L’ESTIMATION ET L’APPROXIMATION DANS L’ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES : QUESTIONS ET CLARIFICATIONS CONCEPTUELLES

Nadine BEDNARZ[1]
Groupe de Recherche sur la Formation à l’Enseignement des Mathématiques,
Université du Québec à Montréal

Jérôme PROULX[2]
Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique,
Université du Québec à Montréal

Résumé. Nos questionnements sur l’estimation et l’approximation émergent d’une rencontre avec des élèves d’une classe de 5e année primaire (10-11 ans) au sujet d’un calcul de somme. La tâche portant, *a priori*, sur l’estimation du résultat débouche, dans les faits, sur toute autre chose, laissant entrevoir différentes méthodes pour le moins surprenantes utilisées par les élèves. Celles-ci nous conduisent à interroger la différence entre estimation et approximation, et les raisons qui guident l’engagement vers estimer ou approximer dans l’enseignement des mathématiques. Une analyse plus fine de travaux dans lesquels l’estimation et l’approximation sont abordées nous amène à élaborer progressivement une conceptualisation permettant de percevoir plus clairement cette distinction.

Mots-clés. Estimation, approximation, enseignement, mathématiques.

Abstract. Our questioning on estimation and approximation comes from a classroom discussion with Grade-5 students (10-11 years old) about the sum of two numbers. Even if the task is *a priori* on estimating the sum, students have used different, and surprising, procedures. Their ways of operating raises questions the difference between estimation and approximation, and the rationale guiding one’s engagement toward estimation or approximation when solving. A close analysis of studies referring to estimation and approximation leads to the development of a conceptualization that allows deeper understanding of distinctions existing between them.

Keywords. Estimation, approximation, teaching, mathematics.

Introduction

Cet article s’intéresse à la thématique de l’estimation et de l’approximation dans l’enseignement des mathématiques. Il propose une réflexion en profondeur sur ce à quoi renvoie estimer et approximer, interrogeant les raisons d’être de telles activités, ce qui leur donne sens en mathématiques et leurs différences sur un plan didactique. Ces clarifications conceptuelles nous sont apparues progressivement importantes à approfondir dans la mesure où, d’une part, une certaine confusion liant ces deux termes apparaît dans l’enseignement des mathématiques et où, d’autre part, la pertinence qu’il peut y avoir à recourir à l’une ou l’autre lors de la réalisation de diverses tâches est peu visible dans leur usage. Pourquoi estimer ? Pourquoi approximer ? Quelle pertinence y a-t-il à avoir recours à l’estimation ou à l’approximation ? Afin de bien comprendre le problème didactique dont part cette réflexion, nous revenons tout d’abord sur un épisode observé en classe qui permet de contextualiser la problématique soulevée. Nous développons davantage par la suite cette problématisation, en prenant appui sur une analyse de différents documents institutionnels.

[1] descamps-bednarz.nadine@uqam.ca

[2] proulx.jerome@uqam.ca

1. Questionnement de départ

Le questionnement qui nous a conduit à aborder cette thématique est issu d'une séance en classe, tirée d'un projet de recherche mené avec des élèves de 5e année (10-11 ans). Lors de cette séance, les élèves avaient comme tâche initiale « Estime la somme $152\,498 + 608\,947$ », sans avoir recours au support papier-crayon. L'intention de cette tâche en début de séance (et de projet) était majoritairement de « voir » ce que les élèves en feraient et le sens qu'ils lui donneraient (une sorte de déclencheur pour investiguer les compréhensions des élèves).

Dans le but de contextualiser notre questionnement de départ pour cet article, nous en reprenons un extrait durant lequel le chercheur interagit avec les élèves.

> D'entrée de jeu, un premier élève, Franck, propose 800 000 comme réponse, expliquant que 152 [dans 152 498] est plus proche de 200 que de 100. Il fait la même chose avec 608 947, en pointant le 8 [dans 608], ramenant 608 947 à 600 000.
>
> Franck : *C'est parce que 2, c'est plus proche de, euh non, 152, c'est plus proche de 200 que de 100.*
>
> Chercheur : *Ah oui ? donc, ça va te donner 200 000.*
>
> Franck : *Ouais, pis l'autre, vu que c'est juste 8 unités de mille, donc j'ai mis 600 000.*
>
> Le chercheur lui demande alors s'il peut clarifier comment il est arrivé à cette réponse. Franck répond qu'il ne sait pas tout à fait comment l'expliquer et qu'il a seulement mis 600 000 en regardant le 8 à la position des milliers. Un autre élève, Philippe, intervient alors et affirme, d'entrée de jeu, qu'il est en désaccord avec la réponse proposée par Franck et qu'il ne comprend pas sa façon de faire avec le 8. Il explique que si lui-même avait eu à arrondir, il aurait commencé avec les centaines.
>
> Philippe : *Si tu arrondis aux centaines [dans 608 947], ça fait 608 900.*
>
> Chercheur : *Pourquoi ça te donne 608 900 ?*
>
> Philippe : *Parce que le 47 [dans 947] est plus bas que 50, donc tu ne mets pas un 10, tu le laisses comme il est là et tu mets des zéros.*
>
> Chercheur : *Donc, 608 947, tu aurais arrondi à 608 900. [Philippe acquiesce] Et celui-là [pointant 152 498], tu l'aurais arrondi, euh estimé, pardon, à quoi ?*
>
> Philippe : *Ça [2 498], c'est comme 2 500.*
>
> Le chercheur lui demande quelle réponse il obtiendrait finalement, puisqu'avec la méthode précédente, Franck arrivait à 800 000.
>
> Philippe : *Proche de 750…*
>
> Le chercheur ajoute en l'écrivant au tableau :
>
> Chercheur : *…mille, évidemment !*
>
> Questionné sur sa façon de savoir que la réponse est proche de 750 000, Philippe répond :
>
> Philippe : *Parce que vu qu'avec le 900 [du 608 900], faut faire un calcul mental, avec le 900 c'est plus compliqué. Donc ça donne proche de 750 000 et en même temps t'additionnes.*
>
> Le chercheur résume alors la discussion précédente avec Philippe en marquant deux entrées différentes sur la question.
>
> Chercheur : Donc tantôt, ce que tu nous as dit, c'est que si tu avais à arrondir 608 948, tu l'aurais arrondi à 608 900. Si tu avais à arrondir 152 498, tu l'aurais fait à 152 500. Si tu avais eu à faire l'estimation, tu aurais fait autre chose. Tu aurais pris 600 000 et 150 000.
>
> C'est alors que Mathieu, un autre élève, affirme ne pas être en accord avec la méthode de

