UNE ANALYSE DU PROCESSUS DE CONCEPTION D'UNE SITUATION DE RECHERCHE POUR LA CLASSE AU SEIN D'UN GROUPE IREM

Camille ANTOINE[1]
LIRDEF, Université de Montpellier & Université Paul-Valéry Montpellier 3

Thibaut TROUVÉ[2]
Institut Fourier, Université Grenoble Alpes

Résumé. Depuis plus de vingt ans, le modèle des *Situations de Recherche pour la Classe* aide à développer des situations dans lesquelles l'activité de l'élève se veut proche de celle des chercheur·e·s en mathématiques. Si ces situations sont d'ordinaire présentées sous la forme d'un produit fini et robuste, cet article met au jour une difficulté rencontrée par un groupe de l'IREM de Grenoble dans le processus de conception d'une situation basée sur un jeu combinatoire à deux adversaires. L'analyse de cette difficulté, à partir du récit de la démarche de recherche adoptée par ce groupe IREM, éclaire la manière dont le modèle des Situations de Recherche pour la Classe vit au sein du groupe et montre plus généralement que l'interprétation du concept de variable de recherche influence la conception de telles situations.

Mots-clés. Situation de Recherche pour la Classe, résolution de problème, variable de recherche, activité de recherche, résistance, consistance.

Abstract. For over twenty years, the *Research Situations for Classroom* model has been helping to develop situations in which the student's activity is intended to be close to that of the mathematics researcher. While these situations are usually presented in the form of a finished and robust product, this article highlights a difficulty encountered by a group of Grenoble's IREM in the process of designing a situation based on a two-player combinatorial game. The analysis of this difficulty, based on an account of the research approach adopted by this IREM group, sheds light on how the Research Situation for Classroom model lives within the group, and shows more generally that the interpretation of the concept of research variable impacts the design of such situations.

Keywords. Research Situation for Classroom, problem solving, research variable, research activity, resistance, consistency.

Introduction

L'activité principale du groupe « raisonnement, logique et Situations de Recherche pour la Classe » de l'IREM de Grenoble est de concevoir des situations de classe au sein desquelles l'élève peut « faire vraiment des mathématiques » (Grenier, 2009, p. 162), c'est-à-dire que son activité est proche de celle des chercheur·e·s en mathématiques. Les situations développées sont appelées *Situations de Recherche pour la Classe* (abrégées SiRC dans toute la suite) et ont été initialement décrites par Grenier et Payan (1998, 2002, 2006). Elles sont généralement abordables par un large spectre de niveaux scolaires et permettent de travailler spécifiquement les savoirs transversaux en tant qu'objets. À l'instar de Grenier et Payan (2002), nous choisissons de désigner par l'expression « savoirs transversaux » les savoirs qui ne sont pas propres à un champ des mathématiques comme la logique, le raisonnement, la démarche de recherche ou encore les heuristiques de résolution de problèmes. Ils sont à distinguer des

[1] camille.antoine@umontpellier.fr

[2] thibaut.trouve@univ-grenoble-alpes.fr

« savoirs notionnels ». Un parallèle peut être fait avec les connaissances d'ordre I et d'ordre II (Sackur *et al.*, 2005), ou encore avec les notions mathématiques et paramathématiques (Chevallard, 1985).

Au sein du groupe, la conception de telles situations part d'un problème mathématique qui est (re)travaillé en articulation avec une analyse mathématique, une analyse didactique et des préexpérimentations en classe. La situation est diffusée lorsqu'elle suscite effectivement et invariablement une activité de recherche chez les élèves.

Il y a environ trois ans, le groupe a entrepris de concevoir une nouvelle SiRC à partir d'un jeu combinatoire opposant deux adversaires. Son travail de recherche a mis en évidence les forces et les faiblesses de plusieurs énoncés ne relevant parfois pas du même problème mathématique, en étant régulièrement nourri de préexpérimentations menées à des niveaux d'enseignement variés (de la fin du primaire au supérieur). Malgré des transformations mathématiques ou didactiques de la situation, le groupe n'a pas observé, chez les élèves, l'activité de recherche attendue dans le contexte des SiRC. Cette difficulté a conduit le groupe à ne pas diffuser la situation et à se concentrer sur d'autres questions de recherche.

Cet article est né de l'envie de comprendre l'origine de cette difficulté à laquelle nous avons directement été confrontés en tant que membres de ce groupe IREM. Les considérations que nous exposons dans ce texte, bien qu'*a priori* propres aux SiRC, permettent de clarifier le modèle mais vont aussi au-delà en amenant des réflexions plus largement sur la conception de situations plaçant les élèves dans une activité de recherche et de résolution de problème.

Dans cet article, nous présenterons la genèse, les enjeux et les critères du modèle des SiRC que nous illustrerons sur l'exemple de la situation des *carrés insécables*. Ceci nous amènera à interroger la façon dont ce modèle est utilisé pour développer de nouvelles SiRC au sein du groupe de l'IREM de Grenoble. À partir du récit de la recherche du groupe pour concevoir une nouvelle SiRC basée sur un jeu combinatoire opposant deux adversaires, nous identifierons la difficulté qu'il a rencontrée en proposant une nouvelle analyse de la situation au regard des critères du modèle. Nous expliciterons comment les spécificités de ce groupe ont impacté la recherche, ce qui nous amènera à mieux comprendre la façon dont y vit le modèle des SiRC.

1. Le modèle des *Situations de Recherche pour la Classe*

Avant de présenter le modèle des SiRC et de l'illustrer, nous fixons le vocabulaire que nous allons employer par la suite. Nous réservons le terme « problème » pour désigner le problème mathématique, le terme « énoncé » pour la formulation de ce problème[3] et le terme « situation » pour ce qui est proposé aux élèves, incluant le matériel et l'organisation de la mise en œuvre.

1.1. Genèse et enjeux des SiRC

Le cadre dans lequel s'est développé le modèle des Situations de Recherche pour la Classe est déterminant pour comprendre leurs spécificités. Dans une volonté commune de transposer à la classe l'activité de recherche en mathématiques, au sein de laquelle la question de la preuve est cruciale, des chercheur·e·s en mathématiques discrètes et en didactique des mathématiques de Grenoble se sont regroupés au début des années 2000 autour du projet *Maths à Modeler*.

Les mathématiques discrètes (arithmétique, combinatoire, théorie des graphes…) sont

[3] Notamment deux énoncés peuvent relever du même problème.

particulièrement propices à l'enseignement et l'apprentissage de la preuve (Grenier & Payan, 1998 ; Gravier & Ouvrier-Buffet, 2022). En effet, la nature de certains objets (compréhensibles par tous et représentables sans qu'il soit nécessaire de les définir rigoureusement) ne constitue pas un obstacle pour aborder de « vrais » problèmes mathématiques si bien que les savoirs transversaux sont mobilisés de manière déterminante dans la résolution de tels problèmes. Cet aspect est particulièrement pointé dans le rapport *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* :

> *les mathématiques discrètes, par exemple, sont trop marginales dans l'enseignement des mathématiques aujourd'hui, alors qu'elles constituent, d'une part, un lien avec la recherche contemporaine et l'informatique et d'autre part un champ dans lequel il est permis de raisonner et prendre du plaisir sur des problèmes motivants avec des connaissances mathématiques minimales* (Villani & Torossian, 2018, p. 36).

L'implémentation des SiRC s'appuie sur la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). En effet, la situation est conçue pour être adidactique, c'est-à-dire que les élèves construisent ou modifient leur rapport à l'objet de savoir comme réponse aux exigences d'un milieu et non à une demande de l'enseignante ou de l'enseignant. Elle comporte des phases d'action, de formulation et de validation.

C'est dans ce cadre scientifique que le modèle des SiRC a été développé avec les enjeux suivants :

> *Les objectifs des Situations de Recherche pour la Classe sont de placer les élèves dans le rôle de chercheurs et de les engager dans un processus de preuve, ou plus généralement dans un processus d'investigation, incluant plusieurs compétences transversales telles que conjecturer, modéliser, définir, etc. L'idée principale est également de favoriser une communauté mathématique dans laquelle les perspectives sont proches des normes sociomathématiques où les critères d'acceptabilité des arguments sont négociés en classe* (Gravier & Ouvrier-Buffet, 2022, p. 926, notre traduction).

1.2. Caractérisation et spécificités des SiRC

Exposer des élèves à n'importe quel problème mathématique tel qu'il vit dans la recherche en mathématiques ne peut vraisemblablement pas permettre d'atteindre ces objectifs. De fait, le modèle des SiRC vise à caractériser les situations qui permettent aux élèves d'approcher de près l'expérience de la recherche en mathématiques. Dans le modèle originel, Grenier et Payan (2002, 2006) donnent les cinq critères suivants pour définir une SiRC :

- C1. La question s'inscrit dans une démarche de recherche professionnelle. Elle s'inspire d'un énoncé existant dans la communauté mathématique, non nécessairement résolu.
- C2. La question initiale est facile d'accès (notamment peu mathématisée).
- C3. Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques.
- C4. Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.
- C5. La situation n'a pas nécessairement de fin : une question résolue amène souvent une nouvelle question.

À propos des critères

Avant de poursuivre, nous reprenons et détaillons ces critères, non dans l'ordre dans lequel ils sont énoncés, mais selon deux aspects : la dévolution de la situation aux élèves et la résistance du problème mathématique.

Dans une situation adidactique, la dévolution est l'*« acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert »* (Brousseau, 1998, p. 303). Dans le modèle des SiRC, la dévolution de la situation aux élèves est notamment rendue possible grâce aux critères C2 et C3 qui sont liés au domaine en jeu : les mathématiques discrètes. Ces critères visent à assurer que chaque élève comprend le problème qui est posé et puisse directement s'engager dans la démarche de recherche (conjecturer, décomposer, considérer des cas particuliers, prouver, modéliser, etc.) sans que l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant soit nécessaire. Le critère C1 favorise aussi la dévolution, car en choisissant un problème mathématique directement issu de la recherche, il est *« suffisamment éloigné des mathématiques rencontrées par les élèves pour les placer hors des techniques et méthodes dont ils disposent usuellement »* (Deloustal-Jorrand & Modeste, 2018, p. 185). Ceci peut permettre à des élèves de dépasser leur difficulté à se mettre en activité de résolution de problème, et plus généralement à faire des mathématiques.

