FAVORISER UNE ACTIVITÉ DE CONTRÔLE LORS DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ALGÉBRIQUES : DES LEVIERS POUR L'ENSEIGNEMENT

Philippe LABROSSE[1]
Ph. D., Sciences de l'éducation, option didactique des mathématiques

Mireille SABOYA[2]
Ph. D., Professeure au département de mathématiques, Université du Québec à Montréal

Résumé. Cet article présente l'analyse de productions d'élèves de 2e secondaire (13-14 ans) lors de la résolution d'un problème algébrique. Ce problème a été élaboré et expérimenté dans le cadre d'une recherche (Labrosse, 2020). Il a été conçu à partir de certaines variables didactiques qui sont apparues, *a posteriori*, comme prometteuses pour favoriser une activité de contrôle chez les élèves. Le contrôle se traduit par la capacité des élèves à résoudre un problème en exerçant une réflexion sur tout choix ou toute action avant, pendant et à la fin de la résolution. Certaines valeurs des variables didactiques retenues pour concevoir le problème, notamment la position attribuée à l'élève et celle de son interlocuteur, apparaissent comme des leviers pour permettre à l'élève de déployer une activité de contrôle (Saboya *et al.*, 2015). Nous présentons, dans cet article, trois enjeux relatifs au déploiement d'une activité de contrôle ressortis de l'analyse et qui ouvrent des pistes pour l'enseignement de la résolution de problèmes algébriques.

Mots-clés. Résolution de problèmes, algèbre, contrôle, position de l'élève, interlocuteur.

Abstract. This article presents the analysis of the productions of an algebraic problem of secondary 2 students (13-14 years old). This problem was developed and tested as part of a research (Labrosse, 2020). It was designed based on certain didactic variables which appeared, *a posteriori*, to be promising in promoting control activity among students. Control is express by students' ability to solve a problem by exercising thought over any choice or action before, during, and at the end of solving. Certain values of the didactic variables retained to design the problem, in particular the position attributed to the student and that of his interlocutor, appear to be triggers to allow the student to deploy a control activity (Saboya *et al.*, 2015). In this article, we present three issues relating to the deployment of a control activity that emerged from the analysis and which open up avenues for teaching the resolution of algebraic problems.

Keywords. Problems solving, algebra, control, student position, interlocutor.

[1] philippe.labrosse@umontreal.ca

[2] saboya.mireille@uqam.ca

Introduction

Cet article s'intéresse à l'activité de contrôle exercée par les élèves en résolution de problèmes algébriques. Celle-ci se traduit par une réflexion sur tout choix ou toute action tout au long de la résolution, sur la capacité à prendre des décisions de façon réfléchie et à prendre une certaine distance par rapport à la résolution (Saboya, 2010). Faire preuve d'un contrôle sémantique, d'un contrôle syntaxique, anticiper l'ordre de grandeur du résultat, vérifier la démarche et/ou le résultat obtenu sont quelques-unes des manifestations d'une activité de contrôle. Plusieurs recherches ont étudié le contrôle lors de la résolution de problèmes algébriques (Saboya, 2010 ; Saboya *et al.*, 2015 ; Morand, 2020), de problèmes de structure additive (Saboya *et al.*, 2017), de problèmes avec des fractions (Saboya *et al.*, 2015 ; Bolduc, 2020) et de problèmes de proportionnalité (Rhéaume, 2020).

Suite à une étude doctorale (Labrosse, 2020), nous avons remarqué des manifestations d'un contrôle dans certaines productions d'élèves de 2^{e} secondaire (13-14 ans) autour d'un problème algébrique. Soulignons que cette recherche ne visait pas l'étude du contrôle. Toutefois, le choix autour de certaines variables didactiques dans la conception d'un des problèmes a permis de faire émerger des éléments permettant d'enrichir la conceptualisation du contrôle et d'en savoir plus sur les caractéristiques et les conditions des problèmes qui favorisent une telle activité. Cet article présente la portée, pour le développement d'une activité de contrôle, de deux variables didactiques : *la position attribuée à un élève résolveur* (dans le problème présenté ci-après celle d'un élève-enseignant qui porte un regard sur une production d'un élève-fictif) et *l'interlocuteur de cet élève résolveur* (à qui s'adresse-t-il dans sa résolution ?). À travers leurs productions, certains élèves font preuve d'un contrôle sémantique qui s'exprime par un questionnement sur l'inconnue génératrice. De plus, des difficultés sémantiques apparaissent comme résistantes autour de l'interprétation d'une relation de comparaison. Finalement, un contrôle se manifeste lors d'une vérification qui prend le statut d'une validation. Ces différents aspects seront traités dans la partie 4 après l'explicitation du cadre du contrôle, des variables didactiques mises en œuvre dans cette étude et des éléments méthodologiques.

1. La résolution de problèmes algébriques : un regard sur le contrôle déployé

Bien qu'il existe différentes résolutions possibles pour des problèmes algébriques (Adihou *et al.*, 2015 ; Saboya *et al.*, 2013 ; Bednarz & Janvier, 1996 ; Chevallard, 1989 ; Demonty, Fagnant & Vlassis, 2015 ; Kieran, 1992 ; Marchand & Bednarz, 2000 ; Oliveira & Rhéaume, 2014 ; Oliveira *et al.*, 2017 ; Schmidt, 1996 ; Squalli *et al.*, 2020), nous nous limiterons dans cet article à la résolution algébrique qui a été privilégiée dans l'ensemble des productions des élèves que nous avons analysées. Cette résolution implique le recours explicite à une symbolisation et prend appui sur l'analycité. Pour Squalli *et al.* (2020), l'analycité englobe les trois aspects suivants :

> *1. On suppose qu'il existe une valeur (éventuellement plusieurs) pour chacune des inconnues répondant aux conditions du problème. On accepte de représenter ces inconnues par un symbole et d'opérer sur eux comme si leur valeur était connue.*
>
> *2. À l'aide de ces symboles, on traduit les différentes relations entre les données connues et inconnues du problème ainsi que l'équation mathématisant le problème.*
>
> *3. On cherche des conséquences logiques de 1. et 2. en opérant sur les représentations des relations et de l'équation jusqu'à ce que l'on soit en mesure de trouver les valeurs des inconnues. Dans le cas où on aboutit à une conséquence impossible, par exemple « 0=1 », alors on peut conclure que la supposition initiale était fausse, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de valeurs des inconnues répondant aux conditions du problème* (Squalli *et al.*, 2020, pp. 44-45).

De plus, Squalli *et al.* soulignent que :

> *Le symbole utilisé pour représenter une inconnue peut être différent d'une lettre (mot, dessin, une notation non standard comme une simple marque sur le papier) […]. La nature du symbole est secondaire du moment que ce symbole est utilisé comme substitut de l'inconnue que l'on peut manipuler lorsqu'on veut opérer sur l'inconnue* (Squalli *et al.*, 2020, p. 45).

Saboya *et al.* (2015) et Sirejacob (2016) précisent que la résolution algébrique s'appuie sur le déploiement d'une activité de contrôle qui peut s'exprimer à différents moments de la résolution notamment un contrôle sémantique, un contrôle syntaxique, une vérification, une validation, une anticipation, et une perception des erreurs.

Le ***contrôle sémantique*** permet de traduire un problème en équation. Cette mathématisation repose sur l'identification des inconnues et plus particulièrement dans le choix d'une des inconnues comme étant l'inconnue génératrice suivie de l'expression des autres inconnues à partir de cette inconnue génératrice. Ainsi, considérons le problème suivant :

> *Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 10 000 $ de moins à Sophie qu'à Marie, et il donne 3 fois plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000 $, combien recevront Marie, Chantal et Sophie ?*

Trois grandeurs inconnues sont présentes : le montant de Marie et ceux de Chantal et de Sophie. Bien que chacun de ces trois montants soit un choix possible, choisir le montant de Chantal comme inconnue génératrice permet de manipuler des expressions sans fractions ni parenthèses, celles-ci étant source d'erreurs pour plusieurs élèves. Le déploiement d'un contrôle sémantique permet, par ailleurs, de traduire l'énoncé en une équation en respectant les règles de l'écriture algébrique, en exprimant les relations entre les grandeurs d'un registre vers un autre et en gérant les contraintes. Des chercheurs soulignent que la mise en équation ne va pas de soi (Bednarz & Janvier, 1996 ; Ben Nejma, 2020 ; Nullans, 1988-1989), des difficultés étant constatées à la fois lors de l'identification des inconnues et lors de l'expression des relations, ce qui entraîne une mathématisation incorrecte ouvrant la porte à l'intérêt de la dimension linguistique des énoncés de problèmes du premier degré. En effet, selon Radford (2003), il ne faut pas négliger la constitution du sens donné à une expression algébrique construite à partir d'un contexte. Ce chercheur souligne la difficulté que constitue le passage de l'histoire originelle racontée par le problème en mots vers la traduction en symboles pour aboutir à ce qu'il nomme la *narrative symbolique*, une narrative racontée en signes. Ainsi, bien qu'il y ait *« des ressemblances entre l'histoire originale et la narrative symbolique, les personnages changent »* (p. 7). Dans le problème précédent d'Arsène Ponton, les « héros » (appellation empruntée à Radford) de l'histoire originale, Marie, Chantal et Sophie, ne sont plus dans la narrative symbolique. Il faut considérer les relations numériques reliant les montants entre ces héros. De plus,

> *[…] la construction d'une narrative symbolique pour l'histoire donnée exige une nouvelle approche : alors que l'histoire originale se déploie selon une lecture linéaire de gauche à droite (avec d'éventuels retours en arrière), le point d'entrée dans la narrative symbolique n'a pas un emplacement permanent* (Radford, 2003, p. 7).

Le ***contrôle syntaxique*** s'exprime par la résolution de l'équation qui requiert d'opérer sur les membres de l'équation pour isoler l'inconnue et les transformations algébriques permettant de conserver l'égalité et d'obtenir des équations équivalentes. De nombreux chercheurs se sont intéressés à la résolution d'équations. Plusieurs d'entre eux soulignent les difficultés ressenties par les élèves et discutent autour du potentiel de diverses méthodes de résolution (Bloch, 2009 ; Booth, 1984 ; Chevallard, 1989 ; Coulange, 1997 ; Cortés & Kavafian, 1999 ; Filloy & Rojano, 1989 ; Kieran, 2007; Proulx, 2020 ; Radford & Grenier, 1996 ; Vlassis, 2002 ; Vlassis &

Demonty, 2000). Radford (2003) précise que la résolution de l'équation constituée à partir d'un problème avec un contexte requiert la transformation du sens élaboré lors de la désignation afin de pouvoir mener des opérations sur les expressions obtenues. Il mentionne que des difficultés peuvent se présenter *« dès qu'un calcul formel doit être effectué sur des expressions symboliques élaborées préalablement sous forme de narrative symbolique. Pour que le calcul formel ait lieu, la narrative symbolique doit collapser »* (p. 14). En effet, les actions de regrouper les termes semblables entre eux, de procéder à la distributivité, de diviser ou de multiplier par une constante impliquent une rupture avec le sens original. On doit ainsi mettre de côté la désignation effectuée pour arriver à la narrative symbolique afin de procéder à la résolution de l'équation obtenue.

