(RE)DÉCOUVRIR LES MATHÉMATIQUES MÉDIÉVALES : L'HÉRITAGE DE FIBONACCI POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES D'AUJOURD'HUI

Marc MOYON[1]
Université de Limoges, CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, France

Résumé. Cet article vise à interroger l'héritage historique du mathématicien pisan du XIII^{e} siècle dans l'enseignement actuel. Après avoir rappelé quelques éléments généraux sur le rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement secondaire, nous étudions comment les manuels scolaires français (pour le lycée) s'emparent de l'œuvre de Fibonacci en lien avec les concepts de nombres, de suites ou d'algorithmes. En élargissant le champ des ressources, nous explorons ensuite comment ces idées anciennes pourraient être adaptées aux besoins pédagogiques actuels en France. De la stimulation de la curiosité des élèves à travers des récits historiques à la promotion des compétences en résolution de problèmes (notamment récréatifs) inspirées par les méthodes de Fibonacci, nous indiquons quelques stratégies susceptibles d'améliorer les expériences d'apprentissage en mathématiques.

Mots-clés. Histoire des mathématiques, Fibonacci, résolution de problème, suite numérique, éducation mathématique.

Abstract. The aim of this article is to examine the historical legacy of the 13th-century Pisan mathematician in today's teaching. After outlining a few general points about the role of the history of mathematics in secondary education, we look at how French school textbooks (for the upper-secondary level) make use of Fibonacci's work in relation to the concepts of numbers, sequences and algorithms. By broadening the scope of resources, we then explore how these old ideas could be adapted to current educational needs in France. From stimulating pupils' curiosity through historical narratives to promoting problem-solving skills (in particular with recreational ones) inspired by Fibonacci's methods, we indicate some strategies which we deem likely to enhance students' learning experience in mathematics.

Keywords. History of Mathematics, Fibonacci, Problem Solving, Numerical Sequence, Mathematics Education.

Introduction

Cette contribution[2] s'articule autour d'un double sujet. Elle s'intéresse d'abord et de façon générale à l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques ; ensuite, et plus particulièrement, à la place et au rôle éventuels des mathématiques médiévales dans l'enseignement d'aujourd'hui. Elle reprend une réflexion engagée depuis longtemps (Moyon, 2016), autour de l'éventuelle pertinence de l'œuvre de Léonard de Pise (plus connu sous le nom de Fibonacci), pour l'enseignement (Moyon, 2025). La prise en compte des manuels scolaires dans la réflexion a été déclenchée suite aux nouveaux programmes du lycée (MEN, 2019a, 2019b, 2019c) dont les items « histoire des mathématiques » devaient inciter les enseignants (et donc les auteurs et éditeurs de manuels scolaires) à réfléchir sur l'introduction d'une perspective historique dans la conception et la mise en œuvre de l'enseignement des mathématiques en France. Une première étude a déjà été publiée (Moyon, 2022) ; elle a permis de mettre en relation, notamment à partir des résultats d'une enquête menée auprès d'enseignants

[1] marc.moyon@unilim.fr

[2] Nous tenons à remercier les deux rapporteurs anonymes qui nous ont permis d'améliorer de manière significative la présente contribution.

de mathématiques (646 au total), leurs désirs, attentes et pratiques effectives avec la réalité tangible des manuels scolaires.

La présente contribution a pour objectif de donner à voir l'utilisation possible de textes anciens (ici, de l'époque médiévale avec les travaux de Fibonacci) pour enseigner les mathématiques ou pour former les enseignants. Il s'agit donc d'une contribution plus empirique que théorique, au sens défini par Jankvist (2009b) et repris par Guillemette (2011). Par ailleurs, l'approche qualitative est ici favorisée, à l'intersection entre l'histoire et la didactique des mathématiques, avec à la fois des extraits de manuels scolaires contemporains, des propositions pédagogiques testées, et des travaux d'élèves. Sont ainsi présentées des pistes pour développer plusieurs contenus, aussi bien des notions mathématiques que des éventuels supports, à utiliser dans l'enseignement des mathématiques ou la formation des enseignants. Il faut donc comprendre les pages suivantes comme des outils, des points de départ pour les enseignants et formateurs désireux d'introduire une perspective historique dans leurs réflexions.

Afin de mieux saisir tout l'enjeu du double sujet, nous donnons d'abord quelques éléments du contexte de recherche sur l'introduction d'une perspective historique et nos motivations premières. Nous considérons cette partie comme le cadre théorique de l'étude qui suit. Ensuite, nous interrogeons la présence de Fibonacci dans les manuels scolaires français à l'aide d'une étude à la fois quantitative (dans un premier temps) et qualitative (dans un second temps). Dans cette analyse qualitative se côtoient d'abord des exercices où nous ne repérons aucune tentative de mise en perspective historique, et ensuite des exercices où lesdites tentatives sont timides et souvent maladroites. Nous poursuivons avec des exemples d'utilisation non plus extraits de manuels scolaires mais d'expériences pédagogiques publiées dans divers contextes internationaux, et à différents niveaux d'enseignement. L'idée est de donner à voir de nombreuses autres situations, envisagées ici comme de véritables alternatives aux seules propositions des manuels scolaires et que nous considérons comme des propositions pour enrichir un éventuel travail pédagogique autour de Fibonacci. Enfin, en guise de conclusion, nous revenons sur divers enjeux de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, illustrés par des exemples du *Liber Abbaci*, préalablement présentés.

1. Fibonacci en classe : quelle(s) ambition(s) pour le présent ?

Pour l'Occident latin, Fibonacci est sans aucune doute la figure la plus connue des mathématiques du XIII[e] siècle même si bon nombre de maîtres ès arts s'intéressent grandement à cette discipline dans les universités naissantes. En outre, depuis les éditions de Baldassarre Boncompagni (Fibonacci, 1856, 1857, 1862), ses œuvres — en latin — sont disponibles ; aussi, aujourd'hui, des traductions en anglais (complètes ou partielles, de plus ou moins bonne qualité) existent pour ses deux ouvrages les plus importants : *Fibonacci's Liber Abbaci* (Sigler, 2002) et la Practica geometriae (Hughes, 2008). Ses autres ouvrages restent encore relativement confidentiels. Les travaux du mathématicien pisan sont utiles pour donner à voir ce à quoi ressemblent les pratiques mathématiques de ce XIII[e] siècle : c'est aussi une raison, pour nous, de considérer Fibonacci comme un lien entre les mathématiques du passé et celles enseignées aujourd'hui. C'est ce que nous souhaitons montrer ici en nous appuyant à la fois sur des manuels scolaires contemporains et de potentielles activités pédagogiques.

Dans les dernières décennies, l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement est devenue un champ de recherche spécifique et dynamique si l'on en croit le nombre toujours croissant de publications sur le sujet (voir, par exemple, les revues de littérature successives : Clark *et al.* (2018, 2019) ; Fauvel et Van Maanen, (2000) ; Furinghetti (1997)). Nous nous situons ici dans la continuité de ces travaux internationaux sur l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques et dans la formation des enseignants. Il s'agit ici de contribuer à enrichir la culture scientifique, à la fois mathématique et historique, des formateurs, des enseignants et *in fine* des élèves, à partir des seuls travaux de Fibonacci. Le lecteur ne trouvera donc pas ici de recommandations sur le *comment* et le *pourquoi* intégrer l'histoire des mathématiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (voir à ce sujet, par exemple, la récente synthèse de Chorlay, Clark et Tzanakis (2022)). Il trouvera plutôt une description d'exemples documentés, issus de l'histoire des mathématiques médiévales, mais qui ne sauraient être considérés comme des incontournables : il faut les envisager comme des jalons de l'histoire des mathématiques ayant laissé des traces qui peuvent nourrir à la fois les réflexions pédagogiques et didactiques de tout enseignant, et les réflexions mathématiques des élèves lorsqu'elles sont opportunément utilisées en classe. Il ne s'agit donc évidemment pas de donner *clés en main* des exercices ou des activités. Il est indispensable de considérer ces exemples à leur juste valeur, à savoir des ressources pour des situations d'apprentissage (à construire) variées et nombreuses permettant aux élèves d'apprécier le rôle des mathématiques dans le développement des sociétés (Fauvel & van Maanen, 2000, pp. 1-29). Selon la classification de Jankvist (2009a), nous pensons que ces exemples pourraient être relativement facilement adaptés, développés en une « approche par modules d'apprentissages » plutôt que nourrir des anecdotes ou des petites capsules historiques, comme des « extraits » historiques (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 214), dont les valeurs didactiques restent discutables : l'histoire illustre alors un sujet mathématique central, incluant éventuellement l'utilisation de sources primaires.

Les textes originaux (voire les manuscrits) sont propices à un travail très intéressant : en effet, leur observation et leur lecture se révèlent souvent très fructueux. L'observation, d'abord, est essentielle pour formuler des hypothèses sur la mise en forme des mathématiques (voir, par exemple, la figure 2 où les élèves doivent décrypter le manuscrit, et notamment ses marges) : que représente le document ? comment est-il organisé ? comment peut-on le comprendre ? comment sont écrites les mathématiques ?… Les élèves sont alors amenés à analyser le document, pour formuler des hypothèses et, le cas échéant, conclure, à l'aide de sa lecture (accompagnée par l'enseignant).

