TRANSPOSITION DIDACTIQUE DES SAVOIRS DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES - EXEMPLES ET ANALYSE

Yannis THOMAIDIS[1]
Central Administration of Education, Thessaloniki, Greece

Constantinos TZANAKIS[2]
Department of Education, University of Greece, Rethymnon, Greece

Résumé. Cet article vise à mettre au jour les conditions d'une transposition didactique appropriée des savoirs relatifs à l'histoire des mathématiques, telle qu'elles sont apparues ces dernières années dans les recherches menées dans le domaine des HPM (*History and Pedagogy of Mathematics*). À cette fin, nous examinons la façon dont Euler traite l'égalité dans son *Traité d'algèbre*, en faisant valoir que, pour des raisons didactiques, il y utilise deux notions distinctes de l'égalité : une conception « réduction » et une conception « relation d'équivalence ». D'une part, Euler, ayant une compréhension claire de cette dernière et de son importance en tant que notion mathématique, il les utilisait de manière compatible. D'un autre côté, des recherches didactiques ont montré que les élèves utilisent également ces deux conceptions, bien qu'entremêlées, ce qui conduit à des confusions et de graves erreurs. En nous appuyant sur cet exemple qui met en évidence les similitudes entre le passé et le présent, mais souligne également leurs différences importantes, nous soutenons que l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques pourrait être bénéfique à condition d'une transposition didactique appropriée des connaissances historiques académiques. Dans cette optique, dans des travaux antérieurs sur l'enseignement des nombres complexes, nous avons proposé une formulation provisoire de quatre critères pour une telle transposition. Nous cherchons ici à les illustrer : nous présentons le plan d'une activité d'enseignement liée à l'égalité des figures géométriques telle qu'elle apparaît dans la géométrie euclidienne scolaire et dans les *notions communes* des *Éléments* d'Euclide, sur la base d'une analyse historique des subtilités inhérentes à ces notions communes.

Mots-clés. Histoire dans l'enseignement des mathématiques, transposition didactique des savoirs historiques, notions d'égalité, *Algèbre* d'Euler, *Éléments* d'Euclide, *notions communes* d'Euclide.

Abstract. We attempt to reveal the need for an appropriate didactical transposition of historical mathematical knowledge, as it has emerged in recent years from research conducted in the HPM domain. To this end, we consider the way Euler treats equality in his *Algebra*, arguing that for didactical reasons he uses two distinct notions of equality there; a « reduction conception » and an « equivalence relation conception ». However, Euler, having a clear understanding of the latter and its importance as a mathematical notion, used them consistently. On the other hand, didactical research has shown that students also use these two conceptions, albeit intermingled, thus getting confused and committing grave mistakes. Based on this example that points to similarities between past and present but also stresses their important differences, we argue that using history of mathematics in mathematics education could be beneficial on the condition of an appropriate didactical transposition of academic historical knowledge. Along these lines, in previous work on the teaching of imaginary numbers, we gave a tentative formulation of four criteria for such a transposition. Here we attempt to exemplify them: We present the plan of a teaching activity related to the equality of geometrical figures as it appears in school Euclidean geometry and in the *Common notions* of Euclid's *Elements*, on the basis of a historical analysis of the subtleties inherent in these *Common notions*.

Keywords. History in mathematics education, didactical transposition of historical knowledge, equality notions, Euler's *Algebra*, Euclid's *Elements*, Euclid's *Common notions*.

Traduit de l'anglais par DeepL et Renaud CHORLAY.

[1] gthom54@gmail.com

[2] k.tzanakis@uoc.gr

Introduction

La « question du parallélisme »

L'importance éventuelle de l'histoire des mathématiques (HM) dans l'enseignement des mathématiques (EM) a été discutée et défendue depuis la fin du XIX^{e} siècle, mais l'intérêt pour ce sujet s'est considérablement accru depuis les années 1960. Dans ce cadre, on a d'abord suggéré l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques devaient suivre ou/et correspondre au développement historique ; ce que nous avons appelé la « question du parallélisme »[3] (Thomaidis & Tzanakis, 2023). Prenons deux exemples caractéristiques :

> *La meilleure façon de guider le développement intellectuel de l'individu est de lui faire retracer le développement mental de l'espèce — retracer ses grandes lignes, … et non les mille erreurs de détail* (Mémorandum, 1962, pp. 190-191, notre traduction).
>
> *Recommander que les idées soient enseignées génétiquement ne signifie pas qu'elles doivent être présentées dans l'ordre dans lequel elles sont apparues, même si tous les blocages ont été levés et tous les détours évités. Ce que les aveugles ont inventé et découvert, les voyants peuvent dire par la suite comment cela aurait dû être découvert s'il y avait eu des enseignants qui avaient su ce que nous savons maintenant… Ce ne sont pas les traces historiques de l'inventeur que nous devrions suivre, mais un cours de l'histoire amélioré et mieux guidé* (Freudenthal, 1973, pp. 101, 103, notre traduction).

Bien que la nature spécifique des positions ci-dessus sur le rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement découle en partie de l'opposition de ces auteurs à la réforme des « mathématiques modernes », il convient de noter la vision quelque peu dédaigneuse des connaissances passées en se référant aux « mille erreurs », en comparant les « aveugles » aux « voyants », le passé *versus* le présent, etc.[4]

Cependant, à mesure que la didactique des mathématiques s'est développée en tant que domaine de recherche, des points de vue plus nuancés ont été exprimés, arguant que même si les conditions dans une classe moderne sont très différentes de celles dans lesquelles les mathématiciens du passé travaillaient,

> [l'] *étude des obstacles rencontrés par les mathématiciens du passé nous aide à interpréter les erreurs commises par les élèves d'aujourd'hui ; à son tour, l'étude des erreurs, des difficultés et des conceptualisations erronées des élèves nous aide à comprendre l'histoire des mathématiques* (Vergnaud, 1990, p. 16, notre traduction).

Nous insistons ici sur :

(a) la reconnaissance de l'existence d'une relation bidirectionnelle entre la didactique et l'histoire, et la prise en compte de sa complexité en raison des différences entre les deux « mondes » (la classe d'aujourd'hui et les mathématiques savantes dans l'histoire) ;

(b) l'accent mis sur des aspects « négatifs » de cette relation, c'est-à-dire la mise en relation de l'apprentissage dans la classe moderne et de l'activité mathématique dans le passé uniquement à travers des erreurs, des difficultés et des conceptualisations erronées.

---

[3] En réalité, il existe tout un éventail de points de vue et d'incitations méthodologiques qui portent différents noms : récapitulativisme, approche historico-génétique, parallélisme historique, arguments évolutionnistes, etc.

[4] Ces points sont au cœur du malaise de nombreux historiens quant au rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques. Cependant, notre objectif n'est pas de catégoriser des chercheurs en particulier, mais de mettre au jour des points de vue et des raisonnements spécifiques illustrés par ces citations.

À la suite des recherches menées dans le domaine HPM (*History and Pedagogy of Mathematics*[5]) dans les années 1980-1990, on s'est progressivement rendu compte que les interrelations entre l'histoire des mathématiques et les questions didactiques étaient plus complexes qu'on ne le pensait à l'origine, ce qui a nécessité une étude plus approfondie des subtilités inhérentes à toute mise en œuvre didactique des questions historiques ; un fait clairement souligné, par exemple, par Fried (2007) :

> […] *dans la mesure où l'enseignement des mathématiques s'inscrit dans un programme traditionnel, qui est consacré aux mathématiques modernes* […]*, ses tentatives d'incorporation de l'histoire des mathématiques la conduiront à subordonner l'histoire à des fins modernes et, par conséquent, à adopter une histoire* ***anachronique****, donc une histoire non historique ; d'autre part, les historiens des mathématiques* […] *se consacrent à la recherche des différences entre les mathématiques du passé et celles du présent* […]*, de sorte que faire de l'histoire d'une manière conforme à l'esprit de la discipline historique conduira l'enseignement dans des domaines que le programme habituel jugerait non pertinents et une perte de temps* (Fried, 2007, pp. 203-204, c'est nous qui soulignons et traduisons).

Ici, Fried met en évidence un « conflit d'obligations » (*clash of commitments*) entre histoire et didactique (*ibid.*, p. 207 ; *cf.* Fried, 2001), en soulignant les distorsions des mathématiques du passé (donc des mathématiques considérées non seulement comme un corpus structuré de connaissances, mais aussi comme les processus de construction du sens menant à ces connaissances), causées par la prise en compte d'éventuelles similitudes entre le passé et le présent ne prêtant pas l'attention nécessaire à leurs dissemblances. Nous donnons deux exemples typiques auxquels cette critique s'applique.

Dans le premier, une perspective délibérément anachronique est choisie pour des raisons didactiques :

> *Certains historiens des mathématiques pourraient trouver à redire à mon utilisation anachronique de la notation moderne et* […] *des interprétations (assez) modernes de mathématiques classiques. Cela comporte certains risques, comme celui de donner l'impression que les mathématiques étaient plus simples qu'elles ne l'étaient réellement à l'époque, mais le risque d'obscurcir les idées par une notation lourde et peu familière est plus grand* […] *c'est* […] *un lieu commun de dire que... les idées mathématiques apparaissent généralement avant qu'il n'y ait de notation ou de langage pour les exprimer clairement, et* […] *que les idées sont implicites avant de devenir explicites. Ainsi, l'historien, qui essaie vraisemblablement d'être à la fois clair et explicite, n'a souvent d'autre choix que d'être anachronique lorsqu'il retrace les origines des idées* (Stillwell, 1989, p. viii, notre traduction[6]).

Dans le deuxième exemple, l'auteur se demande où une insistance stricte sur la rigueur mathématique et/ou l'exactitude historique peut mener dans un contexte éducatif.

> […] *une insistance stricte sur l'exactitude doctrinaire tend à vider le sujet de sa substance, de sorte qu'il n'en reste que l'enveloppe sèche… Je préfère de loin être parfois imprécis mais compréhensible, plutôt que d'être tout à fait exact mais incompréhensible* (Simmons, 1991, p. xix, notre traduction).

---

[5] D'après le nom du *International Study Group on the relations between the History and Pedagogy of Mathematics*, abrégé en *HPM Group*. https://hpm.sites.uu.nl/

[6] Il s'agit d'une réponse claire au dilemme de Fried : *«* […] *une tendance non historique entre dans l'enseignement des mathématiques lorsque l'histoire est considérée uniquement comme quelque chose* ***à utiliser****, et cela conduit à une sorte de dilemme pour l'enseignant qui s'intéresse sérieusement à l'histoire »* (Fried, 2018, p. 86, c'est nous qui soulignons et traduisons), bien que Fried considère ce dilemme comme une occasion de reconsidérer le sens réel de l'enseignement des mathématiques.

Complémentarité entre les similitudes et les dissemblances du passé et du présent, et transposition didactique des connaissances[7] historiques

Ces points de vue soulignent les subtilités inhérentes à la tentative de servir « correctement » les objectifs et les nécessités intellectuelles de la didactique et de l'histoire des mathématiques, d'où le subtil équilibre à atteindre pour qu'aucune d'eux ne soit déformé ou/et inefficace. Par conséquent, selon Fried (2007), ce que nous devrions faire est

> *(1) faire ressortir les implications, dans le contexte de l'enseignement des mathématiques, de la prise en compte de l'histoire* […] *dans les spécificités de sa démarche et de ses méthodes ; (2) en montrant qu'un dilemme se pose lorsque s'en tient aux engagements [commitments] traditionnels de l'enseignement, ce qui implique que ces engagements doivent être reconsidérés si l'on veut que l'histoire des mathématiques joue un rôle significatif dans la formation d'élèves sachant réellement des mathématiques* […] *; dilemme* [qui] *reflète une division profonde* […] *entre des manières véritablement différentes de connaître : Épistémologie historique* vs *épistémologie mathématique, ou encore, épistémologie diachronique* vs *épistémologie synchronique. Mais* […] *ces épistémologies ne doivent pas être considérées comme concurrentes,* […] *mais comme **étant complémentaires*** (ibid., p. 204 ; c'est nous qui soulignons et traduisons).

De ce point de vue, le dilemme ci-dessus peut être résolu en appréciant le caractère *complémentaire* des deux épistémologies (pour plus de détails, *cf.* Thomaidis & Tzanakis, 2022, p. 1453). Cependant, malgré la reconnaissance de la complémentarité de ces deux épistémologies (ou perspectives) plutôt que de leur rivalité, une asymétrie demeure dans la position défendue par Fried, qui invite à reconsidérer uniquement les objectifs et les obligations de l'enseignement, mais de continuer à envisager l'histoire dans un contexte d'enseignement selon le point de vue des historiens professionnels. Ce dilemme et cette asymétrie ont été soulignés par Kjeldsen (2012), qui affirme que bien que les discussions sur ce dilemme

> […] *se sont concentrées sur la transformation des points de vue sur les mathématiques et leur enseignement, la conception de l'histoire a été considérée comme plus ou moins synonyme d'une approche traditionnelle de l'histoire par les historiens professionnels — du moins dans les approches méthodologiques et les critères de ce qui caractérisent une approche authentique de l'histoire. Cependant,* […] *lorsque nous traitons de l'intégration de l'histoire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, nous devons garder à l'esprit que l'éducation et la formation d'historiens des mathématiques professionnels ne sont pas l'objectif principal de l'enseignement général des mathématiques* […] *il semble trop restrictif d'exiger que l'histoire des mathématiques enseignée dans le cadre de l'enseignement des mathématiques soient présentées comme de l'histoire académique traditionnelle. Une* ***transposition didactique*** *est nécessaire, tout comme dans le cas des mathématiques scolaires, qui ne sont pas non plus identiques à la discipline des mathématiques (académiques) (Kjeldsen, 2012, pp. 333-334 ; c'est nous qui soulignons et traduisons).*

À la lumière de ce discours critique et puisque la question du parallélisme sous sa forme naïve (présentée au début) est intenable, plusieurs points délicats doivent être clarifiés : que signifie établir un parallèle entre le monde d'un mathématicien créatif du passé et le monde d'un élève apprenant les mathématiques dans une salle de classe moderne et quelle peut être sa pertinence pour l'enseignement des mathématiques ? Existe-t-il des similitudes entre le travail créatif de mathématicien du passé et les modes d'apprentissage des mathématiques des élèves ? Si oui, quelles sont les limites imposées par les différences entre ces deux mondes, et comment pourraient-elles être bénéfiques à la fois pour l'enseignement des mathématiques et pour la

[7] Dans tout cet article, pour des raisons de fluidité, nous préférons « connaissances » à « savoir » pour désigner les savoirs relatifs aux mathématiques du passé issus de la recherche universitaire.

compréhension du développement historique ? (Thomaidis & Tzanakis, 2023, section 2 ; 2007, section 1 ; 2022, section 1.2).