De plus, Kouki (2006) et Sirejacob (2016) précisent que la résolution d'une équation nécessite que l'on soit capable d'articuler le contrôle sémantique et syntaxique :

> *La résolution d'une équation algébrique nécessite l'articulation entre la syntaxe (l'élève doit suivre les règles de formation de l'équation et les règles de transformations de l'équation en une équation équivalente) et la sémantique (comme lorsque l'élève va contrôler, interpréter et choisir les transformations à effectuer, ou tester des valeurs numériques, conjecturer graphiquement l'existence et le nombre de solutions de l'équation). Un élève n'articulant pas syntaxe et sémantique ne peut pas pratiquer une activité algébrique idoine, comme le montre Chevallard (1989) en donnant l'exemple d'un élève sachant parfaitement factoriser l'expression relativement complexe $(2x-3)2-4(x+1)(4x-6)+(4x^2-9)$, mais qui est incapable de contrôler numériquement son résultat. L'élève est, dans cet exemple, resté uniquement sur l'aspect syntaxique des transformations. On voit à travers cet exemple l'importance de la dialectique entre numérique et algébrique, étroitement liée à l'articulation entre syntaxe et sémantique* (Sirejacob, 2016, p. 34).

Lors de l'obtention d'une réponse, un autre contrôle se met en place, la ***vérification***, qui permet de statuer que la solution est correcte de même que la démarche adoptée. Pour Coppé (1997), la question de la ***validité du résultat***, donc l'incertitude, est à la base de la vérification. Elle distingue les vérifications de type externe, qui ne font pas appel à des connaissances mathématiques, mais qui s'appuient plutôt sur l'expérience de l'élève, à des vérifications de type interne qui reposent sur des connaissances et des savoirs-faire mathématiques. Pour la résolution d'équations, Chalancon, Coppé et Pascal (2002) donnent comme exemple de vérification externe : *« les solutions d'une équation doivent être des nombres simples, on fera plus confiance à un 2 qu'à un 37/128 » et comme vérification interne « remplacer la solution trouvée dans l'équation de départ »* (p. 25).

Par ailleurs, la vérification peut être enclenchée par la ***perception d'erreurs***. Celle-ci passe par un questionnement sur le sens de la réponse et peut mener vers un retour sur l'énoncé du problème et vers la démarche effectuée. Vlassis et Demonty (2000) précisent que plusieurs erreurs commises par les élèves sont souvent dues à une interprétation erronée des notions enseignées, notamment au sens accordé à la lettre et au sens de l'égalité. Cortés et Kavafian (1999) soulignent que :

> *[…] ces erreurs sont dues à l'absence d'un processus de contrôle propre au calcul algébrique […] ce contrôle se manifeste par un constant mouvement entre l'équation qui vient d'être écrite et la précédente dans le but de vérifier que tous les termes ont été reportés ainsi que la validité des signes des résultats numériques écrits par rapport aux opérations numériques notées ou inférées dans l'équation précédente* (Cortés & Kavafian, 1999, p. 65).

En outre, la vérification peut s'effectuer suite à une ***anticipation*** déçue. L'élève peut anticiper l'ordre de grandeur ou la nature de la réponse et remettre en question la réponse trouvée si elle ne correspond pas aux attentes. La ***validation*** diffère de la vérification par des justifications qui permettent de poser un jugement sur la justesse de la solution finale. La vérification a davantage le rôle de s'assurer qu'un résultat est exact alors que la validation vient davantage éclairer pourquoi un résultat est vrai en fournissant des arguments mathématiques.

Saboya *et al.* (2015) et Morand (2020) font ressortir l'interrelation entre ces différents contrôles (syntaxique, sémantique, vérification, validation, anticipation, perception des erreurs) qui peuvent s'amalgamer, de façon dynamique, dans un processus cyclique[3]. Ces chercheurs soulignent, par exemple, que la vérification n'apparaît pas seulement en fin de processus, mais qu'elle peut être présente localement, en cours de processus, sous forme de retour à l'énoncé du problème, de retour à l'équation initiale et dans un croisement avec une anticipation préalable. La figure 1 présente les manifestations de divers contrôles chez un élève du secondaire lors de la résolution d'un problème algébrique. Elle illustre la construction progressive d'un contrôle syntaxique (l'utilisation de règles de transformation des expressions) qui s'appuie sur un contrôle sémantique exprimé dès le départ lors de la traduction du problème. L'élève réajuste son contrôle syntaxique en mettant en doute la résolution menée à travers le repérage d'erreurs, les vérifications sont nombreuses et permettent un retour sur l'équation de départ pour la résoudre correctement.

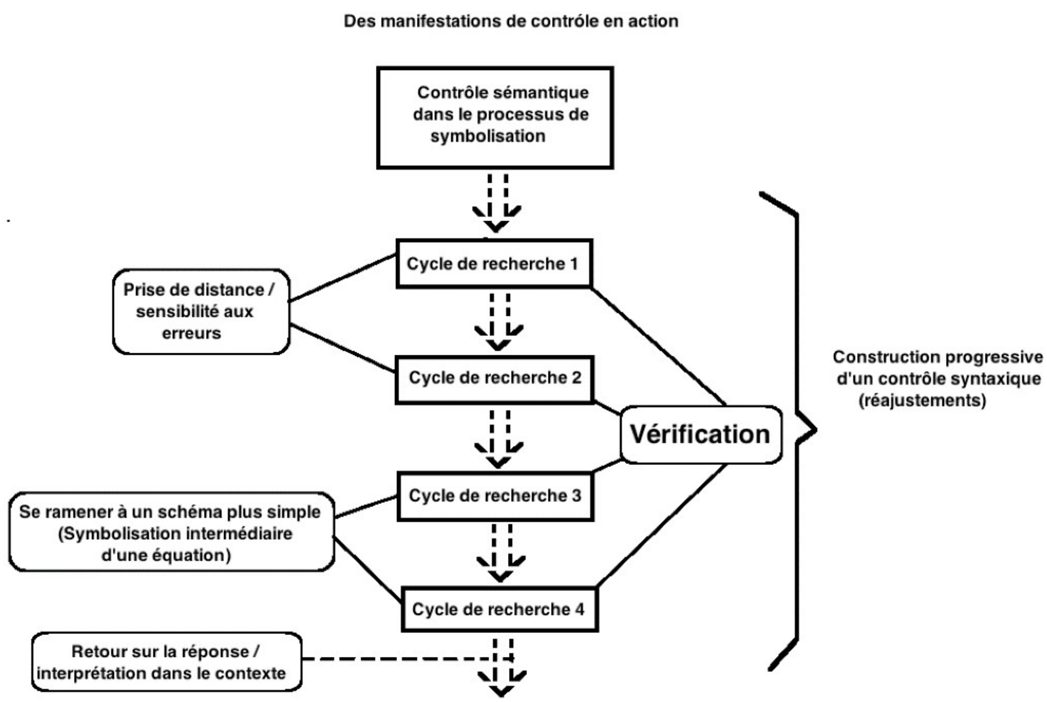


Figure 1 *: Schématisation de la construction d'un contrôle syntaxique, tirée de Saboya et al. (2015, p. 23).*

En outre, Saboya *et al.* (2015) et Rhéaume (2020) soulignent que certaines variables dans les problèmes favorisent le déploiement d'une activité de contrôle. Ainsi, pour susciter un travail sur la vérification (un retour sur la démarche et sur la réponse), les auteurs proposent un problème pour lequel la réponse attendue par l'élève est entière (un nombre de wagons) alors que la solution au problème est un nombre décimal[4]. Cette réponse sollicite alors une interprétation du résultat au regard du contexte et oblige un retour au problème de départ (on peut arrondir à

[3] Ces résultats proviennent de l'analyse de productions d'élèves et de la passation d'entrevues.

l'entier supérieur en considérant qu'un wagon ne sera pas plein). Le choix des nombres n'est ainsi pas anodin dans ce cas si on vise l'expression d'un contrôle. Nous verrons que le jeu sur les variables didactiques retenues par Labrosse (2020) pour le problème qui a attiré notre attention a suscité le déploiement d'une activité de contrôle pour la vérification et la validation, mais également pour le contrôle sémantique. Cette proposition de jeu sur les variables didactiques s'est avérée un levier pour l'enseignement de la résolution de problèmes algébriques.

2. Variables didactiques et présentation du problème

Nous présentons, dans la section qui suit, les variables didactiques à partir desquelles a été élaboré le problème expérimenté. Initialement, ce problème a été conçu dans le cadre d'une séquence de problèmes (Labrosse, 2020) visant à ce que des élèves de 2^{e} secondaire déploient un argumentaire lors de la résolution de problèmes algébriques, donnant ainsi à une enseignante un accès renouvelé aux raisonnements de ses élèves, lui offrant un matériau qu'il lui a été possible d'exploiter en classe. Par ailleurs, nous verrons que les variables didactiques ont également joué un rôle central dans le déploiement d'une activité de contrôle. Ainsi, cet article vise à cerner l'apport de certaines variables didactiques dans la manifestation d'un contrôle qui apparaît chez les élèves à travers leurs productions écrites.

2.1. Les trois variables didactiques retenues dans le problème

Variables	Valeurs des variables
Position attribuée à l'élève Position dans laquelle est placé l'élève pour effectuer la tâche en situation (liée au contrat didactique).	*Élève* : position « habituelle » *Co-équipier* : Après avoir réalisé individuellement le problème, l'élève interagit avec un autre élève pour réaliser une production écrite commune. *Enseignant implicite* : Sans être explicitement placé en position d'enseignant, l'élève est appelé à se prononcer sur la production d'un élève. Il est détourné de son rôle habituel afin de décoder et commenter des stratégies d'élèves-fictifs. *Enseignant explicite* : en adoptant une posture d'enseignant, l'élève est invité en quelque sorte à assumer la responsabilité du savoir en jeu et donc de sa validité. S'il accepte cette invitation, la position depuis laquelle il aborde le problème risque de faire appel à un autre milieu, c'est-à-dire que d'autres connaissances risquent d'être mobilisées (Fiola, 2005 ; René de Cotret, 2014). Il s'agit d'une forme de stratagème pour aider l'élève à puiser dans l'ensemble de ses connaissances et pour l'amener à justifier davantage les résultats obtenus.
Interlocuteur de l'élève À qui l'élève s'adresse, avec qui il interagit.	*Enseignante* : contrat didactique « normal », l'élève voit une hiérarchie/autorité probable attribuée à l'enseignante. Des codes mathématiques sont communs, des savoirs institués sont aussi partagés. *Co-équipier* : égalité des protagonistes, pas de hiérarchie, arguments d'autorité peu probables. *Élèves-fictifs* : en position d'enseignant, l'élève s'adresse aux élèves-fictifs qui ont produit des solutions. *Classe-fictive* : en position d'enseignant, une question dans la situation invite l'élève à expliquer à la classe l'équivalence de deux stratégies.