Ce critère, tout comme les deux derniers, contribue également à assurer que la situation permet à l'élève d'avoir une activité de recherche proche de celle de la mathématicienne ou du mathématicien. Le critère C4 écarte les problèmes qui ne laisseraient pas aux élèves la possibilité de progresser de différentes façons dans la résolution, éventuellement partielle. De notre point de vue, cela implique qu'il existe plusieurs preuves accessibles aux élèves. Enfin, le critère C5 renforce encore la proximité entre l'activité de recherche de l'élève et l'activité de recherche professionnelle en mathématiques.

Ces critères soulignent l'importance de deux points qui peuvent parfois sembler contradictoires : du côté didactique, il est nécessaire de faire accepter la responsabilité de la résolution du problème aux élèves (critères C1, C2 et C3) alors que du côté épistémologique, il s'agit de choisir des problèmes mathématiques résistants (critères C1, C4 et C5). Précisons ce que nous entendons par là. Dans sa thèse, Georget (2009) identifie plusieurs potentiels pour les activités de recherche et de preuve. Pour lui, la situation proposée doit notamment résister aux premières tentatives des élèves pour la résoudre, mais la résolution doit rester accessible aux élèves qui s'investissent dans une démarche de recherche. Néanmoins, il souligne que :

> *Cette caractérisation n'est cependant pas suffisante pour distinguer les activités basées sur des « problèmes à astuce » ou « problèmes de type on/off », c'est à dire pour lesquels il n'y a que peu ou pas de progression possible dans la recherche ou bien que celle-ci n'est pas progressive. D'une certaine manière, dans ce type de problèmes, on passe — ou pas ! — soudainement d'un état de recherche à un état de résolution du problème sans qu'on puisse véritablement voir dans cette soudaine résolution le résultat de la recherche qui a précédé. […] Ceci nous amène à définir un concept plus fin, celui de potentiel de résistance* dynamique*. […] Une activité à résistance* dynamique *est une activité où le potentiel de résistance à la résolution peut varier et fournir à celui qui cherche des rétroactions interprétables en termes de proximité d'une solution, où le milieu a-didactique évolue au cours des efforts de recherche* (ibid, p. 79, emphases dans l'original).

C'est dans ce sens que nous emploierons le terme « résistance » pour caractériser un problème mathématique. La proximité avec la recherche professionnelle, la nécessité que la situation n'ait pas de fin et l'existence de différentes stratégies de résolution avec des étapes intermédiaires, sans qu'aucune ne constitue un « passage obligé », indiquent que les problèmes mathématiques en jeu dans les SiRC sont résistants au sens de Georget (2009).

Variables de recherche et ruptures du contrat didactique

Parmi les variables didactiques, c'est-à-dire parmi les paramètres à disposition de l'enseignant·e dont le choix des valeurs influence la hiérarchie des stratégies de résolution, il en est un certain nombre qui sont propres au problème mathématique. Le choix des valeurs de ces variables va déterminer les (sous-)problèmes mathématiques à considérer. Dans les SiRC, certaines de ces variables ne sont pas fixées par l'enseignant·e, mais volontairement laissées à disposition des élèves : ce sont les variables de recherche de la situation (Godot, 2005). Celles-ci définissent *« les différents sous-problèmes qui sont rattachés au problème ouvert et amène[nt] à des phases d'action et de formulation différentes »* (*ibid.* , p. 134). Pour Grenier et Payan (2006), ces variables permettent de déterminer *« la compréhension et l'intérêt de la question, son ouverture à de nouvelles questions, l'élargissement des stratégies de recherche, les possibilités de transformation du problème »* (ibid., 2006, p. 8). Si cette définition accentue le fait que l'existence de ces variables de recherche favorise la dévolution de la SiRC aux élèves, nous tenons à souligner l'importance, dans la définition de Godot (2005), du lien entre l'existence de variables de recherche et le critère C4 du modèle des SiRC. En effet, l'appropriation de ces paramètres par les élèves doit également permettre différentes avancées dans la résolution du problème, en induisant des phases d'action et de formulation diverses (entre les élèves, mais aussi d'un groupe d'élèves à un autre par exemple) et donc, selon nous, conduire à des preuves différentes.

L'existence de variables de recherche n'est pas une modalité habituelle du cours de mathématiques. Elle induit un réel changement dans le contrat didactique (Brousseau, 1998), c'est-à-dire le jeu d'obligations réciproques potentiellement implicites entre l'élève et l'enseignante ou l'enseignant. D'autres spécificités du modèle vont également participer à la modification du contrat didactique (Grenier & Payan, 2006).

D'abord, les élèves sont amenés à utiliser les résultats établis au cours de la recherche, voire des résultats toujours à l'état de conjecture, pour avancer dans la résolution. Ceci diffère du contexte habituel de la classe où seuls les définitions et les théorèmes préalablement présentés par l'enseignant·e sont utilisés. Aussi, les élèves sont amenés, pour la plupart de façon inédite, à interroger la validité des énoncés qui peuvent parfois être *contingents*, c'est-à-dire des énoncés qui ne possèdent pas de valeur de vérité déterminée (Durand-Guerrier, 1996 ; Cerclé, 2020). En particulier, il est possible que ces énoncés aient une valeur de vérité variable selon la quantification, comme l'énoncé « $x>3$ ». Enfin, alors que tout ce qui leur est demandé de prouver en classe est d'ordinaire vrai (Brousseau, 1998, p. 115), les élèves ne savent *a priori* pas si leurs conjectures sont vraies et celles-ci ne sont ni validées ni invalidées par l'enseignante ou l'enseignant. Cette particularité favorise le passage à la preuve dont la validité est également dévolue à l'élève. De plus, à la différence des situations didactiques où seuls les élèves cherchent, l'enseignante ou l'enseignant peut également adopter une posture de recherche. Ainsi, les SiRC présentent un vrai enjeu social de production mathématique car les critères de validation d'un résultat sont négociés entre les élèves et l'enseignante ou l'enseignant. De fait, ces SiRC nécessitent un réel pas de côté, aussi bien de la part des élèves que de la part des enseignant·e·s, par rapport à leurs habitudes, mais leur activité s'avère plus authentique vis-à-vis de celle des mathématiciennes et des mathématiciens (Grenier & Payan, 2002, 2006).

1.3. L'exemple des *carrés insécables*

Dans cette partie, nous proposons d'éclairer le modèle à l'aide d'un exemple de SiRC conçue au sein du groupe de l'IREM de Grenoble, situation qui peut être proposée à des élèves du primaire au supérieur. La situation que nous allons détailler est appelée *carrés insécables*. Des éléments complémentaires d'analyse de cette situation sont présentés dans la brochure de l'IREM de Grenoble (2018, pp. 53-68).

Il s'agit d'étudier des pavages de grilles carrées de côté de longueur entière n (« taille ») par des carreaux (eux-mêmes carrés) dont le côté est de longueur entière et strictement inférieure à n. Deux types de pavages sont possibles : les pavages sécables, qui contiennent au moins une ligne de coupe horizontale et/ou verticale (*cf.* figure 1), et les pavages insécables, qui ne contiennent aucune ligne de coupe (*cf.* figure 2).

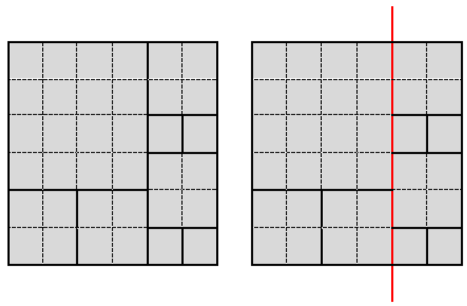


Figure 1 *: Exemple de pavage sécable pour la grille de taille 6.*

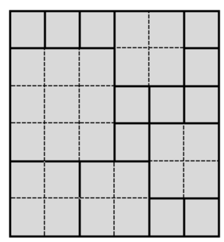


Figure 2 *: Exemple de pavage insécable pour la grille de taille 6.*

Le problème initial proposé aux élèves est de déterminer s'il est possible de construire un pavage insécable de la grille de taille n, pour tout entier $n>1$. La mise en œuvre de la situation se fait de préférence par groupe et les élèves disposent de matériel en bois (*cf.* figure 3) avec suffisamment de carreaux de toutes les tailles entre 1 et 9.

Figure 3 *: Matériel pour la situation des carrés insécables.*

Éléments de résolution mathématique

Dans cette partie, nous énonçons la solution de ce problème. Pour l'existence des pavages insécables, nous présentons, en guise de preuve, plusieurs constructions. Pour la non-existence, nous donnons des éléments de preuve. La proposition suivante regroupe l'ensemble des cas :

> ***Proposition.*** *Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un pavage insécable de la grille de taille n si et seulement si $n \geqslant 5$.*

Nous commençons par l'implication réciproque qui peut se reformuler comme suit : pour tout entier $n \geqslant 5$, il existe un pavage insécable de la grille de taille *n*. S'il est naturel, lorsque *n* est fixé, de chercher à exhiber un pavage insécable, l'exhaustivité sur $\mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}$ ne peut constituer une preuve. Il s'agit donc de chercher des constructions qui permettront de donner l'existence de pavages insécables pour une classe d'entiers intervenant dans une partition de $\mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}$. Notons que l'ordre choisi ici pour présenter des constructions possibles n'est pas l'ordre de leur identification par les élèves lors des expérimentations en classe.

Possibilité 1. Agrandir les pavages insécables déjà obtenus en appliquant un coefficient multiplicateur entier sur la taille des carreaux (*cf.* figure 4). Il reste alors à chercher des pavages insécables pour les grilles de taille *p*, où *p* est un nombre premier.