L'observation est nécessairement active : les élèves ne peuvent pas se limiter à la seule description visuelle du document. En effet, s'agissant de documents mathématiques, les comprendre implique de percer (tous) les secrets des nombres, comme nous le verrons plus bas sur le problème des lapins (section 2.2.), et des opérations, explicites comme implicites. C'est la voie à suivre pour que les élèves émettent et testent des hypothèses et justifient leur(s) (éléments de) conclusion. Le document historique peut être le point de départ d'un apprentissage (séance d'introduction) avec la découverte d'une notion ou d'un concept, ou, au contraire une tâche finale ; cela dépend du document et du contrat didactique pensé par l'enseignant. Ici, j'apprécie et partage l'avis éclairé de Renaud Chorlay :

> *Au fil des ans, j'ai de moins en moins tendance à utiliser les documents historiques pour des séances d'introduction d'une notion nouvelle. Je préfère les utiliser en fin de chapitre ou plus tard dans l'année, de manière décontextualisée. Cela présente souvent deux avantages. Le premier est d'éviter la double difficulté qui constitue l'étude d'une notion nouvelle sous une forme qui présente un coût d'accès certain : texte rédigé dans une langue inhabituelle et utilisant un formalisme peu familier, texte rédigé le plus souvent pour des mathématiciens et non pour des élèves. L'autre*

*intérêt de l'utilisation d'*après-coup *est qu'elle permet de revenir d'une manière non routinière sur une notion que le travail en classe a cherché — c'est son objectif — à rendre routinière.* […] *Ce travail d'après-coup cherche à faire passer la notion du côté des connaissances disponibles (plutôt que seulement mobilisables) et permet de mener un travail de second niveau (niveau* méta*) : discuter de l'identité de deux notions présentées différemment, discuter du degré de rigueur, discuter du contexte d'emploi pertinent, etc.* (Chorlay, 2010, p. 101).

De manière générale, dans le cadre de l'éducation mathématique (en France mais aussi à l'international), l'histoire est plutôt envisagée comme un outil et non comme un objectif en soi (Jankvist, 2009b). En effet, l'intention et l'ambition d'un enseignant à l'école, au collège ou au lycée est bien l'enseignement/l'apprentissage des mathématiques et non de l'histoire des mathématiques. Ainsi, l'enseignant de mathématiques (y compris le professeur des écoles, polyvalent) doit poser les objets et concepts mathématiques, propres à la discipline, au centre de sa réflexion (et de celle des élèves), s'aidant de l'histoire et de l'épistémologie pour mieux les interroger ou/et les contextualiser. Enfin, si l'enseignant fait le choix d'une lecture de textes anciens, alors Fried (2007) montre l'importance d'une double lecture : en tant que mathématicien (comprendre le texte, le raisonnement, en donner une écriture moderne pour s'assurer de la bonne compréhension) bien sûr, mais aussi en tant qu'historien (se plonger dans l'époque de la source, éviter les anachronismes, situer la source dans la longue histoire des mathématiques notamment). Pour Fried (2007), la lecture de l'historien est *« diachronique »* (considérer l'évolution des faits dans le temps) tandis que celle du mathématicien est *« synchronique »* (se placer dans un temps donné et y rester, par opposition à la diachronie) ; les deux lectures étant naturellement deux épistémologies complémentaires plus que rivales (Fried, 2007, p. 204). C'est encore à rapprocher des lectures mathématiciennes et historiennes envisagées par Goldstein (1995) :

les mathématiciens adopteraient spontanément pour lire un texte ancien, leurs symbolismes et leurs points de vue modernes. Leur conviction profonde serait que leur transcription ne change pas substantiellement le texte originel : le sens des théorèmes vrais est éternel et universel. Plus encore une modernisation adéquate aiderait à dégager des textes leurs aspects fondamentaux, ceux qui ont été ou sont encore susceptibles de développement. Les historiens seraient au contraire sensibles à la forme dans laquelle le texte se présente, au contexte de la découverte, dans une société ou une culture spécifique. […] *Les lectures mathématiciennes auront pour but de trouver des problèmes à résoudre, des méthodes à utiliser, bref une source d'inspiration pour produire de nouvelles mathématiques ; les lectures historiennes chercheront dans les textes de nouvelles informations sur l'activité mathématique du passé et son développement, afin de produire des réflexions et des commentaires historiques* (Goldstein, 1995, pp. 6-7).

À travers différents exemples, il s'agit donc ici, entre autres :

- (1) de donner à voir les mathématiques d'avant (leurs contenus, leurs écritures, leurs styles), mettant en lumière l'évolution de la discipline (aussi bien dans le fond que dans la forme) entre l'époque médiévale avec les travaux de Fibonacci et les mathématiques d'aujourd'hui ;
- (2) d'accéder à des sujets et problèmes variés, notamment des mathématiques dites récréatives ;
- (3) d'approfondir la compréhension des mathématiques, et en particulier de diverses résolutions de problèmes ;
- (4) d'humaniser les mathématiques ;
- (5) de montrer que les mathématiques existent dans divers contextes et milieux.

Dans ces objectifs multiples, nous retrouvons les catégories largement défendues par Furinghetti (2020, pp. 976-978) sous la forme d'une intention duale. La première composante serait d'envisager l'histoire pour agir sur l'image des mathématiques, la considérant alors comme partie intégrante de la culture mathématique. La seconde composante est de penser l'histoire pour traiter les concepts mathématiques eux-mêmes, afin de favoriser, pour les élèves, l'accès au sens et l'appropriation (souvent difficile) de ces concepts.

Finalement, nous défendons ici à l'instar de Kjeldsen (2012, pp. 334-335) ou encore plus récemment Thomaidis et Tzanakis (2022, pp. 1452-1453, 1459) que les connaissances mathématiques historiques, sous une forme ou une autre, ne sont pertinentes dans le contexte de l'enseignement des mathématiques que dans la mesure où elles ont été didactiquement transformées d'une manière appropriée à la population cible et aux contraintes existantes imposées à cette population (comme le programme, l'âge, les intérêts spécifiques).

2. Manuels scolaires contemporains, texte original et propositions didactiques

2.1. Une première approche quantitative

Nous avons choisi d'écarter de notre étude les manuels scolaires du collège (11-15 ans) car de nouveaux programmes pour les cycles 3 et 4 sont en cours de rédaction et les manuels vont changer à partir de l'année scolaire 2024-2025[3]. Nous faisons aussi le choix de proposer ici d'autres exemples que ceux présentés dans Moyon (2022) et exclusivement des extraits de manuels de lycée édités après la réforme de 2019 (MEN, 2019a, 2019b, 2019c). Précisons enfin qu'il ne s'agit pas, ici, de juger de la pertinence didactique de telle ou telle tâche-élève[4], mais plutôt de mettre en lumière leur rapport au texte mathématique original, à l'histoire en général.

Au total, notre corpus de manuels scolaires français est constitué de 34 références, réparties sur les trois années du lycée : 10 pour la classe de seconde, 10 pour l'enseignement de spécialité en première et 14 pour la classe de terminale (5 pour la spécialité, 5 pour les mathématiques complémentaires et 4 pour les mathématiques expertes). L'étude de ce corpus a donné à voir 62 items avec au moins une référence explicite à Fibonacci (*cf.* tableau 1).

Ces données sont d'abord à mettre en regard des instructions officielles du lycée. En effet, Fibonacci est explicitement cité dans les programmes de la voie générale, de seconde (MEN, 2019a, p. 6), de l'enseignement de spécialité de première (MEN, 2019b, p. 7) et de terminale (MEN, 2019c, p. 6). Aucune mention explicite à Fibonacci n'est faite dans les programmes de mathématiques complémentaires et de mathématiques expertes pour la classe de terminale. En outre, pour le programme de spécialité, en première, le programme relie explicitement la notion de suites numériques avec Fibonacci, en proposant aussi l'étude des premiers termes de la suite de Fibonacci dans les exemples d'algorithmes. Cette incitation institutionnelle explique sans aucun doute le grand nombre de relevés pour la classe de première. Dans la suite, en guise d'exemples, nous donnons des extraits dont le choix a été limité aux plus représentatifs et nous avons exclu les extraits uniquement informationnel (« items informatifs » de la figure 1 (en

[3] En janvier 2025, au moment de la rédaction de cet article, les nouveaux programmes de cycle 3 sont en consultation. On peut remarquer la présence, nouvelle, des rubriques « culture générale » consacrant une large place à l'histoire des mathématiques et incitant les enseignants de collège (6^{e}) à intégrer une perspective historique dans leur enseignement. Les programmes de cycle 4 seront proposés au cours de l'année 2025-2026.

[4] C'est l'objet d'un travail en cours de l'équipe de recherche et de réflexion « histoire des mathématiques et manuels scolaires » de l'IREM de Limoges, notamment à partir d'une méthode adaptée de Schocht (2018).

partie 2.2.) comme les biographies, les encarts descriptifs ou encore les frises chronologiques) même si nous précisons, si nécessaire pour notre propos comme une information complémentaire, leur existence ou leur absence dans les manuels sélectionnés.

Description du corpus	**2de**	**1re**	**T^{ale} (spé.)**	**T^{ale} (comp.)**	**T^{ale} (exp.)**	**TOTAL**
Nombre de manuels du corpus	10	10	5	5	4	34
Nombre de manuels sans référence explicite à Fibonacci	3	0	0	2	0	5
Nombre de manuels mentionnant explicitement Fibonacci	12	28	12	3	7	62
Items informatifs (sans activité mathématique)	6	17	5	2	6	36
Items sur la suite ou les nombres de Fibonacci (avec activité mathématique)	4	11	6	1	1	23
Items sur d'autres thèmes (avec activité mathématique)	2	0	1	0	0	3

Tableau 1 *: Synthèse de l'étude des items ayant une référence explicite à Fibonacci.*

À partir du seul cas de Fibonacci, nous pensons que tous ces exemples, autour de l'exploitation possible de son œuvre, dévoilent la relative pauvreté des intentions des auteurs/éditeurs de manuels scolaires concernant l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe. En effet, les propositions didactiques sont très limitées, les références à l'histoire sont réduites et les textes originaux sont peu intégrés. L'analyse du corpus révèle donc l'insuffisance, voire l'inadéquation, du matériel didactique impliqué, comparée à la richesse potentielle dans les textes historiques correspondants, qui pourraient fournir des aperçus profonds aux enseignants et aux élèves en stimulant leur intérêt et en les motivant à approfondir divers sujets mathématiques liés implicitement ou explicitement aux écrits de Fibonacci. Comme nous allons le voir dans la partie suivante, divers autres extraits du *Liber Abbaci* auraient pu être donnés en rapport avec le programme de lycée, mais nous regrettons que les auteurs/éditeurs n'aient pas fait ce choix.