Ces questions complètent le compte rendu critique ci-dessus : une distorsion de l'histoire se produit si l'on prend en compte des similitudes entre le passé et le présent sans tenir compte des dissemblances, tandis que la mauvaise focalisation de la réflexion didactique résulte de la prise en compte des dissemblances entre le passé et le présent sans tenir compte de leurs similitudes. Ici, les similitudes conduisent à deux parallèles possibles. D'une part un *parallélisme négatif* : entre les obstacles, les idées fausses, les erreurs, les difficultés, les formulations prématurées des élèves, également rencontrés par les mathématiciens du passé. D'autre part, un *parallélisme positif* (Thomaidis & Tzanakis, 2007) : entre les moyens innovants et manières idiosyncrasiques de faire face à des questions et des problèmes qui ne sont pas traités de manière adéquate (par les élèves ou les mathématiciens du passé) selon les normes modernes de la connaissance mathématique académique, mais sont traitées avec les connaissances disponibles à une époque ou à un niveau scolaire donné. Quant à elles, les dissemblances renvoient aux différences entre les conditions sociales, cognitives, culturelles et scientifiques du monde des mathématiciens du passé et celui des élèves d'aujourd'hui.

Ainsi, dans le contexte de l'enseignement, les similitudes et les dissemblances entre le passé et le présent ont des fonctions *complémentaires*, qui exigent des enseignants et des éducateurs en mathématiques qu'ils parviennent à un équilibre subtil, en restant fidèles aux connaissances historiques tout en les adaptant en même temps aux besoins et au niveau scolaire des apprenants. Cette complémentarité peut aider à résoudre le « conflit d'obligations » mentionné ci-dessus et est au cœur de ce qui peut être une transposition didactique appropriée des connaissances historiques (comme cela a été fait de manière similaire pour les connaissances mathématiques savantes) au sens de Chevallard :

> *Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les* ***objets d'enseignement****. Le « travail » qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique*[8] (Chevallard & Johsua, 1991, p. 39 ; texte souligné dans l'original).

Cette transposition pourrait être inspirée et guidée par les similitudes entre le travail créatif des mathématiciens du passé et les modes d'apprentissage des élèves, à condition toutefois que les dissemblances entre le passé et le présent soient soigneusement prises en compte (Thomaidis & Tzanakis, 2023, section 2). Les caractéristiques d'une telle transposition didactique doivent être telles que, d'une part, elles aident à évaluer les propositions d'enseignement, et d'autre part, elles permettent de modifier ces caractéristiques qui émergeront lors de la mise en œuvre de ces propositions.

Structure de cet article

À la lumière de cette discussion, l'article est structuré comme suit : Dans la partie 1.1, nous abordons un problème didactique classique : l'existence de certains malentendus concernant le concept d'égalité en tant que relation d'équivalence et l'utilisation du symbole d'égalité. Plus précisément, sur la base de données issues de la recherche didactique, nous soutenons que ces

[8] Il s'agit d'une tâche non triviale qui, bien que *« […] inévitable, nécessaire et, dans un sens, regrettable doit être gardée sous surveillance »* (Brousseau, 1997, p. 21, notre traduction), étant donné que *« […] de l'objet de savoir à l'objet d'enseignement, la distance est, bien souvent, immense »* (Chevallard & Johsua, 1991, p. 43). En effet, *« On pourrait soutenir qu'une certaine distorsion sera inévitable à des fins d'enseignement, mais qu'elle devrait au moins être pratiquée de manière « contrôlée » »* (Schubring, 2008, pp. 5-6, notre traduction).

malentendus sont étroitement liés à l'utilisation fréquente du symbole d'égalité de manière incompatible avec son rôle actuel d'expression d'une relation d'équivalence. Ces résultats se retrouvent également chez les adultes du grand public aujourd'hui. Dans la partie 1.2, nous examinons la façon dont Euler traite de l'égalité dans son influent *Traité d'algèbre* (Euler, 1770). Ayant une intuition aiguë des difficultés et des malentendus auxquels sont confrontés les débutants en algèbre, Euler, avec une profonde conscience didactique dans ce traité essentiellement à vocation d'enseignement (*cf.* note de bas de page 13 ci-dessous), utilise deux notions distinctes d'égalité : une conception de « réduction procédurale » plus facile à saisir et à appliquer dans les calculs arithmétiques, et une conception d'« équivalence » relationnelle correspondant à la notion moderne d'égalité en tant que relation d'équivalence. Cependant, Euler, ayant une compréhension claire de cette dernière et de son importance en tant que notion mathématique, les utilisait de manière compatible (Thomaidis & Tzanakis, 2022, 2023).

Motivés par ces résultats, nous avons récemment examiné le cas historique de la conception des nombres imaginaires comme moyen de résoudre les équations cubiques, en relation avec leur enseignement au lycée. Nous avons examiné les arguments justifiant leur introduction dans les manuels scolaires en fonction de leur exactitude et de leur pertinence historique, en mettant l'accent sur le cas de la Grèce (Thomaidis & Tzanakis, 2025). Une fois de plus, cela a révélé le besoin d'une transposition didactique appropriée des connaissances sur l'histoire des mathématiques et nous a conduit à formuler des critères d'évaluation des propositions pédagogiques basées sur l'histoire ou s'en inspirant.

Dans la partie 2, nous présentons un aperçu de ce travail et la formulation provisoire de quatre de critères qui doivent être compris comme un ensemble cohérent de questions sur des exigences interdépendantes. Nous insistons également sur la nécessité de vérifier, à la fois la pertinence de ces critères dans des applications spécifiques et, réciproquement, leur utilité dans la conception de propositions pédagogiques d'enseignement.

À cette fin et dans l'esprit de la partie 1, nous discutons au début de la partie 3 des subtilités liées à l'égalité des figures géométriques dans les *Éléments* d'Euclide. C'est un sujet qui soulève des questions historiques encore « débattues » ou en discussion tant par les historiens que par les mathématiciens, et qui pose d'importantes difficultés dans l'enseignement de la géométrie euclidienne à l'école. Après quelques considérations didactiques sur cet enseignement — illustrées dans le cas grec —, nous présentons ensuite le le plan d'une activité d'enseignement liée à l'égalité des figures géométriques dans le contexte de la géométrie euclidienne, adaptée aux élèves du deuxième cycle de l'enseignement secondaire (en ayant à l'esprit la première année du lycée grec, élèves de 15 à 16 ans). Cette activité relève principalement de la *« disposition à la construction de théories »* (*theory-building disposition*) au sens de Weiss et Herbst (2015), plutôt que de la *« disposition à la résolution de problèmes »* (*problem-solving disposition*), complémentaire[9]. En fin de partie 3, nous examinons cette activité à la lumière des quatre critères de la partie 2. Enfin, dans la partie 4, nous concluons par quelques remarques sur la nécessité de concevoir et de mettre en œuvre des activités d'enseignement qui permettront de

[9] Ces dispositions, ou perspectives, *« diffèrent en ce que la construction de théories* [theory-building] *s'intéresse principalement au contenu d'un résultat et à ses relations sémantiques avec d'autres résultats, tandis que la résolution de problèmes* [problem-solving] *s'intéresse principalement à la mise au point et à l'application de méthodes par lesquelles un résultat est obtenu… »*, formant ainsi une paire dialectique de *« différentes manières d'apprécier le travail mathématique* [et pointant]*, en un sens, dans des directions opposées : La construction de théories montre comment l'énoncé d'un résultat donné est lié à d'autres résultats, tandis que la résolution de problèmes montre comment les méthodes utilisées pour prouver le résultat sont liées à celles utilisées pour prouver d'autres résultats »* (Weiss & Herbst, 2015, p. 208, notre traduction).

vérifier l'applicabilité de ces critères et/ou d'affiner leur formulation, contribuant ainsi à résoudre le « conflit d'obligations » entre l'histoire des mathématiques et l'enseignement de cette discipline.

1. Subtilités inhérentes au concept d'égalité

1.1. Aspects didactiques

Notions d'égalité en arithmétique élémentaire et en algèbre

Il existe une idée fausse largement répandue chez les élèves sur la sens et le symbole de l'égalité en mathématiques, qui trouve son origine dans l'enseignement des opérations arithmétiques à l'école élémentaire :

> […] *alors qu'en arithmétique, le signe égal est généralement considéré comme une invitation à calculer (par exemple,* $3+2=$ *signifie « additionne les nombres et écris la somme à droite du signe égal »), en algèbre, le signe égal peut également avoir de nombreuses autres significations : équivalence générale de deux expressions, une façon de définir l'expression à sa gauche comme l'expression à sa droite (par exemple,* $f(x)=3x$*) et plus encore. La subtile évolution des sens du signe d'égalité est problématique pour de nombreux élèves* (Tabach *et al.*, 2008, p. 54, notre traduction).

En effet, à l'école primaire, ce signe est compris comme un *opérateur* portant sur une suite d'opérations successives dans le membre de gauche et menant au membre de droite. Malgré les interventions didactiques visant à l'enseigner comme étant symétrique et transitif (c'est-à-dire désignant essentiellement une relation d'équivalence entre les éléments d'un ensemble conformément aux mathématiques actuelles), la recherche didactique confirme que cette interprétation persiste ; par exemple :

> […] *à l'école primaire, le signe égal est davantage utilisé pour annoncer un résultat que pour exprimer une relation symétrique et transitive. Pour tenter de résoudre le problème*
>
> *« Daniel est allé rendre visite à sa grand-mère, qui lui a donné 1,50 \$. Il a ensuite acheté un livre qui coûte 3,20 \$. S'il lui reste 2,30 \$, combien d'argent avait-il avant de rendre visite à sa grand-mère ? »*
>
> *Les élèves de sixième l'écriront souvent* $2.30+3.20=5.50-1.50=4.00$*. La symétrie et la transitivité du signe égal ne sont pas respectées.* [Il] *est lu comme « donne », c'est-à-dire comme un signal directionnel de gauche à droite* (Kieran, 1990, p. 98, notre traduction).

En fait, respecter le caractère symétrique et transitif de l'égalité est le changement d'interprétation nécessaire concernant le signe égal qui doit se produire en algèbre. Pourtant, ce n'est pas le cas pour de nombreux étudiants, même pendant leurs études supérieures, bien qu'ils puissent obtenir le résultat correct lorsqu'ils traitent de questions algébriques :

> *Le fait que les étudiants en algèbre plus âgés continuent à considérer le signe égal comme un symbole de séparation plutôt que comme un signe d'équivalence se manifeste dans des raccourcis dans les résolutions d'équations et dans des manières confuses d'« ajouter la même chose aux deux membres » :*
>
> *« Résoudre :*
>
> $$2x+3=5+x$$
> $$2x+3-3=5+x$$
> $$2x=5+x-x-3$$
> $$2x-x=5-3$$
> $$x=2 \text{ »}$$

> *Cette utilisation du signe égal persiste longtemps à l'université,* […] *les étudiants* […] *testés avaient une mauvaise compréhension de l'équivalence et du sens du signe égal, malgré leur capacité à résoudre avec succès différents types d'équations linéaires* (*ibid.*, pp. 100-101, notre traduction).

Selon Freudenthal, des expressions telles que $a+b=$, ou $4+3=$ sont *« essentiellement interprétées comme une tâche ou une question »* (Freudenthal, 1983, p. 477), et non comme exprimant une symétrie entre les deux côtés du signe « = ». Cette interprétation domine souvent dans les manipulations algébriques élémentaires impliquant *« une interprétation asymétrique du signe d'égalité comme étant dirigée unilatéralement vers une « réduction » »* (*ibid.*, p. 481) ; dans ce cadre, l'égalité est comprise comme une séquence d'étapes ordonnées dans le temps, qui, en partant du membre de gauche, la réduit au membre de droite (Vergnaud, 1988, pp. 39-40). Nous avons forgé le terme *« conception « réduction » »* de l'égalité pour cette interprétation, qui est également utilisée dans les textes historiques (*cf.* la sous-partie suivante ; Thomaidis & Tzanakis, 2022, section 4.2 ; 2023, section 3).

Utilisation de la conception « réduction » de l'égalité par les adultes

Cette conception « réduction » de l'égalité se retrouve également chez les adultes, par exemple dans les magazines traitant de questions économiques et fiscales destinés au grand public. Dans ces magazines, il est courant d'utiliser cette conception avec le signe égal pour plus de concision dans les exemples exprimés de manière symbolique. Par exemple, selon la législation fiscale grecque, les paiements par voie électronique doivent dépasser 30 % du revenu annuel. Sinon, un impôt supplémentaire de 11 % sur la différence est ajouté. Par conséquent, dans l'exemple suivant :

> *Avec un revenu annuel de 16 000 €, les paiements par voie électronique devraient être de 4 800 €, mais seulement 3 500 € ont été réalisés,*

l'auteur d'un de ces magazines écrit ainsi le calcul de l'impôt supplémentaire (Melas, 2021, p. 163, notre traduction) :

$$16\,000 \times 30\,\% = 4\,800 - 3\,500 = 1\,300 \times 11\,\% = 143\,€$$

De toute évidence, l'auteur sait de quoi il parle, mais il souhaite présenter la solution du problème sous une forme concise pour que le lecteur la comprenne comme un *processus* qui, à partir des données initiales de chacun, conduira au résultat souhaité !

Il en va de même pour les élèves dans l'exemple de Kieran ci-dessus. La conception « réduction » de l'égalité est évidente dans l'enchaînement d'« égalités » $2{,}30+3{,}20=5{,}50-1{,}50=4{,}00$, bien que les élèves aient compris le problème et la façon de le résoudre. En réalité, leur solution peut être formulée en deux étapes sans le symbole d'égalité : « en ajoutant 2,30 à 3,20, on obtient 5,50, puis en soustrayant 1,50 de 5,50, on obtient 4,00 ». Cependant, l'insuffisance de cette conception est évidente dans le deuxième exemple de Kieran : Les élèves qui résolvent $2x+3=5+x$ de cette manière utilisent la conception « réduction » de l'égalité dans la transformation successive de l'un ou l'autre membre, violant ainsi la notion même d'équation et la cohérence logique de la méthode de résolution. Ils rencontrent donc des difficultés insurmontables pour procéder efficacement dans des situations impliquant des manipulations algébriques plus élaborées.