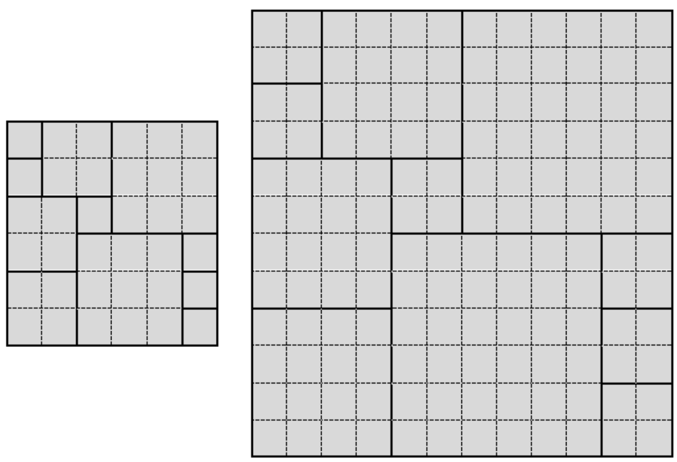


Figure 4 *: Pavage insécable des grilles de taille 6 et 12 par doublement.*

Possibilité 2. Paver une grille à partir d'un pavage insécable d'une grille plus petite. De façon directe (*cf.* figure 5) : s'il existe un pavage insécable de la grille de taille *n*, alors il existe un pavage insécable pour toutes les grilles de taille $m > n$, obtenu en remplaçant le carreau de taille *k* du coin en bas à droite du pavage insécable de la grille de taille *n* par un carreau de taille $k+m-n$ et en complétant, par exemple, avec des carreaux de taille 1. De façon récursive (*cf.* figure 6) : s'il existe un pavage insécable de la grille de taille *n*, alors il existe un pavage insécable de la grille de taille $n+1$, obtenu en remplaçant le carreau du coin en bas à droite du pavage insécable de la grille de taille *n* par un carreau de la taille supérieure et en complétant avec des carreaux de taille 1. Cette construction est possible dès que $n \geqslant 5$. Dans les deux cas, on peut observer que le problème se réduit alors à trouver la taille de la plus petite grille possédant un pavage insécable (ou, de manière équivalente, la plus grande taille de grille ne possédant pas de pavage insécable).

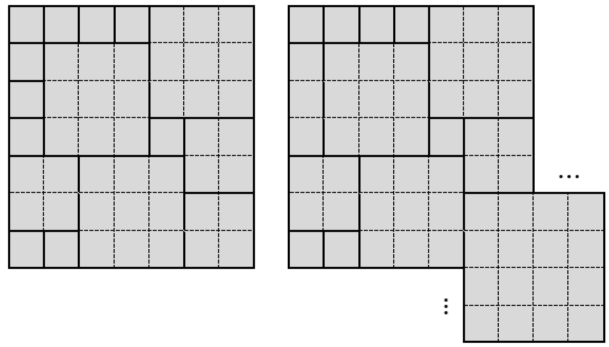


Figure 5 *: Pavage insécable des grilles de taille* $n \geqslant 7$.

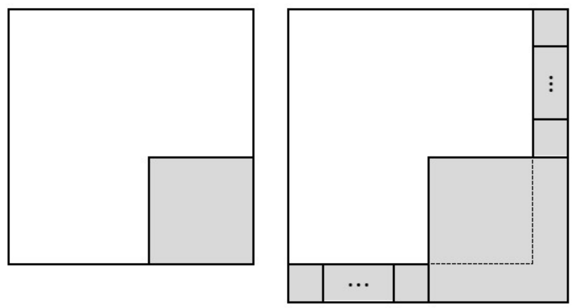


Figure 6 *: Pavage insécable de la grille de taille* $n+1$
à partir de celui de la grille de taille n.

Possibilité 3. Généraliser le pavage unique à symétrie près de la grille de taille 5 aux grilles de taille $n \geqslant 3$ (*cf.* figure 7) : si n est impair, en plaçant au centre un carreau de taille 1 et quatre carreaux de taille $\frac{n-1}{2}$ autour et si n est pair, en plaçant un carreau de taille 2 au centre et en disposant autour quatre carreaux de taille $\frac{n-2}{2}$.

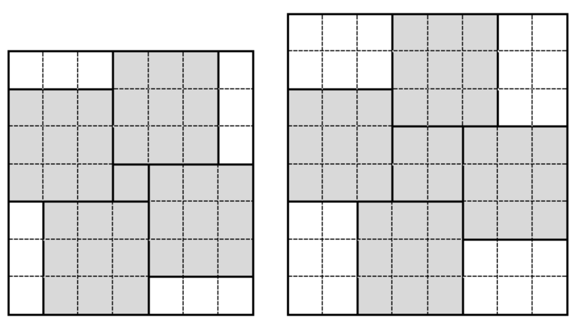


Figure 7 *: Pavage insécable des grilles de taille 7 et 8.*

Possibilité 4. Utiliser des carreaux de la plus grande taille possible (*cf.* figure 8). Cette contrainte mène aux résultats suivants : un pavage insécable de la grille de taille n ne peut contenir de carreau de taille $n-1$ ou $n-2$, ce qui peut être utile pour montrer qu'il n'existe pas de pavage insécable de la grille de taille 4, et pour tout $n \geqslant 5$, il existe un pavage insécable de la grille de taille n contenant un carreau de taille $n-3$ (placé en bas à gauche dans la figure 8).

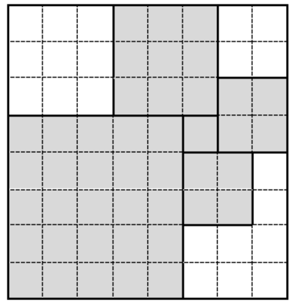


Figure 8 *: Pavage insécable de la grille de taille 8*
contenant un carreau de taille 5 (5=8−3).

Possibilité 5. Partir du pavage insécable unique à symétrie près de la grille de taille 5 et ajouter, chaque fois que n est augmenté de 1, un carreau de taille 2 : d'abord en bas à gauche, puis en haut à droite, puis en haut à gauche et enfin en bas à droite (*cf.* figure 9), et ainsi de suite.

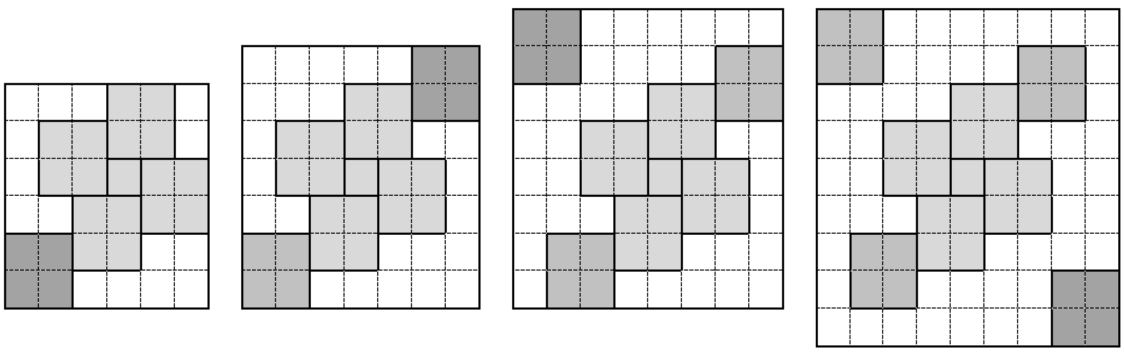


Figure 9 *: Pavages insécables des grilles de taille 6, 7, 8 et 9*
par ajouts successifs de carreaux de taille 2.

Possibilité 6. Maximiser le nombre de carreaux utilisés. Il s'agit d'utiliser le maximum de carreaux de taille 1 et un minimum de carreaux de taille 2. Sur le pavage de la figure 10, un carreau de taille 2 est ajouté à gauche, successivement en haut ou en bas, chaque fois que n est augmenté de 1. Pour les grilles de taille $n \geqslant 5$, cette construction donne un pavage insécable possédant $n-1$ carreaux de taille 2 et $n^2-2^2(n-1)$ carreaux de taille 1, c'est-à-dire $n^2-3(n-1)$ carreaux au total.

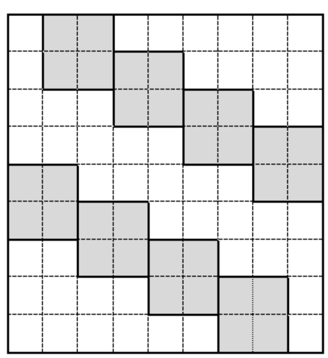


Figure 10 *: Pavage insécable de la grille de taille 9 avec le maximum de carreaux.*

Ceci permet de montrer que pour tout $n \geqslant 5$, un pavage insécable de la grille de taille n avec un maximum de carreaux contient au moins $n^2 - 3(n-1)$ carreaux. En fait, c'est le maximum[4]. La construction précédente (*cf.* figure 9) permet donc aussi de réaliser ce maximum.

Il reste à traiter l'implication directe : pour tout entier $n \geqslant 2$, s'il existe un pavage insécable de la grille de taille n, alors $n \geqslant 5$. Celle-ci peut se prouver par contraposition. La contraposée de cette implication est : pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 4$, il n'existe pas de pavage insécable de la grille de taille n. Les preuves disponibles sont les suivantes.

- Pour la grille de taille 2, il n'est possible d'utiliser que des carreaux de taille 1 et le pavage obtenu est sécable (*cf.* figure 11).

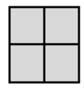


Figure 11 *: Unique pavage de la grille de taille 2.*

- Pour la grille de taille 3, les seuls carreaux disponibles pour paver sont les carreaux de taille 1 et 2. Le pavage composé uniquement de carreaux de taille 1 est clairement sécable. Si l'on utilise un carreau de taille 2, il est nécessairement dans un coin et on ne peut compléter qu'avec des carreaux de taille 1, donnant ainsi (à une rotation près) le pavage sécable de la figure 12.

