ACTIVITÉ DU N° 121

LA BATAILLE DE BOULES DE NEIGE
ÉLÉMENTS DE SOLUTION

Rémi MOLINIER[1]
Institut Fourier, IREM de Grenoble, Université Grenoble Alpes

Rappel de l'énoncé

Un groupe de lutins, fatigués d'emballer des cadeaux, décide de se détendre avec une bataille de boules de neige. La règle du jeu est la suivante :

- chaque lutin a une seule boule de neige en main ;
- au premier top, les lutins se déplacent librement tout en gardant leur boule en main ;
- au deuxième top, tout le monde s'immobilise ;
- au troisième top, chacun d'eux doit lancer sa boule sur le lutin le plus proche
  (on suppose qu'il n'y a pas d'ambiguïté et que chaque lutin a un unique plus proche voisin).

Question 1. *Est-il possible qu'au second top, les lutins soient placés de telle façon qu'ils reçoivent chacun au moins une boule de neige ?*

Question 2. *Combien de fois au plus un lutin peut-il être touché ? (on suppose qu'ils jouent sur un terrain plat).*

Cette activité a été inspirée par le problème numéro 2183 du 27/01/2022 d'*Affaire de logique*[2] où l'habillage scénaristique était une partie de paintball.

Éléments de solution

Cycles et permutations

Intéressons-nous d'abord à la question 1 et commençons par remarquer que, si les lutins sont dans une disposition où chacun reçoit au moins une boule de neige, comme il y a autant de lutins que de projectiles, chaque lutin reçoit exactement une boule. Nous sommes donc en présence d'une bijection. Plus précisément, si on note L l'ensemble des lutins et $f : L \to L$ l'application de l'ensemble L dans lui même qui à un lutin $\ell \in L$ associe le lutin $f(\ell) \in L$ qui reçoit la boule de neige lancée par ℓ, alors f est une bijection de L dans lui même, plus communément appelée une *permutation* de L. On peut donc naturellement se poser la question plus générale suivante :

> ***Question 0.*** *Quelles sont les permutations qui peuvent être obtenues lors d'un bataille de boule de neige ?*

La question 1 correspond ainsi à voir que l'ensemble des permutations qui peuvent être obtenues n'est pas vide.

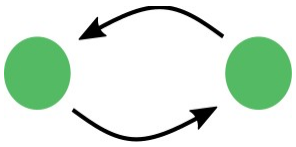
[1] remi.molinier@univ-grenoble-alpes.fr

[2] https://affairedelogique.com/

Une propriété fondamentale des permutations $f : L \to L$ est que toute permutation peut se décomposer en *cycles* (suite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_n)$ d'éléments de L où $\ell_{i+1} = f(\ell_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $f(\ell_n) = \ell_1$) à *supports disjoints* (un élément de L apparaît dans au plus un cycle de la décomposition de f). Cela s'illustre assez bien dans le cadre de la bataille de boules de neige (si on a bien remarqué au préalable que chaque lutin reçoit exactement une boule de neige). En effet, en partant d'un lutin ℓ_1, on regarde le lutin $\ell_2 = f(\ell_1)$ qui reçoit la boule de ℓ_1, puis $\ell_3 = f(\ell_2) = f(f(\ell_1))$ qui reçoit celle de ℓ_2, etc. Comme le nombre de lutin est fini (vous imaginez si le Père Noël devait gérer une infinité de lutins ?[3]), à un moment on retombe sur un lutin qu'on a déjà listé. Cependant, comme chaque lutin reçoit exactement une boule de neige, c'est forcément sur le premier lutin qu'on retombe. On obtient ainsi une cycle $c_1 = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_n)$. On peut alors recommencer en considérant un lutin qui n'apparaît pas dans le cycle précédent pour obtenir un cycle c_2 et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ayons considéré tous les lutins. La permutation f est alors la composition de tous ces cycles c_1, c_2, etc.[4] Ainsi, on peut décomposer le problème en étudiant la réalisabilité de chaque cycle (on pourra alors faire la permutation f en dispatchant les lutins d'un cycle donné suffisamment éloignés des lutins d'un autre cycle pour éviter les interactions entre eux).

