

• **Que se passe-t-il si l'on remplace à présent le roi par la tour, la reine ou encore le cavalier ?**

Pour ce dernier, il y a jusqu'à quatre mouvements possibles qui le rapproche du coin inférieur gauche. Il faudra d'ailleurs adapter la zone d'arrivée en un carré 2×2 pour éviter d'être bloqué en cours de partie.

Éléments de solution

Le jeu du roi est un jeu combinatoire à *information parfaite*, c'est-à-dire que tous les éléments du jeu sont connus par les deux joueurs et le hasard n'intervient pas durant le déroulement du jeu, et *impartial* car les coups disponibles à partir d'une position sont les mêmes pour les deux joueurs. C'est en fait un *jeu de Nim* et est très proche du *jeu de la reine de Wythoff* (Rougetet, 2016, p. 30) (qui correspond à la variante avec la reine). La résolution d'un tel jeu passe en général par une partition de l'ensemble des situations du jeu en deux classes : les situations gagnantes et les situations perdantes (voir plus bas). Cette dichotomie, et l'existence de celle-ci, peut s'appréhender en modélisant le jeu à l'aide d'un graphe dont on va colorier les sommets.

Il existe pléthore de sources dans la littérature qui traitent des jeux de Nim, on pourra par exemple regarder Rougelet (2016) qui en présente plusieurs (dont le Wythoff) ou encore Mounier (2020) qui donne quelques éléments pour trouver une stratégie gagnante. On retrouve des modélisations des jeux de Nim des graphes dans Busser (2018) et dans Busser *et al.* (2022) (avec une procédure de « coloriage » par des nombres) ainsi que des modélisations différentes dans De la Rue (2015), où la modélisation est plus générale car elle permet par exemple de considérer des jeux avec possibilité de partie nulle. Enfin, pour une étude didactique des jeux de Nim dans le cadre de situations de recherche pour la classe, on pourra regarder Colipan (2014).

Ce jeu, comme beaucoup d'autres jeux de Nim, peut faire l'objet d'une activité en classe ou dans un club de math (comme présenté en retour d'expérience en fin d'article) et cela à des niveaux très variés pouvant aller de la primaire au lycée, voire dans le supérieur. On pourra l'utiliser pour travailler des notions de logique et de quantification (avec les définitions de situations gagnantes et perdantes) mais elle sera sûrement plus pertinente, par exemple sous la forme d'une situation de recherche pour la classe (*cf.* la brochure IREM de Grenoble, 2018), pour faire travailler les compétences chercher, communiquer, modéliser, raisonner et représenter.

Des généralités sur les jeux de Nim

D'un point de vue théorique, les jeux de Nim peuvent être ramenés à un jeu sur un graphe orienté sans cycle (pour qu'on ne puisse pas tomber deux fois sur la même situation du jeu durant la partie) et n'ayant pas de chemin de longueur infinie (pour être sûr que le jeu s'arrête à un moment). Les joueurs déplacent sur celui-ci une pièce tour à tour d'un sommet à l'autre en suivant les arêtes orientées issues des sommets. Les sommets du graphes correspondent aux situations possibles du jeu, la position de la pièce indiquant ainsi dans quelle situation est le jeu, et les arêtes orientées aux coups possibles qui permettent de passer d'une situation à une autre. Les sommets du graphe desquels aucune arête ne part sont alors les positions finales du jeu. La figure 2 donne par exemple le graphe du jeu du roi sur un échiquier 3×3 avec en bleu la position finale (qui correspond d'ailleurs à la case bleue en bas à gauche de l'échiquier comme sur la figure 1) et où le roi est utilisé comme pièce à déplacer le long des arêtes.

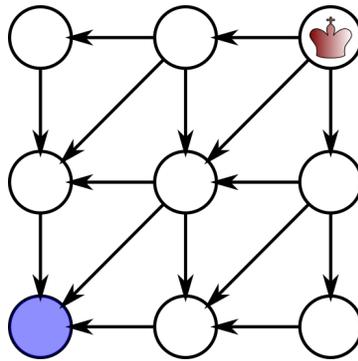


Figure 2 : Graphe du jeu sur un échiquier 3×3 .