2.2. « L'arbre qui cache la forêt » : Le problème des lapins ou la suite de Fibonacci

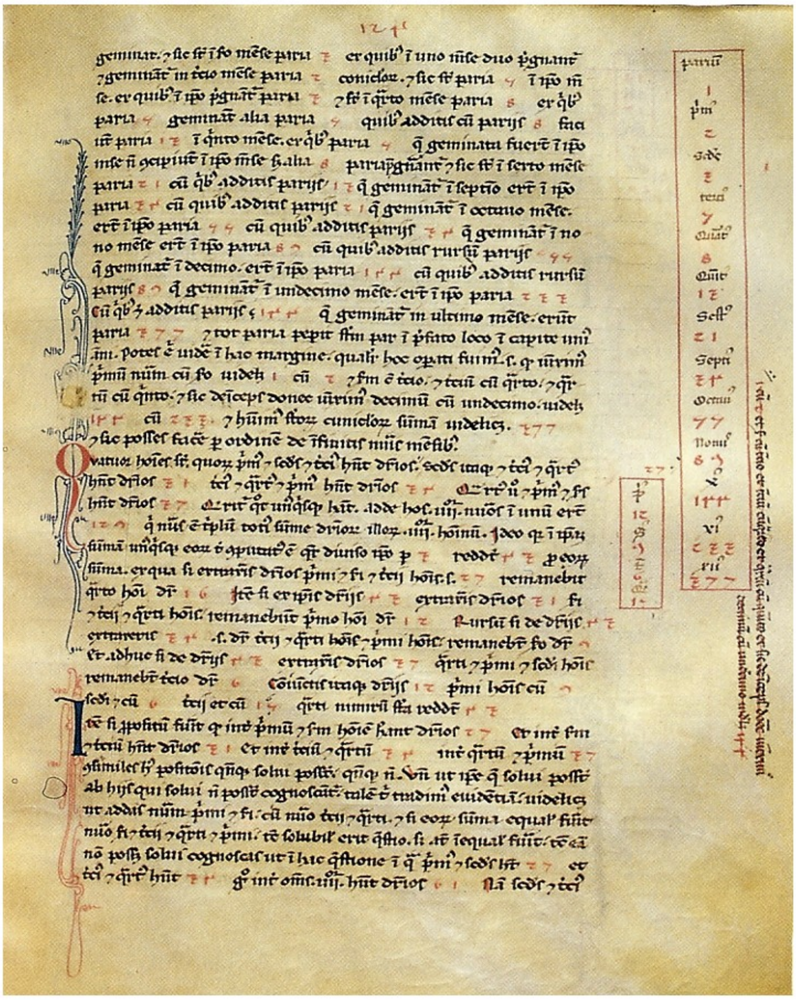
Même si l'œuvre de Léonard de Pise est extrêmement riche et diversifiée, les références au mathématicien médiéval sont malheureusement, la plupart du temps, uniquement relatives à la suite récurrente éponyme : $\begin{cases} u_0=0 \ ; \ u_1=1 \\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2} \text{ pour } n\geqslant 2 \end{cases}$

ou aux « nombres de Fibonacci » : 0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; …

avec une référence explicite ou non à l'histoire médiévale ou au « problème des lapins ».

Les quelques informations historiques, lorsqu'elles sont présentes, portent sur la suite ou les nombres de Fibonacci, et non sur le mathématicien et encore moins sur les mathématiques du XIII^e siècle pour en comprendre le contexte (Poncy & Vieudrin, 2020, p. 38 ; Malaval, 2019, p. 39 ; Malaval, 2020, p. 190).

La plupart du temps, les exercices et problèmes proposés sont déshistoricisés, c'est-à-dire l'histoire est absente ou invisibilisée ; ce sont pour nous des « occasions manquées ». Et même lorsque le contexte historique est brièvement présenté, notamment par les seuls encarts historiques, il est souvent difficile de se rendre compte de la différence entre ce que Fibonacci a véritablement écrit (*cf.* figure 1) et ce que les mathématiciens ont pensé et écrit postérieurement.



Paire [nombre de paires de lapins au départ]
1
Premier [mois]
2
second
3
troisième
5
quatrième
8
Cinquième
13
sixième
21
septième
34
huitième
55
neuvième
89
dixième
144
onzième
233
douzième
377

Figure 1 *: ms. Biblioteca Nazionale di Firenze, Codice magliabechiano cs cI, 2626 [folio téléchargeable librement sur https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fichier:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg]. Le tableau, en marge du* Liber Abbaci*, (réédité à droite, les nombres en gras sont en rouge dans le manuscrit) donne le nombre de paires de lapins pour chaque mois, dans les conditions énoncées par Fibonacci. Ainsi, par exemple, le huitième mois, il y a exactement 55 paires de lapins dans l'enclos. (Les mots entre crochets ne sont pas dans le manuscrit original).*

La plupart des énoncés gagneraient à être plus explicites historiquement, renvoyant plus systématiquement au texte original. C'est, pour nous, une condition nécessaire pour que l'élève (et souvent aussi l'enseignant) se rende compte de l'évolution des mathématiques au cours de son histoire : la lecture historienne est très souvent rendue impossible ou fautive, favorisant ainsi la seule lecture mathématicienne. Les deux extraits suivants (*cf.* figures 2 et 3) sont caractéristiques de ce point de vue, par les notions, les objets et les écritures abordées. Faut-il croire en la contemporanéité de la suite de Fibonacci et du calcul matriciel, comme potentiellement suggéré par la figure 2 ? Peut-on croire que Fibonacci a déjà pensé et démontré les résultats de la figure 3 (ou ceux proposés par Le Yaouanq (2019, p. 117)) ?

102 Étudier la suite de Fibonacci

Raisonner | Calculer | Communiquer

On appelle **suite de Fibonacci**, du nom d'un mathématicien italien, la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On admet que pour tout entier naturel n, u_n est un nombre entier naturel.

On considère la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer les matrices F^2 et F^3.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2.$$

3. On donne $u_{12} = 144$.

Démontrer qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers, l'une d'elles étant égale à 12.

Donner la longueur des deux autres côtés.

HISTOIRE DES MATHS

C'est dans son *Liber abaci*, en 1202, que **Fibonacci** introduit cette suite en étudiant la reproduction des lapins.

Figure 2 *: (Malaval, 2020, p. 249).*

137 PGCD et suite de Fibonacci

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \text{et } u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

2. Montrer par récurrence que :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \times u_{n-1} - (u_n)^2 = (-1)^n$.

En déduire que les termes u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

3. Démontrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \geqslant 1$,

$$u_{n+p} = u_n \times u_{p-1} + u_{n+1} \times u_p.$$

4. a) Démontrer que :

$$\mathrm{PGCD}(u_{n+p}, u_n) = \mathrm{PGCD}(u_p, u_n).$$

b) En déduire que si r est le reste de la division de m par n alors :

$$\mathrm{PGCD}(u_m, u_n) = \mathrm{PGCD}(u_r, u_n)$$

$$\mathrm{PGCD}(u_m, u_n) = u_{\mathrm{PGCD}(m,n)} \quad (1)$$

5. Application : calculer u_{12}, u_{18}.

Vérifier alors la relation (1) de la question **4. b)**

Fibonacci (Leonardo) (1175-1250)

Mathématicien italien qui a étudié les travaux d'algèbre d'Al-Khwarizmi, les chiffres arabes et la notation algébrique puis les a introduit en Occident. Il est aujourd'hui connu pour la suite qui porte son nom, tirée d'un problème d'un de ses livres *Liber abaci* publié en 1202, qui décrit la croissance d'une population de lapins.

Figure 3 *: (Arnaud* et al.*, 2020a, pp. 129 et 239), avec un encart biographique sur Fibonacci en fin de livre (à droite)*[5]*.*

[5] Le portrait — qu'on retrouve dans de nombreux document pédagogiques — peut surprendre pour un auteur médiéval dont on ne connait rien : il s'agit en fait d'un portrait reconstitué à partir de sources historiques donnant quelques éléments caractéristiques des marchands au XIII[e] siècle à Pise. Il est issu d'une gravure non datée et colorisée publiée dans *I benefattori dell'umanita*, vol. 6, (Florence, Luigi Ducci, 1850, p. 334).

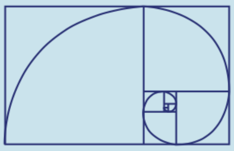
Mais alors, comment pourrait-on envisager le développement des mathématiques depuis le Moyen Âge ? L'enseignant a la plupart des réponses à ces questions mais l'élève ne dispose probablement pas assez de connaissances pour les trouver, sans aide. Le manuel scolaire est, dans ce cas, une source d'erreurs dans la construction des conceptions élèves.

Plusieurs autres développements issus de la suite ou des nombres de Fibonacci sont aussi montrés à l'instar de la spirale, du rectangle d'or (*cf.* figure 4), du modèle proie-prédateur (*cf.* figure 5) ou encore de l'évolution d'une population (*cf.* figure 6). Les éditeurs/auteurs de manuels scolaires semblent vouloir montrer le lien (le plus souvent amené de manière artificielle) entre la suite de Fibonacci et le « nombre d'or » ou la « divine proportion » (*cf.* figure 4), lien qui n'existe absolument pas dans le *Liber Abbaci*, mais seulement bien plus tard, à partir de *L'étrenne ou la neige sexangulaire* de Johannes Kepler (1571-1630) (Kepler, 1975). Fibonacci n'a absolument pas conscience du lien entre le nombre d'or et le tableau de nombres qu'il a dressé en marge de son texte (*cf.* figure 1).

108 Chaque groupe présentera au reste de la classe ses recherches sur un des thèmes proposés autour du nombre d'or φ. *En groupe*

Thème 1 : Le rectangle d'or

1. Rechercher ce qu'on appelle un rectangle d'or et écrire son programme de construction.
2. Construire un rectangle d'or sur feuille blanche, ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis en déduire une valeur approchée de φ.



Thème 2 : Le pentagone régulier

1. Rechercher le lien unissant le nombre d'or, un pentagone régulier et son pentagramme.
2. Construire un pentagone régulier et son pentagramme sur feuille blanche, ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis en déduire une valeur approchée de φ.

Thème 3 : Les racines continuées

1. Calculer la valeur exacte et une valeur approchée au dix-millième près de chacun des termes de la suite de nombres suivante.