1.2. Aspects historiques

*Notions d'égalité dans l'***Algèbre** *d'Euler*

Dans son influent *Traité d'algèbre* (Euler, 1770) — un ouvrage d'initiation à l'algèbre qui n'est pas destiné spécifiquement à de jeunes élèves —, Euler rédige les 19 premiers des 49 chapitres du premier volume (environ 40 %) sans utiliser le symbole d'égalité, bien que ces chapitres incluent toutes les opérations de base, jusqu'à l'élévation à une puissance et l'extraction de racine. Le signe « $=$ » est introduit au chapitre 20, afin d'appliquer les opérations algébriques à la transformation des relations de proportionnalité et à la résolution des équations :

> *Nous nous servirons* […] *d'un nouveau signe qu'on peut employer à la place de l'expression si souvent répétée, est* ***autant que***[10] *; ce signe est celui-ci $=$, et se prononce est égal*[11]*. Ainsi, quand j'écris $a=b$, cela signifie que a est autant que b, ou que a est égal à b*[12] […] (Euler, 1774, § 206, p. 150, texte souligné dans l'original de Euler, 1770, vol. 1, § 206, p. 86).

Cette introduction « retardée » du signe « $=$ » est remarquable et singulière — d'un point de vue moderne ; elle n'a jusqu'ici pas été relevée par les historiens des mathématiques. Ceci est crucial dans ce qui suit car cela a conduit à des malentendus sur la pensée d'Euler (en particulier son traitement du produit des racines carrées) ; un fait d'abord souligné et analysé de manière convaincante par Martinez (2007). Notons seulement qu'il s'agissait probablement d'un choix délibéré d'Euler, compte tenu des difficultés rencontrées par les personnes qui ne sont pas familiarisées avec la pensée et le symbolisme algébriques (par exemple de jeunes élèves)[13]. Par conséquent, il a reporté leur exposition au formalisme de la représentation symbolique des relations algébriques jusqu'à ce que cela soit absolument nécessaire, c'est-à-dire lorsque Euler a abordé la transformation des équations en formes équivalentes. Sans le symbole d'égalité, les règles algébriques standard, y compris les racines carrées des nombres négatifs, sont formulées *verbalement* dans cette partie du livre. Par exemple, avant d'introduire « $=$ », Euler énonce ainsi la règle du produit de deux racines carrées de nombres positifs :

> *Mais quand il s'agit de multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, le produit est $\sqrt{ab}$;* […] *C'est pourquoi l'on trouve la racine carrée du produit ab, laquelle est $\sqrt{ab}$ en multipliant la racine carrée de a ou $\sqrt{a}$, par la racine carrée de b, ou par $\sqrt{b}$* (Euler, 1774, § 132, p. 98 ; original dans Euler, 1770, vol. 1, § 132, p. 56).

et de même pour les racines carrées des nombres négatifs :

---

[10] *« Ist so viel als »* dans l'original. Ci-dessous, nous utilisons la traduction française de 1774 (en conservant l'orthographe), qui est plus proche de l'original allemand que les éditions anglaises ultérieures (pour plus de détails, *cf.* Thomaidis & Tzanakis (2022, section 4.2)).

[11] *« Ist gleich »* dans l'original.

[12] *« daß a eben so viel sein als b »* dans l'original, signifiant littéralement « que *a* est **exactement** autant que *b* » ; l'emphatique *« eben so »* n'apparaît ni dans les éditions françaises ni dans les éditions anglaises.

[13] Le livre a été dicté à son serviteur qui *« […] était complètement ignorant en mathématiques. Mais Euler, aveugle comme il l'était, avait l'intention d'enseigner à son secrétaire, alors qu'il avançait dans le sujet... son traité avait l'avantage d'avoir été composé en expérimentant directement la méthode la mieux adaptée au progrès naturel des idées d'*un *apprenant »* (mémoire de F. Horner dans Euler (1822), pp. xix-xx, notre traduction ; également Euler (1770), Vorbericht). De plus, *« […] il n'a laissé le texte inchangé qu'après s'être assuré que le manuscrit était clair et compréhensible pour cet homme »* (Wussing & Arnold, 1978, p. 255, notre traduction ; voir aussi Loria 1950, § 554 ; Nový, 1973, p. 6). En outre, il convient de noter que ce choix didactique d'Euler a également été défendu dans un contexte moderne en faisant directement référence à l'ouvrage d'Euler (Kuřina & Siebeneicher, 2008).

Maintenant, comme $-a$ *signifie autant que* $+a$ *multiplié par* -1*, et que la racine quarrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multipliée par* -1*, ou* $\sqrt{-a}$*, est autant que* $\sqrt{a}$ *multipliée par* $\sqrt{-1}$*. Or,* $\sqrt{a}$ *est un nombre possible ou réel*[14]*, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire, peut toujours se réduire à* $\sqrt{-1}$*. Par cette raison, donc,* $\sqrt{-4}$ *est autant que* $\sqrt{4}$ *multipliée par* $\sqrt{-1}$*, & autant que* $2\sqrt{-1}$*, à cause de* $\sqrt{4}$ *égal à 2. Par la même raison,* $\sqrt{-9}$ *se réduit à* $\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$*, ou à* $3\sqrt{-1}$ […] (Euler, 1774, § 147, pp. 106-107, original dans Euler, 1770, vol. 1, § 147, p. 61).

Deux points doivent être soulignés ici :

(a) Dans ces citations et d'autres similaires contenant des opérations algébriques et arithmétiques (par exemple *ibid.*, §§ 130-131), Euler utilise l'expression verbale « est autant que », « produit », « donne » et évite soigneusement l'introduction précoce de « = », soulignant ainsi le caractère opératoire des deux facteurs donnant le produit comme résultat de la multiplication. Comme l'a justement souligné Martinez (2007, p. 277), cela se produit également bien après l'introduction de « = » (par exemple dans le traitement des racines carrées aux §§ 328-329), ce qui suggère qu'une telle formulation ne signifiait pas nécessairement l'égalité au sens d'une équivalence exprimée par « = » (Martinez, 2007, p. 283[15]) ;

(b) les deux extraits ci-dessus conduisent à des produits opposés pour les racines carrées des nombres négatifs (voir ci-dessous). Ainsi, en utilisant négligemment « = » pour transcrire de telles expressions du livre d'Euler[16], de nombreux historiens ont été amenés à l'interprétation intenable selon laquelle Euler aurait commis de grossières erreurs concernant le produit des racines carrées des nombres négatifs, comme l'a fait valoir de manière convaincante Martinez (2007) (voir les références dans Thomaidis & Tzanakis, 2022, p. 1457). Cependant, la formulation par Euler de la règle de produit des racines carrées n'a pas un caractère « relationnel », mais « procédural », exprimé par des verbes ou des expressions standard n'utilisant ni le mot « égal » ni le signe « = »[17]. Par conséquent, si l'on veut symboliser l'utilisation par Euler des expressions verbales « est autant que », « on trouve », « donne » dans ce cas et dans des cas similaires, il faudrait en principe utiliser un symbole différent, indiquant la réduction du membre de gauche au membre de droite. Par exemple, selon les règles des deux citations ci-dessus, on pourrait écrire :

---

[14] L'expression *« ou réel »* n'existe pas dans l'original allemand ; elle a été ajoutée par le traducteur pour rendre l'original plus clair.

[15] Par exemple, en ce qui concerne l'affirmation d'Euler selon laquelle *«* $\sqrt{a}$ *multiplié par* $\sqrt{a}$ *produit a »* (Euler, 1774, § 130), *« on pourrait se demander si « produire » ou « donner » un résultat a est la même chose que produire* seulement *a »* (Martinez, 2007, p. 277, notre traduction). Bien sûr, dans d'autres cas, son expression standard « est autant que » est également utilisée pour introduire des décompositions d'expressions sous forme arithmétique ou symbolique ; c'est-à-dire comme une expression d'égalité dans son acception moderne de relation d'équivalence (par exemple *« C'est ainsi que 4 est autant que* $2\cdot2$ *; que 6 est autant que* $2\cdot3$ *; que 8 est autant que* $2\cdot2\cdot2$ *»* (Euler, 1774, § 38 p. 25)). Cependant, le point important est qu'il n'utilise jamais le symbole d'égalité dans les cas où cette expression verbale (ou des expressions similaires) désigne de véritables réductions. Cela est clairement illustré dans le traitement des radicaux (*cf.* la discussion ci-dessous).

[16] Par exemple, l'affirmation d'Euler selon laquelle *«* […] $\sqrt{4}$ *est également* $+2$ *&* -2 […] *»* a été interprétée comme affirmant que $\sqrt{4}=\pm2$, et de même pour *«* […] *la racine carrée de* $-a$ *est également* $+\sqrt{-a}$ *et* $-\sqrt{-a}$ […] *»* (*ibid.*, § 150).

[17] Pour plus de détails sur le texte original à ce sujet, *cf.* Thomaidis et Tzanakis (2022, section 4.2, notes de *infra* 12, 14).

$$\sqrt{(-2)}\times\sqrt{(-3)}\rightarrow\sqrt{6},\ \sqrt{(-2)}\times\sqrt{(-3)}\rightarrow\sqrt{2}\times\sqrt{(-1)}\times\sqrt{3}\times\sqrt{(-1)}\rightarrow-\sqrt{6},$$

respectivement.

Cela est conforme à la conception d'Euler de la double valeur de la racine carrée telle qu'elle est exprimée avant ou après l'introduction du symbole de la racine carrée au § 130 :

> […] *nous pouvons donc conclure que* $+aa$ *est le carré tant de* $+a$ *que de* $-a$*, et que par conséquent on peut indiquer pour tout quarré deux racines ; l'une positive et l'autre négative. La racine quarrée de 25, par exemple, est également* $+5$ *et* -5*. Parce que* -5 *multiplié par* -5 *donne 25 aussi bien que* $+5$ *par* $+5$ (Euler, 1774, § 122, p. 90, original dans Euler, 1770, vol. 1 § 122, pp. 51-52).
>
> *Cette remarque a lieu aussi, quand il s'agit de nombres imaginaires : la racine quarrée de* $-a$ *est également* $+\sqrt{-a}$ *et* $-\sqrt{-a}$*...* (*ibid.*, § 150, p. 108, original dans Euler, 1770, vol. 1, § 150 p. 62).

Par conséquent, comme il regardait la racine carrée comme bi-voque (*i.e.* ayant une double valeur), Euler évitait soigneusement l'utilisation de ce symbole dans la formulation de la racine carrée du produit de deux nombres, même après l'introduction du signe « $=$ » (*cf.* par exemple Euler, 1774, §§ 328-329), étant conscient de la confusion qui pouvait ainsi survenir. Ainsi, dans cette perspective,

$$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\rightarrow\sqrt{6} \text{ et } \sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\rightarrow-\sqrt{6}$$

sont des *réductions* toutes deux valides (et non des *équivalences*) ! Pour le dire autrement, *« […] comme* $\sqrt{a}$ *multipliée par* $\sqrt{b}$ *fait* $\sqrt{ab}$*, l'on aura* $\sqrt{6}$ *pour la valeur de* $\sqrt{-2}$ *multipliée par* $\sqrt{-3}$ *»* (*ibid.*, § 148, p. 107), pourrait être compris comme signifiant que le produit d'une racine carrée de -3 par une racine carrée de -2 donne une racine carrée de 6 (sans nécessairement préciser laquelle). Ainsi, le point faible de l'interprétation standard des réductions ci-dessus par les historiens modernes est leur utilisation inappropriée du symbole d'égalité dans la transcription symbolique des citations précédentes[18]. Il en résulte un mélange des deux conceptions de l'égalité, ce qu'Euler, lui, évite soigneusement[19].

Après l'introduction du symbole d'égalité, Euler s'intéresse à la transformation des équations par équivalence et pas seulement aux opérations algébriques ou arithmétiques qui produisent un résultat, par exemple :

> […] *si on a trouvé* $x+a=b$ *où a et b signifient des nombres quelconques, mais connus, on n'a qu'à soustraire a de l'un et de l'autre membre, et on obtient l'équation* $x=b-a$*, qui indique la valeur de x* (Euler, 1774, § 575, p. 461, original dans Euler, 1770, vol. 2, § 12, p. 8).
>
> *Puisque les deux équations sont* $x+y=a$*, et* $x-y=b$*. Si on les ajoute l'une avec l'autre, on a* $2x=a+b$*. Donc* $x=\frac{a+b}{2}$*. Ensuite, soustrayant les mêmes équations l'une de l'autre, on a* $2y=a-b$ *; donc* $y=\frac{a-b}{2}$ (*ibid.*, § 611, p. 496, original dans Euler, 1770, vol. 2, § 49 p. 29).

Ici, le symbole d'égalité concerne les opérations entre les équations. En d'autres termes, les égalités deviennent des objets symboliques et le symbole d'égalité est nécessaire à leur

[18] Il convient d'être tout aussi prudent dans la lecture des travaux d'autres mathématiciens importants (*cf.*, par exemple, l'*Algèbre* de Bombelli (Bagni, 2011, section 5.4, p. 50)).

[19] Ici, la conception d'Euler des racines carrées comme ayant une double valeur aide à révéler sa compréhension nuancée du concept d'égalité et les subtilités qui y sont inhérentes et qui peuvent créer des complications pour les débutants. Sinon, ce sont deux questions indépendantes.

représentation. Par conséquent, l'égalité est ici utilisée dans son sens standard de *relation d'équivalence* (pour faire court, nous parlerons de la conception « *équivalence* » de l'égalité).

Ainsi, dans l'*Algèbre* d'Euler, les deux conceptions distinctes de l'égalité la conception « réduction » (conception procédurale), et la conception « équivalence » (conception relationnelle), bien que coexistantes pour des raisons didactiques, ne sont pas confondues. Elles sont soigneusement séparées par l'introduction du symbole d'égalité, et sont utilisées de manière cohérente avec des rôles opérationnels distincts. En réalité, bien qu'Euler ait regardé l'égalité comme une relation d'équivalence et ait utilisé le symbole d'égalité en relation avec celle-ci, il a systématiquement utilisé la conception « réduction » avant d'introduire ce symbole, probablement parce qu'il avait compris qu'il était plus facile pour le débutant de la comprendre et de l'utiliser dans les calculs arithmétiques.