Philippe. Il explique :

Mathieu : *J'arrondis tout le temps au chiffre le plus gros, ici c'est 600 000.*

Ce qui suscite la réaction d'une autre élève, Jeanne, qui interprète ce que dit Mathieu en précisant que

Jeanne : *Mathieu s'est préoccupé du plus gros des deux nombres entre 152 498 et 608 947.*

Cette interaction conduira Mathieu à préciser qu'il voulait dire qu'il avait arrondi à partir des centaines de milles, le 6 de 600 000, représentant la position la plus grande du nombre :

Jeanne : *Il est à la position des centaines de mille.*

Mathieu continue son explication et ajoute

Mathieu : *À côté c'est un zéro, donc ça ferait 600… mille, comme Franck.*

Il poursuit de la même manière pour 152 498 en arrondissant le 1 à la position des centaines de mille à 2, puisqu'il retrouve 5 à la position des dizaines de milles :

Mathieu : *Et 152 498, j'arrondis à 1, c'est 5, ça fait 200 000.*

Obtenant ici la même réponse que Franck, il affirme être en accord avec la première estimation offerte en séance.

Tel que l'extrait le montre, même si la question du chercheur est posée en termes d'estimation, les élèves s'y engagent aussi en ayant recours à différentes « procédures » d'arrondissement[3]. Ces propos d'élèves, qui renvoient à différents aspects mis en œuvre, en fonction des circonstances, ont déclenché nos investigations sur l'estimation et l'approximation, poussant la nécessité d'y voir un peu plus clair au plan conceptuel : Qu'est-ce qu'une estimation ? Qu'est-ce qu'une approximation ? Que recouvrent-elles ? Quelles significations et différences entre les deux ?

Notre façon d'aborder ces questions a été d'explorer :

(a) *ce qui est mis en œuvre* lors d'une estimation et d'une approximation

(b) *les raisons* qui font opter pour l'une ou l'autre pour résoudre différentes tâches.

Nous l'avons fait, dans un premier temps, à travers les curricula actuels et les lexiques mathématiques mis à la disposition du milieu enseignant. Cette exploration nous a conduits à souligner la présence d'incohérences et de confusions relatives à ces deux termes, confirmant le besoin, dans un deuxième temps, de mettre en route un travail de conceptualisation. L'élaboration de cette conceptualisation, permettant d'y voir plus clair, a été réalisée en convoquant divers travaux en enseignement des mathématiques, où l'estimation et l'approximation occupent une place importante et sont abordés explicitement. Cette construction permet de tracer les contours de l'estimation et de l'approximation, d'en approfondir le sens, autant au plan mathématique que didactique.

Nous tenons à préciser que le travail de conceptualisation, dans le sens où nous le prenons ici, ne réfère pas au processus de construction de concepts mathématiques par l'enfant, sens qui lui est souvent associé en didactique des mathématiques. En philosophie, la conceptualisation renvoie à la capacité de définir en compréhension une notion, de partir de sa représentation pour en

---

[3] Arrondir au nombre supérieur ou inférieur en fonction des chiffres en présence aux centaines de mille (Franck), arrondir au nombre supérieur ou inférieur pour les centaines en tenant compte des chiffres aux dizaines et unités (situation par rapport à 50 ; Philippe) et arrondir au chiffre le plus loin sur la gauche en tenant compte des chiffres dans la position précédente (Mathieu).

élaborer le concept, notamment à l'aide de distinctions conceptuelles (Tozzi, 2018). En d'autres mots, ce travail de conceptualisation sur l'estimation et l'approximation veut permettre d'offrir des images ou façons d'imaginer ces notions, de créer des distinctions porteuses conceptuellement pour chacune, d'offrir (au-delà de définitions) des idées globales sur ce que ces notions impliquent et représentent, particulièrement pour les rendre opératoires et en comprendre leur nature. C'est dans ce processus de clarifications conceptuelles que nous nous proposons d'entrer. Il s'agit là d'une élaboration d'un « outil » théorique, susceptible de servir d'appui à un travail ultérieur sur ces thématiques dans l'enseignement des mathématiques et les travaux de recherche.