[4] ***Problème des trains :*** Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. Sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives ? Explique comment tu as fait pour trouver. (Ce problème, tiré de Bednarz, Janvier, Mary et Lepage (1992), a été modifié : la relation initiale du problème était *« il y a 8 wagons de plus dans le train à 16 wagons que dans le train à 12 wagons »*).

	« Quidam » : référence au « langage » mathématique moins probable ou moins pertinent ou efficace, codes mathématiques non nécessairement communs.
Modalité de travail Travail seul ou en équipe	*Seul* *Équipe/dyade*

Tableau 1 *: Variables et leurs différentes valeurs.*

Dans le cadre de ses travaux, Labrosse (2020) s'est intéressé à trois variables didactiques : la position attribuée à l'élève, l'interlocuteur de l'élève et les modalités de travail du problème. Les valeurs de ces variables didactiques (*cf.* tableau 1) ont été mises à contribution dans la conception de problèmes algébriques, notamment dans celui qui fait l'objet de cet article, le Déménagement.

Le problème du *Déménagement* a été conçu en trois parties, chacune d'elles met en jeu certaines valeurs pour ces trois variables didactiques.

2.2. Problème du *Déménagement*

Ce problème est tiré d'un manuel scolaire destiné à des élèves de 2e année du secondaire (13-14 ans). De façon générale, dans la partie 1[5], l'élève devait résoudre de façon individuelle le problème sur une feuille bleue. Dans la deuxième partie, sur une feuille beige, la résolution d'un élève-fictif nommé Renaud était remise à l'élève à des fins d'analyse. Finalement, dans une troisième partie, les élèves étaient placés en dyade afin de mettre en commun leurs productions, c'est-à-dire les résolutions individuelles et l'analyse de la copie de l'élève-fictif. Suite à leurs échanges, il leur a été demandé de produire une solution commune du problème sur une feuille rose. Précisons ce qui est sollicité en termes de contrôle dans chacune de ces parties.

Partie 1 : Résolution individuelle

Le Déménagement (inspiré de Coupal, 2006)

> *Valérie et Éric déménagent. Lors du grand jour, leurs familles se chargeront de transporter les boîtes. La voiture de tante Marie peut contenir trois fois moins de boîtes que le camion de l'oncle Richard, mais Marie décide de déménager une boîte de plus en l'attachant sur le toit de sa voiture pour que ça aille plus vite.*
>
> *En fin d'après-midi, il reste encore 25 boîtes dans l'appartement, malgré les 8 allers-retours de la voiture et les 7 allers-retours du camion.*
>
> *Combien de boîtes peut contenir le camion de l'oncle Richard, si au total Valérie et Éric avaient 352 boîtes à déménager ?*

Divers contrôles peuvent être mobilisés lors de la résolution algébrique de ce problème. Un contrôle sémantique est requis pour gérer les différentes grandeurs à l'étude : le nombre total de boîtes à déménager, le nombre de boîtes que chaque véhicule peut transporter, le nombre d'allers-retours des véhicules, le nombre de boîtes restantes à la fin de la journée ainsi que les contraintes et implicites présents dans l'énoncé. Chaque véhicule transporte un même nombre de boîtes à chaque aller qui n'est pas le même pour la voiture et pour le camion. Ces nombres sont exprimés par une relation de comparaison « La voiture de tante Marie peut contenir trois fois moins de boîtes que le camion de l'oncle Richard ». On ne connaît aucun de ces deux nombres. En outre, le contrôle sémantique prend forme à travers la gestion des grandeurs non homogènes : 8 allers-retours pour la voiture et 7 allers-retours pour le camion ainsi que la considération de la

[5] Des feuilles de différentes couleurs correspondantes à chacune des parties ont été remises aux élèves pour repérer facilement le travail fait dans chacune de ces parties.

boîte supplémentaire transportée sur le toit de la voiture. Constatons ici un effet de contrat didactique à savoir que l'on infère que les boîtes sont équivalentes en taille, ce qui n'est pas toujours le cas dans la réalité.

Lors de l'identification des inconnues, un choix d'inconnue génératrice s'effectue entre le nombre de boîtes que peut transporter la voiture à chaque aller et le nombre de boîtes que peut transporter le camion à chaque aller. Ce choix amène à exprimer l'autre inconnue en jeu (*cf.* tableau 2) :

Choix de l'inconnue génératrice : x : nombre de boîtes que peut transporter la voiture à chaque aller sans compter la boîte qui est sur le toit. $x+1$: nombre de boîtes que peut transporter la voiture à chaque aller en comptant celle qui est sur le toit. **Expression de la deuxième inconnue :** $3\,x$: nombre de boîtes que peut transporter le camion à chaque aller.	**Choix de l'inconnue génératrice :** x : nombre de boîtes que peut transporter le camion à chaque aller. **Expression de la deuxième inconnue :** $\frac{x}{3}$: nombre de boîtes que peut transporter la voiture à chaque aller sans compter la boîte sur le toit. $\frac{x}{3}+1$: nombre de boîtes que peut transporter la voiture à chaque aller avec la boîte transportée sur le toit à chaque aller.

Tableau 2 *: Possibilités de choix des inconnues génératrices.*

Choisir comme inconnue génératrice le nombre de boîtes que peut transporter la voiture à l'aller requiert de reformuler la relation de comparaison donnée dans l'énoncé comme suit *« le camion de Richard peut contenir trois fois plus de boîtes que la voiture de tante Marie »* ou *« si on multiplie par trois le nombre de boîtes contenues dans la voiture de Marie, on trouve le nombre de boîtes que peut transporter le camion de Richard »*. Ceci traduit une flexibilité dans la reformulation et l'interprétation de la relation de comparaison. Remarquons que le choix du nombre de boîtes que peut transporter le camion à chaque aller aboutit à l'expression et à la manipulation de fractions.

Le contrôle sémantique se manifeste également lors de mise en équation. L'élève doit gérer les grandeurs non homogènes ainsi que les contraintes pour les mettre en relation comme suit :

$$\begin{gathered}\text{nb total de boîtes transportées par la voiture}\\ +\\ \text{nb total de boîtes transportées par le camion}\\ =\\ \text{nb de boîtes à transporter au total, moins celles qui sont restées dans l'appartement}\end{gathered}$$

Les deux grandeurs dans le membre de gauche de l'équation peuvent se calculer comme suit :

$$\begin{gathered}\text{nb total d'allers-retours de la voiture} \times \text{nb de boîtes transportées par la voiture à chaque aller}\\ +\\ \text{nb total d'allers-retours du camion} \times \text{nb de boîtes transportées par le camion à chaque aller}\\ =\\ \text{nb de boîtes à transporter au total, moins celles qui sont restées dans l'appartement}\end{gathered}$$

Le contrôle syntaxique est mobilisé lors de la résolution de l'équation et implique de gérer les manipulations algébriques, de donner du sens à l'égalité ainsi que de conserver l'équivalence des équations obtenues. Finalement, la question demande de trouver le nombre de boîtes que peut contenir le camion de Richard. Ainsi, c'est le nombre de boîtes d'un seul véhicule que l'élève doit fournir comme réponse. Une fois la réponse obtenue, l'élève qui a du contrôle ressentira le besoin de retourner à l'énoncé du problème pour juger de sa vraisemblance. Les autres contrôles, la vérification, l'anticipation de l'ordre de grandeur de la réponse, ainsi que la perception des erreurs peuvent se manifester lors de la résolution.

Partie 2 : Annotations et analyse de la copie fictive d'un élève

Une fois que l'élève a résolu pour lui-même le problème sur une feuille bleue, la production d'un élève-fictif, Renaud, lui est remise à des fins d'analyse sur une feuille beige (*cf.* figure 2).

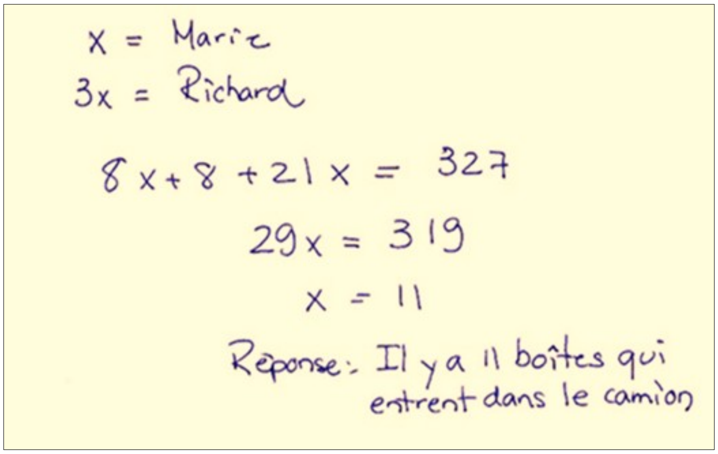


Figure 2 : Résolution d'un élève-fictif nommé Renaud.

Cette résolution fictive a été rédigée afin d'ouvrir à divers éléments sur lesquels les élèves peuvent réagir. Ainsi, Renaud choisit comme inconnue génératrice « x » pour « Marie ». L'inconnue est nommée par le nom de la personne au lieu de préciser que « x » est le *nombre de boîtes* que peut contenir la voiture de Marie, sans compter celle du toit. Il s'agit de repérer l'une des difficultés énoncées par Booth (1984) et par Radford (2003) sur la signification accordée à la symbolisation ici par une lettre. Les élèves peuvent avoir du mal à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets (« A » représente « Amélie » plutôt que, par exemple, « le nombre de livres lus par Amélie »). Devant cet élément, un commentaire possible d'un élève serait de demander plus de précisions pour décrire l'inconnue « x » qui représente « le nombre de boîtes que peut transporter la voiture de Marie pour chaque aller-retour sans compter celle sur le toit ». Renaud fait le même type d'identification pour le nombre de boîtes que peut contenir le camion de Richard. De plus, il écrit le signe d'égalité lors de l'identification des inconnues au lieu des deux points. L'usage du symbole d'égalité renforce ici l'idée de la « lettre-objet ». Toutefois, une mise en garde doit être faite ici. En effet, Radford (2003) précise que la formule elliptique « x est Marie » peut permettre aux élèves de commencer à comprendre le *« très lourd sens que portent les expressions algébriques »* (p. 11). Ces formules elliptiques peuvent constituer un passage de l'histoire originale vers la narrative symbolique et sont ainsi un possible indicateur de la constitution de sens pour les expressions symboliques en construction. Par ailleurs, dans la production de Renaud, la relation multiplicative est bien menée lors de l'identification du nombre de boîtes que peut transporter le camion de Richard à chaque aller.