En résumant notre analyse historique ci-dessus, nous concluons que :

(a) comme l'a déjà souligné Martinez (2007), Euler n'était ni dans l'erreur ni négligent ;

(b) son utilisation très originale (et, à première vue, déroutante) des notions et des signes relatifs à l'égalité témoigne d'une profonde conscience *didactique* de la complexité de ces notions et de ces signes ;

(c) d'un point de vue mathématique, poursuivre cette question plus loin historiquement doit conduire à prendre en compte de manière approfondie la notion de fonction qui émergeait à l'époque (XVIII^{e} siècle), qui était très différente de la nôtre aujourd'hui et qui permettait, entre autres, la multivocité (à ce sujet, *cf.* Chorlay, 2025, en particulier les sections 1 et 2.4).

Dans ce cadre, le premier exemple de Kieran dans la sous-section 1.1 donne un exemple de « parallélisme positif » entre passé et présent : Les élèves utilisent avec succès la conception « réduction » de l'égalité — bien que de manière symboliquement idiosyncrasique — pour résoudre un problème, ayant peut-être développé cette conception sans qu'elle leur ait été enseignée explicitement (bien qu'elle ait été implicitement guidée par les exercices scolaires des premières années de l'école primaire). Son inadéquation est évidente dans le deuxième exemple de Kieran, où, contrairement à Euler, les élèves n'ont pas réalisé la différence entre les deux conceptions de l'égalité. Il s'agit d'un exemple de « parallélisme négatif ». En effet, conscient du caractère primitif de la conception « réduction » de l'égalité et de son inadéquation pour des questions dépassant le simple calcul algébrique, Euler l'a dépassée après l'introduction du signe égal, qu'il a ensuite utilisé pour symboliser une notion plus profonde et efficace, celle de l'égalité comme relation d'équivalence.

Au vu des commentaires ci-dessus, nous pensons que l'utilisation prudente de l'égalité dans le livre d'Euler et, en particulier, le fait qu'Euler évite d'utiliser le signe « = » avant que cela ne devienne absolument nécessaire (c'est-à-dire lorsqu'il est allé au-delà des calculs arithmétiques et a commencé à travailler avec des relations algébriques en tant qu'objets symboliques qu'on cherche à transformer en formes équivalentes), est une stratégie didactique, reflétant une conscience des difficultés que peuvent rencontrer les débutants en algèbre. Et c'est une stratégie potentiellement utile, même de nos jours, tant pour les enseignants que pour les élèves (du lycée). Par exemple, lire attentivement des extraits du livre d'Euler et éviter délibérément toute reformulation en termes modernes pourrait contribuer au développement de la *vigilance épistémologique* des enseignants (Brousseau, 1997, pp. 39, 239 ; Chevallard, 1991, ch. 2) concernant les erreurs des élèves qui suivent lorsqu'ils confondent l'égalité comme réduction et comme relation d'équivalence. De plus, de tels extraits pourraient être utilisés en classe ou dans la formation des enseignants, accompagnés de questions telles que « Quel était l'objectif d'Euler ? Pourquoi ? Quelles connaissances ou quel formalisme mathématiques manquaient à l'époque ? », etc. Cela pourrait à son tour stimuler d'autres activités et de riches discussions de groupe sur la nature des mathématiques, telles que « Comment l'égalité en tant que relation d'équivalence a-t-elle émergé ? Pourquoi ? Comment le texte d'Euler pourrait-il être présenté à la lumière de la notion moderne d'égalité ? », etc. (pour plus de détails, *cf.* Thomaidis & Tzanakis, 2022, section 5).

Avant d'examiner un autre aspect du concept d'égalité en section 3, il est utile de reprendre la réflexion générale évoquée dans l'introduction et de d'exposer plus en détail l'idée d'une transposition didactique appropriée des connaissances historiques académiques.

2. Critères d'une transposition didactique appropriée de l'histoire des mathématiques

2.1. Remarques préliminaires

Nous avons vu dans la sous-partie 1.1 que les élèves confondent deux conceptions de l'égalité, ce qui se manifestent par une utilisation incorrecte du signe « = » (la conception « réduction » et la conception « équivalence ») ; un fait en partie induit par l'enseignement et en partie relevant d'une véritable connaissance. On peut donc se demander ce qu'il est possible de faire, étant donné que dans l'éducation moderne, il est essentiel que les élèves comprennent l'égalité comme une relation d'équivalence et utilisent donc correctement le symbole d'égalité. Toutefois, ces conceptions apparaissent également dans des ouvrages historiques importants, en particulier dans l'*Algèbre* d'Euler, qui a eu une grande influence, bien qu'elles y soient maintenues distinctes et utilisées de manière cohérente.

C'est précisément ici qu'un partenariat harmonieux entre la connaissance historique et la pratique éducative pourraient ouvrir la voie à la résolution des problèmes didactiques en suspens. Dans le cas ci-dessus, par exemple : aider les enseignants à prendre conscience de l'existence des deux concepts d'égalité à la fois dans l'histoire et dans l'esprit des élèves ; comprendre pourquoi ces deux concepts étaient ou pouvaient être considérés comme légitimes dans leur principe ; cependant, souligner les pièges et les interprétations erronées qui peuvent résulter d'une confusion entre les deux notions. Dans des travaux antérieurs (Thomaidis & Tzanakis, 2022, section 5 ; 2023, section 4), nous avons donné des indications sur les moyens possibles de mise en œuvre concrète. Ils s'inscrivent dans l'esprit d'une *« disposition à construire des théories »* (*theory-building disposition*), notion introduite par Weiss et Herbst (2015) et brièvement décrite dans l'introduction (note *infra* 7). Dans ce processus, la transposition didactique des connaissances historiques, correctement adaptée aux caractéristiques et aux limites de la population cible, est non seulement nécessaire, mais également inévitable.

Motivées par cet exemple, ces idées générales ont été précisées à l'occasion d'un travail sur l'introduction des nombres complexes dans les manuels scolaires (Thomaidis & Tzanakis, 2025). Nous comparions deux approches : la première est basée sur leur introduction précoce comme moyen de résoudre des équations cubiques au XVIII^{e} siècle, bien que sous une forme simplifiée dans laquelle le symbolisme algébrique moderne remplace le traitement géométrique formulé rhétoriquement des textes originaux. La deuxième approche, dominante depuis le XIX^{e} siècle, justifie cette introduction en demandant que chaque équation du second degré ait pour solutions des nombres, éventuellement nouveaux, qui obéissent aux règles habituelles des opérations des nombres connus jusqu'ici, à savoir les nombres réels. Dans cette approche (probablement influencée, à l'origine, par l'autorité d'Euler et de son *Algèbre*, puis, au milieu du XX[e] siècle, par la réforme des « mathématiques modernes »), les nombres complexes sont essentiellement introduits comme une extension algébrique des nombres réels en leur adjoignant l'unité imaginaire i comme nouvel élément. Parfois, elle s'accompagne également d'affirmations historiques erronées, injustifiées tant par le développement historique que par l'approche mathématique abstraite adoptée (*ibid.*, sections 3 et 4). Néanmoins, la première approche soulève plusieurs questions : d'un point de vue historique, elle donne une image du développement historique pratiquement déconnectée des textes originaux ; d'un point de vue mathématique, sa faisabilité peut être remise en question, car les élèves sont invités à travailler avec des concepts qui n'ont pas encore été définis (par exemple, les racines carrées des nombres négatifs) ; d'un point de vue didactique et pratique, on peut objecter que le temps d'enseignement nécessaire à sa mise en œuvre en classe est prohibitif, car de nombreux élèves du secondaire n'ont pas encore atteint le niveau cognitif et la maturité mathématique requis (*ibid.*, section 2).

Ainsi, dans cet exemple, la discussion ci-dessus met en évidence le « conflit d'obligations » mentionné dans l'introduction : d'une part, la deuxième approche est une approche déductive abstraite (pour l'essentiel, une présentation simplifiée de la théorie générale de l'extension algébrique des corps), invoquant parfois une « nécessité » non historique pour introduire l'unité imaginaire. D'autre part, du fait de la complexité du développement historique, la première approche peut être critiquée car elle est basée sur une vision simplifiée de ce développement, ce qui peut conduire à une compréhension anachronique. Par conséquent, comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, il est nécessaire de trouver dans chaque cas un équilibre subtil entre le respect des connaissances historiques et leur adaptation aux besoins et au niveau scolaire des élèves, ce qui est crucial pour une transposition didactique appropriée des connaissances historiques.

2.2. Formulation provisoire de quatre critères

Motivés par les problèmes didactiques liés à l'utilisation inappropriée du concept d'égalité et par les difficultés rencontrées lors de l'introduction des nombres complexes, nous avons été amenés à poser quatre critères pour une transposition didactique adéquate des connaissances académiques en histoire des mathématiques. Ils sont présentés ci-dessous sous forme de questions qui constituent un ensemble d'exigences nécessaires *interconnectées* que doivent satisfaire les propositions pédagogiques : cours, activités d'enseignement, sections de manuels, etc. (Thomaidis & Tzanakis, 2025, section 5). Leur formulation est *provisoire* en ce sens qu'ils doivent être compris comme un tout, adaptable à différents systèmes éducatifs ou niveaux de compréhension historique, et qui constitue un cadre adaptable, susceptible d'être modifié en fonction de sa mise en œuvre dans des cas spécifiques.

Premier critère

> *La proposition intègre-t-elle des faits historiques bien documentés, éventuellement (mais pas nécessairement) liés à des innovations mathématiques cruciales ?*

Par exemple, comme indiqué dans la partie 1.2, l'apparition de deux concepts d'égalité distincts dans l'*Algèbre* d'Euler est un fait historique qui pourrait éclairer les malentendus de certains élèves sur l'égalité (*cf.* partie 1.1). De même, l'introduction des nombres complexes comme outil pour résoudre les équations cubiques est clairement un fait historique qui, correctement contextualisé, peut être utilisé de manière didactique (il existe plusieurs applications de ce type, par exemple Bagni, 1997 ; Führer, 1991 ; Kahn, 1988 ; Katz & Michalowicz, 2005 ; Le Goff, 1996 ; Testa, 1995). Dans la partie 3, nous proposons une réflexion sur *les* notions d'égalité dans les *Éléments* d'Euclide ; cette multiplicité de sens est également un fait historique bien documenté qui, nous chercherons à l'établir, pourrait être bénéfique sur le plan didactique.

Deuxième critère

> *La proposition intègre-t-elle le ou les événements historiques spécifiques d'une manière compatible avec les contraintes imposées par un programme donné ?*

Ce critère est directement lié à ce qui a été dit dans l'introduction sur l'importance de prendre en compte avec soin les grandes dissemblances entre les conditions dans l'histoire et dans l'enseignement actuel des mathématiques actuelle, malgré les éventuelles similitudes qui peuvent motiver et stimuler l'enseignement moderne :

> […] *l'introduction non-cosmétique d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques doit nécessairement tenir compte du fait que l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques se déroulent aujourd'hui dans des conditions sociales différentes, dans le contexte de traditions culturelles différentes, s'adressant à des individus et des groupes aux caractéristiques et aux besoins variés, et délimités par une variété de contraintes éducatives (imposées par le programme, le niveau d'instruction, l'orientation des apprenants, etc.)* (Chorlay *et al.*, 2022, p. 1410, notre traduction).

En particulier, la variation des contraintes imposées dans les différents systèmes scolaires peut rendre faisable ou infaisable la formulation d'une proposition pour transposer correctement sur le plan didactique une connaissance historique particulière. Par exemple, comme expliqué dans des travaux antérieurs (Thomaidis & Tzanakis, 2025, section 5), le programme grec pour le lycée a été largement incompatible avec l'introduction historiquement fondée des nombres complexes comme moyen de résoudre les équations cubiques. En revanche, des programmes plus « favorables à l'histoire » dans d'autres pays rendent une telle introduction possible (*cf.* par exemple, Barbin, 2022 ; Chorlay, 2022 ; Jankvist, 2014, section 27.6 ; Kjeldsen, 2012, pp. 343-354). Dans la partie 3, nous développons ce critère en relation avec l'enseignement des concepts de base de la géométrie euclidienne (en particulier, l'égalité des figures géométriques) dans le lycée grec.

Troisième critère

> *La proposition identifie-t-elle des situations de réflexion contribuant au développement d'une activité mathématique authentique ?*

Les caractéristiques de ces activités doivent être détaillées à travers des exemples spécifiques de mises en œuvre didactiques adossées à l'histoire. Bien entendu, la fidélité à l'histoire et la rigueur mathématique sont des conditions nécessaires, mais elles ne sont pas suffisantes. En ce qui concerne l'introduction des nombres complexes au lycée, il existe des propositions pédagogiques intéressantes qui satisfont à ce critère dans la mesure où elles sont basées sur de véritables problèmes historiques ou des exercices historiquement motivés conçus ou choisis selon des critères didactiques (par exemple Friedelmeyer & Volkert, 1993 ; Kahn, 1988 ; Testa, 1995). Par contraste, l'introduction usuelle est plutôt artificielle, puisqu'elle est uniquement motivée par l'imposition *ad hoc* et sans autre justification de l'exigence de l'existence de solutions pour toute équation quadratique à discriminant négatif (Thomaidis & Tzanakis, 2025, section 4)[20]. Pour un autre exemple en algèbre scolaire, *cf.* Chorlay (2022) en particulier la

[20] « […] *les nouveaux termes et concepts doivent être précédés d'une préparation concrète suffisante et suivis d'applications authentiques et stimulantes, et non d'un matériel superficiel et inutile : il faut motiver et appliquer un nouveau concept si l'on souhaite convaincre un jeune intelligent que le concept mérite l'attention* […] » (Mémorandum, 1962, pp. 191-192, notre traduction).

section 3.3. Dans un contexte différent, nous verrons dans la partie 3 comment l'ambiguïté des notions d'égalité dans les *Éléments* d'Euclide et la controverse qui en résulte sur son interprétation suggèrent une activité pédagogique possible qui pourrait stimuler l'intérêt des élèves modernes et les aider à mieux comprendre la géométrie euclidienne.