> ***Question 0bis.*** *Quel sont les cycles qui peuvent être obtenus lors d'une bataille de boules de neige ?*

Un cycle de longueur deux (ℓ_1, ℓ_2) est facilement réalisable : il suffit de mettre les deux lutins correspondants face-à-face, loin des autres.



Pour les autres cycles, cela semble compliqué… Et c'est normal car ce n'est pas possible. En effet, si on considère un cycle $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_n)$ avec $n > 2$ et qu'on suppose qu'il existe une configuration des lutins qui réalise ce cycle, on peut alors regarder les distances entre ces lutins. Comme ℓ_1 envoie sa boule sur ℓ_2 et ℓ_2 sur ℓ_3, la distance $d(\ell_1, \ell_2)$ entre ℓ_1 et ℓ_2 est strictement plus grande que la distance $d(\ell_2, \ell_3)$ entre ℓ_2 et ℓ_3 et ainsi de suite. On a donc une suite $(d(\ell_k, \ell_{k+1}))_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ strictement décroissante et

$$d(\ell_1, \ell_2) > d(\ell_2, \ell_3) > d(\ell_3, \ell_4) > \ldots > d(\ell_{n-1}, \ell_n) > d(\ell_n, \ell_1).$$

En particulier, $d(\ell_1, \ell_2) > d(\ell_n, \ell_1)$, ce qui est absurde si $n > 2$ car ℓ_1 a lancé sa boule de neige sur ℓ_2 alors que ℓ_n est strictement plus proche de ℓ_1 que ℓ_2.

Ainsi, la réponse à la question 0bis est que seuls les cycles de longueur deux sont réalisables. Cela implique que la réponse à la question 0 est qu'une permutation est réalisable si et seulement si sa décomposition en cycles à supports disjoints n'est formée que de cycles de longueurs deux. Enfin, la réponse à la question 1 est donc qu'il existe une disposition dans laquelle chaque lutin

---

[3] La propriété « toute permutation se décompose en cycles à support disjoints » est tout de même vraie si L est infini, mais il faut alors s'autoriser des cycles de « longueur infinie ».

[4] On notera qu'en général, il est possible d'avoir des cycles de longueur un correspondant à un élément envoyé sur lui même par la permutation (on parle souvent de *point fixe*). Ces cycles n'apparaissent pas lors d'une bataille de boules de neige car aucun lutin ne se lance la boule de neige dessus (à part s'il joue tout seul, à la limite).

reçoit au moins (et donc exactement) une boule de neige si et seulement si le nombre de lutins est pair.

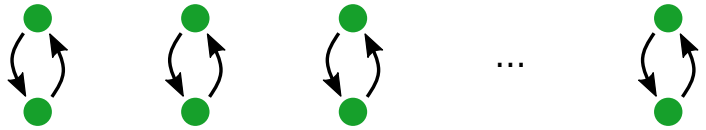


Figure 1 *: Une disposition générique qui répond à la question 1, pour un nombre pair de lutins.*

Un peu de géométrie

Tournons nous maintenant vers la question 2. Fixons un lutin ℓ_0 et essayons de placer d'autres lutins autour de façon que chacun d'eux lance sa boule sur ℓ_0. Une idée qui vient rapidement consiste à placer ces derniers en cercle autour de ℓ_0 de façon régulière, ce qui revient à les placer sur les sommets d'un polygone régulier centré en ℓ_0. On remarque alors que si le nombre de côtés du polygone est supérieur ou égal à 6, on a un problème, car la longueur du coté est plus courte que le rayon (l'hexagone étant le cas limite où le rayon égale la longueur du coté). Nous voyons déjà que ℓ_0 peut-être touché jusqu'à cinq fois au moins (on perturbera radialement les positions des lutins autres que ℓ_0 pour permettre à celui-ci de n'avoir aucune ambiguïté sur sa cible potentielle).