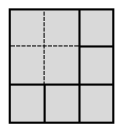


Figure 12 *: Pavage sécable de la grille de taille 3 utilisant un carreau de taille 2.*

- Pour la grille de taille 4, on peut de nouveau distinguer les cas selon la taille des carreaux utilisés, ou bien, comme nous l'avons annoncé précédemment, utiliser le fait qu'un pavage insécable de la grille de taille n ne peut contenir de carreau de taille $n-1$ ou $n-2$. Lorsque $n=4$, cela ne rend disponibles que les carreaux de taille 1, et ils ne permettent pas d'obtenir un pavage insécable de la grille.

Adéquation au modèle

Nous poursuivons en explicitant en quoi cette situation satisfait effectivement les cinq critères du modèle, en portant une attention particulière à l'identification des variables de recherche.

Critère C2 : la question initiale est facile d'accès (notamment peu mathématisée).

Un exemple d'énoncé proposé pour cette situation est :

> *On propose de paver une grille carrée avec plusieurs carreaux eux-mêmes carrés. Le pavage doit respecter ce critère : la grille ne peut être coupée horizontalement ou verticalement sans couper un carreau. Pour quelles tailles de grille peut-on construire un pavage qui respecte le critère ?*

La formulation de cet énoncé met en jeu peu de concepts mathématiques et ceux-ci sont maîtrisés ou facilement compréhensibles par des élèves à partir de la fin du primaire. La notion de pavage, et plus spécifiquement de pavage insécable, est généralement nouvelle pour les élèves. Néanmoins, pour l'illustrer, l'énoncé est toujours accompagné soit, en guise de contre-

[4] Voir la brochure de l'IREM de Grenoble (2018) pour la preuve.

exemple, d'un exemple de pavage sécable dans lequel est pointée la présence d'au moins une ligne de coupe, soit d'un exemple de pavage insécable pour une grille de taille donnée. Si cette deuxième option est retenue, l'exemple est choisi avec soin (taille de la grille et pavage) pour ne pas induire de stratégies de résolution qui permettent de répondre facilement à la question posée.

Deux autres questions sont souvent soulevées au cours de la recherche, ou amenées par l'enseignante ou l'enseignant en fonction de l'avancée des élèves :

Quel est le nombre maximal de carreaux que l'on peut utiliser pour obtenir un pavage insécable ?

Quel est le nombre minimal de carreaux que l'on peut utiliser pour obtenir un pavage insécable ?

La compréhension de ces questions et leur résolution font intervenir les notions de minimum, maximum, borne inférieure et borne supérieure qui peuvent être appréhendées par les élèves sans qu'il soit nécessaire de les définir rigoureusement.

Critère C3 : des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques.

La recherche est immédiatement amorcée par des essais de constructions de pavages insécables, pour des grilles de taille comprise entre 1 et 9. Ces essais sont rendus possibles par le matériel, qui facilite également la dévolution du problème aux élèves. Le seul prérequis mathématique repose sur la bonne compréhension de la contrainte d'insécabilité du pavage, mais la modalité de travail en groupe favorise les reformulations de la question ainsi que les vérifications des premiers pavages construits. En particulier, aucun théorème du cours de mathématiques n'a besoin d'être mobilisé.

Critères C1 et C5 : la question s'inscrit dans une démarche de recherche professionnelle et la situation n'a pas nécessairement de fin.

Les problèmes de pavage sont des questions très vives dans la recherche en mathématiques. Le prolongement portant sur le minimum de carreaux n'est, à notre connaissance, pas résolu par la communauté de recherche. La situation des *carrés insécables* s'inscrit donc bien dans une démarche de recherche professionnelle. De plus, la résolution du problème peut amener les élèves à se questionner sur d'autres types de pavages : peut-on construire des pavages insécables pour des grilles rectangulaires avec des carreaux rectangulaires ? Peut-on partitionner un cube avec d'autres cubes de telle sorte qu'il n'y ait aucun plan de coupe (Da Ronch, 2019) ?

Critère C4 : plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.

La situation est résistante : elle nécessite de prouver plusieurs résultats, à savoir l'existence d'un pavage insécable pour les grilles de taille $n \geqslant 5$ et l'inexistence d'un tel pavage pour les grilles de taille 2, 3 et 4. De plus, l'identification d'un pavage insécable pour la grille de taille 5 n'est pas immédiate (un tel pavage est parfois conjecturé comme inexistant). Selon les constructions imaginées, les généralisations ne sont pas les mêmes et ne recouvrent pas nécessairement l'ensemble des entiers $n \geqslant 5$. Ces constructions conduisent à des preuves différentes (raisonnement par récurrence, raisonnement direct, raisonnement par disjonction de cas) et donc à plusieurs résolutions possibles du problème. L'ordre des étapes de la recherche et les résultats intermédiaires ne sont pas fixés à l'avance : plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche sont disponibles. Autrement dit, il existe plusieurs chemins pour accéder à une résolution éventuellement partielle du problème.

Dans cette situation, il existe plusieurs paramètres : certains sont fixés par l'enseignant·e, ce sont les variables didactiques, alors que d'autres sont laissés à disposition de l'élève, ce sont les variables de recherche. La multiplicité des stratégies disponibles repose essentiellement sur l'existence des deux variables de recherche suivantes : la taille de la grille et la taille des carreaux qui sont donnés pour paver. Ce sont effectivement des variables de recherche dans la mesure où certaines constructions sont propres à certains choix de valeurs pour ces variables. Par exemple, pour la taille des carreaux, s'imposer des carreaux de taille 1 et 2 ne mène pas à la même construction qu'essayer d'utiliser les plus grands carreaux possibles. De même, pour la taille de la grille, nous avons exhibé des constructions reposant sur deux partitions de $\mathbb{N}$ différentes : entiers pairs et impairs et entiers premiers et composés.

Mentionnons trois variables didactiques qui ne sont pas laissées à la disposition de l'élève et dont la valeur est choisie en amont par l'enseignant·e. D'abord, l'énoncé ne demande pas de « montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un pavage insécable de la grille de taille n si et seulement si $n \geqslant 5$ », mais de déterminer pour quelles tailles de grille il est possible de construire un pavage insécable. Cette formulation ouverte favorise la dévolution et permet de faire vivre des conjectures. Par exemple, il arrive souvent que les élèves conjecturent qu'il n'existe pas de pavage insécable pour la grille de taille 5. Ensuite, le choix de mettre à disposition du matériel (même si la recherche peut aussi se faire dans la modalité « papier-crayon ») favorise également la dévolution mais aussi le travail en groupe, et évite que vivent des pavages dont les carreaux ne sont pas carrés. Cette vérification n'est que rarement faite par les élèves en pratique lorsque le matériel n'est pas fourni. Enfin, la question place d'emblée le problème en deux dimensions et fixe la géométrie de la grille et des carreaux : ils sont carrés. Présenter un énoncé plus général du problème risque d'empêcher la dévolution et de créer des difficultés chez l'élève à considérer des cas particuliers.

1.4. Problématique et méthodologie

Nous avons mentionné précédemment que le modèle des SiRC a vu le jour à Grenoble au sein de *Maths à Modeler*. Cependant, *Maths à Modeler* n'est pas la seule structure au sein de laquelle des recherches sur les SiRC sont menées. Depuis plus de quinze ans, il existe, à l'IREM de Grenoble, un groupe nommé « raisonnement, logique et Situations de Recherche pour la Classe » dont le travail s'appuie sur le modèle théorique que nous venons de présenter pour développer de nouvelles SiRC. Les groupes IREM ont vocation à réunir :

> *des enseignants, qui peuvent être du secondaire, du supérieur ou des professeurs des écoles ; il peut aussi y avoir des chercheurs en didactique, en mathématiques ou dans une autre discipline (informatique, physique…) ; on y trouve aussi parfois un inspecteur, des doctorants… On les appelle des animateurs IREM. Dans un groupe, tout le monde travaille sur un pied d'égalité : chercheurs et enseignants s'apportent mutuellement des connaissances (Chabanol, 2023, p. 1).*

Les recherches conduites dans les dispositifs collaboratifs sont, dans leurs modalités, dans leur temporalité ainsi que dans leur rapport aux concepts didactiques, nécessairement différentes de celles produites par la communauté de recherche en didactique, notamment en raison de la nécessité de trouver un point de rencontre entre les besoins et les questionnements de l'ensemble des participant·e·s. En particulier, la question de la circulation des concepts didactiques et celle de leur « appropriation » par les enseignant·e·s, que ce soit dans des dispositifs de formation ou des dispositifs de recherche collaboratifs, sont des enjeux vifs de la recherche (Billon *et al.*, 2016 ; Gardiès *et al.*, 2022 ; Lhoste & Schneeberger, 2018 ; Morrissette, 2013). Dans notre groupe, ces concepts didactiques et en particulier le modèle des SiRC doivent être appréhendés par les enseignant·e·s, mais aussi par les chercheur·e·s non spécialistes de la didactique des mathématiques.

Une question émerge alors : comment est utilisé le modèle des SiRC au sein du groupe de l'IREM de Grenoble ? Ceci nous amène notamment à questionner la façon dont y vivent les critères du modèle et, plus précisément, comment l'interprétation du critère C4 (plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles) et du concept de variable de recherche impacte le processus de conception d'une SiRC.

Pour apporter des éléments de réponse à ces questions, nous nous appuierons sur le récit d'une tentative inaboutie de conception, au sein du groupe IREM, d'une nouvelle SiRC basée sur un jeu combinatoire opposant deux adversaires, que nous reconstituons *a posteriori*. Il s'agira ensuite de confronter ce récit avec une nouvelle analyse de la situation, ce qui nous permettra de comprendre pourquoi le processus de recherche du groupe n'a pas abouti à une nouvelle SiRC.