En ce qui a trait à la mise en équation, celle-ci est correcte, mais plusieurs étapes et opérations sont implicites. En effet, pour trouver le nombre total de boîtes transportées par la voiture de Marie, on multiplie par 8 qui représente le nombre d'allers-retours. Le nombre de boîtes que peut transporter la voiture de Marie est exprimé par l'expression $(x+1)$, x étant le nombre de boîtes contenues dans la voiture, auquel on ajoute la boîte transportée sur le toit. On obtient donc $8(x+1)$. Renaud procède directement à la distributivité et écrit l'expression $8x+8$.

Pour le nombre total de boîtes transportées par le camion, Renaud écrit $21x$, ce qui correspond à $7\times3x$, 7 étant le nombre d'allers-retours faits par le camion et $3x$ le nombre de boîtes transportées par le camion à chaque aller-retour.

Le nombre total de boîtes transportées par les deux véhicules après ces allers-retours (8 pour la voiture et 7 pour le camion) est 327, ce qui correspond au nombre total de boîtes, 352, à transporter moins les 25 boîtes qu'il reste encore à transporter. Renaud écrit directement 327 et ne rend pas apparent le calcul « $352-25$ ». De plus, on ne note aucune trace des manipulations syntaxiques réalisées par Renaud.

Finalement, le résultat trouvé, 11, correspond au nombre de boîtes que peut contenir la voiture de Marie. On voit ici que Renaud ne revient pas au problème et à l'identification des inconnues pour trouver la réponse adéquate, qui est 33, le nombre de boîtes contenues dans le camion. Soulignons une limite à la production de Renaud. En effet, un élève pourrait ne pas s'attarder au raisonnement de Renaud et relever que la réponse de 11 boîtes correspond au nombre de boîtes transportées par la voiture et conclure que le nombre de boîtes dans le camion est 33. Ainsi, il repère l'erreur faite dans la formulation de la réponse de Renaud sans s'être engagé dans la compréhension de son raisonnement.

Dans la deuxième partie du problème, on place l'élève en position « d'enseignant » et ce, implicitement. En effet, la présentation de la résolution de Renaud est suivie du texte suivant :

> *L'enseignant de Renaud est plutôt déçu de sa solution. Il y trouve plusieurs bons éléments, mais considère que Renaud n'a pas assez développé son raisonnement. Il donne à Renaud la note de 4/10[6] pour sa solution. Et toi ? Que penses-tu de la solution de Renaud ?*
>
> *Analyse la solution de Renaud, c'est-à-dire repère les erreurs, les oublis, les précisions qu'il aurait dû faire, les calculs manquants, etc.*
>
> *Explique bien à Renaud chacun des éléments qu'il aurait dû ajouter pour obtenir un 10/10.*

Les élèves analysent individuellement la résolution de Renaud. Ils sont invités à écrire des commentaires sur la copie fictive. On place ici l'élève en position d'expliquer à Renaud ce qui l'a amené à perdre des points.

Partie 3 : Mise en commun d'annotations et analyses individuelles

Enfin, on invite des dyades d'élèves à mettre en commun ce qu'ils ont produit sur une feuille rose. Dans leurs interactions pour commenter la production de Renaud, les coéquipiers doivent interagir pour produire une solution écrite. À cet égard, les élèves entrent dans une phase de formulation pour s'expliquer les éléments qu'ils dégagent du problème et commentent la résolution de Renaud. Puisque la solution de Renaud est centrée sur un discours algébrique, les coéquipiers formuleront probablement des constats à l'égard des connaissances algébriques (mise en équation, opérations algébriques en jeu, etc.) mobilisées par Renaud.

Le tableau 3 résume les valeurs des variables didactiques choisies dans chacune des parties du problème.

[6] Cette note peut paraître sévère étant donné que la résolution algébrique du problème est tout à fait correcte du point de vue mathématique, mais ce choix était pertinent dans l'étude menée par Labrosse (2020) et dont sont tirées les copies des élèves analysées dans ce texte, sous l'angle du contrôle.

Variables	Valeurs des variables
Position attribuée à l'élève et à son interlocuteur	**Partie 1** : Position habituelle d'élève. Par des éléments du contrat didactique, on peut penser que l'interlocuteur premier de l'élève sera son enseignante. Il peut aussi rester dans un discours privé.
	Partie 2 : Position d'enseignant-implicite qui parle à son enseignante et/ou Position d'enseignant-implicite qui parle à l'élève-fictif et/ou Position d'élève qui parle à son enseignante.
	Partie 3 : Position d'enseignants-implicites qui parlent à leur enseignante et/ou Positions d'enseignants-implicites qui parlent à l'élève-fictif et/ou Positions d'élèves qui parlent à leur enseignante.
Modalité de travail	**Partie 1** : Seul.
	Partie 2 : Seul.
	Partie 3 : En dyade.

***Tableau 3** : Variables et leurs différentes valeurs pour les trois parties du problème du* Déménagement*.*

3. Quelques éléments méthodologiques

Le problème du déménagement a été soumis à 44 élèves de 2e secondaire (13-14 ans) d'une école montréalaise. Ces élèves provenaient de deux classes d'une même enseignante qui a participé à l'étude (Labrosse, 2020). Ce problème a été conçu par le chercheur et s'est inséré dans l'enseignement naturel de la classe. Il a été réalisé par les élèves à la fin de l'enseignement du module sur l'algèbre.

Au niveau de la séquence de passation du problème, les étapes suivantes ont été suivies :

1. l'enseignante présente le problème : précise le temps et les modalités de travail ;
2. l es élèves réalisent le problème individuellement (20 *min* pour les parties 1 et 2) et en dyades (10 *min*) en laissant des traces écrites de leurs résolutions ;
3. pendant la réalisation du problème, l'enseignante interagit avec les élèves (répond aux questions, rappelle à l'ordre certains élèves, etc.) ;
4. lors du cours suivant, l'enseignante, après avoir pris connaissance des écrits des élèves, fait un retour avec le groupe-classe sur le problème.

L'analyse a été établie exclusivement sur la base des productions écrites des élèves. Un regard global sur ces productions a permis de constater les effets de l'institutionnalisation d'une méthode de résolution par étapes. Ainsi, pour une partie des productions individuelles des élèves, une méthode institutionnalisée par l'enseignante de résolution des problèmes algébriques en cinq étapes a été repérée :

(1) choix des inconnues ;
(2) mise en équation ;
(3) résolution de l'équation ;
(4) vérification ;
(5) mise en évidence de la réponse (*cf.* figure 3)[7].

[7] Dans le cadre de la recherche, sur les 44 productions complètes individuelles qui ont été analysées, 20 élèves avaient inscrit des numéros pour séquencer leurs étapes dans leur solution.

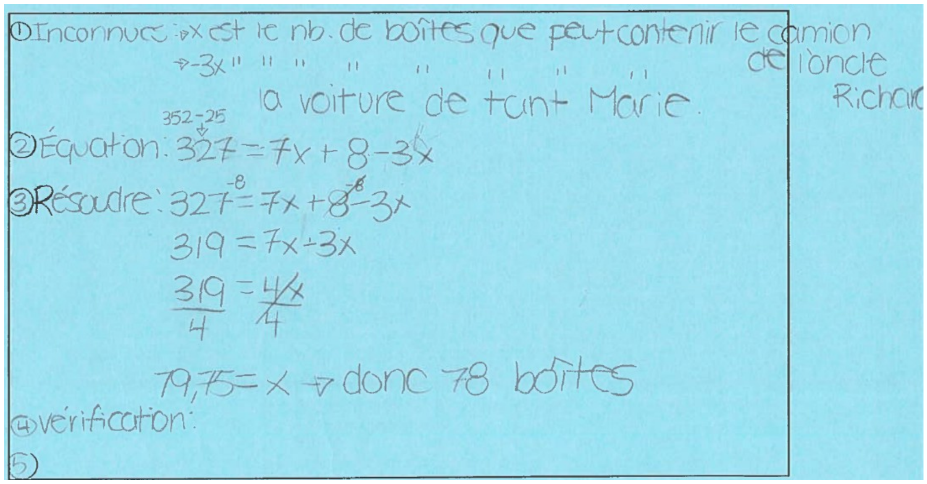

①Inconnue : x est le nb. de boîtes que peut contenir le camion de l'oncle Richard
→ -3x " " " " " " " " la voiture de tant Marie.
②Équation : 352-25 → 327 = 7x + 8 - 3x
③Résoudre : 327 = 7x + 8 - 3x (-8, -8)
319 = 7x - 3x
$\frac{319}{4} = \frac{4x}{4}$
79,75 = x → donc 78 boîtes
④vérification :
5)

***Figure 3** : Résolution individuelle de l'élève n° 2 au problème du* Déménagement.

Cette méthode guide le regard que posent les élèves sur l'analyse de la copie de Renaud. Ceux-ci relèvent de façon récurrente que l'élève devrait « écrire toutes les étapes » (*cf.* figure 4) ou, pour un autre, indique les étapes « oubliées » (*cf.* figure 5).

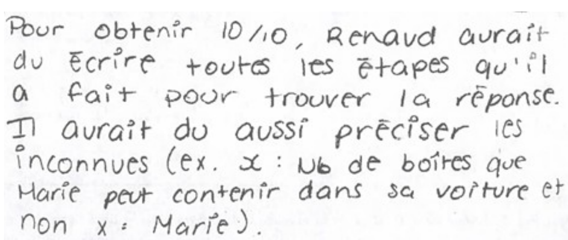

Pour obtenir 10/10, Renaud aurait du écrire toutes les étapes qu'il a fait pour trouver la réponse. Il aurait du aussi préciser les inconnues (ex. x : Nb de boîtes que Marie peut contenir dans sa voiture et non x : Marie).