Les jeux de Nim peuvent se présenter en deux versions : la version **classique** où le joueur qui ne peut plus jouer a perdu (comme par exemple la version initiale du jeu du roi où le joueur qui place le roi sur la case bleue a gagné) et la version **misère** où cette fois le joueur qui ne peut plus jouer a gagné (comme par exemple pour la deuxième question de l'activité où cette fois le joueur qui place le roi sur la case bleue a perdu).

En général, résoudre les jeux de Nim, qu'ils soient présentés comme un jeu sur un graphe ou non, consiste à partitionner l'ensemble des situations possibles du jeu en deux classes. On dira qu'une situation (non finale) est :

- *gagnante* s'il existe un coup qui donne une situation perdante, et
- *perdante* si pour n'importe quel coup on obtient une situation gagnante.

On imposera de plus que les situations finales du jeu soient perdantes, si on est en version classique, et gagnantes, si on est en version misère. Une *stratégie gagnante* consiste alors à, lorsqu'on est dans une situation gagnante, jouer un coup qui donne une situation perdante (il peut y avoir plusieurs choix possibles pour ce coup « gagnant » et donc plusieurs stratégies). En effet, si le premier joueur commence avec une situation gagnante, et qu'il suit la stratégie précédente, l'adversaire se retrouve dans une situation perdante et doit donc redonner au premier joueur une situation gagnante et ainsi de suite. En particulier, le premier joueur se retrouvera toujours dans une situation gagnante et le second joueur, toujours dans une situation perdante. Ainsi, en fonction de la version jouée (classique ou misère), le jeu se terminera par le second ou le premier joueur face à une situation finale. De manière analogue, si le premier joueur commence avec une situation perdante, il est obligé de donner une situation gagnante à son adversaire qui peut alors suivre la stratégie gagnante et être sûr de gagner.

À première vue, l'existence d'une telle partition ne va pas de soi, en particulier au vu de la définition des classes qui est auto-référente (on ne peut pas définir les situations gagnantes sans les situations perdantes et vice versa). Cependant, si elle existe, elle est unique car les situations gagnantes correspondent aux situations à partir desquelles il existe une stratégie qui permette de gagner à tous les coups². Le modèle d'un jeu de Nim sur un graphe orienté présenté précédemment permet l'étude de l'existence de cette partition de l'ensemble des situation du jeu.

² Ceci donne d'ailleurs une définition de *situation gagnante* sans faire appel à la notion de situation perdante. L'ensemble des situations perdantes peut alors se définir comme le complémentaire de l'ensemble situations gagnantes dans l'ensemble des situations possible du jeu. Cependant, en pratique, cette *interconnectivité* situations gagnantes/situations perdantes est très utile pour construire la partition.

Coloriage de graphe

Étant donné un jeu de Nim sur un graphe orienté sans cycle et n'ayant pas de chemin de longueur infini, partitionner les situations du jeu en situations gagnantes et situations perdantes revient alors à colorier les sommets du graphe avec deux couleurs, vert et rouge disons, vérifiant les propriétés suivantes :

- les sommets desquels aucune arête ne part (donc correspondant aux situations finales du jeu) sont en **rouge** si le jeu est en version classique et en **vert** si le jeu est en version misère ; sinon ;
- si un sommet est **vert** et n'est pas un sommet final, alors **il existe une arête** issue de ce sommet pointant vers un sommet **rouge**,
- si un sommet est **rouge** et n'est pas un sommet final, alors **toutes les arêtes** issues de ce sommet pointent vers des sommets **vert**.