2. Une incursion dans le processus de conception d'une SiRC

Afin de saisir les tenants et les aboutissants du processus de recherche sur ce jeu combinatoire, nous proposons, dans un premier temps, de décrire le cadre et les spécificités de la recherche dans le groupe IREM « raisonnement, logique et Situations de Recherche pour la Classe ». Dans un second temps, nous relaterons les étapes importantes du processus de recherche sur le jeu combinatoire dans l'objectif d'en faire une SiRC, puis nous identifierons la difficulté à laquelle le groupe a fait face au cours de cette recherche.

2.1. La recherche au sein du groupe IREM

Le groupe IREM réunit deux fois par mois des enseignant·e·s de mathématiques du secondaire et du supérieur, ainsi que des chercheur·e·s en mathématiques, en didactique des mathématiques et en informatique. Sa composition varie selon les années, ce qui oriente nécessairement le processus de recherche.

Les membres du groupe réfléchissent à la conception de nouvelles SiRC selon un processus itératif qui comprend des phases d'exploration du problème mathématique et des phases de conception et d'ajustement de la situation, qui sont nourries par des préexpérimentations dans les classes des enseignants du groupe. Lorsqu'une situation s'avère « robuste », le groupe rédige collectivement un compte-rendu dans lequel figurent une résolution mathématique, une analyse didactique comprenant les retours des préexpérimentations conduites ainsi qu'un énoncé de la situation pour les élèves. Quand la situation le nécessite, des mallettes de matériel, disponibles au prêt, sont également préparées. Le compte-rendu participe à la diffusion des travaux du groupe.

De fait, l'activité de recherche de ce groupe IREM s'articule selon des principes qui rappellent ceux du courant des recherches collaboratives (Bednarz, 2015 ; Desgagné *et al.*, 2001) : ses membres, appartenant au monde de la recherche et/ou à celui de l'enseignement, se rassemblent autour d'une problématique partagée relative à la conception de nouvelles SiRC. Plus précisément : du côté des chercheur·e·s en mathématiques, il s'agit d'apporter des « beaux » problèmes mathématiques, mais surtout des problèmes qui pourraient permettre de transposer fidèlement l'activité de recherche en mathématiques à l'aide du modèle des SiRC. Ce questionnement, qui était à l'origine du modèle, fait écho à celui des enseignantes et des enseignants qui s'interrogent sur les leviers pour faire travailler les savoirs transversaux à leurs élèves. En particulier, la question de leur institutionnalisation[5] est prégnante au sein du groupe : il faut identifier les connaissances transversales mobilisées par les élèves dans une situation

[5] L'institutionnalisation est le processus de dépersonnalisation, de décontextualisation et détemporalisation par l'élève à l'aide de l'enseignant·e d'une connaissance en un savoir qui soit réutilisable (Brousseau, 1998).

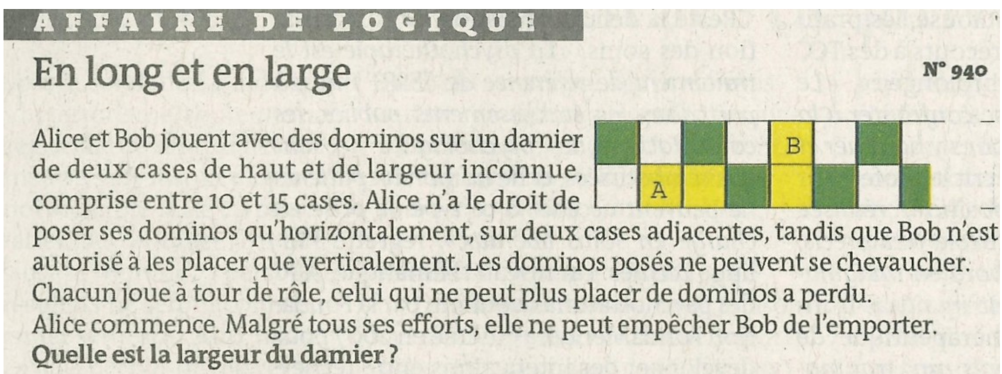
particulière pour les transformer en savoirs réutilisables dans d'autres situations. De fait, puisque les preuves ne peuvent généralement pas être institutionnalisées rigoureusement au primaire et au secondaire, l'accent est plutôt porté sur les heuristiques de résolution de problème et les démarches de recherche (Pólya, 2004). Il s'agit d'apprendre aux élèves à conduire et organiser leur recherche. La question de la dévolution de la situation s'avère aussi essentielle au moment de la conception d'une SiRC ; ceci constitue un point de vigilance important lors des préexpérimentations.

Dans le cheminement de recherche de ce groupe IREM, le modèle des SiRC vit essentiellement par son application dans la conception de nouvelles situations. Ses membres ne s'y réfèrent que rarement et ne le discutent pas ; les nouvelles situations sont construites en appui sur l'expérience accumulée par le groupe au fil des années. Dans une certaine mesure, c'est la correspondance entre l'activité de recherche des élèves face aux situations proposées et l'activité de recherche suscitée par des SiRC « robustes » qui assure l'adéquation avec le modèle et valide une nouvelle situation.

2.2. Récit du processus de conception d'une SiRC

En tant que membres du groupe IREM, nous avons participé au processus de recherche et de conception de cette situation. Comme cet article est né de notre envie de comprendre pourquoi ce processus n'a pas abouti, le récit de la recherche du groupe est une reconstruction *a posteriori* que nous avons essayé de rendre la plus fidèle. Dans la mesure du possible, nous souhaitons proposer un récit chronologique et descriptif, même si nous faisons le choix de mettre l'accent sur certains moments clés qui ont contribué à l'avancée du processus et sur les raisons qui ont motivé certains choix dans la recherche.

De l'énoncé initial à la version « graphes »



AFFAIRE DE LOGIQUE

En long et en large

N° 940

Alice et Bob jouent avec des dominos sur un damier de deux cases de haut et de largeur inconnue, comprise entre 10 et 15 cases. Alice n'a le droit de poser ses dominos qu'horizontalement, sur deux cases adjacentes, tandis que Bob n'est autorisé à les placer que verticalement. Les dominos posés ne peuvent se chevaucher. Chacun joue à tour de rôle, celui qui ne peut plus placer de dominos a perdu. Alice commence. Malgré tous ses efforts, elle ne peut empêcher Bob de l'emporter. **Quelle est la largeur du damier ?**

Figure 13 *: Énoncé initial (Busser & Cohen, 2016).*

Le travail du groupe part de l'énoncé précédent (*cf.* figure 13), extrait de la rubrique « affaire de logique » du journal *Le Monde*. Concomitamment à sa résolution, le groupe se pose la question plus générale de déterminer la largeur des damiers qui permettent à Alice de gagner et la largeur de ceux qui la font nécessairement perdre. L'objectif est de comprendre les conditions qui ont motivé un tel énoncé (par exemple, pourquoi la largeur est-elle comprise entre 10 et 15 cases ?) et d'interroger la possibilité d'un énoncé moins particulier pouvant ouvrir à différentes stratégies de résolution.

Pour la résolution générale du problème, le groupe choisit de transposer le jeu à la théorie des graphes, qui a déjà prouvé son efficacité pour résoudre certains jeux opposant deux adversaires (*cf.* par exemple Duchêne, 2006). Le damier devient un graphe dont les sommets portent des poids et les dominos deviennent des coups à jouer : soustraire 2 à un sommet pour le domino vertical et soustraire 1 sur chaque sommet d'une arête pour le domino horizontal. La règle est transformée de telle sorte que les deux adversaires puissent jouer les mêmes coups afin de rendre « symétriques » les possibilités de victoire. Une solution est trouvée pour les graphes complets[6] et pour des cas particuliers de chaînes[7]. Même s'il n'est pas raisonnable attendre des élèves de telles résolutions, la situation est rapidement mise à l'épreuve en classe pour avoir un premier aperçu de leur activité possible. Pour cela, l'énoncé est transformé, contextualisé, afin de le rendre accessible à un public qui ne connaît pas les graphes. Cette version de la situation sera appelée la version « graphes » :

> *Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. Des piles de jetons sont disposées. Chaque joueur, à tour de rôle, peut prendre un jeton sur deux piles adjacentes ou deux jetons sur une seule pile. Celui qui prend les deux derniers jetons gagne. Quelles sont les situations où le premier joueur peut gagner à coup sûr ?*

L'énoncé est proposé à une classe de première année du master préparant au CAPES de mathématiques. Ce public a donc *a priori* une certaine appétence pour les mathématiques avec un niveau de connaissances poussé et une expérience de la preuve en mathématiques. En outre, quelques étudiantes et étudiants ont déjà été confrontés à une (ou plusieurs) SiRC pendant leur parcours universitaire. Cette expérimentation est conduite sur une séance de deux heures. La classe est partagée en plusieurs petits groupes qui reçoivent chacun une vingtaine de jetons. Les groupes commencent par regarder majoritairement des positions de départ à plusieurs piles, avec un assez grand nombre de jetons. La complexité de ces positions de départ ne leur permettant pas de progresser dans la résolution, certains groupes prennent l'initiative de regarder les cas à une et deux pile(s). La plupart des groupes parviennent à leur résolution, reposant uniquement sur la congruence modulo 4 qui est bien formalisée mais qui s'accompagne d'un sentiment de déception. Le cas à trois piles (ou davantage) n'est pas résolu. De fait, le groupe IREM lui-même n'a trouvé qu'une solution parcellaire pour le cas à trois piles et n'a pas encore émis de conjecture pour les positions de départ où le nombre de piles est supérieur à quatre en dehors de quelques cas particuliers qui ont été étudiés par exhaustivité des coups.

Même si la résolution sous-jacente est complexe du point de vue mathématique, il y a une difficulté, en classe, à organiser et à progresser dans la recherche. Les cas à une et deux pile(s) apparaissent comme trop « triviaux » pour être intéressants tandis que le saut conceptuel pour traiter le cas à trois piles est trop grand.