Quatrième critère

> *La proposition utilise-t-elle des événements du développement historique susceptibles d'« ouvrir des fenêtres » sur le sens des mathématiques, ou du contenu mathématique spécifique considéré ?*

Par l'expression imagée d'événements qui « ouvrent des fenêtres » sur le sens des connaissances et de l'activité mathématiques, nous entendons des épisodes de l'histoire qui, en principe, sont doivent pourvoir servir de catalyseur (une métaphore issue de la chimie[21]) pour éveiller la curiosité, susciter l'intérêt, et donner envie d'explorer telle ou telle question mathématique (*cf.* Chorlay, 2022, en particulier la section 5). Ici, la proposition de Führer (1991) est particulièrement intéressante pour les nombres imaginaires. Après une présentation algébrique moderne de la résolution des équations cubiques par les algébristes italiens du XVI[e] siècle, il a conduit ses élèves à plonger plus profond dans ces mathématiques. Plus précisément, il a utilisé des extraits originaux de l'*Ars Magna* de Cardan pour reconstruire la façon de penser originale des algébristes italiens, qui reposait sur l'utilisation intensive de diagrammes géométriques (*ibid.*, pp. 29-31). De telles propositions introduisent un caractère interdisciplinaire dans la transposition didactique des connaissances historiques et pourraient également tirer profit de la prise en compte du contexte socioculturel et du rôle des personnalités liées à l'événement historique spécifique (*cf.*, par exemple, Bagni, 2009 ; Benoist *et al.*, 1993, pp. 9-25). Plusieurs épisodes historiques qui admettent de multiples approches interprétatives entrent dans cette catégorie, comme ceux sur les traditions mathématiques de l'Antiquité (par exemple des épisodes de la tradition géométrique grecque antique ; *cf.* par exemple, Bühler, 1990 ; Thomaidis & Tzanakis, 2008, pp. 51-58). Dans la partie 3, nous illustrons ce critère en décrivant une activité d'enseignement sur les notions d'égalité dans les *Éléments* d'Euclide, en relation avec la manière dont les fondements de la géométrie euclidienne sont enseignés à l'école. De manière générale, la mise en œuvre de ce critère est liée à l'étendue et aux limites d'une proposition de transposition didactique de connaissances relative à un petit morceau d'histoire des mathématiques, car il est généralement impossible d'intégrer ne serait-ce que la majorité des données historiques pertinentes. Cela, dépend étroitement des connaissances des enseignants et de l'autonomie dont ils jouissent au sein d'un système scolaire dont le programme de mathématiques est plus ou moins favorable à l'histoire.

3. Approfondir les notions d'égalité des figures géométriques en géométrie euclidienne

Nous avons vu dans la partie 1 que, tant dans le contexte didactique qu'historique, l'égalité n'est pas une notion définie de manière unique, mais peut acquérir différentes significations ; un fait

[21] Des épisodes qui, bien que ne couvrant pas nécessairement une partie importante du programme, ont pu jouer un rôle de catalyseur dans le développement historique de concepts, théories ou/et méthodes mathématiques importants, et pourraient le faire de manière dans l'enseignement. Regarder les nombres imaginaires comme un moyen de résoudre des équations cubiques en est un exemple, mais il en existe bien d'autres ; des plus élémentaires (par exemple, la mesure du cercle par Archimède (Bühler, 1990), ou les différentes preuves dans l'Antiquité de l'égalité des angles de base d'un triangle isocèle (Thomaidis & Tzanakis, 2008)), à des plus avancées (les lois de la réflexion et de la réfraction, et le problème de la brachistochrone (Chabert, 1993 ; Tzanakis & Thomaidis, 2000, pp. 52-53), ou le théorème d'Euler sur les polyèdres (Lakatos, 1976)).

qui met en évidence des similitudes et des différences intéressantes entre les deux contextes et leur fonction complémentaire dans la compréhension à la fois du développement historique et du processus d'apprentissage (voir, sur ce point, la discussion dans l'introduction). C'est également le cas de l'égalité en géométrie euclidienne, nous allons le voir. Nous présentons d'abord le contexte historique dans le cadre des *Éléments* d'Euclide, puis ses implications didactiques. Plus précisément, nous étudierons le traitement des notions d'« égalité » dans le *Livre I* des *Éléments*.

3.1. Les notions d'égalité dans les *Éléments* d'Euclide

Après vingt-trois *définitions* de concepts géométriques et cinq *postulats* qui s'y rapportent, quatre *notions communes* sont formulées, décrivant de manière générale les propriétés caractéristiques des « choses égales ». Dans la traduction anglaise classique de Heath et la traduction française récente de Vitrac, ces notions communes apparaissent respectivement comme suit :

> 1. *Things which are equal to the same thing are also equal to one another.*
> 2. *If equals be added to equals, the wholes are equal.*
> 3. *If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.*
> 4. *Things which coincide with one another are equal to one another.*
>
> (Heath 1926/1956, pp. 222-224).
>
> 1. *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.*
> 2. *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*
> 3. *Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.*
>
> […]
>
> 7. *Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.*
>
> (Vitrac, 1990, p. 178)[22].

Les historiens se sont longuement interrogés sur les raisons pour lesquelles Euclide ne fournit pas de définition de l'égalité, ni des opérations d'addition et de soustraction des « choses » mentionnées dans les trois premières notions communes. Si l'on fait abstraction du cas simple des nombres (entiers), il n'est pas évident de savoir comment ceux-ci pourraient s'appliquer à des cas plus complexes, tels que les figures géométriques. Le problème est encore plus grand car la quatrième notion commune, qui se réfère manifestement aux figures géométriques, est formulée (uniquement) comme une condition suffisante pour « être égal ». Par conséquent, d'un point de vue logique (mais pas nécessairement historique), cette propriété ne se limite pas aux figures qui « coïncident » ; la quatrième notion commune ne peut pas être considérée comme définissant l'égalité des figures. Deux commentaires sont ici pertinents :

(a) Le nom « égalité » n'apparaît nulle part dans les textes mathématiques grecs (y compris les *Éléments* d'Euclide), jusqu'à l'Antiquité tardive (Vitrac, 1990, p. 504[23]) ; seul l'adjectif « égal » est utilisé. Par conséquent, à proprement parler, il n'y a pas de conception de l'égalité en tant que notion *distincte* devant être définie. Ainsi, d'une part, cela peut expliquer en partie l'absence de définition dans les *Éléments*, tandis que, d'autre part, cette absence entraîne une ambiguïté considérable en raison du caractère très général des notions communes.

[22] Dans diverses éditions des *Éléments*, y compris l'édition de Vitrac et la classique d'après Heiberg (Heiberg & Menge, 1883, pp. 10-11), on trouve d'autres « notions communes », qui sont toutefois considérées comme ayant été ajoutées par des auteurs ou commentateurs ultérieurs (Heath, vol. I, 1926/1956, p. 223).

[23] Il en va de même selon le dictionnaire de Grec ancien *Liddell and Scott's* (Liddell & Scott, 1907, p. 543).

(b) Cette généralité est directement liée au large éventail d'applications potentielles des notions communes, puisque dans les *Éléments*, outre les figures géométriques, l'égalité apparaît également dans l'étude d'autres objets mathématiques : les nombres entiers, les rapports de grandeurs géométriques, les relations de proportionnalité. En réalité, cette généralité se reflète dans la formulation de toutes les notions communes, étant donné que dans le texte grec original (ainsi que dans les traductions latine et allemande), il n'y a pas de nom qui décrit les entités auxquelles ces notions communes se rapportent, pas même le nom plutôt abstrait *« things »*/« choses » qui apparaît dans les traductions anglaise et française ci-dessus ; seul l'article pluriel *« τα »* (c'est-à-dire le « *the* » anglais ou le « les » français), qui souligne une généralité encore plus grande[24].

La géométrie des *Éléments* ne dépend pas des nombres. L'égalité de deux segments ou de deux polygones par exemple, ne découle pas de l'égalité de notions numériques tels que la longueur ou l'aire, c'est-à-dire d'un processus dépendant de mesures (pour cette raison, nous utiliserons dans la suite le terme « contenu » de préférence à « aire »). Dans trois cas spécifiques, l'égalité des figures est prouvée en les « appliquant » l'une à l'autre[25]. Pour les polygones qui ne « s'appliquent » pas l'un sur l'autre, l'égalité résulte de l'ajout ou de la soustraction de figures qui « s'appliquent » l'une à l'autre, prouvant ainsi qu'elles sont constituées du même nombre de polygones qui « s'appliquent » par paires[26]. Cela a conduit les historiens à soutenir l'existence de deux notions distinctes d'« égalité » des objets géométriques dans les *Éléments*, l'une se référant à leur « forme » et l'autre à leur « contenu » (Heath, 1926/1956, vol. I, pp. 327-328). Cette interprétation correspond (sans toutefois être identique) à l'existence des deux concepts d'égalité des figures en géométrie euclidienne (en particulier dans un contexte d'enseignement),

[24] Voir l'original en Grec : *« Notion commune 1 :* Τὰ τῷ αὐτῷ ἳσα και ἀλλήλοις ἐστίν ἳσα *»* (Heiberg & Menge, 1883, p. 10), traduction latine : *« Quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt »* (*ibid.*, p. 11) ; *« Notion commune 4:* Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἂλληλα ἳσα ἀλλήλοις ἐστίν *»* (*ibid.*), en latin : *« Et quae inter se congruunt, aequalia sunt »* (*ibid.*) ; pour la traduction en allemand, c*f.* Mainzer, 1980, p. 44.

[25] *Livre I*, propositions 4 et 8 sur l'égalité des triangles, et *Livre III*, proposition 24 sur l'égalité des segments de cercle. Il convient de souligner ici que dans la démonstration de ces propositions, Euclide utilise *exclusivement* le verbe « *ἐφαρμόζειν* » (et ses dérivés), c'est-à-dire « appliquer ». Cependant, dans l'édition latine de Heiberg (Heiberg & Menge, 1883, pp. 16-19, 26-29, 224-227), celle-ci est traduite en utilisant parfois le verbe « *adplicare* » (appliquer) et parfois le verbe « *congruere* » (coïncider, s'ajuster), dans le sens où la « congruence » résulte d'une « application ». Apparemment, Heath est plus proche de la traduction latine (Heath, 1926/1956, vol. I, pp. 247-248, 261-262, et vol. II, pp. 53-54). Ici, nous nous en tenons à l'utilisation du verbe « appliquer », par souci de cohérence avec l'original grec, bien que cela nécessite des recherches supplémentaires qui dépassent le cadre du présent document. À ce sujet, voir également la note de bas de page 27 ci-dessous.

[26] Par exemple, *Livre I*, proposition 35 sur l'égalité des parallélogrammes ayant un côté commun et des sommets opposés sur une droite parallèle à ce côté commun.

actuellement exprimés par des figures « égales » ou « congruentes »[27], et des figures « équivalentes » ou « ayant la même aire/volume ».

Les historiens modernes rejettent cette interprétation, mais il ne semble pas y avoir de consensus complet sur la signification de « l'égalité » dans l'expression « choses égales » dans les notions communes des *Éléments*. Certains rejettent l'idée que la « congruence » est le concept de base de l'égalité des figures géométriques. Par exemple,

> *L'égalité ne signifie donc pas l'égalité arithmétique d'une mesure numérique de l'aire et ne peut pas signifier la congruence. En fait, la congruence ne semble pas être un concept fondamental dans les* Éléments*, car Euclide n'a pas de mot unique pour la désigner ; l'idée de coïncidence dans la Notion commune 4 pourrait sembler être un candidat, mais ce passage de texte pourrait être une interpolation ultérieure… et Euclide n'utilise pas systématiquement cette terminologie* (Fowler, 1987/1999, p. 11, notre traduction).

De même, Mueller (1981) soutient que :

> *l'opinion de Heath (vol. I, p. 327) selon laquelle Euclide entend parfois la congruence lorsqu'il parle de l'égalité des figures rectilignes est indéfendable* (Mueller, 1981, p. 56, note 51, notre traduction).

Plus explicitement, Taisbak (2003) considère l'égalité de « contenu » comme la notion d'égalité de base :

> […] *figures « égales » ne signifie jamais plus que « de contenu égal », « ayant la même aire ». Cela ne signifie pas « congruent »* (Taisbak, 2003, p. 26, note de bas de page 18, notre traduction).

En revanche, après avoir rejeté le point de vue de Heath sur l'existence de deux concepts d'égalité distincts dans les *Éléments*, Fried et Unguru (2001) soutiennent que :

> *À partir des quatre premières notions communes, on peut donc reconstruire la notion d'égalité d'Euclide comme suit : les choses sont égales si elles coïncident ou si elles sont le résultat de l'addition ou de la soustraction de choses coïncidentes à des choses coïncidentes. Par conséquent, bien que les choses n'aient pas besoin de coïncider, elles sont toujours dérivables de choses coïncidentes. En d'autres termes, même lorsque les figures ne coïncident pas, la « coïncidence » sert en dernier ressort à établir leur égalité. Et, en ce sens, la coïncidence reste le critère fondamental de l'égalité et la source de toute approche de l'égalité* (Fried & Unguru, 2001, pp. 229-230, notre traduction).

[27] Dans la traduction latine de la notion commune 4, le grec « *ἐφαρμόζοντα* » (du verbe « *ἐφαρμόζειν* ») est traduit par « *congruunt* » (du verbe « *congruere* »), décrivant les entités qui peuvent coïncider ou s'ajuster l'une à l'autre, et qui sont donc « égales » dans ce sens. Hilbert a utilisé ce terme (comme « kongruent ») dans ses « axiomes de congruence » (Hilbert, 1968/1987, pp. 11-15 ; « axiomes de congruence » dans la traduction française ; Hilbert, 1900, § 6), probablement parce que « être égal » peut avoir plusieurs autres connotations en mathématiques et au-delà, bien qu'il ait apparemment considéré les deux termes comme des synonymes : *« […] zu deren Beschreibung uns die Worte « kongruent » oder « gleich » dienen »* (*« nous les décrirons avec les mots « congruentes » ou « égales » »*) (*ibid.*, p. 11). En même temps, il considérait implicitement que cette notion de congruence se réalisait en déplaçant une figure sur l'autre, puisqu'il commente que *« Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff der Kongruenz und damit auch den der Bewegung »* (*« Les axiomes de ce groupe définissent la notion de congruence et donc aussi celle de déplacement »*) (Hilbert, 1968/1987, p. 1 ; ou dans l'édition française : *« Les axiomes de ce groupe définissent la notion de congruence ou de déplacement »*, Hilbert, 1900, p. 14). Cela est en accord avec la description de Freudenthal selon laquelle *« […] les figures congruentes sont, pour ainsi dire, la même figure posée à différents endroits »* (ou plus précisément, mathématiquement, deux figures qui peuvent être mises en correspondance l'une avec l'autre par une isométrie), alors que l'égalité signifie *« […] coïncidence, c'est-à-dire identité réelle »* (Freudenthal, 1983, p. 13 ; *cf.* Heath 1926/1956, pp. 224-231). Dans un contexte didactique élémentaire, ces subtilités d'interprétation sont ignorées et on parle de figures « égales », « isométriques » ou « superposables », selon le contexte d'enseignement.