$A = \sqrt{1+\sqrt{1}}$ $\quad B = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$

$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$

Écrire D, le terme suivant de cette suite, puis calculer sa valeur exacte et une valeur approchée.
2. À l'aide d'un tableur, calculer les six termes suivants de la suite.
Que peut-on remarquer ?

Thème 4 : La suite de Fibonacci

1. Rechercher qui était Fibonacci (époque et lieu où il a vécu, ses travaux...) et la méthode de calculs des termes de sa suite.
2. À l'aide d'un tableur, calculer les vingt premiers termes de la suite de Fibonacci.
3. Calculer le rapport de deux termes successifs. Que peut-on remarquer ?

Thème 5 : φ dans l'art et dans la nature

1. Étudier le rôle du nombre d'or φ à travers l'histoire.
2. Sur Internet, rechercher différents exemples dans la nature où φ est mis en évidence.
3. Sur Internet, rechercher différentes œuvres d'art (peinture, sculpture, architecture) où φ intervient.

Figure 4 *: (Gringoz & Weyermann, 2019a, p. 60), rubrique « travailler autrement ». Ici, la « suite de Fibonacci » est un thème de travail de recherche, pour ses liens avec le nombre d'or.*

A ▸ Évolution d'une population de lapins sans prédateur

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

Leonardo Fibonacci – *Liber Abaci* – 1202

On note L_n le nombre de couples de lapins à la fin du n-ième mois et on précise que le premier couple est à son 1^er^ mois d'existence.

1. À partir de combien de temps un couple devient fertile ? Combien de temps dure une gestation ?

2. a) Justifier que $L_1 = 1$, $L_2 = 1$ et $L_3 = 2$.
b) Déterminer les huit premiers termes de la suite.

3. Exprimer L_{n+2} en fonction de L_n et L_{n+1}.

4. Représenter cette suite. Décrire l'évolution de la population de lapins.

Figure 5 *: (Arnaud* et al.*, 2020b, p. 257), TP.*

Nous allons étudier un problème posé par Leonardo Fibonacci dans son ouvrage *Liber Abaci*.
On s'intéresse à l'évolution d'une population de lapins, comptant initialement un couple de lapins.
À un mois, les lapins ne sont pas encore adultes et ne se reproduisent pas.
À partir de deux mois, les lapins sont adultes, et chaque couple de lapins donne naissance à un nouveau couple de lapins.
On suppose que les lapins ne meurent pas.
On note u_n le nombre de couples de lapins après n mois.
Ainsi u_0 correspond au nombre de couples de lapins initialement présent le premier mois. On a $u_0 = 1$.

A ▸ Évolution du nombre de couples de lapins

1. Combien y a-t-il de couple(s) de lapins le deuxième mois ? le troisième mois ?
2. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).
3. Déterminer une relation entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2}.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de couples de lapins après 2 ans.
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer après combien de mois la population de lapins dépasse 1 000 000 de lapins.

B ▸ Lien avec le nombre d'or

On note (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Rechercher sur Internet la valeur exacte du nombre d'or et en donner une valeur approchée à 0,0001 près.
2. Calculer les cinq premiers termes de la suite (v_n).
3. a) Recopier le tableau suivant dans un tableur.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

b) Rentrer la valeur de u_0 dans la cellule B2 et la valeur de u_1 dans la cellule B3.
c) Rentrer la formule nécessaire dans la cellule B4 et compléter la colonne B par recopie vers le bas.
d) Rentrer la formule nécessaire dans la cellule C2 et compléter la colonne C par recopie vers le bas.
e) Conjecturer la limite de la suite (v_n).

Figure 6 *: (Gringoz & Weyermann, 2019b, p. 77).*

Sur l'ensemble du corpus considéré, un seul ouvrage (Beltramone, 2019b, p. 138) montre un folio manuscrit du *Liber Abbaci* avec le tableau de nombres en marge (*cf.* figure 1). C'est évidemment une excellente initiative. En effet, nous pensons que proposer un travail encadré sur une source primaire peut permettre aux élèves, notamment par l'observation active (*cf. supra*), de comprendre les mathématiques d'une période donnée. Mais nous devons ici déplorer le manque de contextualisation et d'explication, et surtout le manuscrit est présenté en dehors de toute référence à ladite suite et sans aucune possibilité de pouvoir travailler avec, une nouvelle occasion manquée ! Du point de vue mathématique et didactique, les élèves pourraient être amenés à remarquer que le problème posé par Fibonacci est en temps *fini* (limité à 12 mois si l'on suit la marge du manuscrit) même si Fibonacci lui-même à la fin de son problème précise : *« Tu pourrais poursuivre ainsi pour un nombre illimité de mois »* (Fibonacci, 2020, p. 453), se rendant compte que, chaque mois, le nombre de lapins est égal à la somme du nombres de lapins des deux mois précédents. Cela permettrait de critiquer certains exercices comme (*cf.* figures 5, 6), qui présentent le problème comme un problème de modélisation sans établir aucune condition préalable (des lapins qui ne mourraient jamais, des ressources infinies en espace et en nourriture…).

En réduisant grandement l'œuvre de Fibonacci à cette unique contribution, « l'arbre cache la forêt » comme le précise si bien l'adage. Ainsi, dans l'ensemble des manuels français étudiés qui citent explicitement le mathématicien pisan, un seul manuel (Beltramone, 2019a) offre deux autres extraits du *Liber Abbaci* (sans aucune analyse historique) ; en référence à l'algorithme glouton (*cf. infra*) et au problème suivant (*cf.* figure 7) qui rappelle le caractère récréatif de certaines parties du *Liber Abbaci* avec l'énoncé et la résolution d'un problème de répartition (Fibonacci, 2020, p. 452). La tâche élève est alors de comprendre le raisonnement du mathématicien médiéval.

57 Fibonacci écrivait dans le *Liber abaci* (1202) :
C'étaient deux hommes, dont le premier avait 3 pains, et l'autre 2 ; […] comme un soldat passait, ils l'invitèrent ; […] quand ils eurent mangé tous les pains, le soldat s'en alla, leur laissant 5 besants pour sa part. Le premier homme en prit 3, parce qu'il avait fourni trois pains ; et le second prit les deux besants restants, pour valeur de ses deux pains. On demande si cette répartition était juste, ou non. En fait, certains malhabiles diront que c'était juste, parce que chacun a reçu un besant pour chaque pain ; mais c'est faux ; simplement parce que les trois ont consommé la totalité des cinq pains. Il en découle que chacun a consommé 1 2/3 de pain ; donc le soldat a consommé 1 1/3 de pain, soit 4/3, des pains de celui qui en avait trois. Et des pains de l'autre, il n'a consommé que 1/3 d'un pain. Pour cette raison, il revient au premier homme 4 besants, et à l'autre 1 besant.
Expliquer ce raisonnement.

Figure *7 : (Beltramone, 2019a, p. 51).*

Enfin, un dernier autre extrait mérite un nouveau détour (*cf.* figure 8).

57 CALC **Histoire des mathématiques**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x.$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

3. Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

Point Histoire

Leonardo Fibonacci montre que la solution réelle de l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ n'est ni entière ni rationnelle et fournit même une approximation avec dix décimales exactes de cette solution.

Figure 8 *: (Poncy & Vieudrin, 2020, p. 214), mentionnant — sans l'écrire — la* Flos [Fleur] *de Fibonacci.*

Sous la rubrique *Histoire des mathématiques*, il propose la résolution de l'équation $x^3+2x^2+10x=20$ à partir de l'étude d'une fonction. Le *Point histoire* (sans aucune référence précise, ici, à l'opuscule intitulé *Flos* et rédigé entre 1226 et 1230 par Fibonacci) indique ce que semble avoir réalisé Fibonacci, à savoir donner *« une approximation avec dix décimales exactes »* de la solution réelle de l'équation qui ne serait *« ni entière ni rationnelle »*, sans pour autant donner la forme de la solution donnée alors par Fibonacci. Cette indication pose un certain nombre de problèmes dans la compréhension ou la simple représentation qu'un élève (voire un professeur) peut avoir du texte original de Fibonacci. Est-il utile de rappeler ici que si Fibonacci introduit dans son *Liber Abbaci* la numération décimale positionnelle, il est évidemment très loin de manipuler les nombres décimaux (ce que pourrait laisser croire la mention d'une *« approximation avec dix décimales exactes »* ? Au mieux, il peut écrire un nombre comme la somme d'un entier et de fractions décimales selon une écriture spécifique, lui venant probablement du Maghreb (Moyon & Spiesser, 2015). Ici, il utilise une écriture sexagésimale. Est-il davantage utile de préciser que Fibonacci n'écrit pas d'équation usant du symbolisme algébrique comme aujourd'hui, mais énonce l'équation comme *« […] X racines prises avec deux carrés et un cube sont XX »* (Fibonacci, 1856, p. 4, en numération romaine dans l'édition consultée) ?

Si l'on consulte les sources, on se rend compte que Fibonacci précise en réalité, après une longue étude du problème, qu'*« aucune solution ne correspond à l'une des quinze lignes décrites par Euclide dans son Livre X »* (Fibonacci, 1856, p. 17), ce que les auteurs de l'extrait de la figure 8 résument, en termes modernes, de manière raccourcie[6] : *« la solution réelle* […] *n'est ni entière ni rationnelle »*. Aussi cherche-t-il alors à approcher la solution : *« studui solutionem eius ad propinquitatem reducere »* (Fibonacci, 1856, p. 17). Il ne décrit pas la méthode utilisée mais écrit la solution approchée à l'aide de la numération romaine, en base soixante : *« unum et minuta .XXII. et secunda .VII. et tertia .XLII. et quarta .XXXIII. et quinta .IIII. et sexta .XL. »* (Fibonacci, 1856, p. 17). Ce nombre correspond, dans une écriture moderne, à : $1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6}$, soit environ 1,3688081078**5**3 en écriture décimale moderne là où une calculatrice lycée donne 1,3688081078**2**1 comme solution approchée de l'équation.

