), j'ai organisé avec les étudiants une séance de réflexion à vocation plus ou moins épistémologique : par groupes de quatre, ils devaient élaborer des réponses à la question : « *dire ce que vous tirez comme bilan de ce que vous avez appris, compris, de cinq ans d'études universitaires en analyse* ». Aucun groupe n'a été capable du moindre recul vis-à-vis des enseignements suivis : ils ont juste été capables de citer une liste plus ou moins longue de « théorèmes », mais ils n'avaient jamais réfléchi aux *buts* de ces théorèmes en termes de grands objectifs et de démarches générales : résultats d'existence, possibilité de résoudre des équations (numériques, fonctionnelles, différentielles…), capacité d'approximer les solutions, le rôle décisif des passages du local au global, etc. Et cela était en accord avec le type de leçons d'analyse qu'ils étaient capables d'élaborer : formelles, sèches, sans commentaires sur les objectifs visés… conformes aux enseignements qui leur avaient été donnés et aux manuels qu'ils avaient pu consulter.

Si l'on veut que les enseignants soient en état de participer activement à un enseignement de type problématisé avec leurs futurs élèves ou leurs futurs étudiants, il faut certainement qu'eux-mêmes soient formés d'une toute autre façon que celle qui reste actuellement dominante. Cela concerne les enseignants du secondaire pour lesquels les contenus historiques, épistémologiques, didactiques ou mathématiques présentés en master MEEF ne suffisent généralement pas à corriger les représentations issues d'un enseignement trop formel à l'université. Cela concerne aussi les enseignants universitaires : passer d'un enseignement trop axiomatique à un enseignement problématisé demande un changement notable. Peut-être faut-il s'investir dans la formation à l'enseignement de leur discipline des doctorants chargés de missions d'enseignements et des nouveaux maîtres de conférences ? On peut consulter à ce sujet (Rogalski 2014b) et (Mac Aleese et al. 2008).

Bref, nous pensons qu'il est nécessaire de changer profondément l'enseignement universitaire. L'ambition de ce texte était juste d'en montrer les enjeux et d'essayer de montrer que c'est possible.

Bibliographie

Bloch Isabelle, (2000). Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de Von Koch, dans L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation. Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012151/document

Bridoux Stéphanie, (2010). Enseignement des premières notions de topologie à l'université – Une étude de cas. Thèse de l'Université Paris-Diderot. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00660249/document

Bridoux Stéphanie, (2015). Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? Actes de emf2015, Alger.

Brousseau Guy, (1998). "La théorie des situations didactiques". Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990" présentés par M. Cooper et N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. La pensée sauvage, Grenoble.

Cartier Pierre, (1997). Vie et mort de Bourbaki. Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques I, Paris, IHES.

Chevallard Yves, (2019). Des programmes, oui. Mais pourquoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 39, n°1 pp. 97-115.

Choquet Gustave, (1973). Formation des chercheurs de mathématiques. Chantiers de pédagogie de l'APMEP, 1973.

Choquet Gustave, (2002). Cours de Gustave CHOQUET. Ellipses, Paris.

Chorlay Renaud, (2019). A Pathway to a Student-Worded Definition of Limits at the Secondary-Tertiary Transition. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, vol. 5(3), p.267-314.

CI2U, (1990). Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année, Commission Inter-IREM Université (CI2U).

CI2U, (2017). Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner. Brochure de la CI2U, IREM de Paris-Diderot.

Collectif IREM, (2015). Autour de la notion de dérivée en classe de première scientifique. Brochure IREM 97, IREM de Paris-Diderot.

Collectif IREM, (2017). L'introduction de la fonction exponentielle. Brochure IREM 99, IREM de Paris-Diderot.

Cornu Bernard, (1991). Limit. In: Advanced Mathematical Thinking. 66. D.O. Tall (Ed.), Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 153–166.

Decroix Anne-Amandine, Rogalski Marc, (2015). Atelier : L'intégrale, de la physique aux mathématiques. Actes du Colloque de Lyon.