***Figure 4** : Commentaires de l'élève n° 1.*

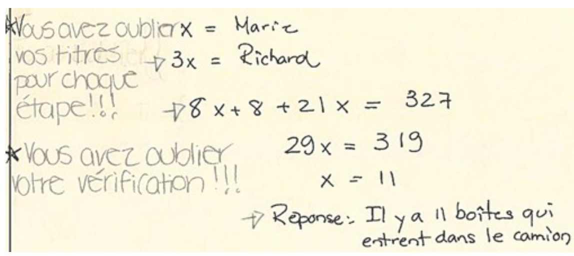

*Vous avez oublier vos titres pour chaque étape!!!
x = Marie
→ 3x = Richard
→ 8x + 8 + 21x = 327
*Vous avez oublier votre vérification!!!
29x = 319
x = 11
→ Réponse : Il y a 11 boîtes qui entrent dans le camion

***Figure 5** : Commentaire de l'élève n° 2, élève qui adopte la posture d'un enseignant.*

Nous avons remarqué que même si la consigne initiale était de s'adresser à Renaud, plusieurs élèves formulent des commentaires pour leur enseignante[8]. Outre ces effets du contrat didactique repérés dans les productions des élèves, l'analyse menée sous l'angle du contrôle a permis de relever des manifestations d'un contrôle sémantique, d'une vérification et d'une validation, mais également des difficultés sémantiques. Le jeu sur les valeurs des trois variables didactiques : position attribuée à l'élève, position attribuée à son interlocuteur et modalité de passation a permis de faire émerger des enjeux pour le développement d'un contrôle. Soulignons que, pour la suite de nos propos, nous ne nous intéressons pas à la réussite de la résolution du problème du *Déménagement* par les élèves, mais bien aux indices d'une manifestation de contrôle ou de difficultés de contrôle repérées dans certaines productions d'élèves.

4. Des enjeux pour le développement d'un contrôle

Les trois enjeux qui se dégagent pour notre analyse sont : l'interprétation des relations de comparaison (contrôle sémantique), le choix de l'inconnue génératrice (contrôle sémantique) et

[8] Sur 25 élèves qui ont écrit des commentaires, seulement 3 élèves s'adressent directement à Renaud en utilisant la 2e personne du singulier (« tu aurais dû… »). Tous les autres sujets formulent des commentaires pour l'enseignante (du type « il aurait dû… »).

le statut de la vérification.

4.1. Interprétation des relations de comparaison

Ce premier enjeu est bien documenté (Booth, 1984 ; Günther, 1990 ; Oliveira *et al.*, 2017 ; Radford, 2003) et tourne autour de l'interprétation des relations de comparaison. Dans le problème du *Déménagement*, les élèves sont amenés, comme nous l'avons précisé, à décoder la phrase « La voiture de tante Marie peut contenir trois fois moins de boîtes que le camion de l'oncle Richard » sollicitant l'interprétation de la relation de comparaison « fois moins ». Plusieurs élèves traduisent « 3 fois moins » par « $-3x$ » (16 élèves sur 44 productions individuelles ont fait cette interprétation), faisant un amalgame entre les mots « moins » et « trois fois ». Ils allient l'usage de l'opération arithmétique (le « moins ») et de l'algèbre (« $3x$ »). Dans la résolution individuelle présentée à la figure 6, l'élève n° 3 identifie par x le nombre de boîtes que contient le camion et, pour la voiture de Marie qui peut contenir trois fois moins de boîtes, il écrit « $-3x$ » et ajoute 1 pour considérer la boîte qui est sur le toit de la voiture. C'est le cas également pour l'élève n° 2 (*cf.* figure 3).

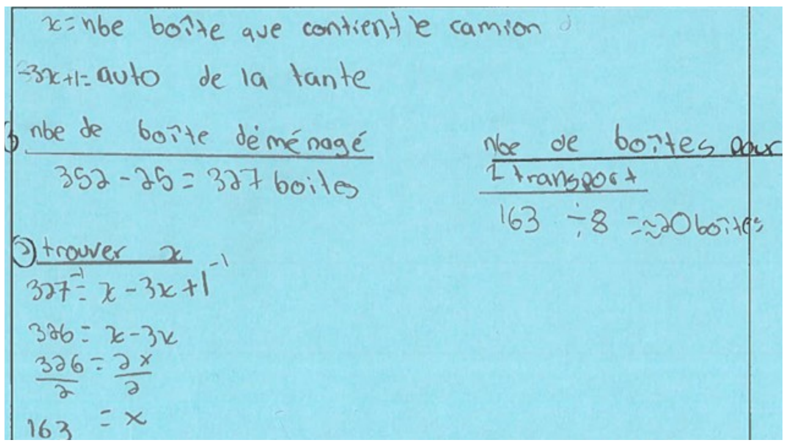


Figure 6 *: Exemple de l'élève n° 3, qui montre des difficultés pour traduire la relation de comparaison.*

Dans la deuxième partie du problème, on propose au même élève (*cf.* figure 6) d'analyser la production de Renaud. On peut remarquer (*cf.* figure 7) que cette analyse n'amène pas l'élève n° 3 à mettre en doute la traduction de la relation de comparaison qu'il a réalisée. Il est convaincu que la traduction de « 3 fois moins » est « $-3x$ », qu'il indique sur la copie fictive. De plus, il indique par une double flèche que Renaud s'est trompé dans le choix de l'inconnue génératrice. En effet, Renaud a choisi le nombre de boîtes que peut contenir la voiture de Marie comme inconnue génératrice alors que l'élève penche plutôt dans sa résolution individuelle pour le nombre de boîtes que peut transporter le camion de Richard (*cf.* figure 6). L'élève n'arrive donc pas à se détacher de sa propre résolution pour se projeter dans ce que Renaud fait. Nous assistons ici à une limite de la production fictive de Renaud qui n'amène pas cet élève à remettre en question sa narrative symbolique et à exercer ainsi un contrôle sémantique. Une intervention extérieure s'avère ici nécessaire.

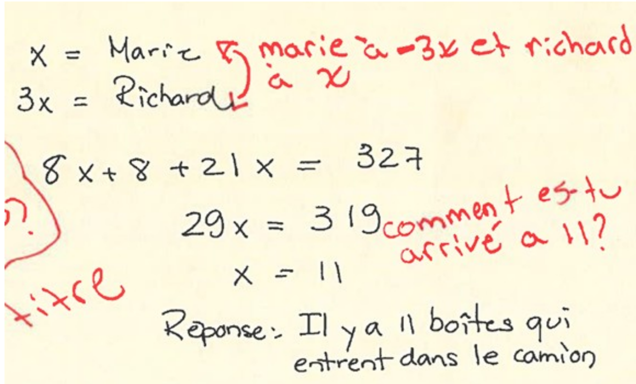


***Figure** 7 : Commentaires de l’élève n° 3.*

4.2. Choix d’une inconnue génératrice

Ainsi, tel que nous venons de le mentionner, des élèves ont de la difficulté à se dégager de leur résolution pour comprendre celle de Renaud. Certains vont corriger le choix de l’inconnue génératrice qui ne correspond pas à celui qu’ils ont fait (*cf.* figure 7). D’autres élèves vont annoncer qu’ils ne comprennent pas la démarche de Renaud. Individuellement, l’analyse autour du choix de l’inconnue génératrice montre que 9 élèves ont choisi le nombre de boîtes dans la voiture de Marie comparativement à 30 qui ont opté pour le nombre de boîtes dans le camion[9].

Le choix majoritaire de l’inconnue génératrice comme le nombre de boîtes que peut contenir le camion peut être dû à la question qui guide vers ce choix ou à la difficulté de nommer l’autre inconnue étant donné la boîte sur le toit que peut transporter la voiture de Marie. À ce stade-ci, toutes les hypothèses sont possibles.

À titre d’exemple, dans la copie présentée à la figure 8, lors de la résolution individuelle, l’élève n° 4 ne fait pas le même choix que Renaud pour l’inconnue génératrice.

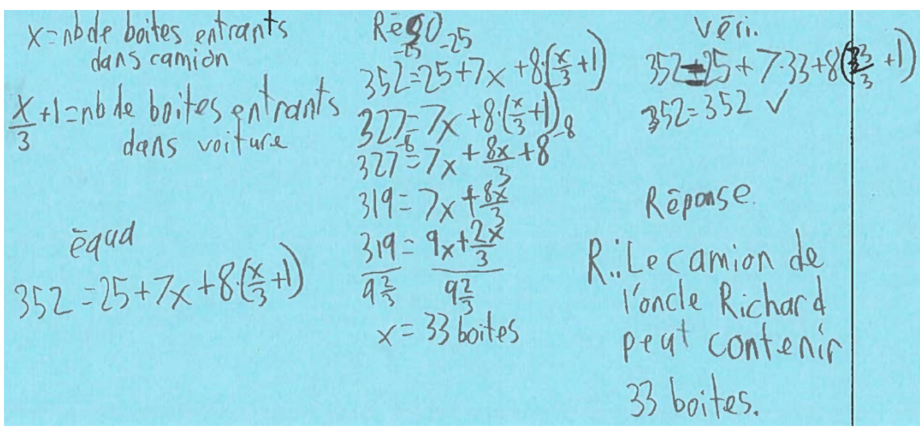


***Figure 8** : Exemple de la résolution de l’élève n° 4 qui possède un contrôle à la fois sémantique et syntaxique.*

Son choix porte sur le « nombre de boîtes que peut contenir le camion de Richard ». Si x représente ce nombre, alors le nombre de boîtes que peut contenir la voiture de Marie est trois

[9] Pour cinq élèves, l’identification de l’inconnue génératrice n’était pas possible à déterminer.

fois moins grand donc $\frac{x}{3}$ et il faut ajouter la boîte qui est sur le toit. L'élève n° 4 exerce ainsi un contrôle sémantique lors de l'identification des inconnues, mais également lors de la mise en équation, et aussi un contrôle syntaxique au moment de la résolution. De plus, il vérifie la réponse qu'il a obtenue, ce qui lui assure qu'il n'a pas fait d'erreurs syntaxiques et reconnaît que la valeur trouvée correspond au nombre de boîtes que peut contenir le camion de Richard. Lors de la résolution de ce problème, l'élève fait preuve d'un contrôle à la fois sémantique et syntaxique, ce dernier passant par une gestion efficace des opérations avec des fractions, des nombres fractionnaires et des parenthèses. En effet, il divise correctement par 9 et $\frac{2}{3}$ les deux membres de l'égalité, ce qui n'est pas si simple pour un élève de son niveau scolaire.

Toutefois, lors de l'analyse de la production de Renaud, l'élève n° 4 fait preuve de peu de flexibilité pour comprendre le choix de l'inconnue génératrice de l'élève-fictif. Il rature dans la production de Renaud l'identification des inconnues sur lesquelles il s'appuie (*cf.* figure 9) pour que celles-ci correspondent au choix qu'il a fait lors de sa résolution individuelle (*cf.* figure 8). La mise en équation proposée par Renaud est alors modifiée, ainsi que la résolution de cette équation. L'élève change aussi la réponse obtenue par Renaud, donnant ainsi la bonne réponse. On peut remarquer que la production de Renaud n'apporte aucune plus-value à la résolution de cet élève.