En pratique, sur des graphes finis, on peut construire un tel coloriage en coloriant d'abord les situations finales (en rouge si on est en version classique ou en vert si on est en version misère). Puis on regarde, parmi les sommets qui ne sont pas encore coloriés, ceux desquels les arêtes ne pointent que vers des arêtes colorées (cela existe, sinon, vu que le graphe est fini, on pourrait construire un cycle, ce qui est exclu). On colorie ensuite chacun d'eux en rouge si toutes les arêtes issues de celui-ci ne pointent que vers des sommets verts ou en vert s'il existe une arête issue de celui-ci qui pointe vers un sommet rouge. On recommence ensuite à partir de ce nouveau coloriage partiel en cherchant les nouveaux sommets non coloriés desquels toutes les arêtes pointent vers des sommets déjà coloriés, et ainsi de suite. Par exemple, La figure 3 donne le coloriage obtenu sur le graphe du jeu du roi avec un échiquier 3×3 .

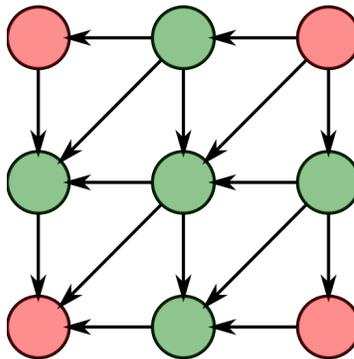


Figure 3 : Coloriage du graphe du jeu sur un échiquier 3×3 .

Notez que, lorsqu'on a le coloriage du graphe, la stratégie gagnante est explicite : si la pièce est sur un sommet vert, on la déplace le long d'une arête qui pointe vers un sommet rouge.

On pourrait se poser la question sur des graphes infinis, ce qui arrive naturellement lorsqu'on veut considérer certains jeux, comme le jeu du roi, en tout généralité en faisant varier tous les paramètres du jeu (dans le jeu du roi, les paramètres sont la taille de l'échiquier et la position du roi). Étant donné, lorsqu'il existe, l'unicité du coloriage (grâce à la correspondance avec les situations gagnantes et perdantes) il suffit de voir que tous les sommets du graphe peuvent être coloriés. Pour s'en convaincre, on peut considérer un sommet S du graphe et le sous-graphe G constitué de tous les sommets accessibles à partir de S . Comme il n'existe pas de chemin infini,

G est forcément fini³ et la procédure de coloriage donnée précédemment (qui peut être appliquée car, par construction de G, les arêtes issues de sommets de G ne pointent que vers des sommets de G) permet de colorier G en entier et en particulier le sommet S. Ceci étant vrai pour tout sommet S duquel on est parti, on peut colorier n'importe quel sommet du graphe initial, même si celui-ci est infini.

Retour au jeu du roi

Dans le jeu du roi proposé dans cette activité, le graphe des positions du jeu sous-jacent peut se lire directement sur l'échiquier en voyant les cases comme les sommets du graphe (*cf.* figure 4). On peut, si on le souhaite, dessiner les arêtes pour le rendre plus explicite comme sur la figure 4 (avec le coloriage des cases en fonction de la nature de la situation sous-jacente, sauf pour la case correspondant à la situation finale).

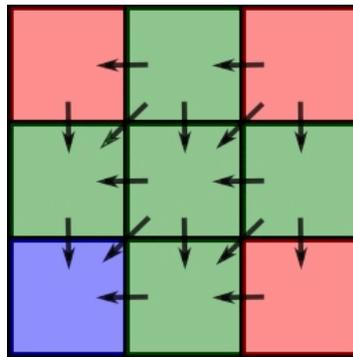


Figure 4 : Coloriage du graphe du jeu sur un échiquier 3×3 , reporté directement sur le plateau de jeu.

Le coloriage peut alors s'étendre à toute la grille pour obtenir la figure 5.