Cet exercice, avec la référence à Fibonacci, est un échec sur le plan historique et provoque une mauvaise représentation du lecteur sur les mathématiques et leur évolution, même si nous pouvons comprendre les choix mathématiques réalisés. Il aurait été intéressant de prolonger l'étude, surtout en terminale, avec l'étude plus fine de la notion d'irrationalité (en montrant, par exemple, qu'un nombre rationnel ou qu'un nombre irrationnel d'une forme donnée ne peut pas être solution de l'équation (Picutti, 1983, pp. 342-351)), ou avec un travail sur la valeur approchée déterminée par Fibonacci et la base 60.

[6] Le livre X des *Éléments* est le livre où Euclide étudie les grandeurs commensurables, incommensurables et où il donne une classification de lignes irrationnelles, qui n'englobe que partiellement les nombres irrationnels d'aujourd'hui (Euclide, 1998). Fibonacci démontre, en réalité, par disjonction de cas, qu'aucun nombre rationnel ou irrationnel selon la classification de son époque (c'est-à-dire celle d'Euclide, d'où la mention des « quinze lignes ») ne peut être solution de l'équation $x^3+2x^2+10x=20$. Aujourd'hui, on peut démontrer (après les travaux algébriques de la Renaissance) que la solution réelle fait partie des nombres irrationnels qui ne sont pas inclus dans la classification donnée par Euclide. Le résultat de Fibonacci est donc plus fort que ce que laisse entendre maladroitement l'encart historique mentionnant en outre « la solution réelle » qui n'a aucun sens pour le mathématicien médiéval.

3. Des propositions originales « pour sortir des sentiers battus »

Plusieurs chercheurs en éducation mathématique partagent la conclusion précédente et le sentiment que d'autres voies sont possibles. Dans cette partie, nous nous intéressons à deux axes possibles de présentation de l'œuvre de Fibonacci : les nombres et notamment les fractions avec l'algorithme glouton tel qu'il le présente dans son *Liber Abbaci* ainsi que les mathématiques récréatives auxquels de nombreux problèmes du *Liber Abbaci* se rattachent. Nous donnons ici quelques exemples sans entrer dans les contenus en détail, désireux d'éveiller la curiosité de notre lecteur en l'invitant à lire les références mentionnées ; celles-ci exhument d'autres ressources possibles que les seuls manuels scolaires, plus précises et moins sujettes aux défauts desdits manuels.

3.1. Les fractions dans le *Liber Abbaci* : l'algorithme glouton de Fibonacci

Les auteurs du manuel (Beltramone, 2019a, pp. 56-57) associent fort justement mais relativement maladroitement le nom de Fibonacci à un algorithme (glouton) de décomposition de toute fraction de type $\frac{a}{b}$ (a et b deux entiers tels que $a<b$) en somme de fractions de numérateur 1 (quantièmes), comme Fibonacci l'établit dans son *Liber Abbaci* (Moyon, 2023b). Précisément, le travail du mathématicien pisan est ramené aux fameux quantièmes égyptiens (de type $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$), avec la non moins fameuse (mais fautive) représentation de l'*œil d'Horus* (Moyon, 2023b). En réalité, un travail précis de compréhension de cet algorithme et des exemples considérés par Fibonacci pourrait être mené avec des élèves de lycée, à condition de donner aux élèves l'opportunité de lire le texte original — traduction française dans (Moyon, 2023b) — qui éclaire la manière de penser de Fibonacci. Les élèves sont alors amenés à mieux comprendre ce qu'est une fraction pour Fibonacci et les mathématiciens médiévaux en général, et la lecture du texte original leur permet de découvrir la description, à partir d'exemples, d'un algorithme avec disjonction de cas (*cf.* figures 9 et 10).

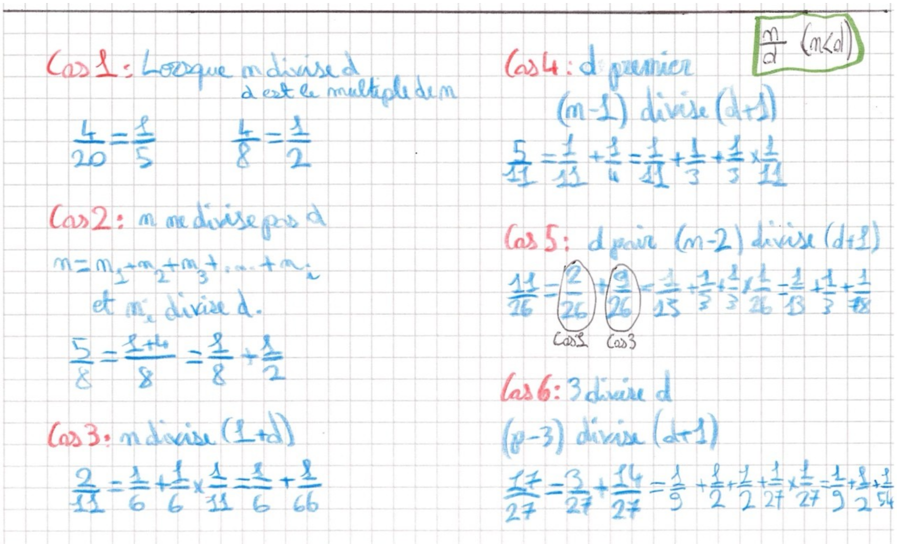


***Figure 9** : Exemple de disjonction de cas donnée par Fibonacci avant le cas général de l'algorithme glouton, pour écrire tout nombre rationnel comme somme de fractions de numérateurs égaux à 1 (travail réalisé en atelier en première spécialité dans le cadre du Laboratoire de mathématique du Lycée George-Sand de La Châtre en 2024).*

Les nombreux exemples numériques donnés par Fibonacci pour illustrer chacun des différents cas sont tous intéressants d'une part pour montrer que la fraction considérée par l'exemple vérifie bien les propriétés caractéristiques du cas concerné, et d'autre part pour décomposer ladite fraction en somme de fractions unitaires suivant pas à pas les étapes décrites par Fibonacci. Les élèves sont alors amenés à réaliser de nombreux calculs fractionnaires, souvent fastidieux, sans s'en rendre compte car ils veulent comprendre la pensée du mathématicien pisan. En outre, cet extrait permet de mettre en avant la complémentarité (*cf. supra*) des lectures historienne, depuis l'Égypte antique jusqu'aux mathématiques de Sylvester (Moyon, 2023b), et mathématicienne qui permet aux élèves d'acquérir les concepts mathématiques en jeu. Enfin, un travail spécifique sur les quantièmes donne à voir les mêmes concepts mathématiques dans des lieux et des époques différents et révèle différents éléments du développement des mathématiques aussi bien dans le fonds (quelles mathématiques ? quels résultats ? pourquoi ?) que dans la forme (quelles expressions ? quelles écritures ? quels raisonnements ?).

3.2. Les récréations mathématiques chez Fibonacci

Nous avons présenté ailleurs une proposition didactique du *Problème du verger* (Moyon, 2019a, 2019b) dans lequel il s'agit de déterminer le nombre de fruits qu'un promeneur a pu cueillir à l'intérieur d'un verger, en passant par un certain nombre de portes, tout en payant un tribut à chaque portier du verger. Nous présentons ici, à partir d'une revue de littérature, quelques expérimentations pédagogiques pour divers autres problèmes, à différents niveaux, qui montrent la richesse du *Liber Abbaci* comme source pour l'enseignant de mathématique qui pourrait inspirer les auteurs/éditeurs de manuels.

L'intérêt des récréations mathématiques pour l'éducation mathématique et la formation des enseignants à maintes fois été montrées (Ben-Chaim *et al.*, 2019 ; Chevalarias *et al.*, 2019 ; Rougetet, 2023 ; Rowlett *et al.*, 2019 ; Singmaster, 2016 ; Slisko 2020a ; Sumpter, 2015). Leurs aspects pédagogiques résideraient ainsi dans leur nature ou leur potentiel ludique *« qui peut se révéler être un levier fort dans l'apprentissage des élèves (et des adultes) »* (Rougetet, 2023, p. 110). Les récréations mathématiques sont doublement intéressantes dans notre étude car présentes dans l'histoire des mathématiques depuis au moins l'Antiquité, elles permettent alors d'introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques et suscitent, grâce à leur nature récréative, la curiosité et l'enthousiasme des jeunes (et moins jeunes) élèves pour les mathématiques (Rowlett *et al.*, 2019, p. 985 ; Sumpter, 2015). Ainsi, plusieurs problèmes récréatifs, énoncés et résolutions, sont traités dans la littérature didactique avec des exploitations en classe (Moyon, 2024). Le *Liber Abbaci* est particulièrement intéressant car il renferme un certain nombre d'énoncés qui pourraient être classés parmi les problèmes récréatifs (Hannah, 2011 ; Moyon, 2016, 2019a, 2019b). Comme nous allons le voir ci-dessous, si les manuels scolaires français ont tendance à ignorer cette caractérisation — notamment des chapitres 12 et 13 qui, à eux seuls, représentent une petite moitié du *Liber Abbaci* —, plusieurs spécialistes ont cherché à développer ces éléments pour l'enseignement des mathématiques.

Tous les exemples considérés dans cette partie permettent, en particulier, de travailler des concepts mathématiques à partir de problèmes variés. Toutes les activités pédagogiques présentées ci-dessous illustrent la dichotomie usuellement présentée dans les travaux relevant de l'histoire et la pédagogie des mathématiques (HPM) : l'histoire pour agir sur l'image que les élèves ont des mathématiques et de leur pratique, l'histoire pour favoriser l'accès aux concepts et aux éventuelles techniques mathématiques.

Le **puzzle de Fibonacci** ***: du Moyen Âge au XX^e^ siècle, les mathématiques en évolution***

Les « nombres de Fibonacci » sont naturellement une riche ressource comme le suggèrent la plupart des manuels scolaires vus précédemment et comme le démontrent Sullivan et Panasuk (2014). Une énigme mathématique à partir d'un puzzle (*cf.* figure 10) conduit les élèves à une recherche en géométrie plane reposant principalement sur les concepts de colinéarité et d'alignement afin d'interroger les liens qui unissent géométrie et algèbre.