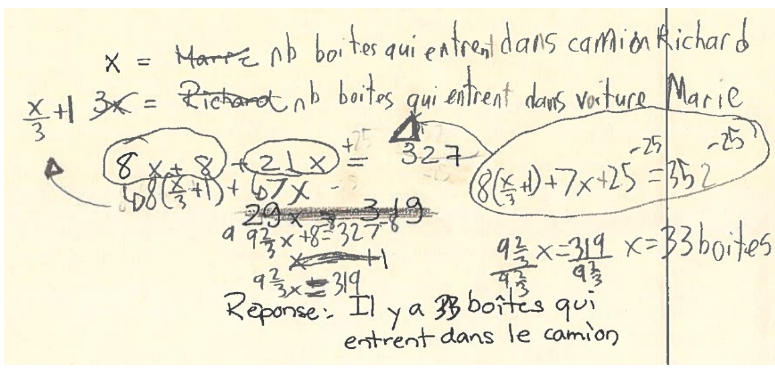


Figure 9 *: Commentaires de l'élève n° 4 comme enseignant implicite.*

Suite à ces ajouts sur la copie de Renaud, l'élève n° 4 explicite que « x », l'inconnue génératrice, doit être celle des deux inconnues pour laquelle on a le moins d'informations (*cf.* figure 10).

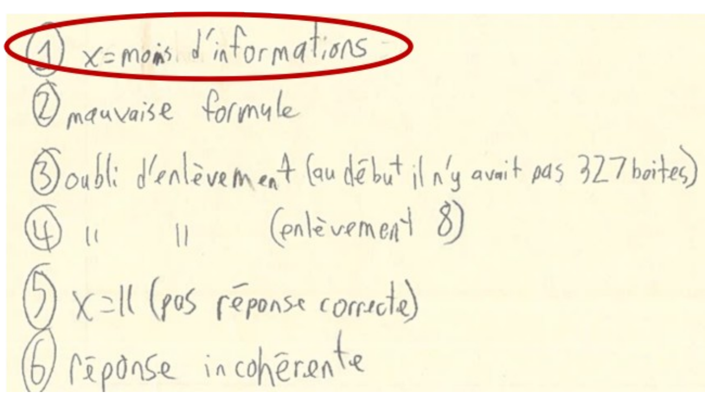


Figure 10 *: Éléments relevés par l'élève n° 4 sur la copie de Renaud.*

Cette inconnue est, d'après l'élève n° 4, le « nombre de boîtes qui entrent dans le camion de Richard ». Nous pouvons penser que ce choix fait par l'élève provient de l'information supplémentaire pour le « nombre de boîtes dans la voiture », à savoir une boîte sur le toit. Soulignons que cet élève semble se donner une règle pour choisir l'inconnue génératrice celle pour laquelle on a le « moins d'informations ». On peut se demander si l'élève ferait le même choix quel que soit le problème.

Contrairement à cet élève, qui ne montre pas de flexibilité quant au choix de l'inconnue génératrice, la figure 11 présente la production d'un élève qui fait preuve d'une telle flexibilité.

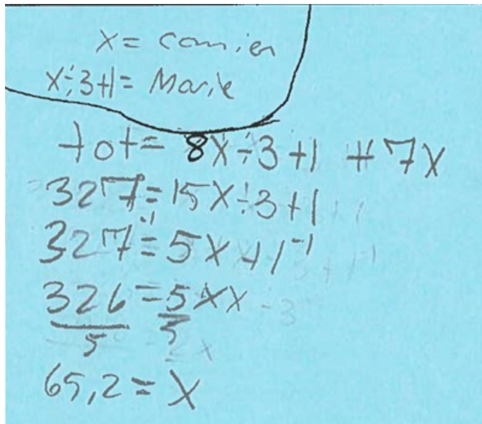


***Figure 11** : Résolution de l'élève n° 5, qui fait le même choix pour l'inconnue génératrice que l'élève n° 4, dont la résolution est présentée à la figure 8.*

Lors de la résolution individuelle, l'élève n° 5 choisit « x » comme le nombre de boîtes que peut contenir le camion à titre d'inconnue génératrice. Il fait le même choix que l'élève n° 4 (*cf.* figure 8). Il s'appuie donc sur une reformulation de la relation de comparaison telle que donnée dans le problème pour trouver le nombre de boîtes que peut contenir la voiture de Marie et indique, lors de l'identification des inconnues, que la voiture peut en plus transporter une boîte de plus sur le toit à chaque aller-retour. Cet élève exerce donc un contrôle sémantique lors de l'identification des inconnues.

Des difficultés sémantiques surgissent toutefois lors de la mise en équation, l'élève ne mettant pas de parenthèses. Il considère les 8 allers-retours pour le nombre de boîtes que peut transporter la voiture, mais néglige les 8îallers-retours pour la boîte qui est sur le toit. On devrait donc lire $8x\div3+8$ ou $8(x\div3+1)$ au lieu de $8x\div3+1$. On peut repérer ici certaines des difficultés mentionnées par Radford (2003) : la narrative symbolique ne semble pas réellement acquise même si la désignation des inconnues a été bien faite. Cela laisse transparaître la fragilité du contrôle sémantique lors des premiers pas des élèves avec l'algèbre formelle.

De plus, des difficultés, cette fois-ci syntaxiques, s'expriment lors de la résolution quand l'élève ajoute $8x$ et $7x$ sans prendre en considération la division par 3 du premier terme, ce qui l'amène à trouver, pour le nombre de boîtes que peut contenir le camion de Richard, un nombre non entier . Nous constatons ainsi à la fois des difficultés sémantiques et syntaxiques, et ce alors que l'identification des inconnues est bien menée. Peut-être que le fait d'utiliser le symbole de division « ÷ » au lieu du trait de fraction est à la source de ces difficultés ? Ceci reste une présomption.

Par ailleurs, lors de l'analyse de la résolution de Renaud, l'élève arrive à se décentrer de sa résolution et à adopter le point de vue de Renaud. Ceci l'amène à considérer la même inconnue génératrice que Renaud : celle-ci étant différente de celle qu'il avait posée au départ (*cf.* figure 12).

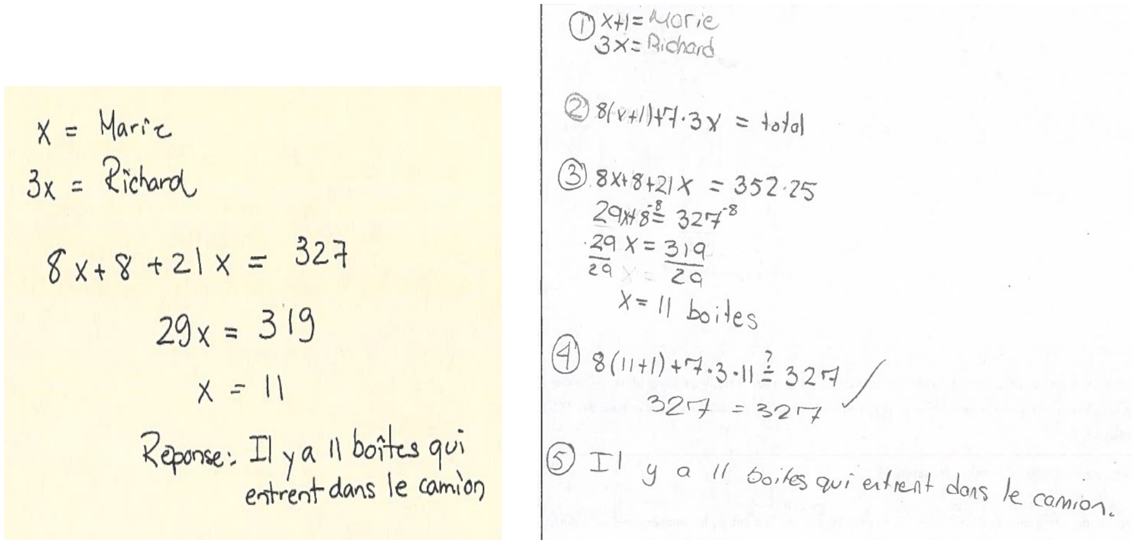


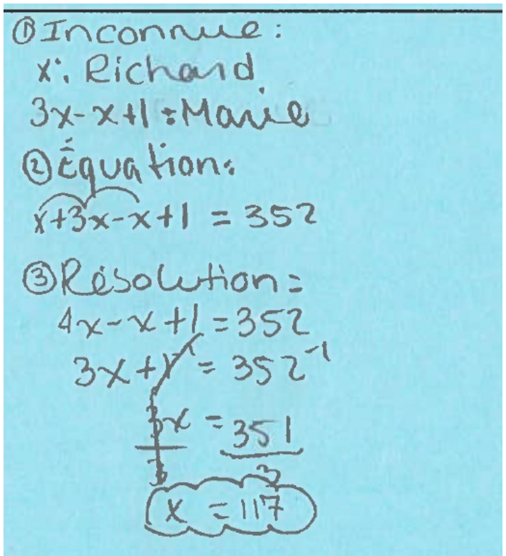
Figure 12 *: Correction de l'élève n° 5 agissant comme enseignant implicite.*

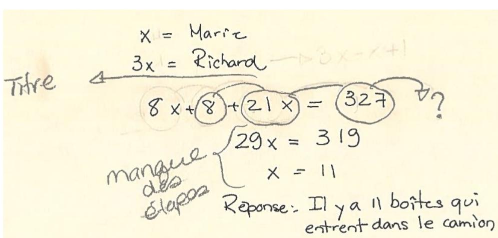
On peut constater que l'élève n° 5 procède à une bonne identification des inconnues. Il ajoute pour le nombre de boîtes que transporte la voiture de Marie la boîte sur le toit qui est implicite dans la production de Renaud. Il arrive par la suite à une mise en équation correcte. Il met les parenthèses pour considérer les 8 allers-retours de la voiture à la fois pour le nombre de boîtes dans la voiture et celle sur le toit : $8(x+1)$. De plus, il fait preuve d'un contrôle syntaxique au moment de la résolution de l'équation en faisant les manipulations algébriques nécessaires pour conserver l'équivalence obtenant 11 comme résultat qu'il vérifie ensuite en injectant cette valeur dans l'équation de départ. Toutefois, il fait la même erreur que Renaud en identifiant la réponse comme le nombre de boîtes dans le camion et non le nombre de boîtes que transporte la voiture, sans compter celle qui est sur le toit. On observe ici que l'élève ne retourne pas à l'énoncé du problème.