2. L'estimation et l'approximation dans les lexiques mathématiques

Les lexiques mathématiques nous sont apparus importants à investiguer dans la mesure où ils sont des outils pédagogiques et des référents mathématiques souvent consultés par les enseignants. Quelle image de l'estimation et de l'approximation ces documents renvoient-ils aux enseignants ? L'analyse de lexiques mathématiques fait ressortir quatre caractéristiques relatives aux définitions d'estimation et d'approximation[4].

2.1. L'estimation et l'approximation : deux termes utilisés de manière imbriquée

Les termes « estimation » et « approximation » apparaissent fréquemment de façon interchangeable dans les lexiques consultés. Ils y sont considérés soit comme des synonymes, soit comme étant imbriqués l'un dans l'autre. Ainsi, Dufour (2011) définit l'approximation comme *« une valeur qui s'approche du résultat attendu »* et l'estimation comme *«* une approximation *d'une quantité dont la valeur exacte n'est pas nécessaire ou est difficile, voire impossible à obtenir »*, ajoutant qu'estimer c'est *« calculer* approximativement[5] *»*. De la même façon, Côté *et al.* (2002) associent l'approximation, tout comme l'estimation, à *« la valeur approchée d'une opération »*, faisant référence à l'approximation de manière explicite dans la définition de l'estimation : *« une estimation est la détermination de la valeur approchée d'un résultat par calcul écrit ou mental (voir* approximation*) »*. Ainsi, même si quelques différences apparaissent dans l'énoncé des définitions (l'approximation renvoie souvent à une valeur et l'estimation à une action, *e.g.* approximation d'une quantité, détermination d'une valeur approchée), ces termes sont à toute fin pratique traités comme des synonymes.

D'autres lexiques proposent une relation hiérarchique entre l'estimation et l'approximation. Par exemple, dans de Champlain (1996) l'estimation est vue comme un moyen d'obtenir une approximation, au même titre que les techniques d'arrondissement et de troncature. L'estimation apparaît ici comme une sous-catégorie de l'approximation : *« L'estimation et l'arrondissement sont des moyens d'obtenir une approximation, [cette approximation étant associée] à une grandeur que l'on accepte comme suffisamment voisine d'une grandeur connue ou inconnue »*. De cette lecture émergent deux termes qui semblent, pour les auteurs, très imbriqués, voire équivalents dans plusieurs cas, de sorte qu'il est possible de parler aussi bien d'estimation que d'approximation.

[4] Les ouvrages de référence consultés sont : Baruk (1995), Bouvier *et al.* (2009), Côté *et al.* (2002), de Champlain (1996), Deledicq (2004) et Dufour (2011).

[5] C'est nous qui soulignons dans cette citation et celles qui suivent.

2.2. L'estimation et l'approximation : un travail sur les nombres et les calculs numériques

Les exemples donnés à l'appui des définitions des lexiques, autant pour l'approximation que l'estimation, réfèrent uniquement au domaine numérique (nombres et calculs); exception faite d'un lexique en mathématiques avancées (Bouvier *et al.*, 2009), qui propose des références aux espaces métriques et aux probabilités. Dans tous les autres ouvrages consultés, relatifs aux niveaux primaires et secondaires de l'enseignement, les définitions sont exemplifiées par des nombres ou un calcul sur des nombres. Ceux-ci mentionnent souvent les valeurs 3,14 ou 3,1416 en tant qu'approximations du nombre π, ainsi que 1,4142 comme approximation de la racine carrée de 2. Pour l'estimation, des calculs sont également souvent proposés, tel cet exemple tiré de Dufour (2011) : *« 397×18 dont la valeur peut s'estimer ainsi : 400×20=8000 »*.

En ce sens, des références aux domaines de la géométrie et de la mesure (e.g. longueurs, angles, aires, volumes, etc.) ou encore de la statistique (e.g. pourcentage, tendances centrales) ne sont pas proposées d'emblée pour exemplifier l'estimation et l'approximation. Ces définitions offrent implicitement une clarification de leur utilisation, celle-ci étant limitée au domaine numérique.

2.3. L'estimation et l'approximation : des méthodes à appliquer

À travers le traitement de l'estimation et de l'approximation dans ces lexiques, force est de constater que l'entrée proposée pour les définir est procédurale. La clarification de ces termes se fait principalement par le biais de méthodes, au point où celles-ci sont partie prenante du sens qui leur est associé. À titre d'exemple, dans Baruk (1995), l'approximation est présentée par le biais de deux méthodes, soit la troncature et l'arrondissement, et des explications sont offertes sur la manière de pouvoir réaliser ces troncatures et arrondissements, en mettant en évidence les avantages de l'une par rapport à l'autre.

De plus, bien qu'accompagnées de (courtes) clarifications, ces méthodes vont souvent être réduites au rang de règles à appliquer avec précision selon un ordre donné. Par exemple, Dufour (2011) affirme que :

> *Pour arrondir un nombre, [il faut]*
>
> • *remplacer par des zéros tous les chiffres à la droite de la position donnée, si le chiffre placé immédiatement à la droite de la position donnée est 0, 1, 2, 3, 4 […],*
>
> • *additionner 1 au chiffre de la position donnée et remplacer par des zéros tous les chiffres à droite de cette position, si le chiffre placé immédiatement à la droite de la position donnée est 5, 6, 7, 8 ou 9* (Dufour, 2011).