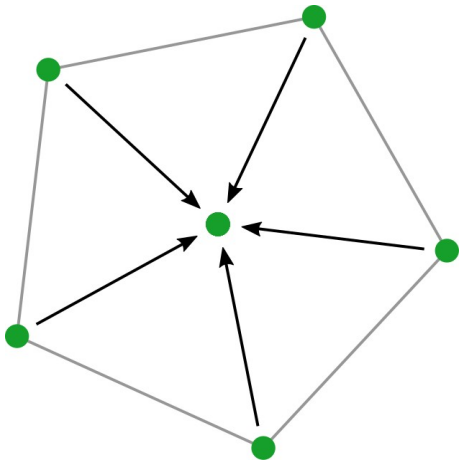


Figure 2 *: disposition des lutins où le lutin central reçoit cinq boules de neige.*

Essayons maintenant de voir pourquoi un lutin (toujours ℓ_0) ne peut être touché plus de cinq fois. Prenons pour cela une situation avec ℓ_0 et deux autres lutins, ℓ_1 et ℓ_2, et supposons que la distance entre ℓ_0 et ℓ_1 est plus grande que la distance entre ℓ_0 et ℓ_2. Le lutin ℓ_2 est supposé lancer sa boule sur ℓ_0, donc en traçant le cercle C_0 de centre ℓ_0 passant par ℓ_1 et le cercle C_1 de centre ℓ_1 et passant par ℓ_0, on remarque alors que ℓ_2 se trouve à l'intérieur de C_0 mais à l'extérieur de C_1 (*cf.* figure 3).

Ainsi, l'angle $\widehat{\ell_1\ell_0\ell_2}$ est supérieur à 60° (l'angle est d'exactement 60° si ℓ_2 est à l'une des deux intersections des deux cercles, ce qui est exclu puisque les lutins formeraient un triangle équilatéral). Ainsi, si on regarde les positions angulaires des lutins par rapport à ℓ_0, l'angle sous lequel ℓ_0, en tournant sur lui-même, voit deux lutins consécutifs est strictement plus grand que

60°. Comme $360=6\times60$, on ne peut pas placer plus de cinq lutins autour de ℓ_0 de façon que chacun jette sa boule sur ce dernier.

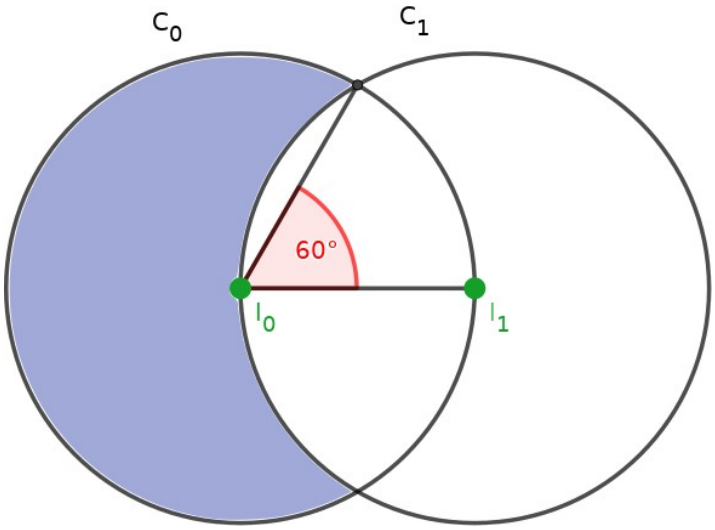


Figure 3 *: Représentation des deux cercles et de la zone (en bleu) dans laquelle se trouve ℓ_2.*

Une extension naturelle de cette question 2 est de relaxer l'hypothèse du terrain plat : qu'en est-il si les lutins peuvent se déplacer en trois dimensions (on pourrait imaginer que les lutins se déplacent dans le ciel à dos de rennes/traîneaux magiques par exemple) ou plus (on vous laisse imaginer l'enrobage scénaristique) ? Les choses deviennent alors beaucoup plus compliquées car on est face au problème du *kissing number*[5], qui est un problème ouvert dès la dimension 5 (mais résolu en dimensions 8 et 24).

Quelques retours d'expériences

Cette activité est proposée de temps en temps dans le supérieur lors de moments de détente en fin de cours par exemple.

En club de maths

Elle a aussi été proposée lors d'une séance du club de math de l'IREM de Grenoble[6] (on trouvera d'ailleurs la fiche d'activité correspondante, sans l'habillage avec des lutins, sur la page du club[7]). Il n'y avait malheureusement pas de neige ce jour-là pour permettre une mise en pratique réelle, cependant l'activité a bien plu aux participant·es (des jeunes du CE2 à la terminale).