Attribuer la position d'enseignant implicite a permis de constater que cet élève possède une flexibilité lors du choix de l'inconnue génératrice puisque celui-ci change de choix d'inconnue génératrice passant de x comme étant le nombre de boîtes dans le camion de Richard à x comme le nombre de boîtes dans la voiture de Marie. De plus, la production de la figure 12 est la deuxième production individuelle (avant la partie de résolution en dyade) présentée par l'élève n° 5 et celle-ci semble avoir été motivée par la production fictive de Renaud. On constate que, dans cette deuxième production, la résolution de Renaud lui a permis de déceler la présence d'une parenthèse, implicite dans la résolution de Renaud (en appliquant directement la distributivité simple dans la mise en équation) que l'élève n° 5 rend explicite à l'étape 2 de sa production. Cet élève rend ainsi apparents les « pas de raisonnement » implicites de Renaud.

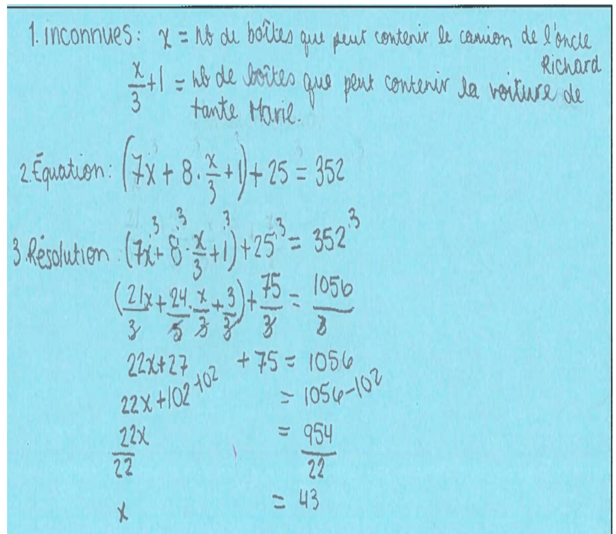
Pour terminer cette section, nous présentons le travail mené par une dyade d'élèves (n° 6 et 7) (*cf.* figure 13).

élève n° 6





élève n° 7



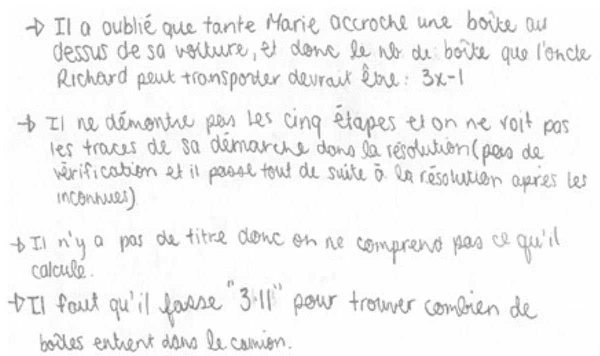


Figure 13 *: Résolutions individuelles des élèves n° 6 et 7 et leurs commentaires comme enseignants implicites.*

Remarquons que, lors de la résolution individuelle, ces deux élèves choisissent la même inconnue génératrice, le *nombre de boîtes que peut transporter le camion*. Toutefois, l'élève n° 6 a des difficultés à bien identifier le nombre de boîtes transportées par la voiture de Marie (difficultés à interpréter la relation de comparaison), ce qui n'est pas le cas de l'élève n° 7. De plus, l'élève n° 6 a des difficultés lors de la mise en équation : il ne considère ni le nombre d'allers-retours des deux véhicules ni les 25 boîtes qu'il reste à déménager à la fin de la journée. Il arrive à un résultat de 117 boîtes contenues dans le camion de Richard.

De son côté, l'élève n° 7 n'utilise pas de parenthèses lorsqu'il considère les 8 allers-retours pour le nombre de boîtes transportées par la voiture. Il ne considère que les 8 allers-retours des boîtes contenues dans la voiture et ajoute 1 pour la boîte qui est sur le toit au lieu des 8 boîtes obtenues après les allers-retours. Nous retrouvons ici la même difficulté que pour l'élève n° 5 (*cf.* figure 11).

Quand l'élève n° 6 adopte la position d'enseignant implicite (*cf.* figure 13), on observe qu'il exprime essentiellement des commentaires sur la forme : ajouter le titre, ajouter des étapes et, par des flèches, il indique des manipulations algébriques qui auraient dû être précisées par Renaud.

Quant à l'élève n° 7, on retrouve les mêmes commentaires sur la forme que son co-équipier. Il précise en plus l'absence du modèle en 5 étapes et que Renaud aurait pu ajouter la boîte qui est sur le toit de la voiture lors de l'identification des inconnues. En outre, il repère que la réponse de Renaud ne correspond pas au nombre de boîtes que transporte le camion, exprimant ainsi un contrôle sémantique et un retour au problème. Ces suggestions montrent que cet élève est capable de se décentrer de sa propre résolution et d'adopter (au moins partiellement) le point de vue de Renaud, qui a fait un choix d'inconnue génératrice différent du sien.

Lors de leur travail en dyade (*cf.* figure 14), on constate que l'analyse menée par l'élève n° 7 sur la copie de Renaud est réinvestie. Le choix de Renaud pour l'inconnue génératrice est repris en faisant ressortir, à la différence de l'élève-fictif, la boîte qui est sur le toit. Toutefois, la dyade aurait dû écrire, pour le nombre de boîtes, que le camion de Richard peut en transporter $3(x-1)$ et non $3x-1$. Ceci souligne la fragilité de la narrative symbolique au sens de Radford (2003) qui fait en sorte que les deux élèves n'arrivent pas à une mise en équation qui traduit adéquatement le problème. Ainsi, quelques des difficultés sémantiques se font sentir.

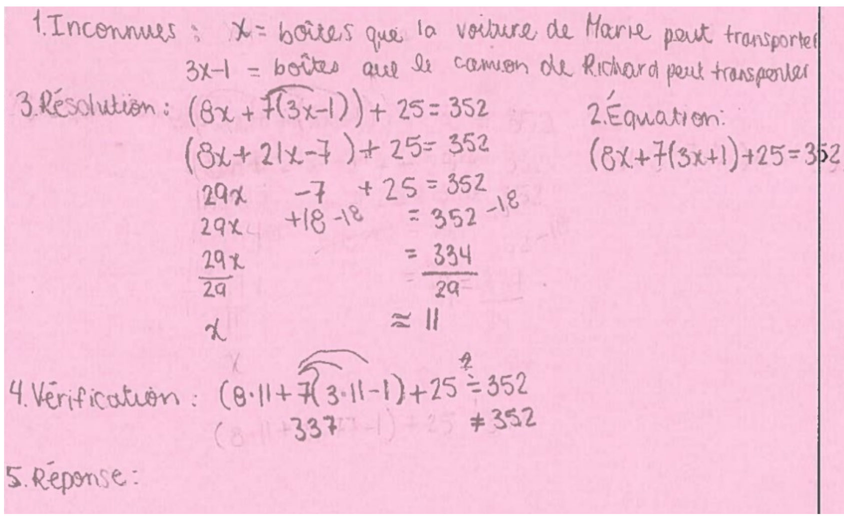


Figure 14 *: Résolution dyadique du problème des élèves n° 6 et 7.*

Toutefois, l'analyse de la production fictive de Renaud semble avoir fait cheminer la dyade ou tout au moins l'élève n° 7. Cette production illustre une flexibilité dans le choix de l'inconnue génératrice et un contrôle sur la résolution du problème qui présente toutefois certaines failles.

4.3. Statut de la vérification

Nous pouvons constater que dans la majorité des productions présentées précédemment, les élèves écrivent les nombres de 1 à 5 qui correspondent aux cinq étapes de la méthode de la résolution de problèmes algébriques institutionnalisée par l'enseignante. La vérification correspond, dans ce modèle, à la quatrième étape. Il est demandé à l'élève de remplacer la valeur trouvée après la résolution de l'équation dans l'équation pour s'assurer que la réponse est adéquate. Soulignons que cette vérification permet de s'assurer qu'il n'y a pas eu d'erreurs syntaxiques lors de la résolution de l'équation, mais qu'elle ne nous renseigne pas sur la validité de la mise en équation. Pour valider la réponse obtenue, il ne s'agit pas seulement de procéder à une vérification de la réponse, mais un retour au problème est également nécessaire pour s'assurer de la vraisemblance de la réponse dans le problème. Ce regard posé sur la réponse peut se faire en amont de la résolution, quand c'est possible, en anticipant l'ordre de grandeur du résultat.

La figure 15 présente le cas de l'élève n° 8 qui semble dépasser le stade de la vérification et qui entre dans une forme de validation.

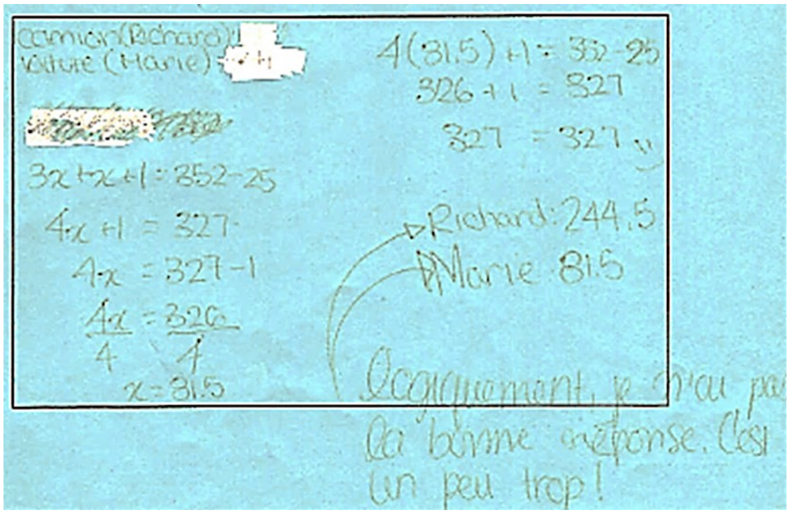


Figure 15 *: Exemple de l'élève n° 8 qui procède à une vérification et à une validation du résultat obtenu.*

L'élève n° 8 procède à la vérification du résultat 81,5 qu'il a obtenu. Il arrive ainsi à 327=327 et semble indiquer, par un bonhomme sourire, qu'il n'a pas fait d'erreurs syntaxiques. Toutefois, il s'interroge sur la vraisemblance de son résultat puisqu'il écrit : « Logiquement, je n'ai pas la bonne réponse. C'est un peu trop ! ». Il interroge ainsi l'ordre de grandeur de la réponse trouvée, amorçant probablement une identification de ses erreurs (« c'est un peu trop ! »), sans toutefois arriver à surpasser la contradiction. Fait intéressant à noter, lors de l'analyse de la copie de Renaud, l'élève n° 8 écrit « logiquement un camion ne peut contenir 11 boîtes seulement, ça devrait être plus ». Il se réfère à la vie réelle, à la connaissance qu'il a des camions et met en avant la question de la vraisemblance des problèmes présentés aux élèves en mathématiques. Cet élève a certainement une idée d'un nombre « raisonnable » de boîtes qu'un camion ou une voiture peut transporter.