De manière contrastée, lorsque l'estimation est considérée comme une sous-approche de l'approximation, au même titre que l'arrondissement et la troncature (*cf.* de Champlain, 1996), elle prend une forme différente de celles-ci. : *« [L'estimation] permet d'obtenir une valeur voisine, avec risque d'erreur assez faible, de la valeur cherchée »*. Contrairement à l'arrondissement et à la troncature, des règles à suivre qui lui sont associées ne sont en effet pas précisées pour l'estimation, le propos étant davantage axé sur la qualité de ce que représente une bonne estimation, laissant ainsi présager que l'estimation n'est peut-être pas tout à fait de même nature que les deux autres méthodes (arrondissement et troncature). Il est d'ailleurs précisé que l'estimation fait appel à un certain jugement :

> *La qualité d'une bonne estimation dépend du contexte puis de plusieurs autres facteurs dont l'expérience de situations similaires, la validation d'estimations antérieures, l'habileté mentale à effectuer des approximations par divers procédés, etc* (de Champlain, 1996).

Ces entrées sur l'approximation offrent, à travers la troncature et l'arrondissement, une approche plutôt procédurale, une sorte de « marche à suivre ». *A contrario*, pour l'estimation, les propos se centrent davantage sur sa nature et son contexte, et moins sur une procédure. De ceci se dégage une différence possible entre ce que peut être l'estimation et l'approximation, tout au moins au plan de leur réalisation.

2.4. L'estimation et l'approximation : des significations orientées vers des manières de faire

Les définitions des ouvrages consultés abordent l'estimation et l'approximation par le comment (faire), expliquant peu à quoi renvoient leurs significations. Il est essentiellement question de valeur approchée, de la manière de la trouver, en précisant parfois les conditions où s'exercent tant l'approximation que l'estimation de cette valeur approchée (*e.g.* valeur exacte non nécessaire, difficile ou impossible à obtenir). Peu d'indications sont donc offertes sur le sens véritable de ces deux termes, et sur les raisons sous-jacentes qui guident le recours à une estimation ou à une approximation en mathématiques. Dit autrement, l'entrée sur l'estimation et l'approximation est purement procédurale. Pour mieux saisir cet angle de présentation de l'estimation et l'approximation, un parallèle avec le concept de division peut être parlant. Le traitement réservé à l'estimation et l'approximation s'apparente à une présentation de la division qui serait axée uniquement sur l'acte de diviser en lui-même, en précisant la manière de le faire par exemple à travers son algorithme. Ce type de présentation de la division permet d'en apprendre très peu sur le sens de cet algorithme, sur le sens de l'opération de division et encore moins sur ce qui peut orienter la reconnaissance de cette opération et les calculs à effectuer dans un problème. C'est exactement ce type d'entrée qui est proposée dans les lexiques pour l'estimation et l'approximation. En d'autres mots, le focus des lexiques est mis sur le « quoi faire » au détriment du « pourquoi », renseignant peu sur les raisons qui peuvent conduire à l'utilisation de l'estimation et de l'approximation dans l'enseignement des mathématiques.

Au terme de cette analyse, un certain sentiment d'ambiguïté et de confusion ressort, renforçant notre questionnement quant au sens profond de ces deux termes et à leur distinction. Au-delà des dimensions procédurales, du comment faire, que recouvrent l'estimation et l'approximation ? Pourquoi estimer, pourquoi approximer ? Quelle pertinence ont l'estimation et l'approximation dans le cadre de l'enseignement des mathématiques ? À ce stade, une exploration de documents institutionnels s'impose, à travers les programmes d'étude, utilisés au primaire et au secondaire. Cette analyse s'avère nécessaire pour aller plus loin face à ce premier constat d'ambiguïté et approfondir l'entrée privilégiée par les documents officiels, qui orientent le travail à faire en classe de mathématiques.

3. L'estimation et l'approximation dans les curricula mathématiques

Cette analyse s'est dirigée vers le traitement réservé à l'estimation et l'approximation dans deux programmes d'études francophones, soit celui du Québec et de la France. L'idée n'est pas ici de conduire une comparaison entre les deux curricula, mais plutôt de pouvoir apporter, à travers deux matériaux différents, des nuances éventuelles quant à ce que recouvrent ces deux termes et d'approfondir notre compréhension de leur nature : Quelle image de l'estimation et de l'approximation ces documents renvoient-ils aux enseignants ? Quelle place occupent-elles dans l'enseignement des mathématiques ?

3.1. L'estimation et l'approximation dans les programmes d'études québécois

Une place importante (30 occurrences) est réservée, tant au primaire qu'au secondaire, à l'estimation dans les programmes d'études québécois (MEQ, 2006a, 2006b ; MELS, 2007, 2005), en plus d'être aussi présente (27 fois) dans le document d'accompagnement, PDA du primaire et secondaire (Progression des apprentissages, MELS, 2009, 2016)). Cette place importante se manifeste aussi à travers une utilisation élargie de l'estimation, touchant plusieurs domaines d'études mathématiques : du travail sur les nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et les décimaux) et les divers calculs pouvant être effectués sur eux, à la mesure des grandeurs (longueur, surface, espace, angle, capacité, temps, masse, température) en passant par les domaines statistiques (médiane, représentations graphiques, régressions et corrélations) et le contexte de résolution de problèmes. L'approximation occupe également une place importante (29 occurrences, 14 dans la PDA) et couvre divers domaines mathématiques, voire tous les domaines : l'approximation se retrouve dans de nombreux champs mathématiques, soit dans le travail sur les nombres et leurs opérations, en probabilités, dans le travail sur les exposants et logarithmes, en optimisation avec les inéquations et en statistique pour la corrélation. Cette amplitude quant aux domaines couverts, ainsi que les recoupements, s'expliquent en partie par le fait que les expressions « estimation » et « approximations » sont fréquemment utilisées comme synonymes, tel que nous l'explicitons plus loin. Une analyse plus fine des programmes d'études québécois sur ces contenus permet, de plus, de dégager les trois constats suivants.