Plus récemment, cette interprétation a conduit Fried (2009) à une reformulation partielle des notions communes qui met en évidence leur caractère géométrique. Cela est particulièrement évident dans les notions communes 2 et 3, où « ajouter » et « soustraire » ont été remplacés respectivement par « adjoindre » (*« adjoin »*) et « retirer » (*« remove »*)[28] :

> *1. Things equal to the same thing are equal to one another.*
>
> *2. And if equal things be adjoined to the same thing, the wholes are equal.*
>
> *3. And if equals be removed from the same thing, the remainders are equal.*
>
> *4. And things fitting on one another are equal to one another.*
>
> (Fried, 2009, pp. 2-3)[29].

En résumé, la discussion précédente suggère que l'interprétation des notions communes des *Éléments* d'Euclide sur les relations d'égalité recouvre plusieurs points subtils qui en font un véritable problème historique. Par conséquent, compte tenu des idées générales présentées dans l'introduction, ce problème pourrait être bénéfique pour faire face aux questions didactiques relatives à l'établissement des fondements de la géométrie euclidienne à l'école.

3.2. Considérations sur les difficultés de l'enseignement de la géométrie euclidienne à l'école

Dans cette sous-section, nous décrivons une activité d'enseignement dans le cadre du cours de géométrie euclidienne suivi par tous les élèves des deux premières années du lycée grec (élèves de 16-17 ans). Étant donné que les élèves ont acquis les bases des connaissances géométriques élémentaires au cours du premier cycle de l'enseignement secondaire, l'objectif principal de ce cours, selon le programme officiel, est de permettre aux élèves de comprendre la démonstration mathématique à travers le développement de la géométrie euclidienne en tant que théorie mathématique[30]. D'une manière générale, ce développement suit le modèle traditionnel d'enseignement développé au cours du XIXe siècle sur la base des classiques *Éléments de géométrie* de Legendre (1794).

L'enseignement de la géométrie euclidienne en tant que matière autonome dans l'enseignement secondaire grec a une longue tradition et a subi de nombreux changements. Une tentative particulièrement ambitieuse de renouveler son enseignement a été faite pendant la période de la réforme des « Mathématiques Modernes », lorsque le programme adopté a mis l'accent sur le fondement axiomatique rigoureux et le développement théorique de la géométrie euclidienne dans le cadre d'un enseignement de quatre ans pour les élèves de 15 à 18 ans. Cette innovation

---

[28] Cette formulation audacieuse semble avoir été motivée par la définition I, *livre VI des Coniques*, où Apollonius utilise l' « application » pour définir une condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux coniques (Fried, 2009, p. 3) : *« Sectiones conica edicantur* aequales*, si* applicari *possit altera super alteram ; ita ut ubique conveniant, nec occurant inter se. Inaequales autem sunt quae non ita se habent »* (Halley, 1710, p. 344).

[29] *1. Les choses égales à la même chose sont égales entre elles.*
2. Et si des choses égales sont adjointes à la même chose, les touts sont égaux.
3. Et si des égaux sont retirés de la même chose, les restes sont égaux.
4. Et les choses qui s'ajustent les unes dans les autres sont égales entre elles.
(Fried, 2009, pp. 2-3,notre traduction).

[30] Ainsi, ce cours au lycée s'appelle « Géométrie théorique », par opposition à la « Géométrie pratique » enseignée dans le premier cycle de l'enseignement secondaire (élèves de 12 à 15 ans). Il est peut-être vrai que dans plusieurs pays (dont la Grèce), *« la géométrie est le seul cours du secondaire dans lequel les élèves sont régulièrement confrontés aux conséquences nécessaires de propriétés abstraites et dans lequel ils sont tenus de lire, d'écrire et de comprendre des mathématiques »* (Weiss & Herbst, 2015, p. 225, notre traduction).

visait essentiellement à mettre en œuvre à l'école le système axiomatique de Hilbert de ses *Grundlagen der Geometrie* (1968/1987). Cependant, elle s'est heurtée à une forte opposition de la part des enseignants, qui ont été contraints de mettre en œuvre ce programme en utilisant à grande échelle les manuels rédigés dans son esprit. En conséquence, ces manuels ont été retirés un an seulement après leur parution. Après trente ans de recherches et d'essais, un programme de géométrie euclidienne sur deux ans, beaucoup moins ambitieux, a été proposé à la fin des années 1990, et est toujours utilisé aujourd'hui[31].

L'échec de l'enseignement efficace dans le secondaire de l'axiomatisation de la géométrie euclidienne et de sa structure déductive a été souligné par d'importants mathématiciens et didacticiens des mathématiques, par exemple Freudenthal (1971 ; 1973, ch. XVI). Comme on le sait, la compréhension des fondements axiomatiques et de la structure déductive de la géométrie euclidienne correspond au plus haut niveau du modèle d'apprentissage de la géométrie de van Hiele, et l'impossibilité de les maîtriser a été documentée par la recherche didactique (pour une étude, voir par exemple Herbst *et al.*, 2017, pp. 91-98 ; Sierpinska 2019, pp. 35-50). Ce fait met en évidence la nécessité d'une approche pédagogique alternative, en particulier lorsque les étudiants découvrent pour la première fois les éléments constitutifs du système théorique de la géométrie euclidienne. Inspirés par la discussion sur les notions communes dans les *Éléments* d'Euclide, nous présentons ci-dessous les principes de base d'une telle approche, sous la forme d'une activité pédagogique qui intègre des éléments du développement historique de la géométrie euclidienne.

Présentation d'une activité pédagogique : À la recherche de la signification de l'égalité dans les* notions communes *d'Euclide

L'objectif est de concevoir une activité d'introduction à la géométrie euclidienne, dans laquelle les élèves étudient ces notions communes afin de comprendre l'importance des concepts *primitifs* d'un système théorique (au sens de concepts *non définis*) et la nécessité de décrire certaines de leurs propriétés par des axiomes. Cet objectif est évidemment différent de celui des historiens lorsqu'ils cherchent à interpréter la signification des notions communes des *Éléments*, et nécessite donc une transposition didactique des connaissances historiques pertinentes. Évidemment, nous sommes contraints de nous limiter aux interprétations historiques proposées pour les notions communes des *Éléments* qui peuvent être discutées au niveau scolaire. La transposition didactique proposée est évaluée dans la sous-partie 3.3, par rapport aux critères de la sous-partie 2.2.

La conception de cette activité repose sur des activités qui utilisent des processus favorisant une atmosphère de débat scientifique en classe. Dans ce contexte, des conjectures sur la réponse aux questions ou aux problèmes en cours sont formulées ; des discussions, des arguments et des contre-arguments sont développés, dans le but de les réviser, de les rejeter ou de les confirmer. Bien que cette perspective concerne l'ensemble des mathématiques scolaires et soit particulièrement pertinente pour l'enseignement de la résolution de problèmes, l'activité proposée est d'une nature particulière, car elle vise à comprendre la signification des concepts de

[31] Un point de repère typique est le traitement didactique de l'égalité des figures planes. Il est actuellement introduit dans le manuel officiel en supposant que : *« Pour toute figure plane, nous admettons qu'elle peut être déplacée dans le plan de sa position initiale à n'importe quelle autre position et rester inchangée en termes de forme et de grandeur »* (Argyropoulos *et al.*, 2016, p. 18, notre traduction). Ainsi, par exemple, l'égalité de deux cercles est définie comme suit : *« On dit que deux cercles sont égaux lorsque l'un d'eux devient identique à l'autre par un déplacement approprié »* (*ibid.*, p. 29). En revanche, pendant la période de réforme des « Mathématiques Modernes », le manuel correspondant (Ioannidis, 1968) comprenait le chapitre « Les axiomes de l'égalité » énonçant 11 axiomes pertinents sans référence au « déplacement et à la coïncidence ».

base dans la structure de l'édifice géométrique euclidien. Elle concerne donc la partie de la géométrie euclidienne qui correspond aux niveaux les plus élevés de la connaissance géométrique, à savoir le 4e niveau de van Hiele, dans lequel :

> […] *les élèves peuvent établir des théorèmes dans un système axiomatique. Ils reconnaissent la différence entre les termes non définis, les définitions, les axiomes et les théorèmes et sont capables de construire des preuves originales, c'est-à-dire de produire une séquence d'énoncés qui justifie logiquement une conclusion comme conséquence des « données » (Clements, 2003, p. 153, notre traduction).*

Ainsi, s'appuyant sur la distinction proposée par Gowers (2000) entre deux démarches mathématiques — la construction de théories et la résolution de problèmes —, Weiss et Herbst (2015) ont introduit dans leurs recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie la distinction entre des dispositions ou des priorités dans l'activité mathématique. L'intervention didactique ci-dessous doit être considérée comme caractérisant une disposition à la construction de théories (*theory-building*) plutôt qu'à la résolution de problèmes (voir également la note de bas de page 7 dans l'introduction). Elle comprend trois phases distinctes.

Dans la **première phase**, après une introduction historique préliminaire sur les mathématiques de la Grèce antique et les *Éléments* d'Euclide, les élèves reçoivent une feuille de travail avec le texte des quatre notions communes et sont d'abord invités à identifier les « choses égales » auxquelles elles font référence (par exemple, si elles concernent des nombres, des figures géométriques ou d'autres quantités physiques, etc.)[32]. À ce stade, l'objectif est d'attirer l'attention des élèves sur l'égalité des figures géométriques motivée par l'expression « choses qui coïncident » (*« τὰ ἐφαρμόζοντα »*) dans la quatrième notion commune[33]. Ce passage direct aux figures géométriques indique déjà les limites imposées par le contexte pédagogique spécifique : un cours d'introduction à la géométrie euclidienne et la nécessité de motiver les élèves à participer à l'activité par une question relativement facile. Ici, le rôle de l'enseignant est d'orienter la discussion vers l'objectif souhaité et de gérer les contraintes de temps imposées par la structure globale de l'activité. Il est évident que des questions de grand intérêt historique sont laissées de côté ; par exemple, la question de savoir si la quatrième notion commune (qui se distingue des trois premières en limitant la signification de « choses égales » aux seules figures géométriques) a été choisie par Euclide ou introduite par des éditeurs et commentateurs ultérieurs.

L'objectif principal de la **deuxième phase** est de déterminer le type d'égalité auquel « choses égales » fait référence. Les élèves seront d'abord invités à se demander si la quatrième notion commune (formulée uniquement comme une condition suffisante dans le texte original) peut être considérée comme une définition de l'égalité à utiliser en géométrie euclidienne. Il faut s'attendre à ce que cette question révèle les connaissances préalables des élèves, puisqu'ils ont appris les bases de la géométrie dans les cours de géométrie pratique de l'enseignement secondaire inférieur. Là, l'égalité des figures est présentée comme un processus empirique consistant à les placer les unes sur les autres afin de vérifier si elles coïncident ou non. De même,

[32] Dès l'Antiquité tardive, Proclus avait souligné le large éventail d'applications des trois premières notions communes (aussi appelées « axiomes ») : *« Chacune d'entre elles est vraie non seulement pour les grandeurs, mais aussi pour les nombres, les mouvements et les durées.* […] *Dans tous ces domaines, il est vrai que les choses égales à la même chose sont égales entre elles, et il en va de même pour tout autre des axiomes que nous pouvons supposer »* (Morrow, 1970, pp. 153-154, notre traduction).

[33] Le texte antique peut être utilisé en Grèce, car tous les élèves suivent des cours de grec ancien tout au long de leur scolarité secondaire. Dans ces cours, ils étudient généralement des textes historiques ou philosophiques dont la structure grammaticale et syntaxique est plus complexe que celle des *Éléments*.

le concept d'aire d'une surface plane y est présenté comme un nombre positif exprimant le résultat d'une mesure (sans toutefois faire référence au concept de « figures équivalentes »). Ces connaissances seront utilisées pour montrer que la formulation de la quatrième notion commune suggère une notion élargie de l'égalité, incluant l'« ajustement » ou la « coïncidence » comme cas particulier. Il est très important pour le développement de cette activité d'orienter la discussion vers le fait qu'Euclide n'utilise pas le mot « égalité », et donc qu'il ne donne pas de définition de l'égalité, se limitant à la description de certaines propriétés des « choses égales ». Pourquoi fait-il cela, alors qu'au début des *Éléments*, il fournit vingt-trois définitions détaillées pour une variété de concepts géométriques ? Il s'agit d'une autre question historique importante, pour laquelle il n'existe pas d'interprétations convaincantes et qui sera discutée dans le cadre de l'activité. En même temps, ce point délimite le rôle des enseignants, puisqu'ils doivent concilier la discussion précédente avec le fait que dans le manuel de géométrie euclidienne, l'égalité est — de fait — définie sur la base du processus de « déplacement et d'identification par coïncidence »[34].

Cela conduit à la **troisième phase** de l'activité, qui se concentre sur son objectif principal, à savoir mettre en évidence l'importance des « concepts mathématiques primitifs », le rôle qu'ils jouent dans la construction du système théorique de la géométrie euclidienne (et d'une théorie mathématique, en général), et le fait qu'ils sont apparus très tardivement dans le développement historique des mathématiques. La discussion peut commencer par l'intervention de l'enseignant, qui mentionnera les différentes interprétations historiques données à l'absence de définition de l'égalité. L'une des interprétations qui peuvent être discutées à l'école est celle qui tire des arguments des problèmes logiques qui se posent lorsque la méthode de preuve euclidienne consistant à « appliquer » les figures est liée au concept physique de mouvement. Il est remarquable que des arguments de ce type aient été invoqués dans les manuels scolaires lors de la réforme des « Mathématiques Modernes » pour justifier l'utilisation du système axiomatique de Hilbert pour poser les fondements de la géométrie euclidienne à l'école. L'extrait suivant du manuel grec susmentionné de cette période est typique :

> *On sait par la Géométrie Pratique, enseignée dans les deux premières années du Gymnase, que pour vérifier l'égalité de deux triangles, on a recours à une méthode basée sur le concept du déplacement de l'un d'entre eux, sur la base duquel on vérifie dans les conditions données, s'il peut être amené à coïncider avec l'autre. C'est-à-dire, nous admettons qu'une figure géométrique peut être déplacée et qu'au cours de ce déplacement, elle reste inchangée. Mais cela ne peut signifier autre chose que le fait qu'elle reste égale à elle-même. Il en va de même pour les segments de droite et les angles. Par conséquent, la méthode qui consiste à prouver les théorèmes d'égalité en utilisant la notion de déplacement* n'est pas correcte*, précisément parce que la notion de déplacement présuppose la notion d'égalité que l'on veut définir* (Ioannidis, 1968, p. 11, notre traduction ; c'est aussi nous qui soulignons).