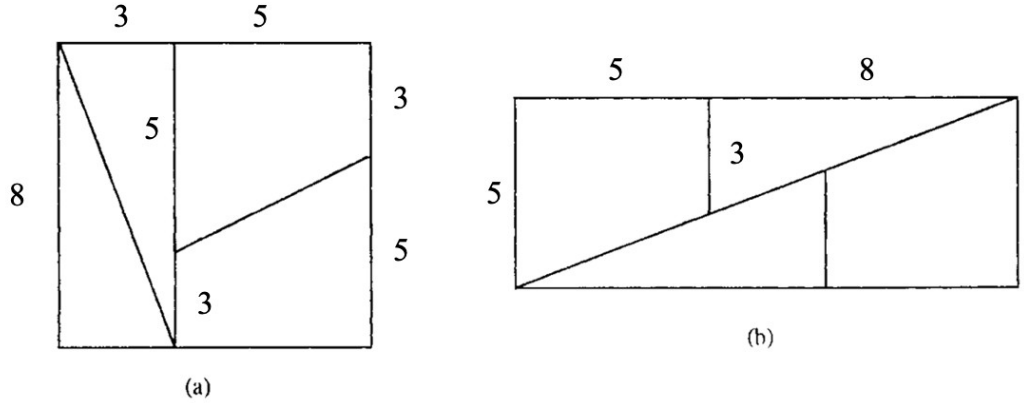


Figure 10 *:* Fibonacci square puzzle *d'après Sullivan et Panasuk (2014, p. 135).*

Même si les puzzles de la figure 10 ne sont dans aucune œuvre de Fibonacci, il est intéressant de rapprocher le *problème du puzzle*, aussi connu comme le *paradoxe de Lewis Caroll* (1832-1898) où $64=65$[7], de la lettre, du 31 octobre 1878, d'Édouard Lucas (1842-1891) adressée à Charles-Ange Laisant (1841-1920). Cette lettre, conservée à la Bibliothèque nationale de France, est restée inédite jusqu'à aujourd'hui, Lucas y mentionne explicitement Fibonacci. En effet, nous pensons ici que la présentation de cette lettre est l'occasion de présenter une méthode de communication entre mathématiciens et permet de donner à voir « les mathématiques en train de se faire ». Cela participe à l'humanisation de la discipline.

Précisons que Lucas et Laisant, deux mathématiciens français de la fin du XIX^e^ siècle, sont spécialisés en théorie des nombres. En plus de leurs travaux de recherche, ils sont tous deux animés par les mathématiques récréatives pour l'amusement qu'elles procurent et la curiosité qu'elles développent. En particulier, Laisant croit en leur rôle pédagogique pour s'initier aux mathématiques (Moyon, 2023a). Dans cette lettre, à propos de *« la question du carré de 64 transformé en rectangle de 65 »*, Lucas explique à Laisant que la différence des aires entre le carré et le rectangle, prenant les termes de la suite de Fibonacci comme dimensions, est toujours égale à 1 (soit l'aire du carré est plus grande, soit l'aire du rectangle est plus grande, mais la différence entre les deux est toujours d'une unité). Lucas finit sa lettre mentionnant les fractions continues.

Voici la transcription de la lettre manuscrite :

> *J'ai oublié de vous dire que la question du carré de 64 transformé en rectangle de 65, c'est la série de Fibonacci ; c'est très joli et on peut en faire tant qu'on veut, en plus ou en moins ; c'est au fond la représentation géométrique des fractions continues.*
>
> *Série de Fibonacci 1.2.3.5.8.13.21.34.55*

[7] On peut aussi obtenir ce résultat surprenant en calculant les aires des deux rectangles de la figure 10 : $8\times8=64$ pour le premier rectangle, et $5\times13=65$ pour le second rectangle.

$3^2-2.5=-1$

$8^2-5.13=-1$

$21^2-13.34=-1$

donnent la diminution quand on passe du rectangle au carré ;

$5^2-3.8=1$

$13^2-8.21=1$

$34^2-21.55=1$

donnent l'augmentation d'un carré ; on peut augmenter d'autant de carrés qu'on veut, avec d'autres fractions continues que $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}}$.

Cela nous fera 8 ou 10 lignes d'exercices dans le bouquin.

(Paris, Bibliothèque nationale de France, NAF 28336, fonds « Laisant », fol. 17).

Aussi, dans les *Récréations mathématiques* de Lucas, publiées à titre posthume, en partie par Laisant, en 1891, on trouve un passage plus explicite :

> *Si l'on observe que cette série provient du calcul des réduites de la fraction continue la plus simple*
>
> $$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}}$$
>
> *On peut considérer ces découpages comme une représentation géométrique de la grande approximation donnée par les fractions continues* (Lucas, 1883, vol. 2, p. 154).

On peut arrêter la fraction continue mentionnée à chaque étape : on obtient ainsi les réduites de la fraction continue. Ici, la suite des réduites est une suite de nombres rationnels où l'on retrouve les nombres de Fibonacci : 1 ; 2 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{13}{8}$; $\frac{21}{13}$; … Ce peut être l'occasion de mentionner assez facilement la notion de fractions continues avec les élèves. D'ailleurs, à l'occasion, il n'est pas non plus difficile de leur montrer expérimentalement que cette suite de nombres rationnels, quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci, tend vers φ, le nombre d'or. On retrouve ici le lien réalisé dans plusieurs manuels scolaires entre le nombre d'or et la suite de Fibonacci, sans doute moins artificiellement.

Le lion dans le puits, *une résolution erronée ?*

Le problème est bien connu : un lion est tombé dans un puits. Il remonte d'une certaine distance le jour, et retombe/glisse d'une plus petite distance la nuit. Il s'agit de savoir au bout de combien de jours, le lion serait libre, i.e. sortirait du puits. Le problème du *lion dans le puits* s'énonce ainsi :

> *Un lion est dans un puits dont la profondeur est de 50 palmes. Il monte quotidiennement de* $\frac{1}{7}$ *d'une palme, et descend de* $\frac{1}{9}$. *On demande en combien de jours il sortira du puits* (Fibonacci, 2020, p. 302, traduction personnelle).

Un calcul (trop) rapide, (trop) simple, basé sur la proportionnalité — celui proposé par Fibonacci — nous amène à une réponse erronée. En effet, le lion sort en fait du puits avant ce que donne ce calcul (il ne faut pas tenir compte des redescentes, une fois qu'il est sorti du puits). Slisko (2020b) utilise l'erreur commise par Fibonacci — et d'autres après lui — dans le problème du *lion dans le puits* pour travailler l'esprit critique de ses étudiants en physique, dans le cadre d'un cours intitulé *Développement de compétences pour une pensée complexe* (1er semestre à l'université). Slisko conclut son étude en précisant :

> *Initial analysis of the results of this study shows that students are able to find the error in Fibonacci's solution. Some went much farther. At personal and group levels, they provided a conceptually clear approach to get a correct answer.* […] *Moreover, by informing students about Fibonacci's error, this study induced positive student thinking about (1) the « human face » of mathematicians and (2) a fearless approach to their errors, seeing them as opportunities for learning* (Slisko, 2020b, p. 233, souligné par nos soins).

Un travail spécifique sur les erreurs dans ce type de problèmes est pédagogiquement intéressant pour les élèves[8].

Le **problème des deux voyageurs**

Il s'agit de calculer le moment de la rencontre de deux hommes, dont l'un suit l'autre de plus en plus rapidement. L'énoncé original de Fibonacci (2020) pourrait être traduit ainsi :

> *Il y a deux hommes qui ont proposé de faire un long voyage, l'un marche chaque jour 20 milles, tandis que l'autre, le premier jour, parcourt 1 mille, le deuxième jour 2 milles, le troisième jour 3 milles, et ainsi de suite, ajoutant chaque jour un mille de plus à son parcours. On demande en combien de jours l'un rattrapera l'autre (Fibonacci, 2020, pp. 287-288, traduction personnelle).*

Juárez, Hernández et Slisko (2014) analysent les procédures mises en place par des élèves de l'enseignement secondaire (44 élèves, entre 12 et 15 ans) dans le cadre d'une préparation aux Olympiades de mathématiques, pour résoudre le *problème des deux voyageurs*. Ces problèmes intéressent Juárez, Hernández et Slisko car, d'abord présents dans les manuels de mathématiques, ils sont aussi présents dans de nombreux manuels de physique, à partir du milieu du XIXe siècle même s'ils montrent *« des contextes fantastiques, impossibles dans le monde réel mais dotés de propriétés mathématiques supposées « attrayantes » »* (Juárez, Hernández & Slisko, 2014, p. 392). Ici, il s'agit d'illustrer, par l'exemple, la combinaison d'un mouvement à vitesse constante et d'un mouvement à accélération constante. L'étude qualitative des travaux des élèves a contribué à analyser à la fois les stratégies utilisées, et les erreurs commises (surtout à cause d'une mauvaise compréhension de l'énoncé). Les auteurs précisent que douze élèves ont trouvé la solution du problème, à partir de sept stratégies différentes (Juárez, Hernández & Slisko, 2014, pp. 393-394), ce qui montre la richesse didactique de la situation.

Un dernier exemple : le **problème des deux tours**

Dans leur étude sur la résolution de problèmes, Taşkın, Yildiz, Kanbolet et Baki (2013) ont utilisé un problème du *Liber Abbaci* pour analyser les compétences mises en œuvre par 28 élèves de l'enseignement secondaire turc (14 ans). Ils défendent alors la double idée que

(1) l'histoire des mathématiques est une excellente source de problèmes pour l'enseignant ;

(2) les problèmes historiques montrent aux élèves d'anciennes techniques de résolution qui peuvent nourrir de nouvelles solutions personnelles.

---

[8] Un tel travail a été mené par notre collègue Teresa Costa Clain à partir du *Tratado da Prática D'arismetyca* de Gaspar Nicolas (XVIe siècle) dans des classes de niveau collège au Portugal.