Une triple visée de l'estimation

Bien que peu d'explications paraissent quant aux raisons pouvant orienter ou justifier l'utilisation de l'estimation, il est possible de dégager des aspects, complémentaires, pour lesquels l'estimation se retrouve dans le programme d'étude québécois. Premièrement, l'estimation est présentée comme une façon d'avoir une *idée du résultat*, d'obtenir une valeur représentative de ce résultat. L'intention est ici de déterminer une valeur possible de cette estimation (*e.g.* obtenir une valeur estimée de la réponse à un calcul, une valeur estimée de la médiane, une valeur estimée d'une mesure). Deuxièmement, l'estimation cherche à obtenir un *ordre de grandeur*. Cette deuxième visée de l'estimation, en tant qu'ordre de grandeur, se démarque de la première, l'idée étant ici d'avoir une vue d'ensemble du sens de la réponse (une certaine quantité, une mesure d'angle, etc.) pour pouvoir réaliser une comparaison avec une autre quantité ou réponse : l'objectif n'est pas tant la valeur exacte obtenue que son amplitude (*i.e.* un intervalle ou une relation du type « plus grand que, plus petit que »). Finalement, dans une perspective également de réaliser une comparaison, une troisième visée de l'estimation renvoie davantage à des contextes généraux relevant d'un *ressenti* : estimer un poids, une température, une durée. Cette triple visée de l'estimation (valeur possible, ordre de grandeur, ressenti) décrit le sens habituel réservé à l'idée d'estimer dans la vie quotidienne.

Une vision ambivalente de l'approximation

L'approximation se présente de deux façons dans les programmes d'études québécois. Un premier sens renvoie directement à celui d'estimation, utilisée comme *synonyme*, et les deux expressions semblent interchangeables. C'est le sens donné dans la vie de tous les jours à l'approximation, sous l'idée d'« approximatif ». D'un document à l'autre, et d'un endroit à l'autre, il est ainsi autant question d'estimer la valeur d'un nombre que de l'approximer (ou encore d'estimer ou d'approximer le résultat d'une opération, voire pour une droite de régression et son coefficient de corrélation). Un deuxième sens donné à l'approximation est davantage lié à son *orientation mathématique*, sous l'idée d'obtenir une réponse fiable ou exacte à quelques degrés près, c'est-à-dire avec une certaine marge d'erreur. Dans ce deuxième cas, l'approximation est accompagnée d'une méthode, déterminée, qui permet de réaliser celle-ci. En lien avec la vision de certains lexiques analysés précédemment, l'approximation recouvre ici les procédures d'arrondissement (dans le domaine numérique) et de troncature (pour les nombres et les fonctions). Le document d'accompagnement (PDA, MELS, 2009, 2016) présente aussi l'estimation comme une sous-méthode pour approximer, ce que le programme d'étude lui-même ne fait pas, soulignant à nouveau une certaine ambivalence entre l'estimation et l'approximation à travers une relation parfois synonymique, parfois inclusive, entre les deux termes.

Une double référence à la notion d'ordre de grandeur

La notion d'ordre de grandeur est très présente dans le programme d'étude québécois lorsqu'il est question d'estimation et d'approximation. Cette notion d'ordre de grandeur est utilisée de deux manières, à travers différents domaines mathématiques. Dans le premier cas, celle-ci est rattachée à l'estimation. Obtenir un ordre de grandeur signifie alors se faire une idée de la quantité en jeu, de sa nature possible, de sa valeur. Il est ici question des nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et les décimaux), des résultats d'opérations et des représentations graphiques (droite numérique, systèmes d'équations et inéquations, droite de régression), tout ceci intégré dans les processus de résolution de problèmes et l'élaboration de solutions. Dans le deuxième cas, la notion d'ordre de grandeur renvoie à un sens plus strict, pour désigner un résultat avec précision. Par exemple, dans le contexte des nombres, il est question, sous le couvert de l'approximation, d'arrondir à un ordre de grandeur donné. Ainsi, lorsque la notion d'ordre de grandeur est reliée à l'estimation, l'accent est mis sur une appréciation générale et une vue d'ensemble de la réponse. Lorsque relié à l'approximation, obtenir un ordre de grandeur apparaît sous le couvert d'une méthode mathématique, ici l'arrondissement, et représente un indicateur précis à suivre pour obtenir la réponse (ce qui se retrouve aussi dans le travail sur les notations scientifiques, où par exemple 255 arrondi à la centaine devient 300 ou 3×10^2 en ordre de grandeur, *cf.* Davis, 1961).