À cet égard, un débat intéressant en classe peut être suscité en opposant le texte précédent à l'extrait suivant de l'*Essai sur les Elémens de Philosophie* (1759) de d'Alembert :

[34] Un semblable compromis est nécessaire à ce stade pour traiter des notations. Le manuel utilise « = », à la fois pour la coïncidence des figures géométriques et pour l'égalité numérique des longueurs, des aires ou des volumes, là où ni symbole ni définition de l'égalité n'apparaît dans les *Éléments*. Il est remarquable de noter que cette absence a été remplacée aujourd'hui par une série de concepts et de symboles différents qui peuvent être identiques pour des catégories particulières de figures géométriques. Il convient également de noter ici ce que Coxeter (1969) écrit à propos de la congruence en tant que concept de géométrie absolue : *« L'énoncé $AB \equiv CD$ pour les segments est clairement équivalent à l'énoncé $AB = CD$ pour les longueurs, de sorte qu'il n'y a pas de confusion à utiliser le même symbole AB pour un segment et sa longueur. La même remarque s'applique aux angles »* (Coxeter, 1969, p. 264, notre traduction).

> *Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à* imaginer *une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence du reste ; d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures entières. Cette manière de démontrer a donc l'avantage, non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux* (D'Alembert, 1821, p. 271 ; c'est nous qui soulignons).

Bien sûr, dans une telle discussion, l'enseignant ne doit pas manquer de mentionner qu'Euclide utilise directement la méthode de « l'application » pour prouver trois propositions théoriques concernant l'égalité des triangles et des segments circulaires (*cf.* note de bas de page 25). Une conclusion à tirer de ce fait, avec des implications importantes pour l'enseignement et l'apprentissage, est que la rigueur mathématique, et donc la vérité mathématique, sont des concepts dépendants du temps et non éternels et immuables[35].

La présentation ci-dessus n'est qu'un plan de l'activité d'enseignement. Il est évident que des questions importantes doivent être abordées en ce qui concerne sa mise en œuvre effective en classe. Par exemple, la formulation et l'étayage soigneux des questions à poser aux élèves, et un plan pour gérer les discussions qu'elles pourraient engendrer. Une attention particulière doit également être accordée au type de matériel pédagogique à utiliser, par exemple les figures géométriques données dans la feuille de travail (ou dont le tracé est demandé aux élèves). Le rôle de ces figures (principalement des polygones qui coïncident entre eux ou qui peuvent être divisés en un nombre égal de polygones coïncidant deux à deux[36]) sera d'aider à clarifier les deux aspects de l'égalité dans la géométrie non-arithmétisée des *Éléments*.

3.3. Compatibilité de l'activité proposée avec les quatre critères de transposition didactique

Dans la sous-partie 3.1, nous avons exposé les principaux résultats de la recherche sur l'interprétation historique des notions communes dans les *Éléments* d'Euclide, qui déterminent de manière générale, mais indirecte (c'est-à-dire sans définition), l'égalité des objets mathématiques qui y figurent. Dans la sous-partie 3.2, une partie des connaissances historiques correspondantes a été utilisée pour planifier une activité pédagogique visant à résoudre un problème d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie euclidienne à l'école. Nous examinons ici si ces connaissances historiques sont utilisées dans l'activité de manière compatible avec les quatre critères de transposition didactique présentés dans la partie 2.

Compatibilité avec le premier critère

> *La proposition intègre-t-elle des faits historiques bien documentés, éventuellement (mais pas nécessairement) liés à des innovations mathématiques cruciales ?*

L'analyse historique de l'interprétation des notions communes dans la sous-partie 3.1 montre que cette question présente plusieurs caractéristiques qui la rangent parmi les faits historiques bien

[35] Cette remarque fait référence au titre d'un article bien connu de l'historienne Judith Grabiner, dans lequel la question de l'historicité des connaissances mathématiques est posée de manière simple mais succincte : *« Peut-être que la vérité mathématique est éternelle, mais la connaissance que nous en avons ne l'est pas »* (Grabiner, 1974, p. 364, notre traduction).

[36] *« zerlegungsgleich Polygone »* (des polygones égaux par découpage) dans Hilbert (1968/1987, pp. 69-70) ; *cf.* Heath (1926/1956, p. 328). De Risi (2021, p. 312) utilise le terme anglais « *equidecomposable* ».

documentés relatifs à des questions mathématiques importantes. Tout d'abord, elle est associée à un travail fondateur dans le domaine des mathématiques et concerne un concept théorique fondamental dont le développement a connu des étapes importantes de l'Antiquité à aujourd'hui. Depuis longtemps, d'éminents historiens des mathématiques grecques antiques ont étudié la question, en utilisant des outils méthodologiques de recherche historiographique à la fois traditionnels et modernes. Un autre point important est que les diverses interprétations historiques avancées sur le rôle des notions communes dans l'établissement du concept d'égalité dans les *Éléments* ne semblent pas converger vers une vision unifiée de la signification et de l'importance de l'égalité dans ces dernières.

Compatibilité avec le deuxième critère

> *La proposition intègre-t-elle le ou les événements historiques spécifiques de manière compatible avec les contraintes imposées par un programme donné ?*

Comme mentionné dans la sous-partie 3.2, le cours de géométrie euclidienne en Grèce (et dans les pays qui maintiennent un cours autonome similaire) inclut parmi ses principaux objectifs pédagogiques la familiarisation des élèves avec la manière dont une théorie mathématique est développée, et en particulier avec la démonstration. Cependant, à l'étape cruciale de la première rencontre des étudiants avec ces questions fondamentales, on ne consacre généralement qu'une ou deux heures d'enseignement, car il y a beaucoup de matière géométrique à enseigner par la suite (formulation de définitions, preuve de propositions théoriques et résolution d'exercices). Sur ce point, les lignes directrices de l'Institut grec de politique éducative stipulent que :

> *Afin que les étudiants acquièrent une première idée des principes fondamentaux du développement de la géométrie euclidienne en tant que système axiomatique, il leur est suggéré d'engager une discussion sur la signification et le rôle des termes « concept primitif », « définition », « axiome », « théorème », « preuve ». Des éléments de l'*évolution historique *de la géométrie peuvent être utilisés* […] *et peuvent fournir un cadre dans lequel les questions ci-dessus peuvent être soulevées* (IEP, 2024, p. 2, notre traduction ; c'est aussi nous qui soulignons)[37].

Ces directives, associées aux contraintes de temps sévères imposées par le programme, limitent nécessairement les choix possibles dans la riche banque des connaissances historiques sur le sujet. Notre suggestion est l'un de ces choix, mais son efficacité par rapport aux autres ne pourra être évaluée qu'après sa mise en œuvre.

Compatibilité avec le troisième critère

> *La proposition identifie-t-elle des situations de réflexion contribuant au développement d'une activité mathématique authentique ?*

La mise en œuvre de ce critère dépend du type d'activité mathématique qui peut être considérée comme « authentique » dans une classe donnée (donc par rapport au deuxième critère) ; il ne peut pas être appliqué de manière générale. Néanmoins, dans l'exemple présent, nous pouvons affirmer comme Freudenthal (1971, p. 426) que la manière dont un système axiomatique est généralement présenté aux élèves les amène à y effectuer des déductions mécaniques. De plus,

[37] Bien que les règles logiques utilisées dans les démonstrations géométriques soient les mêmes que celles des *Éléments* d'Euclide, la démonstration géométrique (et donc mathématique) n'est pas acceptée ou comprise aujourd'hui comme évidente par tous les groupes sociaux ou toutes les générations. C'était également le cas dans l'Antiquité pour les épicuriens ou les stoïciens ; voir l'argumentation de Proclus contre leurs critiques (Morrow, 1970, par exemple pp. xxviii, 251-252). Cela met en évidence une similitude cruciale entre les mathématiques d'hier et d'aujourd'hui concernant les difficultés de perception de la démonstration mathématique ; elle mérite d'être examinée plus en détail.

> […] *un étudiant qui ne s'est jamais exercé à l'organisation d'un sujet mathématique à des niveaux locaux ne réussira pas à le faire au niveau global. Les systèmes d'axiomes préfabriqués ont leurs propres mérites. Ils constituent un sujet acceptable pour les personnes expérimentées dans l'axiomatisation. Si un apprenant a appris à axiomatiser avec un matériau plus facile, il reconnaîtra dans un système axiomatique compliqué les mêmes caractéristiques qu'il connaît de ses expériences antérieures, et il sera capable de démêler ce système et de le comprendre comme s'il l'avait construit lui-même. Mais si l'on ne s'est pas d'abord exercé à l'axiomatisation, un tel système axiomatique de géométrie n'est qu'un échantillon supplémentaire de mathématiques indigestes* (Freudenthal, 1973, p. 426-427, notre traduction).

L'activité que nous proposons, en particulier dans ses deuxième et troisième phases, va dans le sens inverse. Elle tente d'amener les élèves à rechercher le sens de l'égalité décrit implicitement dans les notions communes des *Éléments* d'Euclide et à lire de manière critique deux textes qui expriment des points de vue opposés sur ce sens : celui de d'Alembert (1759) et celui du manuel de Ioannidis (1968). Ainsi, ils sont impliqués dans une activité qui est « véritable » au sens où elle stimule leur intérêt pour les concepts mathématiques de base (peut-être déclenchée par la confrontation de différentes opinions dans une discussion en classe), et révèle la nécessité de s'accorder sur un choix particulier de cette signification. Elle les aide donc à voir, dans le contexte de cet exemple, l'importance des conventions dans le développement d'une théorie mathématique (ici, la géométrie euclidienne). En même temps, cet engagement souligne les contraintes importantes imposées à la transposition didactique des connaissances historiques par l'obligation qu'à l'enseignant d'enseigner les mathématiques sous leur forme actuelle : contrairement à l'historien, il/elle est « obligé(e) » d'arriver à la définition de l'égalité des figures géométriques adoptée par le programme et le manuel (*cf.* note de bas de page 25). Cela ne signifie pas que les points de vue opposés seront rejetés au cours de l'activité, mais seulement que sa gestion didactique appelle nécessairement un compromis. En tout cas, cette approche est compatible avec la perspective de Freudenthal ci-dessus sur l'enseignement de la « géométrie théorique » à l'école (*cf.* note de bas de page 30).

Compatibilité avec le quatrième critère

> *La proposition utilise-t-elle des événements du développement historique susceptibles d'« ouvrir des fenêtres » sur le sens des mathématiques, ou du contenu mathématique spécifique considéré ?*

Dans le cadre de l'exemple présent, une analyse plus approfondie de la signification des notions communes euclidiennes sur l'égalité peut conduire plus loin dans la géométrie et la signification des concepts métamathematiques clés. Par exemple, en partant de cette activité, des activités similaires portant sur la comparaison de certains postulats, définitions ou démonstrations des *Éléments* d'Euclide et leur présentation dans les manuels modernes peuvent permettre d'approfondir la nature des connaissances géométriques (et donc mathématiques) (*cf.* par exemple, Thomaidis *et al.*, 2006 ; Thomaidis & Tzanakis, 2008). On espère ainsi « ouvrir une fenêtre », petite mais importante, permettant aux étudiants d'avoir un aperçu de la nature de la pensée mathématique en tant que mode d'organisation et de compréhension du monde. On veut captiver leur imagination, stimuler leur intérêt et les inciter à explorer d'autres domaines des mathématiques. Ceci est certainement compatible avec le critère ci-dessus, tout en fixant cependant des objectifs de grande envergure qui vont au-delà de ceux d'un programme de géométrie conventionnel (par exemple celui de la Grèce) : Par exemple, pour les enseignants, de telles élaborations sont plus exigeantes, présupposant une plus grande familiarité avec l'étude des sources historiques et des textes originaux, ou/et une volonté de collaboration avec les professeurs d'histoire ou de langue dans un cadre interdisciplinaire qui garantira le choix et la contextualisation appropriés des sources historiques et leur traitement linguistique adéquat (*cf.* le premier critère ; également Affan, 2024). Une étude aussi approfondie (où les compétences mathématiques vont de pair avec les compétences linguistiques) nécessite la participation d'au moins quelques élèves ayant un intérêt et des aptitudes particuliers, qui pourraient activer la dynamique de groupe en classe. Mais surtout, ces activités et leur élaboration ultérieure présupposent des programmes plus « favorables à l'histoire », éventuellement avec une modification adéquate des objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques (*cf.* le deuxième critère).

Nous pouvons donc conclure que la transposition didactique des connaissances en histoire des mathématiques présentée dans cette section est suffisamment conforme aux quatre critères de la partie 2. Cependant, une évaluation globale de cette activité nécessite à la fois sa mise en œuvre effective en classe et une exploration plus approfondie des quatre critères, comme nous le verrons dans la section suivante.

Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté quelques résultats de recherches historiques sur deux cas importants concernant des étapes du développement des notions d'égalité ; l'une issue de l'arithmétique et de l'algèbre au XVIII^e siècle et l'autre de la géométrie euclidienne au III^e siècle avant notre ère.

Dans le premier cas (partie 1), ces résultats ont été utilisés pour éclairer l'aspect épistémologique et historique des idées fausses de certains élèves sur le concept et le symbole d'égalité ; conceptions erronées bien documentées par la recherche en didactique. Ce cas souligne ce qui a été discuté dans un contexte général dans l'introduction, à savoir la nécessité d'une transposition didactique des connaissances sur l'histoire des mathématiques et critères pour évaluer les propositions d'enseignement ou de formation adossées à ces connaissances.

Quatre de ces critères ont été provisoirement formulés et analysés dans la partie 2. Ils sont motivés par le thème principal qui sous-tend ce présent travail et qui est énoncée dans l'introduction, à savoir la reconnaissance et la mise en valeur du rôle complémentaire joué par les similitudes et les dissemblances entre le travail des mathématiciens du passé et l'enseignement et l'apprentissage modernes des mathématiques ; ressemblances et dissemblances qui sont tout aussi importantes pour comprendre les mathématiques aussi bien comme qu'entreprise humaine créative que comme ensemble des connaissances fruits de cette entreprise. Et donc, que cette complémentarité est essentielle pour transposer appropriée des connaissances historiques à des fins didactiques.