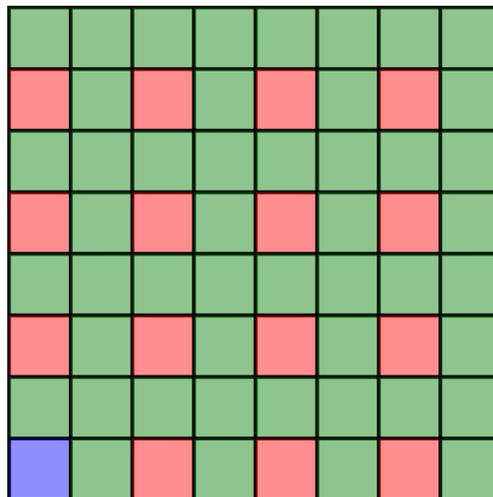


Figure 5 : Coloriage sur un échiquier 8×8 .

³ On travaille ici implicitement avec des graphes orientés où l'ensemble des arêtes issues d'un sommet donné est fini. Sous cette hypothèse, la condition de non existence de chemin infini est équivalente à la propriété *pour tout sommet S, le supremum des longueurs d'un chemin issue de S est finie* ce qui est alors équivalent au fait que le sous-graphe G considéré ici est fini (toujours avec l'hypothèse de finitude du nombre d'arêtes issus d'un sommet).

Ainsi, sur l'échiquier 8×8 , on a intérêt à commencer et à déplacer le roi en diagonale vers la case rouge. Ainsi, l'adversaire sera obligé de déplacer le roi vers une case verte, puis on pourra le déplacer vers une nouvelle case rouge, etc.

Pour le même problème sur un échiquier quelconque de taille $n \times m$, vu la périodicité du coloriage sur la grille 8×8 , on peut faire l'hypothèse que celui-ci s'étendra sans difficulté. On peut cependant chercher un argument plus convaincant. Pour cela, en numérotant les lignes à partir du bas et les colonnes à partir de la gauche en commençant par 0, chaque case de l'échiquier peut être identifiée avec ses coordonnées. Par exemple $(0;0)$ sont les coordonnées de la case bleue et $(8;8)$ celles de la case de départ du roi tout en haut à droite. On remarque alors que les cases rouges sont exactement les cases dont les deux coordonnées sont paires. Ainsi, on peut conjecturer que :

- une situation est perdante si, et seulement si, le roi est sur une case dont les coordonnées sont paires ;
- une situation est gagnante si, et seulement si, le roi est sur une case dont au moins une des deux coordonnées est impaire.

On peut alors vérifier que ce choix de situations gagnantes et situations perdantes vérifie bien les conditions voulues. En effet, la situation finale (le roi sur la case bleue) est perdante, et si on est dans une situation perdante n'importe quel coup donne une situation gagnante (on décrémente au moins une des deux coordonnées qui devient alors impaire). De plus, depuis une situation gagnante il existe un coup qui donne une situation perdante (en rétablissant la parité sur la ou les coordonnées impaires). Cet argumentaire est bien indépendant de la taille de l'échiquier.

La version misère ?

Pour la version misère, une erreur qu'on retrouve souvent en expérimentation est de dire que le coloriage de l'échiquier est « l'inverse » de celui dans le cas classique. Cependant, on arrive rapidement à changer de point de vue après quelques parties. Voici le coloriage sur le 8×8 (qui est très proche de celui de la version classique !) duquel on peut déduire les conditions arithmétiques sur les coordonnées des cases comme dans la version classique.

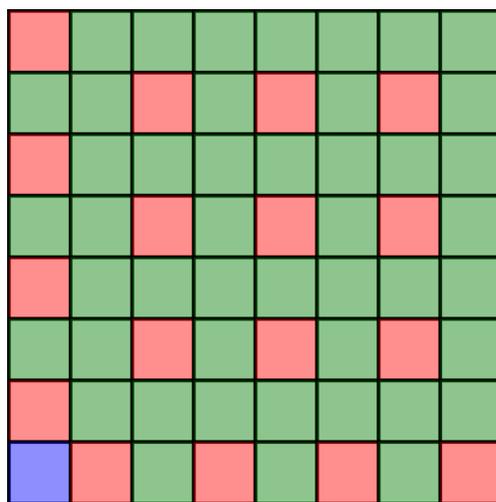


Figure 6 : Coloriage du plateau 8×8 en version misère.