Au terme de cette analyse des programmes québécois, une ambivalence demeure donc entre estimation et approximation, visible dans l'usage que les documents institutionnels en font et dans les recoupements retrouvés quant aux domaines mathématiques où il est question de l'une ou l'autre. Ce que recouvre l'estimation, par ailleurs, se démarque à certains moments de l'approximation, renvoyant dans le premier cas à une appréciation globale (valeur possible, ordre de grandeur, ressenti : plus ou moins lourd, plus ou moins chaud, etc.) et dans le deuxième cas à une réponse fiable avec une certaine marge d'erreur qui prend appui sur le recours à des méthodes (arrondissement, troncature). Cette amorce de distinction, que nous dégageons de notre analyse du programme d'études québécois, demeure toutefois à ce stade marquée par une confusion entre estimation et approximation. Ici encore, ce constat confirme l'importance de démêler plus à fond les distinctions potentielles.

3.2. L'estimation et l'approximation dans les programmes d'études français

Un examen des programmes français en vigueur au primaire et au secondaire relatif à l'estimation et à l'approximation montre que ces dernières n'occupent pas la même place et n'interviennent pas au même moment dans la progression scolaire. Dans les programmes de mathématiques des cycles 2, 3 et 4 de l'école (6-7 ans à 14-15 ans) et de seconde (15-16 ans)[6],

[6] Le programme de mathématiques pour les cycles 2 (CP, CE1, CE2), 3 (CM1, CM2, 6^e) et 4 (5^e, 4^e, 3^e année du collège) est organisé de la manière suivante : il reprend tout d'abord, pour chacun des cycles, les compétences travaillées par le programme (Chercher, Modéliser, Représenter, Raisonner, Calculer et Communiquer) puis les différents thèmes mathématiques abordés (Nombres et Calculs, Grandeurs et Mesures, Espace et Géométrie, pour tous les cycles, auxquels s'ajoutent, pour le cycle 4, Organisation et gestion de données et fonctions, Algorithmique et programmation). Pour chacun des thèmes, sont alors identifiés les attendus de fin de cycle, les connaissances et compétences plus précises associées aux contenus et, en parallèle, des exemples de situations, d'activités, de ressources pour l'élève ; Sont enfin précisés, pour chacun de ces thèmes, des repères de progressivité. Des croisements possibles avec d'autres enseignements (le monde, sciences et technologies,

soit l'équivalent du primaire et du secondaire québécois, les termes relatifs à l'estimation apparaissent de nombreuses fois (16 occurrences). À l'opposé, les termes relatifs à l'approximation n'apparaissent qu'une seule fois, et ce, en fin de cursus secondaire. L'approximation est alors associée à des exemples d'algorithmes à propos d'un travail sur les fonctions :

> *Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie)* (MENSR, 2019a, p. 12).

Une analyse des programmes subséquents (programme de mathématiques de 1re générale), équivalent de la première année du CEGEP québécois (17 ans et plus), confirme cette présence croissante de l'approximation au fur et à mesure des années selon les contenus mathématiques abordés : l'approximation se retrouve en effet mentionnée trois fois en lien avec les nombres réels et l'introduction de l'analyse. Ce premier constat met en évidence que l'estimation et l'approximation ne semblent pas *a priori* se chevaucher : l'estimation est présente au primaire et au secondaire, alors que l'approximation apparaît tardivement en lien avec l'introduction de domaines mathématiques plus avancés. Une analyse plus précise des programmes fait, de plus, ressortir aussi trois constats.

L'estimation et l'approximation illustrées à l'aide d'exemples précis

Contrairement au programme québécois, qui demeure plutôt général dans ses orientations, le programme français est précis et regorge d'exemples, de suggestions et d'explications précises sur l'estimation et l'approximation. Ces exemples permettent de circonscrire ce qui est, ou peut être, entendu par l'une ou l'autre en mathématiques (nous y revenons plus bas). Ainsi, des références historiques renvoient à l'approximation du nombre π par la méthode d'Archimède ou au calcul de la racine carrée chez Héron d'Alexandrie (MENSR, 2019c, p. 6). L'approximation se retrouve aussi à propos du calcul numérique d'expressions du type $f(a+h)-f(a)$, où h prend des valeurs « proches de 0 », f pouvant être une fonction carré, inverse, racine carrée, etc. (*ibid.*, p. 8).

Le même souci d'exemplification est présent pour l'estimation, comme nous le montrent les extraits suivants, utilisés à l'appui de ce que peut vouloir dire *« comprendre les situations [impliquant des grandeurs] et valider leurs résultats en donnant du sens à ces grandeurs et à leur mesure »* (cycle 2, MENSR, 2015, p. 80) :

> *estimer la longueur d'une pièce ou la distance entre deux arbres dans la cour, juger si un livre peut être plus lourd qu'un autre, […] en s'appuyant sur quelques références qu'ils [les élèves] se seront construite* (cycle 2, MENSR, 2015, p. 80) *;*
>
> *estimer en prenant appui sur des références déjà construites, longueurs et aire d'un terrain de basket, aire d'un timbre, masse d'un trombone, masse et volume d'une bouteille de lait […]* (cycle 3, MENSR, 2015, p. 205).

Un travail d'estimation avant tout associé aux grandeurs

L'estimation se trouve mentionnée en lien avec plusieurs domaines mathématiques :

(1) le calcul sur les nombres, où il est question d'estimer un ordre de grandeur pour vérifier la vraisemblance d'un résultat ;

(2) les grandeurs et mesures de grandeurs, où cette estimation peut passer par l'utilisation de grands nombres et de nombres décimaux ;

(3) les probabilités, où il est question d'estimation d'une probabilité par une fréquence

français, etc.) sont également abordés.

observée sur un échantillon associé à un travail expérimental.