Dofal Michel et al., (1991). Mathématiques, analyse, 1ère SE. Collection Spirale, Belin.

Dorier Jean-Luc, (1992). Illustrer les aspects unificateurs et simplificateurs de l'algèbre linéaire. Cahier Didirem n° 14, IREM de Paris VII.

Dorier Jean-Luc, (1995) Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, Educational Studies in Mathematics 29(2), 175-197.

Dorier Jean-Luc, (1996). Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions. Revue d'histoire des mathématiques 2, p. 265-307. Paris, Société Mathématique de France.

Dorier Jean-Luc, (ed.), (1997). L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Dorier Jean-Luc, Sierpinska Anna, (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (éd.) The teaching and learning of mathematics at university level, an ICMI Study (p. 255-274). Dortrecht Kleiner Academic Publishers.

Dorier Jean-Luc, (2006). La recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Revue Africaine de Didactique des Sciences et des Mathématiques (RADISMA), Numéro 1, École nationale supérieure de Nouakchott – Mauritanie (en ligne sur Le portail des ressources scientifiques et pédagogiques de l'AUF).

Dorier Jean-Luc, Robert Aline, Robinet Jacqueline, Rogalski Marc, (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en Deug première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. In Artigue M. et al. (éds) Vingt ans de didactique des mathématiques en France, pp.328-342, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Douady Régine, (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 7. N° 2. p. 5-31.

Drouet Charlotte, (2016). Les espaces de travail mathématique relatifs au calcul intégral et aux lois de probabilité à densité en terminale scientifique. Thèse de l'université Paris-Diderot.

Drouet Charlotte, (2019). Introduire la notion de fonction de densité de probabilité : dynamique entre trois domaines mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 39(2).

Durand-Guerrier Viviane, Montoya Delgadillo Elizabeth, Vivier Laurent, (2019). Real exponential in discreteness-density-completeness contexts. Dans Calculus in upper secondary and beginning university mathematics, Actes de « Conference held at the University of Agder », Kristiansand, Norway August 6-9, p. 87-90.

Ghedamsi Imène, (2008). Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : articuler contrôles pragmatiques et formels. Thèse de doctorat. Université de Tunis et Université V. Sagalen-Bordeaux II.

Grangeat Michel (Ed.), (2013). Les enseignants des sciences face aux démarches d'investigation. Presses Universitaires de Grenoble.

Grenier Denise, Legrand Marc, Richard Françoise, (1986). Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année, Cahiers de didactique des mathématiques 22, IREM Paris-Diderot.

Lebesgue Henri, (1915). La mesure des grandeurs, nouvelle édition, Blanchard, Paris, 2003.

Legrand Marc, (1990). Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale. Dans « Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année », Commission Inter-IREM Université (CI2U).

Legrand Marc, (1990b). Le débat scientifique en cours de mathématique. Dans « Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année », Commission Inter-IREM Université (CI2U).

Lehman Eric, (1984). Mathématiques pour l'étudiant de première année. 1. Algèbre et géométrie. Éditions Belin. Collection DIA.

Loeng Ratha, (2019). Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge. Thèse de l'Université Paris-Diderot.

Mac Aleese Jacqueline, Pian Jean, Robert Aline, Rogalski Marc, Viennot Laurence, (2008). Propositions pour une formation des moniteurs en mathématiques, indications sur la formation des moniteurs de physique. Documents pour la formation des enseignants, n° 12, Irem de l'Université Paris-Diderot.

Magnin Nicolas, Rogalski Marc, (2011). Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale S. Bulletin de l'APMEP n° 492, p. 17-29.

Mamona-Downs J., (2001). Letting the intuitive bear on the formal: a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. Educational Studies in Mathematics 28, p. 259–288.

Math X, (2010). Manuel de terminale S, programme obligatoire. Didier, Paris.