On retrouvera des éléments dans Rougetet (2016) (ou un argumentaire complet dans Wythoff

(1907)) pour le jeu en version classique avec la reine (étonnamment, le nombre d'or est de la partie !). Les cas de la tour et du cavalier sont laissés à la charge du lecteur ou de la lectrice.

Quelques retours d'expérience

Cette activité a été proposée lors d'une séance du club de math de l'IREM de Grenoble⁴ (on trouvera d'ailleurs la fiche d'activité correspondante sur la page du club⁵). Le club, intitulé « les mathématiques autrement », propose des activités ludiques de mathématique et/ou d'informatique débranché à des jeunes du CE2 au lycée (nous avons aussi un étudiant de L1 cette année). Il y a une à deux séances par mois le dimanche matin de dix heures à midi et l'activité est en général la même pour tout le monde. Le public à l'avantage d'être donc très varié en termes d'âge et de niveau scolaire. Cependant, les jeunes qui fréquentent le club ne sont pas des élèves « lambda ». Iels ont pour la plupart un intérêt certain et au moins une curiosité affirmée pour les mathématiques et/ou l'informatique.

L'activité a en tout cas bien plu. Et toutes et tous ont au moins réussi à obtenir le coloriage du plateau 8×8 pour la version classique. Certain·es participant·es (en particulier chez les plus petit·es) ont eu des difficultés à se ramener à des échiquier plus petits (en restant donc longtemps à faire des parties sur le 8×8). Cependant, une fois aiguillé·es à regarder ce qu'il se passait plutôt en fin de partie, ces jeunes ont pu avancer davantage. Pour la plupart, l'idée du coloriage a dû être suggérée et même après, il y a eu plusieurs cafouillages, le plus souvent dû au fait qu'iels n'avait pas forcément bien compris ou défini les conventions de coloriage (qui est le premier joueur ? Les cases rouges sont pour les cases où il ne faut pas jouer ou les cases où il ne faut pas se retrouver ?). Après quelques ajustements, chacun·e a pu faire ses coloriages plus ou moins efficacement et même étudier d'autres versions du jeu (misère ou avec une autre pièce d'échec).

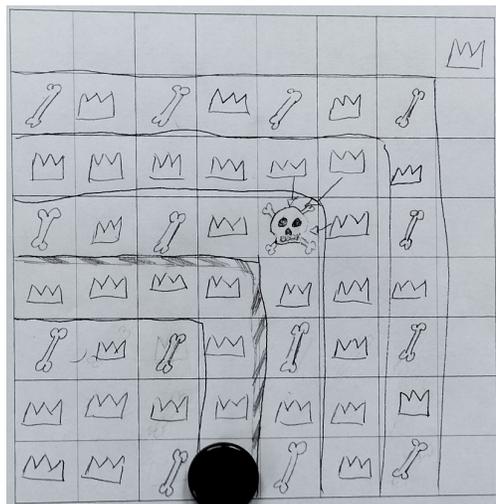


Figure 7 : *Un coloriage non fini de plateau qui aboutit cependant au coloriage de la case de départ. On pourra noter des éléments de construction qui montrent la réflexion sur les carrés en commençant par le 3×3 .*

Par rapport à la version misère, pour celles et ceux qui s'y sont essayé·es, la plupart répondent

⁴ Lien vers la page du club : <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/club-maths-les-maths-autrement--442275.kjsp>

⁵ Lien direct vers la fiche d'activité : <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/club-maths-les-maths-autrement-/jeux-sur-un-echiquier-1324106.kjsp?RH=413148517470877>

presque directement « c'est l'inverse ! » et certains commencent même à faire le coloriage « dual » sans réfléchir vraiment. Ils reviennent en revanche sur leur pas après un temps de réflexion.