Version « piles » et version « smarties »

Après avoir fait le constat que la version « graphes » n'engendrait pas une activité de recherche satisfaisante en classe, le groupe décide de modifier la règle de jeu et de résoudre le nouveau problème qui en résulte. Un nouvel énoncé est proposé, dont la formulation fait l'objet d'une réflexion importante puisqu'elle doit rester peu mathématisée et compréhensible par des élèves du primaire à la fin du secondaire. Cette version de la situation sera appelée dans la suite la version « piles » :

[6] Graphe dans lequel, pour tout couple de sommets, il existe une arête reliant ces deux sommets.

[7] Suite finie d'arêtes consécutives.

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. On dispose de piles de jetons. À tour de rôle, chaque joueur doit enlever un ou plusieurs jetons, tous issus d'une pile différente. Celui qui prend le ou les derniers jeton(s) gagne. Quelles sont les situations où le premier joueur peut gagner à coup sûr ?

Cette version du problème est entièrement résolue par le groupe IREM : les positions gagnantes sont celles où il existe une pile possédant un nombre impair de jetons et les positions perdantes sont celles où toutes les piles possèdent un nombre pair de jetons[8]. Elle est testée dans plusieurs classes, du début du collège au supérieur.

Lors des expérimentations, le groupe est amené à choisir le nombre total de jetons distribués, et notamment sa parité. Celui-ci est identifié comme variable didactique de la situation dans la mesure où plus le nombre de jetons est important et plus les premières parties sont longues, car les élèves commencent généralement à jouer avec l'intégralité des jetons à leur disposition. Il s'agit donc de ne pas donner trop de jetons. De plus, si le nombre de jetons total d'une position de départ est impair, alors une des piles contient nécessairement un nombre impair de jetons et la position de départ est gagnante. *A contrario*, si le nombre de jetons total est pair, alors les positions de départ peuvent être gagnantes ou perdantes.

Pourtant, quelle que soit la valeur retenue pour cette variable, le constat lors de ces préexpérimentations est le même : les élèves jouent en mettant un nombre quelconque de jetons par colonne sans faire varier le nombre total de jetons ni se préoccuper de l'effet éventuel de la position de départ de jeu. Des « petits cas » sont identifiés, mais les élèves ne parviennent pas toujours à déterminer l'invariant qui permet de généraliser ni à mémoriser et réinvestir les cas particuliers déjà étudiés. Lorsque l'idée de la parité émerge dans un groupe, les élèves identifient des positions gagnantes et des positions perdantes, mais peinent à dégager la tactique[9] de jeu à adopter et sa justification mathématique. Dans le cas contraire, même avec un temps de recherche relativement important, la solution n'est pas trouvée et il ne semble *a priori* pas exister d'étape intermédiaire permettant de progresser dans la recherche. Par ailleurs, il y a une réelle difficulté à garder en mémoire les positions qui ont déjà été étiquetées comme gagnantes ou perdantes et, en conséquence, à s'y ramener pour progresser dans la résolution.

Dans le même temps, le groupe a l'opportunité de tester la situation dans le cadre du club « les mathématiques autrement » de l'IREM de Grenoble. Comme le club accueille des enfants du primaire au lycée, un énoncé plus accessible et ludique est imaginé, qui inspire le groupe pour une nouvelle version de la situation appelée version « smarties », comprenant notamment des changements au niveau du matériel proposé :

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. On dispose de jetons de plusieurs couleurs. À tour de rôle, chaque joueur doit enlever un ou plusieurs jetons, tous de couleurs différentes. Celui qui prend le ou les derniers jeton(s) gagne. Quelles sont les situations où le premier joueur peut gagner à coup sûr ?

Les enfants disposent d'une vingtaine de jetons de cinq couleurs différentes non réparties équitablement. Si la plupart d'entre eux abordent la recherche en regroupant les jetons par couleur et se ramènent ainsi à la version « piles » (une couleur correspond à une pile), un jeune de primaire regroupe les jetons par paire de même couleur. Sa tactique de jeu consiste alors à laisser l'adversaire commencer lorsqu'il n'y a pas de jeton solitaire et à commencer lorsqu'il y

8 Pour les détails, voir la partie 3.1.

9 Nous employons le terme « tactique » pour désigner une stratégie de jeu (c'est-à-dire une suite de coups à jouer), à distinguer des « stratégies d'avancée dans la recherche ».

en a, puis, à son tour, à ne prendre que les jetons solitaires. De fait, il s'agit de la tactique gagnante. Puisque cette tactique n'était pas disponible dans la version « piles », une autre stratégie pour arriver à la solution semble apparaître. Le groupe considère donc que cette version est plus proche du modèle. Ceci conduit le groupe à expérimenter de nouveau cette version, cette fois dans deux classes de début de cycle 3, sur une séance d'environ une heure. Une nouvelle fois, si les élèves arrivent à identifier certaines positions particulières comme perdantes ou gagnantes par exhaustivité des coups possibles, la résolution du problème général n'est pas trouvée et le couplage de jetons n'est pas observé de nouveau. Par ailleurs, ici encore, les positions de jeu qui ont déjà été travaillées peinent à être réinvesties pour en étudier d'autres. Par exemple, le cas à deux jetons bleus et un jeton vert n'est pas systématiquement vu comme équivalent au cas à deux jetons verts et un jeton rouge.

2.3. Identification de la difficulté rencontrée

Malgré les modifications de la situation, notamment par l'ajustement de certaines variables didactiques, le groupe constate que la situation ne produit pas les effets escomptés en classe et ceci indépendamment des niveaux d'enseignement : les élèves s'engagent effectivement dans la résolution du problème, mais un certain nombre ne parvient pas à avancer significativement dans la recherche. Ces transformations se sont avérées insuffisantes pour que le groupe parvienne à faire évoluer le problème initial vers une situation qui place les élèves dans une activité de recherche aussi riche et variée que celle observée lors de la mise en œuvre d'autres SiRC. Ceci constitue une difficulté inédite pour le groupe : au premier abord, la version « smarties » de la situation paraît satisfaire les critères du modèle des SiRC et, pourtant, elle ne parvient pas à souscrire à ses enjeux. Ainsi, après avoir travaillé sur cette situation pendant environ deux ans, le groupe choisit de se concentrer sur d'autres questions de recherche sans diffuser cette situation.

L'apparition de cette difficulté nous incite à reprendre *a posteriori* chaque critère du modèle afin de tenter d'expliquer le décalage observé entre la conception et la mise en œuvre de cette situation.

3. Analyses

Nous commençons par analyser la situation proposée, dans ses versions « piles » et « smarties », afin d'identifier l'origine du décalage entre le potentiel de la situation perçu par le groupe IREM pendant le processus de conception et les observations faites pendant les préexpérimentations. À partir de cette analyse, nous tentons d'identifier les spécificités du groupe et les contraintes liées au processus de recherche qui ont conduit à un tel décalage. Ces deux analyses combinées nous permettent de mettre en lumière des points de vigilance pour la conception de SiRC et plus généralement sur la conception de situations qui mettent les élèves dans une activité de recherche et de résolution de problème.

3.1. Analyse des versions « piles » et « smarties » de la situation

Dans cette partie, nous regardons les versions « piles » et « smarties » de la situation du point de vue mathématique en résolvant le problème sous-jacent commun, puis du point de vue didactique en étudiant leur adéquation avec les critères du modèle des SiRC.

Éléments de résolution mathématique

Nous clarifions la proposition et la preuve qui sont en jeu dans ces deux versions de la situation. Nous modélisons les positions de jeu des deux versions comme suit : la position de départ est une séquence d'entiers tous non nuls, par exemple $(4,2,3,7)$. Lorsque c'est son tour, la personne qui joue peut soustraire 1 à autant d'éléments non nuls de cette séquence qu'elle le souhaite, mais doit toujours au moins soustraire 1 à un élément non nul de la séquence ; autrement dit, elle doit jouer sans passer son tour. La personne qui gagne est celle qui parvient à la séquence nulle après avoir joué, $(0,0,0,0)$ pour filer notre exemple.

La proposition qui régit les positions de départs qui sont gagnantes ou perdantes est la suivante.

> ***Proposition.*** *Pour toute séquence de départ, la personne qui commence gagne si et seulement s'il existe un entier impair dans la séquence.*

Nous proposons la preuve suivante.

> **Preuve.** Commençons par l'implication réciproque. Soit une séquence de départ S_0 possédant au moins un entier impair. Notons σ_0 la somme de ses éléments. La personne qui commence joue de la façon suivante : elle soustrait 1 à tous les entiers impairs de la séquence (elle le peut, car la séquence en contient au moins un). La séquence S_1 qu'elle donne à son adversaire n'est composée que d'entiers pairs et la somme des éléments de S_1 est notée σ_1. On a $\sigma_1<\sigma_0$. Quel que soit le coup de l'adversaire, la personne qui a commencé récupère la séquence S_2 dans laquelle au moins un entier est impair et telle que $\sigma_2<\sigma_1$. Sa tactique consiste à continuer de jouer en soustrayant 1 à tous les entiers impairs de la séquence que son adversaire lui donne. Le jeu s'arrête par le principe de descente infinie de Fermat : la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite d'entiers strictement décroissante, elle est finie. La dernière séquence que l'adversaire donne à la personne qui a commencé est nécessairement une séquence de 0 et de 1, ce qui donne la victoire à la personne qui a commencé.
>
> L'implication directe se prouve par contraposition. Soit une séquence de départ composée uniquement d'entiers pairs. Il s'agit de montrer que la personne qui commence perd. Quel que soit son coup, elle donne à son adversaire une séquence dans laquelle il existe au moins un entier impair. Par l'implication directe, l'adversaire gagne. La personne qui a commencé perd donc.

Afin de ne pas introduire trop de formalisme, nous avons préféré le principe de descente infinie de Fermat au principe de récurrence qui lui est équivalent. Ce dernier reste néanmoins plus rigoureux, mais moins accessible aux élèves. La résolution du problème repose sur deux éléments : la distinction entre les positions gagnantes et les positions perdantes, ainsi que sur l'identification d'une tactique de jeu.

Adéquation au modèle

Critère C2 : la question initiale est facile d'accès (notamment peu mathématisée).