Les deux domaines (calcul numérique et probabilités) ne forment toutefois pas l'essentiel du travail sur l'estimation. C'est en effet le travail sur les grandeurs et mesures de grandeurs qui forme le corpus central de l'estimation, qu'il s'agisse de longueur, périmètre, aire, volume, contenance, durée, masse, angle, ou encore de rapports simples de grandeurs, de grandes distances ou de populations. Il n'est pas ici question de nombres « purs », mais bien de nombres associés à des grandeurs qui ont un sens en lien avec des objets géométriques. Par ailleurs, plusieurs significations ressortent de l'usage de l'estimation, laissant pointer des raisons sous-jacentes qui motivent à son recours :

- *Un ordre de grandeur qui fait appel au jugement*. L'estimation fait appel à un processus de comparaison : qualitative (par exemple, en jugeant si un objet peut être plus lourd qu'un autre) ou prenant appui sur des références déjà construites (estimer la longueur d'une pièce, la distance entre deux arbres, estimer une longueur en relation avec les unités métriques en ayant recours à des grandeurs intermédiaires, d'autres distances, d'autres longueurs sur lesquelles s'appuyer). Il y a une analyse de ce processus d'estimation, qui s'appuie sur une comparaison avec une autre grandeur familière, déjà construite, que l'élève met à profit dans son estimation. La notion d'ordre de grandeur est donc associée à celle d'estimation. La visée est celle d'une anticipation ou d'une obtention d'une vue d'ensemble sur un certain objet avant de continuer le travail.
- *Un travail qui vient donner du sens à ces grandeurs*. L'estimation des mesures de grandeurs participe à donner un sens aux grandeurs concernées (longueur, aire, volume, unités, etc.) : *« le travail sur l'estimation participe à la validation des résultats et permet de donner du sens à ces grandeurs et à leur mesure »* (cycle 3, p. 205). Cette estimation joue donc un rôle essentiel dans la construction même du concept de grandeur (et de mesure). C'est ici le sens même des concepts mathématiques qui est travaillé par cette estimation : « les notions de grandeur et de mesure de la grandeur se construisent dialectiquement en résolvant des problèmes faisant appel à différents types de tâches (comparer, estimer, mesurer) » (*ibid.*, p. 205).
- *Une estimation associée à une vérification de la vraisemblance d'un résultat*. Estimer l'ordre de grandeur d'un résultat, d'une mesure, permet de juger de la vraisemblance de ce qui est avancé dans une situation donnée. Estimer apparaît ainsi associé à un calcul réfléchi (l'estimation, par exemple dans le calcul mental, fournit un ordre de grandeur du résultat avant tout calcul instrumenté), à une anticipation raisonnée de mesures ou encore à une utilisation réfléchie d'unités (avoir un ordre de grandeur permet d'adapter le choix de l'unité en fonction de l'objet à mesurer). C'est ici le développement d'un engagement réfléchi dans un calcul, dans un mesurage ou dans le recours à des unités qui est au cœur du travail réalisé, où un contrôle sur une activité mathématique est visé par cette estimation.

Un travail connexe : l'encadrement

L'approximation est peu présente dans les curricula français du primaire et du secondaire, en revanche d'autres notions rattachées à l'idée d'approcher une certaine grandeur, un certain nombre, le sont. En particulier, la notion d'encadrement en lien avec le travail sur les nombres est très présente (17 occurrences). Il est question, par exemple, d'encadrer une fraction par deux entiers consécutifs, d'encadrer des nombres décimaux, des nombres rationnels, d'encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs, d'encadrement décimal d'un nombre réel, ou encore d'encadrer des racines par des entiers. Ainsi *« encadrer une grandeur par deux nombres entiers* *d'unités »*, des connaissances et compétences précisées au cycle 2 en lien avec grandeurs et mesures, est exemplifié par *« les encadrements sont du type un couloir mesure entre 6m et 7m de long »* (cycle 2, p. 81). Encadrer des nombres rationnels en lien avec le thème nombres et calculs (cycle 4) est exemplifié par *« montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés, contrairement au cas des entiers »* (cycle 4, p. 370). Les finalités associées à cette idée d'encadrement sont toutefois moins claires.

Au terme de cette analyse du programme français, une distinction apparaît pour la première fois entre estimation et approximation, notamment à travers un usage qui ne recouvre ni les mêmes niveaux scolaires ni les mêmes contenus. D'un côté, l'approximation apparaît en lien avec l'introduction de domaines mathématiques avancés. De l'autre, l'estimation se précise à travers un travail sur les grandeurs et les mesures de grandeurs, guidé par des intentions (anticipation raisonnée de mesures, utilisation raisonnée d'unités, idée de donner du sens à ces grandeurs et leurs mesures, de juger de la vraisemblance d'un résultat).

Les analyses des curricula (français et québécois) mettent ainsi en évidence des manières différentes de présenter et travailler estimation et approximation, et de les justifier; ce qui en retour nous conduit à souligner, dans chacun des cas, des constats de nature différente. Ces constats illustrent en arrière-plan des différences sur la nature de chacun de ces programmes d'études, tant par les précisions plus ou moins grandes apportées par chacun d'entre eux que par les visées suggérées à propos du travail sur l'estimation et l'approximation. Dans le programme français, il est possible d'entrevoir que l'estimation et l'approximation ne réfèrent pas tout à fait au même contenu mathématique et ne présentent pas non plus le même intérêt pour l'enseignement des mathématiques. Par ailleurs, alors que le programme québécois offre un maillage des deux, ou encore travaille des idées différentes sans nécessairement les distinguer, le programme français offre une vision plus tranchée quant à l'estimation et l'approximation, tout en tablant sur une explicitation des raisons sous-jacentes à leur utilisation (ce que le programme québécois laisse plutôt implicite).