À la lumière de cette thèse, certaines conclusions de la recherche historique sur les *notions communes* relatives aux relations d'égalité dans les *Éléments* d'Euclide (sous-partie 3.1) ont été ensuite utilisées pour guider la conception (*design*) d'une activité d'enseignement visant une introduction aux fondements de la géométrie euclidienne dans l'enseignement secondaire (sous-partie 3.2). Sa conception a nécessité une transposition didactique des connaissances historiques correspondantes ; une transposition elle-même examinée dans la sous-partie 3.3 à l'aune des critères de la partie 2. Cet examen confirme ce qui a été avancé dans l'introduction, à savoir que ces critères ne doivent pas être considérés isolément, mais tous ensemble, comme un ensemble interconnecté d'exigences pour une transposition appropriée et efficace des connaissances en histoires des mathématiques. Cette activité illustre la complémentarité susmentionnée : les similitudes entre le monde des mathématiciens du passé et les salles de classe modernes résident dans le fait que la géométrie, dans sa structure de base en tant que théorie, les objets qu'elle traite et les règles logiques appliquées à son développement, sont essentiellement les mêmes dans le texte original des *Éléments* et dans les manuels et l'enseignement en classe aujourd'hui (*cf.* note de bas de page 37). D'un autre côté, il existe d'importantes dissemblances qui ne doivent pas être ignorées : l'absence dans le texte ancien des *Éléments* d'un symbole pour l'égalité ; l'absence de recours à la mesure des grandeurs ; et l'absence du terme « égalité » dans les textes mathématiques grecs anciens qui, en tant que nom, aide à conceptualiser les relations d'égalité. Bien entendu, une évaluation globale de cette transposition didactique nécessite la mise en œuvre de l'activité proposée en classe et l'évaluation du degré de réalisation des objectifs de chaque phase.

Un autre sujet de recherche future est l'application des critères de la sous-partie 2.2 à la transposition didactique de certaines connaissances sur l'histoire des mathématiques à différents niveaux de l'enseignement secondaire. Dans le même ordre d'idées, il est également instructif d'appliquer ces critères pour évaluer les propositions pédagogiques antérieures qui impliquaient une telle transposition didactique.

D'un autre point de vue — et, en principe, indépendamment des questions éducatives — les études de cas présentées dans cet article soulignent également la nécessité de mener des recherches historiques, qui mettront au jour des alternatives possibles pour une transposition didactique adéquate des connaissances historiques et pour la conception d'activités pédagogiques pertinentes. Cela met à son tour en évidence la nécessité d'une coopération interdisciplinaire entre les communautés concernées (mathématiciens, historiens et enseignants de ces disciplines), comme moyen de gérer efficacement le conflit d'obligations évoqué dans l'introduction.

Références bibliographiques

Affan, A. (2024). *The Potential for Collaboration between Mathematics and History Teachers Regarding the History of Mathematics: The Case of « History of Islamic Mathematics »*. [PhD Thesis, Ben-Gurion University of the Negev, Israel].

Argyropoulos, H., *Vlamos, P., Katsoulis, G., Markatis, S. & Sideris, P. (2016). Euclidean Geometry. Issue A'*. Diophantos (in Greek).

Bagni, G. (1997). « Ma un passaggio non è il risultato… »: I numeri immaginari nella pratica didattica. *La matematica e la sua didattica, 2*, 187-201.

Bagni, G. T. (2009). Bombelli's Algebra (1572) and a new mathematical object. *For the Learning of Mathematics, 29*(2), 29-31.

Bagni, G. (2011). Equations and imaginary numbers: A contribution from Renaissance algebra. Dans V. J. Katz & C. Tzanakis (éds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 45-56). MAA Notes (vol. 78). The Mathematical Association of America.

Barbin, É. (2022). On role and scope of historical knowledge in using the history of mathematics in education. *ZDM - Mathematics Education, 54*(7), 1597-1611.

Benoist, M.-C., Boilevin, J.-M., Brochet, J.-M., Chrétien, C., Crottereau, P., Gaud, D., Pasquier, P. & Picard, D. (1993). Travaux interdisciplinaires : *Mathématiques et philosophie, sciences physiques et philosophie, en classes terminals scientifiques*. IREM de Poitiers.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (éds. et trad.). Kluwer.

Bühler, M. (1990). Reading Archimedes' measurement of a circle. Dans J. Fauvel (éd.), *History in the mathematics classroom* (pp. 43-58). The Mathematical Association.

Chabert, J.-L. (1993). Le problème brachistochrone. Dans É. Barbin (éd.), *Histoire des problèmes, histoire des mathématiques* (pp. 179-198). Ellipses.

Chevallard, Y. & Johsua, M-A. (1991). *La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Chorlay, R. (2022). From the historical text to the classroom session: Analyzing the work of teachers-as-designers. *ZDM - Mathematics Education, 54*(7), 1583-1596.

Chorlay, R. (2025). Quelques moments dans l'histoire de la notion de fonction : lectures épistémologique et didactique. *Petit x, 122*, 31-64 (ce numéro).

Chorlay, R., Clark, M. & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: recent developments in the field. *ZDM - Mathematics Education, 54*(7), 1407-1420.

Clements, D. H. (2003). Teaching and Learning Geometry. Dans J. Kilpatrick, W. Gary Martin & D. Schifter (éds), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 151-178). National Council of Teachers of Mathematics.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry. Second Edition*. Wiley & Sons.

D'Alembert, J. L. R. (1821). Essai sur les Élémens de Philosophie. Dans *Œuvres, Tome Premier, 1re Partie* (pp. 155-348). A. Belin. Originally published in 1759 (reprinted by Fayard, 1986).

De Risi, V. (2021). Euclid's Common Notions and the Theory of Equivalence. *Foundations of Science, 26*, 301-324.

Euler, L. (1770). Vollständige Anleitung zur Algebra. *Euler Archive-All Works. 387 (Erster Theil) ; 388 (Zweyter Theil)*.

Euler, L. (1774). *Eléments d'Algèbre, Tome I*. Bruyset Père & Fils.

Euler, L. (1822). *Elements of algebra, 3rd edition* (F. Horner & J. Hewlett, trad.). Longman, Hurst, Ree, Orme & Co.

Fowler, D. (1987/1999). *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction. Second Edition*. Oxford University Press.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*(3/4), 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel.

Freudentahl, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education, 10*(4), 391-408.

Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 203-223.

Fried, M. N. (2009). Similarity and equality in Greek mathematics: semiotics, history of mathematics and mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 29*(1), 2-7.

Fried, M. N. (2018). History of mathematics, mathematics education, and the liberal arts. Dans G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (éds.), *Invited lectures from ICME-13* (pp. 85–100). Springer.

Fried, M. N. & Unguru, S. (2001). *Apollonius of Perga's Conica: text, context, subtext*. Brill.

Friedelmeyer, J.-P. & Volkert, K. (1993). Quelle réalité pour les imaginaires ? Dans É. Barbin (éd.), *Histoire des problèmes, histoire des mathématiques* (pp. 327-354). Ellipses

Führer, L. (1991). Historical stories in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 24-31.

Gowers, W. T. (2000). The two cultures of mathematics. Dans V. I. Arnold, M. Atiyah & B. W. Mazur (éds.), *Mathematics: Frontiers and perspectives* (pp. 65-78). American Mathematical Society.

Grabiner, J. V. (1974). Is Mathematical Truth Time Dependent? *The American Mathematical Monthly, 81*(4), 354-365.

Halley, H. (1710). *Apollonii Pergaei conicorum libri octo et Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni*. Oxford.

Heath, Th. (1926/1956). *Euclid. The Thirteen Books of the Elements, Second Edition*. Cambridge University Press. Reprinted: Dover.

Heiberg, I. L. & Menge, H. (éds.) (1883). *Euclidis Opera Omnia (vol. I)*. Teubner.

Herbst, P., Fujita, T., Halverscheid, S. & Weiss, M. (2017). *The Learning and Teaching of Geometry in Secondary Schools. A Modeling Perspective*. Routledge.

Hilbert, D. (1900). *Les principes fondamentaux de la géométrie*. L. Laugel (trad.). Gauthier-Villars.

Hilbert, D. (1968/1987). *Grundlagen der Geometrie, 10ste Edition* (mit Supplementen von P. Bernays). Teubner. First Edition 1899.

I.E.P. (Institute of Educational Policy) (2014). *Guidelines for the teaching of Geometry in the A Class of the General Lyceum*. (in Greek).
https://www.iep.edu.gr/el/graf-b-yliko-2024-2025/geniko-lykeio-2024-2025

Ioannidis, I. (1968). *Mathematics for the 3rd year of the Gymnasium (vol. 2) (Geometry)*. OEDB (in Greek).

Jankvist, U. T. (2014). On the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. Dans M. Matthews (éd.), *International handbook of research in history, philosophy and science teaching* (pp. 873-908). Springer.

Kahn, C. (1988). History as a source of problems. Dans É. Barbin (éd.), *Towards a historical perspective in the teaching of mathematics* (pp. 7-1/7-16). Commission Inter-IREM Épistémologie et Histoire des Mathématiques.

Katz, V. J. & Michalowicz, K. D. (éds.) (2005). Historical modules for the teaching and learning of mathematics. *AMS/MAA Classroom Resource Materials (vol. 26), Polynomials* (e-book, pp. 62-87). The Mathematical Association of America.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. Dans P. Nesher & J. Kilpatrick (éds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). Cambridge University Press.

Kjeldsen, T. H. (2012). Reflections and benefits of uses of history in mathematics education exemplified by two types of student work in upper secondary school. Dans B. Shriraman (éd.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* (pp. 333-356). Information Age Publishing.

Kuřina, F. & Siebeneicher, Ch. (2008). Algebra in elementary school: In search of a lost art. Dans É. Barbin, N. Stehlikova & C. Tzanakis, (éds.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the 5th ESU* (pp. 29-38). Vydavatelsky servis, Plzeň.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Legendre, A. M. (1794). *Éléments de Géométrie*. F. Didot

Le Goff, J.-P. (1996). Cubic equations at secondary school level: Following in Euler's footsteps. Dans É. Barbin & R. Douady (éds.), *Teaching Mathematics: the relationship between knowledge, curriculum and practice* (pp. 11-34). Topiques éditions.

Liddell, H. & Scott, R. (1907). *Great Lexicon of the Greek language*. Greek edition, A. Konstantinidis (éd.). I. Sideris.
https://myria.math.aegean.gr/lds/web/index-en.php (in Greek).

Loria, G. (1950). *Storia delle mathematiche (vol. 3)*. U. Hoepli.

Mainzer, K. (1980). *Geschichte der Geometrie*. Wissenschaft Verlag.

Martinez, A. (2007). Euler's « mistake ». The radical product rule in historical perspective. *The American Mathematical Monthly, 114*(4), 273-285.

Melas, Ch. D. (2021). *Declaring taxes smartly*. Stamoulis (in Greek).

Memorandum. (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *The American Mathematical Monthly, 69*(3), 189-193.

Morrow, G. R. (éd.) (1970). *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton University Press.

Mueller, I. (1981). *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. The MIT Press.

Nový, L. (1973). *Origins of Modern Algebra*. Noordhoff International.

Schubring, G. (2008). The debate on « geometric algebra » and methodological implications. Dans R. Cantoral, F. Fasanelli, A. Garciadiego, R. Stein & C. Tzanakis (éds.), *Proceedings of HPM 2008*.
https://hpm.sites.uu.nl/wp-content/uploads/sites/905/2023/11/wetransfer_hpm-2008-proceedings_2023-11-03_0829.zip (consulté le 19/01/24).

Sierpinska, A. (2019). *Materials for teaching a course on research in mathematics education about students' difficulties in mathematics*.
https://www.academia.edu/39941494/

Simmons, G. F. (1991). *Differential equations with applications and historical notes*. McGraw-Hill.

Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its history*. Springer.

Tabach, M., Arcavi, A. & Hershkowitz, R. (2008). Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment. *Educational Studies in Mathematics, 69*(1), 53-71.

Taisbak, Ch. M. (2003). *Euclid' Data. ΔΕΔΟΜΕΝΑ or The Importance of Being Given*. Museum Tasculanum Press.

Testa, G. (1995). Equations du troisième dégrée et nombres complexes. Dans F. Lalande, F. Jaboeuf & Y. Nouazé (éds.), *Actes de la première université d'été Européenne sur l'histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique* (pp. 263-270). IREM de Montpellier.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical « parallelism » revisited: Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 165-183.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2008). Original texts in the classroom. Dans É. Barbin, N. Stehlikova, & C. Tzanakis (éds.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the 5th ESU* (pp. 49-61). Vydavatelsky servis, Plzeň.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2022). Historical knowledge and mathematics education: A recent debate and a case study on the different readings of history and its didactical transposition. *ZDM - Mathematics Education, 54*(7), 1449-1461.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2023). Historical parallelism and the didactical transposition of historical knowledge. Dans É. Barbin, R. Capone, M. N. Fried, M. Menghini, H. Pinto &

F. S. Tortoriello (éds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 9th European Summer University* (pp. 253-260). Edizioni Nuova Cultura.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2025). Shaping criteria for the didactical transposition of historical mathematical knowledge. Dans É. Barbin, M. N. Fried, M. Menghini & F. S. Tortoriello (éds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Trends, practices, future developments*. Birκhäuser.

Thomaidis, Y., Petrakis, Y., Touloumis, K. & Stafylidou, M. (2006). *Language, History and Euclidean Geometry: An attempt towards an interdisciplinary approach in secondary education*. University of Macedonia (in Greek).

Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 44-55.

Vergnaud, G. (1988). Theoretical framework and empirical facts in the psychology of mathematics education. Dans A. Hirst & K. Hirst (éds.), *Proceedings of ICME-6* (pp. 29-47). Y. Bolyai Mathematical Society.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. Dans P. Nesher & J. Kilpatrick (éds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge University Press.

Vitrac, B. (1990). *Euclide d'Alexandrie : Les Éléments (vol. I)*. Presses Universitaires de France.

Weiss, M. & Herbst, P. (2015). The role of theory building in the teaching of secondary geometry. *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 205-229.

Wussing, H. & Arnold, W. (1978). *Biographien Bedeutender Mathematiker*. Volk und Wissen Volkseigener Verlag.