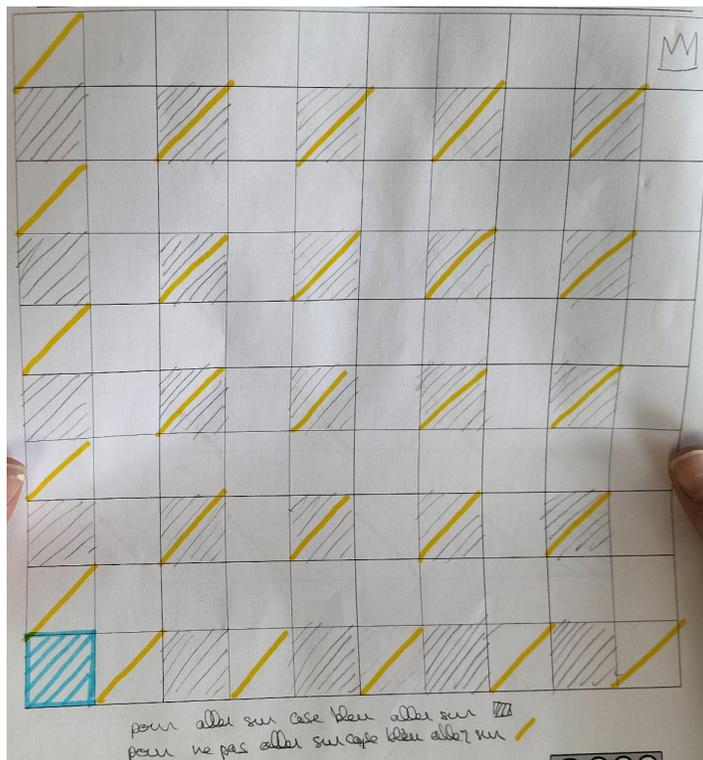


Figure 8 : Les coloriages du plateau 10×10 pour la version classique (en noir hachuré) et la version misère (en jaune)

Il est à noter qu'un étudiant de L1 a tout de même résolu le jeu en version classique sans recourir au coloriage. Il a trouvé une stratégie gagnante pour le premier joueur directement : jouer le premier coup en diagonale puis faire la même chose que son adversaire (s'il joue horizontalement on joue horizontalement, s'il joue en diagonale, on joue en diagonale, etc.). Cette stratégie marche en effet et une preuve, sans recourir au coloriage, est possible (mais un peu plus fastidieuse). Cependant il s'est retrouvé à devoir reconstruire la stratégie lorsque la taille du plateau changeait (en particulier pour le premier coup). Il a finalement fini par faire des coloriages pour étudier le cas général sur n'importe quelle taille d'échiquier.

Bibliographie

Busser, A. (2018). *Jeux sur les graphes*. Image des mathématiques.

<https://images.math.cnrs.fr/Jeux-sur-graphes.html>

Busser, A., Criton, M., Duchêne, E., Fenech, A., Lesesvre, D., Mansuy, R., Parreau, A. & Riou, I. (2022). Dossier 1 : Des graphes et des stratégies. *Tangente hors-série*, 83, 5-21.

Colipan, X. (2014). *Étude didactique des situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim*. [Thèse de doctorat, Université de Grenoble]. HAL.

<https://theses.hal.science/tel-01679287>

De la Rue, T. (2015). Arbres, jeux et stratégies. *Tangente hors-série*, 54, 36-38.

IREM de Grenoble (2018). *Situations de Recherche pour la Classe : pour le collège et le lycée... et au-delà.*

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=413148517470877>

Mounier, G. (2020). Des jeux à stratégie gagnante pour apprendre à raisonner. *Au fil des maths*, 536, 35-37.

Molinier, R. (2024). Jeu du Roi, *Petit x*, 120, 102.

Rougetet, L. (2016). Raconte-moi une NIMstoire. *Repères IREM*, 105, 21-36.

Wythoff, W. A. (1907). A modification of the game of nim. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 7, 199-202.

<https://archive.org/details/nieuwarchiefvoo02genogoo/page/n219/mode/2up>