Le formalisme en terme de bijection/permutation pour la question 1 n'y était clairement pas attendu mais la notion de cycle est quand à elle apparue assez naturellement (même pour les plus jeunes). Plus précisément, une fois les configurations en paires écartées (comme à la figure 1), l'étude de cycles (ou en tout cas de suites de joueurs en suivant les boules de neiges) sort assez

[5] https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_contact

[6] Lien vers la page du club : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/club-maths-les-maths-autrement--442275.kjsp

[7] Lien direct vers la fiche d'activité : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/club-maths-les-maths-autrement-/bataille-de-boules-de-neige-1166910.kjsp?RH=413148517470877

naturellement pour étudier le problème. La justification, quant à elle, a été plus laborieuse, surtout lorsqu'iels n'avaient pas forcément identifié le fait que chaque joueur recevait exactement une boule de neige.

La question 2 a posé plus de problèmes. L'idée de mettre les lutins sur un cercle et de faire ressortir des configurations selon des polygones réguliers est sortie assez naturellement, mais identifier par exemple que ça pose problème à partir de six n'était pas forcément évident. Cela est sûrement dû, en particulier pour les plus jeunes, au cadre géométrique nécessaire, qui demandait pour une fois plus de bagage mathématique[8] pour une résolution non assistée. Cependant, avec un peu d'aide, les participant·es qui se sont attaqué·es à cette questions ont pu aboutir à une justification satisfaisante (qui ce soit en terme d'angles ou juste de dessins avec des cercles pour les plus jeunes).

Avec des classes en extérieur

Enfin, l'activité a également été proposée en extérieur, dans un collège, à deux classes (3e et 5e) lors de séances d'environ une heure pendant la Semaine des mathématiques. Lors de ces expérimentations, seule la première question a été abordée.

Dans les deux cas, le jeu a été introduit avec un groupe de sept élèves. La consigne était la suivante : se déplacer, s'arrêter, puis désigner du doigt la personne la plus proche. Ensuite, on leur a posé la question : « Est-ce que tout le monde est pointé du doigt ? ». Après avoir compté le nombre d'élèves non pointés, les élèves ont réalisé une deuxième tentative (sans succès) avec une consigne supplémentaire : « Essayez de vous positionner de manière que tout le monde soit pointé du doigt ».

Les élèves ont ensuite été réparti·es en groupes de 3 à 5 personnes pour réfléchir à la question. Ils disposaient de craies pour dessiner sur le sol et de cordes pour mesurer les distances. Cette mise en forme de l'activité s'est révélée propice à la dévolution du problème, et chaque groupe est resté actif jusqu'à la fin de la séance.

Beaucoup d'élèves ont proposé une disposition en cercle, menant souvent à une configuration régulière (c'est-à-dire selon un polyèdre régulier). Cela a permis de revenir sur l'énoncé : la consigne initiale ne précisait pas l'absence d'ambiguïté dans le choix des cibles. On leur a donc expliqué que leur solution, bien que pouvant répondre au problème, n'était pas entièrement satisfaisante[9], et qu'il faudrait une configuration où chacun·e n'avait pas le « choix » de sa cible.

Les groupes ont principalement testé des configurations correspondant au nombre de personnes présentes. Tous ont trouvé rapidement la solution pour un nombre pair de participants. L'impossibilité du cas impair a été évoquée par la plupart des groupes, sans véritable démonstration, bien que l'idée d'analyser les cycles soit apparue plusieurs fois.

Les deux séances se sont terminées par une mise en commun et une ébauche de preuve (dessinée à la craie sur le sol) pour le cas impair. Enfin, un groupe, refusant d'exclure la possibilité d'une solution dans le cas impair, a tenté d'exploiter la troisième dimension en utilisant un espace sous un escalier en métal situé dans la cour.

---

[8] Contrairement aux autres séances, où aucun bagage mathématique n'est nécessaire.

[9] Le rejet d'une telle solution n'a en général pas posé de problème et iels acceptaient bien que c'était « un peu tricher ».