Le problème utilisé est celui des deux tours, de hauteurs différentes et éloignées d'une certaine distance, à partir desquelles deux oiseaux partent en même temps et à la même vitesse, pour se rejoindre en un point donné entre les deux tours. Il s'agit de déterminer la distance des tours à ce point comme le montre l'énoncé original[9] :

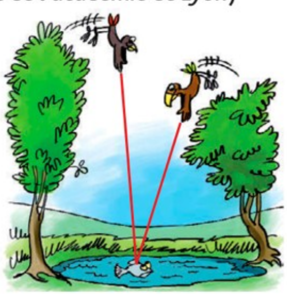
> *Deux oiseaux étaient en haut de deux tours, dont l'une était haute de 40 pas, l'autre de 30, et elles étaient séparées au sol de 50 pas* [l'une de l'autre]*; et d'un seul coup, ils volèrent également vers le centre d'une certaine source* [située au sol] *et arrivèrent simultanément en ce centre, qui était entre les deux tours* (Fibonacci, 2020, p. 519, traduction personnelle).

On cherche à savoir à quelle distance de la plus grande tour est situé le centre de la source. Même si les auteurs notent des difficultés de compréhension du problème, ils concluent que *« les problèmes historiques permettent aux élèves de révéler des stratégies de résolution de problèmes et d'améliorer leurs compétences en mathématiques »* (Taşkın *et al.*, 2013, p. 174), d'où leur utilité dans l'enseignement des mathématiques. Par ailleurs, une adaptation de ce problème est donnée dans un manuel pour la classe de seconde (*cf.* figure 11) après avoir été proposée au *Rallye mathématique de l'académie de Lyon* (en 2009), sans aucune référence historique[10] : une nouvelle « occasion manquée » comme pour de nombreux exercices et problèmes des manuels scolaires, souvent par simple méconnaissance de l'histoire des mathématiques. Ce problème a disparu dans l'édition suivante (Beltramone, 2019a), après la réforme de 2019.

84 Les oiseaux et le poisson

(D'après le *Rallye mathématique de l'académie de Lyon*)

De chaque côté d'un plan d'eau se trouve un arbre. La hauteur du premier est de 30 m et celle du second de 20 m ; la distance entre leurs pieds est de 50 m.



Sur la cime de chaque arbre est perché un oiseau. Brusquement, ils aperçoivent un poisson à la surface de l'eau entre les deux arbres. Ils se jettent simultanément sur lui, à la même vitesse et l'atteignent au même instant.

À quelle distance du pied du plus grand des deux arbres se trouvait le poisson ?

Le problème de l'exercice 84 a été traité sous une forme peu différente par **Léonard de Pise dit Fibonacci (1175 à Pise, 1250)** dans un des premiers livres d'arithmétique : *Liber Abaci* en 1202.

Figure 11 *: (Beltramone, 2010, p. 68).*

---

[9] Ce problème n'est pas attesté dans toutes les copies disponibles du *Liber Abbaci* de Fibonacci. Ce peut aussi être l'occasion de mentionner aux élèves l'histoire des textes, et de leur copie, leur circulation et leur appropriation jusqu'à aujourd'hui.

[10] https://rallye-math.univ-lyon1.fr/wp-content/uploads/2023/10/sujets_2009.pdf

4. Rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement et importance de l'œuvre de Léonard de Pise

Léonard de Pise occupe une place centrale dans l'histoire des mathématiques occidentales. D'après l'historiographie la plus récente, son œuvre majeure — le *Liber Abbaci* —, comme sa *Practica geometriae*, ont marqué un tournant décisif dans la manière dont les mathématiques étaient pratiquées en Europe médiévale. Le *Liber Abbaci* est sans aucun doute un texte novateur dans le contexte latin dans lequel il est rédigé et plusieurs fois copié, non seulement pour les mathématiciens, mais aussi pour l'ensemble de la société médiévale, en offrant les outils mathématiques au développement des transactions commerciales ou encore de la comptabilité. Il est aujourd'hui bien connu que Fibonacci joue non seulement un rôle de passeur intellectuel entre les pays d'Islam et l'Europe latine, mais il peut aussi être considéré comme un mathématicien véritablement créatif pour son siècle. En effet, dans son *Liber Abbaci*, il offre à la fois une nouvelle manière de manipuler les nombres et une vision globale de la manière dont les mathématiques peuvent résoudre des problèmes concrets, qu'ils soient commerciaux ou géométriques. Son lien avec les structures naturelles, les systèmes dynamiques de population et la théorie des nombres a contribué à faire de Fibonacci un personnage central dans l'histoire des mathématiques et dans les mathématiques contemporaines. Derrière l'apparente simplicité du *problème des lapins* se cache un modèle mathématique d'une grande puissance (peut-être l'un des premiers problèmes de modélisation mathématique de l'histoire, sous certaines conditions à préciser), encore utilisé aujourd'hui dans des domaines aussi variés que la biologie, l'économie et l'informatique.

L'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques constitue un levier pédagogique essentiel pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle permet de replacer les concepts abstraits dans un contexte évolutif, montrant que les mathématiques ne sont pas un ensemble figé de règles atemporelles ou de vérités absolues mais comme le produit d'un développement historique long et parfois sinueux. Ainsi, c'est un domaine qui se développe progressivement en réponse à des besoins pratiques et intellectuels spécifiques, dans des contextes culturels spécifiques et souvent déterminants. Malheureusement, force est de constater que les manuels scolaires analysés ne permettent pas de montrer cela. Comprendre les racines historiques des théories et des techniques mathématiques peut aider les élèves à mieux appréhender la logique et la nécessité de ces concepts et de ces règles. La dimension historique donne également aux élèves l'occasion de se familiariser avec la diversité des cultures qui ont contribué à l'avancée des mathématiques. En introduisant des éléments historiques, les enseignants peuvent démontrer que la science mathématique est un effort collectif, fruit d'apports multiples, provenant de différentes civilisations à des époques diverses : ici, par exemple, l'Égypte et l'algorithme glouton de Fibonacci, ou encore les relations étroites entre le mathématicien Lucas du XIX^e siècle et le travail de Fibonacci (*cf. supra*, *le puzzle de Fibonacci*). Cette perspective met alors en valeur la dimension humaine des mathématiques et encourage les élèves à s'engager avec cette discipline en voyant son évolution comme le résultat de questionnements, de cheminements souvent laborieux et de défis auxquels de nombreux mathématiciens, comme Fibonacci, ont été confrontés. L'histoire humanise les mathématiques, en les liant à des personnages (hommes et femmes), des récits et des contextes. Cela peut ainsi stimuler la curiosité des élèves, en les incitant à s'intéresser aux histoires derrière les théorèmes et les méthodes qu'ils étudient.

L'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques n'est pas seulement un enrichissement du contenu des cours, mais aussi un véritable outil pédagogique permettant de lier les concepts abstraits à des problématiques réelles, de lier le passé et le présent (mettant en avant les situations/questions que telle notion ou telle procédure répond originellement). Cette approche offre des ressources pour rendre la discipline plus accessible et plus compréhensible pour les élèves qui trouvent alors la réponse à leur question récurrente sur l'utilité des mathématiques : « à quoi ça sert ? ». Ainsi, présenter les mathématiques dans leur dimension historique permet d'exposer les liens qui unissent cette discipline à d'autres domaines du savoir, comme la philosophie, l'astronomie et la physique (*cf. supra*, le problème *des deux voyageurs*). Ici, avec Fibonacci, il est facile de donner à voir comment un des plus grands mathématiciens du XIIIe siècle a développé sa pensée pour la résolution de problèmes : concepts, outils et techniques sont au cœur des extraits proposés.

La perspective historique permet également de replacer l'évolution des concepts mathématiques dans un cadre plus large. Par exemple, étudier les raisons qui ont conduit à penser les mathématiques commerciales après Fibonacci, à l'approche de la fin du Moyen Âge, peut aider à comprendre les débuts du capitalisme et des pratiques économiques modernes. Ces liens entre mathématiques et histoire sociale montrent que les mathématiques sont plus qu'une simple discipline abstraite : elles sont au cœur de nombreux développements historiques et sociétaux majeurs (Furinghetti, 2020).

Enfin, l'étude des textes mathématiques originaux permet d'enrichir l'enseignement contemporain. Observer les manuscrits, lire des extraits de ces textes, lorsque c'est possible, dévoile la manière dont les concepts ont été formulés dans le passé, avec des préoccupations souvent très concrètes et sans le symbolisme qui caractérise la langue des mathématiques d'aujourd'hui. On peut alors tirer profit de l'observation active de sources originales. En intégrant l'histoire des mathématiques dans leur réflexion ou leur préparation, les enseignants peuvent montrer comment des concepts modernes trouvent leurs racines dans des idées plus anciennes. En effet, l'exploration historique renforce l'apprentissage des compétences mathématiques en offrant des exemples concrets de problèmes résolus, à une époque donnée, grâce à ces techniques. Lorsque les élèves comprennent que les algorithmes ou les théorèmes qu'ils apprennent aujourd'hui étaient des réponses à des problèmes spécifiques, comme ceux auxquels Fibonacci ou d'autres mathématiciens étaient confrontés, ils appréhendent mieux la logique des mathématiques (*cf. supra*, le *puzzle de Fibonacci*), leur utilité et leur importance pratique.

En définitive, pour nous, l'histoire des mathématiques ne doit pas être vue comme une simple curiosité académique, mais comme un élément central pour comprendre et enseigner les mathématiques de manière plus efficace. Il ne s'agit pas d'ajouter de nouveaux exercices ou problèmes au quotidien des élèves mais plutôt de le transformer en saisissant le plus possible les occasions de mentionner un mathématicien ou une mathématicienne, une œuvre mathématique… L'histoire des mathématiques, lorsqu'elle est bien intégrée dans l'enseignement, permet aux élèves de mieux comprendre non seulement les concepts mathématiques, mais aussi le rôle fondamental que cette discipline a joué dans l'évolution des sociétés humaines ou dans le développement même de la discipline. Cette approche ouvre également la voie à une pédagogie plus inclusive, où les contributions de différentes civilisations sont reconnues et valorisées, offrant ainsi une perspective plus riche et nuancée sur les mathématiques vue comme une discipline humaine (Fried, 2014, p. 688 ; Fried, 2018, p. 86).