Dans les énoncés de ces deux versions de la situation, la règle du jeu et la question posée ne requièrent aucun prérequis mathématique pour être comprises par l'ensemble des élèves. S'il apparaît des doutes sur le déroulement de la partie, ceux-ci sont levés par l'enseignante ou l'enseignant lors des premières parties de jeu en classe. Les notions de tactique gagnante, de positions de départ gagnantes ou perdantes et les questions de quantification qui leur sont associées, également visées par ce type de situation, ne sont *a priori* pas nécessaires pour réaliser la dévolution de la situation. Si elles sont déjà familières des élèves, elles peuvent faciliter la recherche, en particulier les phases de formulation. Pour entrer dans le processus de recherche, les élèves doivent cependant accepter l'existence d'une tactique gagnante (c'est-à-dire qui permet de gagner à tous les coups) ne relevant pas du hasard ou d'un effet social : « ma camarade est meilleure que moi en mathématiques, elle va donc forcément gagner ».

Critère C3 : des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques.

Une spécificité des situations reposant sur un jeu opposant deux adversaires est de fournir explicitement une stratégie d'entrée dans la recherche ne nécessitant aucun prérequis : jouer. Cette stratégie a été systématiquement mise en œuvre lors des observations. Par ailleurs, il est à noter qu'il existe également des tactiques de jeu « naïves » (commencer pour gagner, jouer le complémentaire de ce qu'a joué l'adversaire, etc.) qui permettent de se lancer dans la recherche. Mettre à l'épreuve ces diverses tactiques constitue en soi une entrée dans la recherche qui fournit des rétroactions directes, favorisant aussi la dévolution. Néanmoins, si jouer est nécessaire pour accéder à la solution, cela n'est pas suffisant : il est arrivé à plusieurs reprises que des élèves jouent sans chercher.

Critères C1 et C5 : la question s'inscrit dans une démarche de recherche professionnelle et la situation n'a pas nécessairement de fin.

La version « graphes » de l'énoncé reste, à notre connaissance, non résolue et se situe dans un courant de recherche actuel sur les jeux combinatoires sur des graphes (par exemple Galliot, 2023). Cette version s'inscrit donc *a priori* directement dans une démarche de recherche professionnelle. Même si les versions « smarties » et « piles » sont, quant à elles, complètement résolues, il est possible de les envisager comme cas particuliers d'un énoncé qui ne spécifie pas les règles de jeu. Les ouvertures sont donc aisées vers d'autres cas particuliers de règles de jeu.

Critère C4 : plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.

L'analyse mathématique a mis en évidence une seule preuve, basée sur la parité, permettant de donner les positions de départ gagnantes et perdantes ainsi que les tactiques de jeu associées. Elles sont conjecturées après l'étude de plusieurs cas particuliers (c'est-à-dire des positions de départ à nombre de jetons et nombre de piles fixés) et l'identification d'un invariant. Pour chacun de ces cas particuliers, une première approche consiste à étudier toutes les parties possibles, en partant d'une position de départ et jusqu'à la victoire de l'un des deux adversaires. De fait, l'un des objectifs des situations basées sur des jeux opposant deux adversaires est d'amener l'élève à appréhender l'existence et l'unicité de l'étiquetage (gagnante ou perdante) de chaque position de jeu et le passage de l'une à l'autre. Chaque cas particulier peut donc également être regardé comme suit : énumérer tous les coups possibles sur la position de départ et déterminer pour chacun si la position obtenue a déjà étiquetée. Ces deux approches — ou stratégies d'avancée dans la recherche — peuvent mener à l'identification de l'invariant, sur lequel repose la résolution du problème général. Même en s'intéressant à des classes de cas particuliers, par exemple en considérant que toutes les piles ont le même nombre de jetons, ou en ne regardant que le cas à une pile, il n'y a *a priori* pas d'autre preuve que celle qui repose sur la parité.

Ces constats nous amènent à penser que le nombre de piles et le nombre de jetons ne peuvent finalement pas être considérés comme des variables de recherche dans cette situation. Il nous semble que c'est précisément à ce niveau que se joue la différence avec la SiRC des *carrés insécables* présentée au début de cet article. Dans les versions « piles » ou « smarties », le groupe IREM n'a identifié qu'une seule preuve qui peut, bien entendu, être issue de plusieurs stratégies de recherche. L'identification de l'invariant est *a priori* la seule manière envisageable pour répondre au problème, ce qui crée un saut épistémologique : il n'y a pas d'autre résolution possible. Cette situation ne présente donc pas de potentiel de résistance dynamique et, de notre point de vue, s'apparente à une situation de type *« on/off »* comme décrite par Georget (2009).

3.2. Retour sur le processus de conception de la situation

Il convient maintenant, en appui sur l'analyse mathématique et didactique que nous venons de réaliser, de revenir sur le processus de conception de la situation pour tenter d'expliquer la provenance du décalage entre le potentiel perçu par le groupe pour que la situation devienne une SiRC, les observations faites pendant les préexpérimentations ainsi que l'analyse de la situation que nous avons conduite *a posteriori*.

Dès les premières expérimentations, le groupe a observé que les élèves s'approprient la responsabilité de résoudre le problème, et ce du primaire au supérieur. Puisque la question est compréhensible et ne nécessite pas de prérequis mathématique, et puisque des manipulations sont rendues possibles par le matériel, l'accessibilité de la situation est garantie. C'est un point auquel le groupe a veillé dans sa recherche et qui permet effectivement la dévolution. Les élèves déploient des heuristiques de résolution de problème pour s'engager dans la recherche, ce qui leur permet de travailler certains savoirs mathématiques transversaux. Ils éprouvent des difficultés à identifier et formaliser leurs résultats partiels, notamment à mémoriser les positions de départ déjà explorées et, de manière générale, peinent à organiser leur recherche. Pour le groupe IREM, la situation paraissait donc avoir du potentiel pour travailler la conduite d'une recherche et a d'ailleurs suscité la satisfaction des enseignants qui lui ont ouvert leurs portes, notamment en primaire. Ces deux aspects (savoirs transversaux et conduite de recherche) constituent une préoccupation importante au sein du groupe, notamment en lien avec l'institutionnalisation. Le groupe a considéré que les critères C2 et C3 étaient satisfaits dans la mesure où la situation est transversale, c'est-à-dire ici accessible du primaire au supérieur. Il s'agit d'une spécificité des SiRC à laquelle les membres du groupe sont vigilants.

La lassitude éprouvée par les élèves qui ne réussissent pas à accéder à la résolution et la déception des élèves qui y parviennent ont été identifiées par le groupe. Si nous les expliquons *a posteriori* par la dimension « on/off » du problème posé, le groupe n'est pas parvenu à en expliquer l'origine. Cette difficulté nous semble résider dans la perception qu'avait le groupe du potentiel du problème. En effet, le processus de recherche suivi par le groupe avait montré que la situation repose sur un problème mathématique possédant un vaste espace-problème[10] (Giroud, 2011), ce qui attesterait de sa consistance épistémologique (Da Ronch, 2022). Or, de notre point de vue, consistance d'un problème et résistance d'une situation basée sur ce problème ne sont pas équivalentes (l'une n'implique pas l'autre, et inversement). La première est uniquement mathématique, puisqu'elle se définit par la quantité de relations entre la résolution d'un problème et celles d'autres problèmes. La seconde, en revanche, est didactique, car elle est liée à la mise en œuvre de la situation en classe : un problème peut par exemple être résistant pour des élèves de primaire et ne plus l'être du tout pour des élèves de lycée. La confusion entre ces deux notions nous semble à la source de la difficulté rencontrée par le groupe. Comme le problème paraissait « intéressant » (en fait consistant) le groupe a considéré implicitement que les critères C1, C4 et C5 étaient satisfaits et que le problème possédait un réel potentiel.

Ainsi, au cours du processus, les situations étudiées semblaient toujours satisfaire les cinq critères du modèle. Par conséquent, le groupe s'est concentré sur la transformation de la situation

[10] Un problème P_1 est dans l'espace problème d'un problème P_2 si et seulement si leurs résolutions sont liées. Il existe différents types de relations pouvant lier les résolutions de P_1 et P_2, par exemple « la résolution de P_1 entraîne la résolution de P_2 ».

pour tenter de résoudre ou *a minima* d'atténuer la difficulté des élèves à identifier une solution. Il a donc testé l'influence de certaines variables didactiques, comme la formulation de l'énoncé et le matériel, en considérant que les variables de recherche étaient le nombre de jetons et le nombre de piles (ou de couleurs). De fait, dans les situations étudiées précédemment au sein du groupe, les variables de recherche[11] permettent de considérer différentes classes de cas particuliers relatives au problème comme le permettent le nombre de jetons et le nombre de piles (ou de couleurs) pour ces situations. En s'appuyant sur cette expérience, le groupe n'a pas questionné la pertinence de ces variables et les a validées, car elles permettent effectivement aux élèves de mieux comprendre et de transformer le problème, ce qui correspond à la définition proposée par Grenier et Payan (2002, 2006) vivant dans la mémoire des membres du groupe. L'analyse de la situation que nous avons conduite *a posteriori* pointe néanmoins que ces deux variables ne sont, en réalité, pas des variables de recherche au sens de Godot (2005) puisque le choix de leurs valeurs par les élèves n'influence pas les procédures de résolution qui leur sont disponibles. L'existence d'une seule preuve pour les versions « piles » et « smarties », même en considérant des cas particuliers, n'a pas été repérée comme problématique par le groupe au cours du processus alors qu'elle nous amène *a posteriori* à considérer que le critère C4 du modèle n'est pas satisfait pour cette situation.

Conclusion

Commençons par revenir sur les versions « piles » et « smarties » de la situation présentées dans cet article. Nous tenons à souligner que, même si celle-ci ne satisfait pas l'intégralité des critères du modèle des SiRC, elle possède tout de même un intérêt. D'abord, la dévolution est assurée. Ensuite, elle génère une activité de recherche intéressante chez les élèves pour de multiples raisons : les élèves s'engagent dans une démarche de résolution au cours de laquelle des savoirs transversaux (essai-erreur, exploration d'un cas particulier, recherche de contre-exemples, etc…) sont effectivement mis en œuvre. Elle leur permet de travailler les notions de parité, de positions de jeu gagnantes ou perdantes. Enfin, elle permet d'institutionnaliser des éléments liés à l'organisation d'une recherche.