Discussion et conclusion

L'analyse des productions des élèves dans le problème du *Déménagement* amène des constats sous l'angle du contrôle exercé quand on attribue la position d'enseignant implicite à l'élève qui s'adresse à un élève-fictif. Toutefois, soulignons que l'exploration proposée ici devrait être raffinée auprès d'un plus grand échantillon de sujets. De plus, l'ajout d'entretiens d'explicitation avec les élèves ainsi que l'enregistrement des discussions lors du travail en dyades auraient permis d'accéder aux raisonnements en jeu et ainsi raffiner l'analyse des traces écrites. Aussi modeste soit-elle, cette analyse ouvre des pistes sous l'angle d'une activité de contrôle pour l'enseignement de problèmes algébriques.

La proposition d'analyser la copie de Renaud a permis de détecter chez certains élèves une flexibilité dans le choix de l'inconnue génératrice et une rigidité chez d'autres. Explorer différents choix pour l'inconnue génératrice et analyser les conséquences de ce choix (présence de fractions, de parenthèses, etc.) semble une avenue prometteuse pour développer un contrôle sémantique chez les élèves. Cette prise de conscience que des grandeurs d'inconnues différentes peuvent être choisies comme inconnue génératrice ouvre un univers de possibles. Ainsi, dans le problème du *Déménagement*, nous avons relevé trois choix d'inconnue génératrice qui peuvent être exploités par l'enseignant lors d'une discussion avec les élèves. Chacun de ces choix amène à une mise en équation différente.

Choix 1	Choix 2	Choix 3
x : nombre de boîtes que peut transporter la voiture de Marie à chaque voyage sans compter la boîte du toit. $x+1$: nombre de boîtes que peut transporter la voiture de Marie à chaque voyage avec la boîte sur le toit. $3x$: nombre de boîtes que peut transporter le camion de Richard à chaque voyage.	x : nombre de boîtes que peut transporter le camion de Richard à chaque voyage. $\frac{x}{3}+1$: nombre de boîtes que peut transporter la voiture de Marie à chaque voyage en comptant la boîte sur le toit.	x : nombre de boîtes que peut transporter la voiture de Marie en comptant la boîte sur le toit. $3(x-1)$: nombre de boîtes que peut transporter le camion de Richard.
$8x+7(x+1)+25=352$	$7x+8(\frac{x}{3}+1)+25=352$	$8x+7(3(x-1))+25=352$

Ce contrôle s'arrime aux autres contrôles pour mener la résolution algébrique à bon port.

L'analyse des productions des élèves fait également ressortir un enjeu pour l'interprétation de la relation de comparaison « trois fois moins que » qui n'a pas été questionnée par certains élèves par la proposition de la production fictive. On fait le même constat que certains chercheurs dont Radford (2003) : l'interprétation de l'histoire originale ne va pas de soi et une intervention extérieure s'avère nécessaire. L'enseignant peut axer son retour avec les élèves sur une reformulation de la relation de comparaison ou sur le recours au numérique.

Par ailleurs, la vérification est vue par certains élèves comme une étape à réaliser au même titre que les autres. Ils ne semblent pas percevoir l'utilité d'exercer un tel contrôle. Un changement de posture n'est possible que lorsque l'élève sera confronté aux bienfaits de la vérification et qu'il ressentira le besoin de vérifier. De plus, nous avons mis de l'avant que la vérification ne permet pas de localiser l'erreur, mais contribue à dépasser un doute possible sur la résolution de l'équation initialement posée. Une action est nécessaire pour repérer l'erreur telle que la reprise des manipulations algébriques déployées et/ou la résolution de l'équation en adoptant une autre démarche ou reprendre le problème avec la donnée des 11 boîtes trouvées (si la voiture de Marie peut transporter 11 boîtes plus une sur le toit, elle transportera, en 8 allers-retours, 12×8 boîtes, etc.). Soulignons que la vérification par substitution de la solution trouvée dans l'équation de départ n'est pas garante du fait que la mise en équation est juste, rejoignant ainsi les propos de Chalancon *et al.* (2002). C'est une tentative de validation qui se manifeste lorsque certains élèves remettent en question la réponse obtenue, même si celle-ci vérifie l'égalité de l'équation de départ. La vraisemblance de la réponse est ainsi remise en doute, elle s'appuie sur une estimation de l'ordre de grandeur du nombre de boîtes que peut transporter un camion dans la vie réelle. C'est une vérification coordonnée à une validation que l'on souhaite voir émerger chez les élèves.

L'enseignant peut, lors du retour avec les élèves, s'appuyer sur ce que ces derniers ont produit dans une volonté de laisser une place plus importante à la *« mise en œuvre d'une activité mathématique où différentes observations sont mises en commun, où des questionnements font* *surface, des stratégies émergent et des explications se formulent qui impliquent l'enseignant et l'élève [...] »* (Maheux & Proulx, 2017, p. 186). À ce propos, l'enseignante qui a participé à l'étude de Labrosse (2020) reconnaît la potentialité de remettre aux élèves une copie-type fictive puisque celle-ci permet, notamment, d'ouvrir un débat dans la classe, d'accéder aux raisonnements, aux conceptions inadéquates de ses élèves, et de faire voir que différentes résolutions sont possibles.

Références bibliographiques

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M., Tremblay, M. & Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans L. Theis (éds.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (pp. 1-16). Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Springer.

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. & Lepage, A. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. *Actes du colloque sur l'émergence de l'algèbre* (pp. 17-31). CIRADE, Université du Québec à Montréal.

Ben Nejma, S. (2020). L'impact de la langue de formulation d'un énoncé sur les démarches mises en œuvre par des élèves dans une activité de modélisation algébrique. *Petit x, 112*, 55-77.

Bloch, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x, 81*, 25-53.

Bolduc, A. (2020). *Analyse d'interventions menées par une orthopédagogue du secondaire qui contribuent à l'expression d'un contrôle en mathématiques chez des élèves en difficulté d'apprentissag*e. [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].

Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. NFER-NELSON.

Chalancon, F., Coppé, S. & Pascal, N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x, 59*, 23-41.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - deuxième partie : perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-72.

Coppé, S. (1997). Étude des processus de vérification mis en œuvre par les élèves de Première S. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 411*, 471-484.

Cortés, A. & Kavafian, N. (1999). Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit x, 51*, 47-73.

Coulange, L. (1997). Les problèmes « concrets » à « mettre en équations » dans l'enseignement. *Petit x, 47*, 33-58.

Coupal, M. (2006). *À vos maths, vol. C*. Éditions Graphicor.

Demonty, I., Fagnant, A. & Vlassis, J. (2015). Différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre ? Dans L. Theis (éds.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (pp. 1-17). Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Fiola, A. (2005). *Étude de l'impact d'une approche didactique invitant des élèves en difficulté d'apprentissage à jouer le rôle d'enseignant lors d'activités de mise en équation algébrique*. [Mémoire de maîtrise, Université de Montréal].

Günter, M. (1990). Semantic problems in elementary algebra. *Proceedings of the bisme-2: 2nd Bratislava International Symposium on Mathematics Education* (pp. 37-57). International Symposium on Mathematics Education 2. Bratislava.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At The Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. Dans J. Lester F. K. (éds.), *Second Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Information Age.

Kouki, R. (2006). Equations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x, 71*, 7-28.

Labrosse, P. (2020). Conception et mise à l'essai d'une séquence de situations engageant un travail de communication en algèbre en 2e secondaire : des apports pour l'élève comme pour l'enseignant ? [Thèse de doctorat, Université de Montréal].

Maheux, J.-F. & Proulx, J. (2017). Éthique et activité mathématique. *Éducation et francophonie, 45*(1), 174-194

Marchand, P. & Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ, 40*(4), 15-25.

Morand, B. (2020). *Étude des structurations du contrôle déployées lors de la résolution en équipe de problèmes algébriques*. [Mémoire en mathématiques, spécialité didactique des mathématiques, Université du Québec à Montréal].

Nullans, L. (1988-1989). *La mise en équation : une activité non maîtrisée par les élèves de seconde. Quelles solutions apporter ?* [Mémoire IUFM, Sarreguemines].

Oliveira, I., Rhéaume, S. & Geerts, F. (2017). Apprentissage de l'algèbre : procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 156-180.

Oliveira, I. & Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils ? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 14*(4), 404-423.

Proulx, J. (2020). Donner un sens à la résolution d'équations : réflexions didactiques inspirées de stratégies de calcul mental. *Petit x, 113*, 31-40.

Radford, L. & Grenier, M. (1996). Les apprentissages mathématiques en situation. *Revue des Sciences de l'éducation, 22*(2), 253-276.

Radford, L. (2003). Narratives, expressions algébriques et calcul formel : de la constitution à la transformation du sens. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 8*, 191-208.

René de Cotret, S. (2014). Espaces de travail/espaces de connaissances : Peut-on imaginer une navette pour y voyager ? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4-2), 401-416.

Rhéaume, S. (2020). *Les prises de décision des élèves du 3e cycle du primaire lors de la résolution de problèmes de proportion : une analyse du contrôle mobilisé*. [Doctorat en éducation, Université Laval, Québec].

Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal].

Saboya, M., Besançon, V., Martin, F., Adihou, A., Squalli, H. & Tremblay, M. (2013). Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre : analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, 112-122.

Saboya, M., Bednarz, N. & Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre : conceptualisation et analyses en résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 20*, 61-100.

Saboya, M. & Tremblay, M. (2017). Co-élaboration d'interventions entre enseignantes et chercheures visant le développement d'un choix éclairé de matériel auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage au primaire dans la résolution de problèmes additifs. Dans A. Braconne-Michoux, P. Gibel & I. Oliveira (dir.), *Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants*. Livres en ligne du CRIRES.
https://crires.ulaval.ca/publication/61a6d84e036ba74f16368cf5

Schmidt, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 277-294.

Sirejacob, S. (2016). Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner : les équations au collège. *Petit x, 102*, 27-55.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62.

Vlassis, J. & Demonty, I. (2000). La résolution des équations du premier degré à une inconnue. *Cahiers du Service de Pédagogie Expérimentale de Université de Liège, 3*(4), 35-51.

Vlassis, J. (2002) The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 341-359