Références bibliographiques

Ben-Chaim, D., Shalitin, Y. & Stupel, M. (2019). Historical mathematical problems suitable for classroom activities. *The Mathematical Gazette, 103*(556), 12-19. https://doi.org/ 10.1017/mag.2019.2

Chevalarias, N., Gandit, M., Morales, M. & Tournès, D. (dir.) (2019). *Mathématiques récréatives : Éclairages historiques et épistémologiques*. UGA Éditions-EDP Sciences.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. & Tzanakis, C. (éds.) (2018). *Mathematics, education and history, Towards a harmonious partnership*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. & Tzanakis, C. (éds) (2019). History of mathematics in mathematics education - An overview. *Mathematica Didactica, 42*(1), 1-26. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_1

Chorlay, R., Clark, K. M. & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM - Mathematics Education, 7*(54), 1407-1420. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7

Chorlay, R. (2010). Calculer le probable : Quand Leibniz jour aux dés. Dans É. Barbin (dir.), *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet* (pp. 99-115). Vuibert-Adapt.

Euclide (1998). *Les Éléments. Volume 3 : Livre X*. Traduction : B. Vitrac. PUF.

Fauvel, J & van Maanen, J. (éds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study, New ICMI Study Series* (vol. 6). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1

Fibonacci, L. (1856). *Opusculi*. Boncompagni Baldassarre (éd.). Tipografia Galileiana di M. Cellini e C.

Fibonacci, L. (1857). *Il Liber Abbaci*. Boncompagni Baldassarre (éd.). Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Fibonacci, L. (1862). *La practica geometriae di Leonardo Pisano*. Boncompagni Baldassarre (éd.). Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Fibonacci, L. (2020). *Liber Abbaci*. Giusti Enrico (éd.). L. S. Olschki.

Fried, M. N. (2007). Didactics and History of Mathematics: Knowledge and Self-Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 203-223. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9025-5

Fried, M. N. (2014). History of mathematics and mathematics education. Dans M. R. Matthews (éd.), *International handbook of research in history, philosophy and science teaching* (pp. 669-703). Springer.

https://doi.org/10.1007/978-94-007-7654-8_21

Fried, M. N. (2018). History of mathematics, mathematics education, and the liberal arts. Dans G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (éds.), *Invited lectures from ICME-13* (pp. 85-100). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_6

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 55-61.

Furinghetti F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(6), 967-994.
https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454

Goldstein, C. (1995). *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*. Presses universitaires de Vincennes.

Guillemette, D. (2011). L'histoire dans l'enseignement des mathématiques : sur la méthodologie de recherche. *Petit x, 86*, 5-26.

Hannah, J. (2011). Conventions for recreational problems in Fibonacci's *Liber Abbaci*. *Archive for history of exact sciences, 65*, 155-180.
https://link.springer.com/article/10.1007/s00407-010-0074-x

Hughes, B. (2008). *Fibonacci's De Practica Geometrie*. Springer.

Jankvist, U. T. (2009a). *Using history as a « goal » in mathematics education*. [PhD Thesis, Roskilde University].
http://thiele.ruc.dk/imfufatekster/pdf/464.pdf

Jankvist, U. T. (2009b). A categorization of the « whys » and « hows » of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.
https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

Juárez, R. M. A., Hernández, R. L. A. & Slisko, J. (2014). Fibonacci's motion problem « Two travellers » : The solutions given by junior high-school students who were trained for Mathematical Olympiad. *Latin American Journal of Physics Education, 8*(3), 390-396.

Kepler, J. (1975). *L'étrenne ou la neige sexangulaire*. Robert Halleux (trad.). J. Vrin.

Kjeldsen, T. H. (2012). Reflections and benefits of uses of history in mathematics education exemplified by two types of student work in upper secondary school. Dans B. Shriraman (éd.), *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education* (pp. 333-356). Information Age Publishing.

Lucas, E. (1883). *Récréations mathématiques* (vol. 2). Gauthier-Villars.

Moyon, M. (2016). *Fibonacci : extraits du livre de calcul (Liber Abbaci)*. ACL - Les éditions du Kangourou.

Moyon, M. (2019a). Récréations mathématiques et algorithmique dans le *Liber Abbaci* de Fibonacci (XIII[e] siècle). Dans N. Chevalarias, M. Gandit, M. Morales & D. Tournès (dir.), *Mathématiques récréatives : Éclairages historiques et épistémologiques* (pp. 225-252). UGA Éditions-EDP Sciences.
https://doi.org/10.1051/978-2-7598-2319-2.c065

Moyon, M. (2019b). Teaching Mathematics and Algorithmics with Recreational Problems: The *Liber Abbaci* of Fibonacci. Dans É. Barbin, U. J. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad & C. Tzanakis (dir.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education (ESU-8)* (pp. 417-436). Oslo Metropolitan University.

Moyon, M. (2022). Desire of teachers and realities in textbooks: dealing with history of mathematics in the new French curriculum and its impact on teacher training. *ZDM - Mathematics Education, 54*(7), 1613-1630.
https://doi.org/10.1007/s11858-022-01427-6

Moyon, M. (2023a). S'initier à « la mathématique » avec Charles-Ange Laisant : manipuler, visualiser, s'étonner. *Bulletin de la Sabix, 70*, 130-143.
https://doi.org/10.4000/sabix.3328

Moyon, M. (2023b). Frações egipticas e o algoritmo de fibonacci : história da matemática versus livros didáticos atuais. *ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP, 5*, 1-36.
https://doi.org/10.55928/ACERVO.2675-2646.2023.5.88

Moyon, M. (2024). Binary Numeration : From Ancient Egypt to a 19th Century French Mathematical Recreation. *REMATEC, 19*(47).
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024005.id607

Moyon, M. (2025). *O Liber Abbaci de Fibonacci : das matemáticas medievais para o ensino atual*. LF Editorial.

Moyon, M. & Spiesser, M. (2015). L'arithmétique des fractions dans l'œuvre de Fibonacci : fondements & usages. *Archive for History of Exact Sciences, 69*(4), 391-427.
https://doi.org/10.1007/s00407-015-0155-y

Picutti, E. (1983). Il Flos di Leonardo Pisano dal codice E.75.P. sup. della Biblioteca Ambrosiana di Milano. *Physis. Rivista internazionale di storia della scienza, 25*, 293-387.

Rougetet, L. (2023). *Le binaire au bout des doigts : Un casse-tête entre récréation mathématique et enseignement*. UGA Grenoble-EDP Sciences.

Rowlett, P., Smith, E., Corner, A. S., O'Sullivan, D. & Waldock, J. (2019). The potential of recreational mathematics to support the development of mathematical learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(7), 972-986.
https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1657596

Schorcht, S. (2018). *Typisierung mathematikhistorischer Beispiele in deutschen Mathematikschulbüchern der Klassenstufen 1 bis 7*. WTM, Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abbaci*. Springer.

Singmaster, D. (2016). The Utility of Recreational Mathematics. *The Undergraduate Mathematics and Its Applications (UMAP) Journal, 37*(4), 339-380.

Slisko, J. (2020a). Tres acertijos sobre ventas enigmáticas : posibles desafíos matemáticos para los estudiantes talentosos. *Números - Revista de Didáctica de las Matemáticas, 105*, 201-215.

Slisko, J. (2020b). What students can learn from Fibonacci's error in solving « The lion in the pit » problem. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 15*(2), 216-238. https://doi.org/10.14483/23464712.16041

Sullivan, M. M. & Panasuk, R. M. (1997). Fibonacci Numbers and an Area Puzzle : Connecting Geometry and Algebra in the Mathematics Classroom. *School Science and Mathematics, 97*(3), 132-138.

Sumpter, L. (2015). Recreational Mathematics - Only For Fun? *Journal of Humanistic Mathematics, 5*(1), 121-138. https://doi.org/10.5642/jhummath.201501.07

Taşkın, D., Yıldız, C., Kanbolat, O. & Baki, A. (2013). Reflections of Problem Solving Environment Based on Group Work : Example of Fibonacci Problem. *Mediterranean Journal of Educational Research, 14*, 170-175.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2022). Historical knowledge and mathematics education: A recent debate and a case study on the different readings of history and its didactical transposition. *ZDM - Mathematics Education, 54*(7), 1449-1461. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01370-6

Références institutionnelles

MEN (2019a). Programme de mathématiques de seconde générale et technologique et STHR. *Bulletin officiel spécial n° 1 du 22 janvier 2019*.

MEN (2019b). Programme de mathématiques en première générale (spécialité). *Bulletin officiel spécial n° 1 du 22 janvier 2019*.

MEN (2019c). Programme. Mathématiques. Classe terminale, enseignement de spécialité, voie générale. *Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019*.

Manuels scolaires

Arnaud, D., Fournet-Fayas, T., Gringoz, H., Magana, L., Martin-Meriadec, E., Milan, P. & Hascoët, M. (2020a). *Terminale, mathématiques expertes*. Magnard.

Arnaud, D., Fournet-Fayas, T., Goarin, M., Gringoz, H., Guiader, F., Hascoët, M., Krieger, D., Ladeira C., Magana, L., Milan, P. & Weyermann, F., (2020b). *Terminale, mathématiques complémentaires*. Magnard.

Beltramone, J.-P. (2010). *Mathématiques. Seconde. Déclic*. Hachette.

Beltramone, J.-P. (2019a). *Mathématiques. Seconde. Déclic*. Hachette.

Beltramone, J.-P. (2019b). *Mathématiques. Première. Déclic*. Hachette.

Gringoz, H. & Weyermann, F. (coord.) (2019a). *Mathématiques Seconde*. Magnard.

Gringoz, H. & Weyermann, F. (coord.) (2019b). *Mathématiques Première*. Magnard.

Le Yaouanq, M.-H. (dir.) (2019). *Seconde, MathsX*. Didier.

Malaval, J. (2019). *Mathématiques. Première. Hyperbole*. Nathan.

Malaval, J. (2020). *Terminale. Mathématiques expertes. Hyperbole*. Nathan.

Poncy, M. & Vieudrin, D. (dir.) (2020). *Terminale. Mathématiques spécialité. Indice*. Bordas.