À l'origine de cet article, nous nous sommes demandé pourquoi le processus de conception de cette nouvelle situation n'avait pas pu aboutir à la conception et à la diffusion d'une SiRC robuste, comme pressenti *a priori* par le groupe. Cette difficulté, que nous avons rencontrée directement en tant que membres de ce groupe, nous a amené·e·s à reprendre le modèle des SiRC et à nous questionner sur la manière dont celui-ci vit au sein de notre groupe IREM. En particulier, nous avons identifié le lien intrinsèque entre le critère C4 du modèle (existence de plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements possibles) et les variables de recherche. Notre questionnement s'est naturellement tourné vers l'interprétation de ces deux éléments par le groupe et vers l'influence de cette interprétation sur le processus de recherche.

Les savoirs visés par les SiRC sont des savoirs mathématiques transversaux comme la logique, le raisonnement, la démarche de recherche ou encore les heuristiques de résolution de problèmes. Cette spécificité est l'une des raisons pour lesquelles les enseignantes et les enseignants choisissent de s'investir dans ce groupe IREM. Dans la conception d'une nouvelle situation, le groupe s'intéresse principalement à la dévolution et l'institutionnalisation. Il prête une attention

[11] Par exemple : la dimension de la grille pour les *carrés insécables*, la taille de la tablette ou le placement du carreau de savon pour le *jeu du chocolat*, la taille du jardin ou la forme des bêtes pour la *chasse à la bête* (voir la brochure de l'IREM de Grenoble (2018) pour la description détaillée de ces situations).

particulière aux heuristiques de résolution de problème, aux démarches et, de manière générale, à l'organisation de la conduite d'une recherche. Ceci justifie que notre groupe se concentre prioritairement sur les critères C2 et C3 du modèle, garantis, en pratique, par la possibilité de mettre en œuvre la situation du primaire au supérieur. Néanmoins, nous avons pointé que le groupe IREM ne se réfère pas explicitement au modèle originel. Celui-ci vit grâce à la mémoire de ses membres qui sont familiers des SiRC robustes. En outre, l'identification des variables de recherche de nouvelles situations repose également sur cette mémoire, par analogie avec celles des autres situations connues.

La présence de chercheur·e·s en mathématiques permet d'apporter des problèmes issus de la recherche (critère C1). Au sein du groupe, les critères C4 et C5 sont considérés comme satisfaits dès lors que le problème parait consistant, c'est-à-dire qu'il possède des liens avec d'autres problèmes mathématiques. Puisqu'implicitement la confusion entre consistance et résistance est faite, les variables de recherche ne sont plus perçues par le groupe que comme moyens à la fois d'assurer la dévolution et de rendre mobilisables des heuristiques de résolution de problèmes variées. Finalement, en pratique, le groupe agit comme si la consistance garantissait la pertinence de toute variable de recherche. Ainsi, dans le groupe, l'existence de plusieurs stratégies de résolution n'est pas questionnée au regard des preuves disponibles, que ce soit pour le problème général ou pour des classes de cas particuliers. L'interprétation qu'a le groupe du concept de variable de recherche s'appuie implicitement sur la définition de Grenier et Payan (2002, 2006). Or nous avons pointé la nécessité de l'enrichir en prenant en compte la définition de Godot (2005), autrement dit les variables de recherche doivent être *« inhérentes à la situation-recherche, leurs valeurs permettent de caractériser les différents sous-problèmes de la situation et les procédures afférentes »* (Ouvrier-Buffet *et al.*, 2017, p. 6). Pour nous, l'existence de telles variables est directement liée au critère C4 du modèle car elle assure l'existence de plusieurs chemins pour accéder à une résolution éventuellement partielle du problème, impliquant donc l'existence de résultats intermédiaires avec des preuves différentes. Cette interprétation a mené le groupe à continuer de préexpérimenter la situation en testant d'autres valeurs pour les variables didactiques afin de déterminer une « meilleure » situation en classe pour tous les niveaux, c'est-à-dire qui produise une activité de recherche chez les élèves semblable à celle provoquée par les autres SiRC. La confusion entre résistance d'une situation et consistance d'un problème ainsi que le décalage entre les deux interprétations du concept de variables de recherche et donc du critère C4 nous semblent expliquer la difficulté rencontrée par le groupe.

Notre analyse nous amène à réaffirmer la nécessité que le choix des valeurs de ces variables de recherche par les élèves doit non seulement favoriser la dévolution de la situation, mais aussi impacter directement les stratégies d'avancée et les preuves disponibles pour la résolution, même partielle. L'identification des variables de recherche au sens de Godot (2005) nous semble un préalable essentiel dans le processus de conception d'une SiRC. Toutefois, leur identification ne garantit pas *a priori* que la situation soit une SiRC : il faut également que les préexpérimentations confirment l'accessibilité, pour les élèves, aux différentes procédures de résolution induites par le choix des valeurs de ces variables.

Ces résultats permettent à la fois de clarifier le modèle des SiRC et d'étayer notre compréhension du fonctionnement du groupe IREM vis-à-vis de ce modèle. Ils induisent aussi des réflexions qui renseignent sur les éléments saillants d'un processus de conception d'une situation visant à placer les élèves dans une activité de recherche et de résolution de problème, quelle qu'elle soit.

Nous tenons à remercier Mickaël Da Ronch et Simon Modeste pour leur précieuse relecture de la toute première mouture de cet article (si différente de cette version finale) et pour leurs conseils avisés.

Références bibliographiques

Billon, V., Bulf, C., Champagne, M., Coulange, L. & Lhoste, Y. (2016). Étude des conditions du développement professionnel d'enseignants du premier degré. Genèse de gestes professionnels et pragmatisation de concepts didactiques. *Recherches en éducation, HS9*. https://doi.org/10.4000/ree.9879

Bednarz, N. (2015). La recherche collaborative : Entretien réalisé par J.-L. Rinaudo et É. Roditi. *Carrefours de l'éducation, 39*(1), 171-184. https://doi.org/10.3917/cdle.039.0171

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Busser, É. & Cohen, G. (2016, 25 novembre). Affaire de logique n° 940 : en long et en large. *Le Monde Science & Médecine* (p. 6).

Cerclé, V. (2020). Faire vivre les énoncés contingents dans la classe de mathématiques : pourquoi et comment ? *Petit x, 110-111*, 27-56.

Chabanol, M.-L. (2023). Les IREM expliqués à mes collègues. *La Gazette de la Société Mathématiques de France, 178*, 16-20.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Da Ronch, M. (2019). Activité - Une histoire de cubes insécables. *Petit x, 109*, 46-48.

Da Ronch, M. (2022). Pratique de l'activité mathématique en médiation : modèles didactiques et conception d'ingénieries [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes].

Deloustal-Jorrand, V. & Modeste, S. (2019). Les Situations de Recherche par Maths à Modeler : articuler recherche, formation et diffusion. Dans J. Pilet & C. Vendeira (éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018* (pp. 172-181). IREM de Paris et Université Paris Diderot.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. & Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : Un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33-64. https://doi.org/10.7202/000305ar

Duchêne, É. (2006). *Jeux combinatoires sur les graphes*. [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I].

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique : défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. [Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1].

Galliot, F. (2023). *Hypergraphes et jeu Maker-Breaker : une approche structurelle*. [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes].

Gardiès, C., Fauré, L., Fabre, I. & Dufour, K. (2022). D'une problématique d'ancrochage des élèves à la circulation des savoirs dans la recherche collaborative : L'histoire du LéA Tulle-Naves. Dans *Le réseau des lieux d'Éducation associés à l'Institut français de l'Éducation : un instrument pour la recherche* (pp. 257-277). Presses Universitaires de Rennes.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot - Paris VII].

Giroud, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. [Thèse de doctorat, Université de Grenoble].

Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs*. [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I].

Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(1), 189-203.

Grenier, D. & Payan, C. (2002). Situations de recherche en « classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation. Dans V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2002* (pp. 189-203). ARDM et IREM de Paris VII.

Grenier, D. & Payan, C. (2006). Des « situations recherche » pour l'apprentissage des savoirs transversaux. Dans N. Bednarz & C. Mary (éds.), *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*.
https://emf.unige.ch/files/2814/5390/3967/EMF2006_GT6_Grenier.pdf

Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. Dans L. Coulange & C. Hache (éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2009* (pp. 161-177). ARDM et IREM de Paris VII.
https://www.publimath.fr/numerisation/AAR/AAR10007/AAR10007.pdf

Gravier, S. & Ouvrier-Buffet, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization - exemplification with Research Situations for the Classroom. *ZDM - Mathematics Education, 54*, 925-940.
https://doi.org/10.1007/s11858-022-01400-3

IREM de Grenoble (Groupe Logique, Raisonnement et SiRC) (2018). *Situations de recherche pour la classe : pour le collège et le lycée… et au-delà*. IREM de Grenoble.

Lhoste, Y. & Schneeberger, P. (2018). Points de vue des acteurs de la formation des enseignants de SVT sur le développement professionnel des professeurs débutants. *RDST, 17*, 21-48.
https://doi.org/10.4000/rdst.1648

Morrissette, J. (2013). Recherche-action et recherche collaborative : quel rapport aux savoirs et à la production de savoirs ? *Nouvelles pratiques sociales, 25*(2), 35-49. https://doi.org/10.7202/1020820ar

Ouvrier-Buffet, C., Alves, M. & Acker, C. (2017). La chasse à la bête - Une situation recherche pour la classe. *Grand N, 100*, 5-31.

Pólya, G. (2004). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton : Princeton University Press.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P. & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(1), 57-90.

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. https://www.education.gouv.fr/media/11072/download