Ovaert Jean-Louis, (1979). Réflexions sur les thèmes de la Commission. Bulletin de l'APMEP n° 317, février 1979, p. 96-106 (Intervention au Colloque des IREMs sur la formation mathématique des professeurs de lycée, à Grenoble en mai 1978. Texte repris dans le bulletin n° 511 de l'APMEP, p. 567-576).

Patras Frédéric, (2002). La pensée mathématique contemporaine. Deuxième édition, Presses Universitaires de France.

Pham Frédéric et Dillinger Hervé, (1996). Algèbre linéaire. Bibliothèque des sciences, Diderot Éditeur, Arts et sciences

Robert Aline, (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. RDM, vol. 3/3, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert Aline, (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en Deug. Bulletin de l'APMEP 340, 431–449.

Robert Aline, Robinet Jacqueline, (1989). Quelques résultats sur l'enseignement de l'algèbre linéaire. Cahier de didactique des mathématiques n° 53, IREM de Paris-Diderot.

Robert Aline, Robinet Jacqueline, (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 16(1), 31–70.

Robinet Jacqueline, (1983) Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4/3, 232-292.

Robinet Jacqueline, (1984). Histoire de la convergence uniforme. Cahiers de didactique n° 9, Université Paris-Diderot.

Robinet Jacqueline, (1984b). Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur. Thèse d'état. Université Paris VII.

Rogalski Marc, (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de Deug A. La Gazette des Mathématiciens 60, p 39-6.

Rogalski Marc, (1995). Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel, que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher, et qu'il n'y ait apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. Didatech, séminaire n° 169, pp. 127-162, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Rogalski Marc, (2002). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. Dans Actes de la journée en hommage à Régine Douady (juin 2001), Publication de l'IREM de Paris 7.

Rogalski Marc, (2006). Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs (Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique). Repères-IREM N° 64, p. 27-46.

Rogalski Marc, (2011). Une expérience d'enseignement de l'algèbre linéaire s'appuyant sur les analyses épistémologiques et didactiques de cet enseignement. Cours à l'Université Fédérale de Sergipe, Aracaju, Brésil (sur ResearchGate : ExAlgLin.ppt.pdf).

Rogalski Marc, (2013). Quelques compléments à l'article de Hervé Quéffelec sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure de Lebesgue : faire simple et pédagogique ?. Gazette des mathématiciens, n° 137.

Rogalski Marc, (2014). Compléments possibles au scénario sur le couple dérivée/tangente ? (Sur ResearchGate : DérivéeTangente2.ppt.pdf).

Rogalski Marc, (2014b). Les futurs mathématiciens de l'université : comment les faire devenir des « enseignants acceptables » ?, Gazette des mathématiciens n° 139.

Rogalski Marc, (2016). De la notion couplée de tangente et dérivée au concept de limites de fonctions (Exposé à Liège, sur ResearchGate : DérivéeTangenteLiègecopie.pdf).

Rogalski Marc, (2016b). Revenir au sens de la notion de limite par certaines de ses raisons d'être : un chantier pour le début de l'analyse à l'université. Actes du colloque INDRUM 2016, p.133-142 (sur HAL).

Rogalski Marc, (2018). De quelques difficultés de l'interdisciplinarité. Actes du Congrès EMF2018 de Gennevilliers, p. 451-459. Paris, IREM de Paris.

Rogalski Marc, Pouyanne Nicolas, Robert Aline, (2001). Carrefours entre analyse algèbre géométrie, Paris, Ed. Ellipses.

Rogalski Janine, Rogalski Marc, (2015). Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes. Un exemple en licence. Actes du colloque emf2015, Alger, p.687-700, Université de Genève.

Saint Raymond Jean, (2008). Topologie, calcul différentiel et variable complexe. Calvage et Mounet, Paris, Nelle édition.

Sierpinska Anna, (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques 6(1), p. 5-68.

Tall David, Vinner Shlomo, (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12(2), p. 151–169.