Cette analyse de programmes vient nuancer ce que recouvrent estimation et approximation à travers l'usage qui en est fait au plan institutionnel. Elles ouvrent la porte à la nécessité d'aller plus loin dans le travail d'organisation et de mise en contraste des idées relatives à l'estimation et l'approximation. C'est ce que nous proposons dans la section suivante, en convoquant divers travaux faisant intervenir l'estimation et l'approximation, en vue d'avancer sur une clarification conceptuelle.

4. Conceptualisation de l'estimation et de l'approximation

Tout comme certains lexiques et programmes d'études, les expressions « estimer » et « approximer » sont parfois explicitement utilisées de façon interchangeable chez certains chercheurs (*e.g.* Hilton & Pederson, 1986 ; Usiskin, 1986 ; Silver, 1994). Toutefois, en contexte d'enseignement des mathématiques, il apparaît primordial, pour plusieurs autres, que l'estimation soit dissociée des procédures d'approximation, telles que l'arrondissement et la troncature. À ce titre, Yoshikawa (1994) et Reys et Nodha (1994) expliquent que l'enseignement des procédures d'arrondissement, par leurs étapes successives et l'obtention d'une réponse précise, tend à écraser le travail d'estimation chez les élèves et à lui enlever sa pertinence. Ceci est particulièrement le cas lorsque le travail d'estimation renvoie pour eux à un processus moins cadré, qui ne suit pas un algorithme précis et fournit davantage une réponse globale ou une vue d'ensemble sur une situation. Itoh et Mizusawa (1994), ainsi que Trafton (1994), soulignent même que lorsqu'il est demandé aux élèves de faire une estimation, fréquemment, ces derniers font le processus inverse : ils trouvent la réponse exacte puis l'arrondissent pour donner un « chiffre rond » qu'ils présentent pour leur résultat.

C'est dans ce contexte que plusieurs chercheurs ont mis en avant, au cours des années 1980 et 1990, l'importance de l'estimation en contexte scolaire (*cf. e.g.*, aux États-Unis, Benton, 1986 ; au Japon, Yoshikawa, 1994 ; en France, Capponi & Clarou, 1983 ; au Québec, Bednarz & Janvier, 1984). Ceci étant dit, bien que l'estimation soit fortement promue aux côtés de l'approximation, le sens associé à chacune de ces expressions est rarement présenté de manière explicite ; les écrits n'offrent majoritairement que quelques bribes d'éléments de clarification et des avancées limitées quant à leur distinction. Cette constatation motive et justifie, tout autant que la problématisation l'avait fait précédemment pour les lexiques et les programmes d'études, la nécessité de clarifier sur un plan théorique l'estimation et l'approximation.

Dans ce qui suit, nous présentons la conceptualisation que nous avons élaborée. Elle prend appui sur l'analyse de divers travaux qui font référence de manière explicite à l'estimation ou à l'approximation. De l'analyse de ces travaux, des ancrages différents associés à l'estimation et à l'approximation ressortent. C'est ce que nous avons nommé le socle fondateur de l'estimation et de l'approximation, où ces ancrages permettent de mieux comprendre l'origine en quelque sorte de l'une et l'autre et les significations qu'elles recouvrent.

4.1. Socle fondateur de l'estimation et de l'approximation : des réflexions puisant à des mondes différents

Le monde mathématique de l'approximation

L'approximation est intimement liée aux mathématiques et à leur développement. Dans le rapport Kahane (2002), le chapitre consacré au calcul fait référence à l'approximation comme une manière d'approcher certains concepts mathématiques, voire d'entrer dans un nouveau monde mathématique[7]. Intimement liée à un travail de conceptualisation, l'approximation y apparaît comme un élément clé de la construction de concepts mathématiques, une façon d'explorer de nouveaux objets mathématiques, ainsi que d'enrichir la conceptualisation d'objets mathématiques existants. Le Rapport Kahane mentionne quelques exemples en appui à cette première signification :

- Les travaux de recherche portant sur la construction des rationnels et décimaux à l'école élémentaire à travers la situation dite de l'épaisseur d'une feuille de papier, Brousseau et Brousseau (1986) illustrent une entrée de l'élève dans le monde mathématique de l'approximation, fortement imbriquée à la construction de ces nouveaux nombres.

  > *À travers cette extension du champ des nombres, vu la densité des ensembles de nombres construits dans le continu numérique, l'élève peut effectuer en fait ses premiers pas dans le monde mathématique de l'approximation* (Brousseau & Brousseau, 1986, p. 208).

- Le rôle essentiel joué par l'approximation en analyse est aussi relevé, introduisant un rapport nouveau au calcul sur les objets mathématiques jusqu'alors travaillés (ceux de l'algèbre), qui va venir en quelque sorte enrichir ces mêmes objets mathématiques. Il ne s'agit pas là, comme le précise le rapport, *« d'approximation au sens du calcul*

[7] Dans le rapport Kahane, le chapitre 4 est consacré au calcul de l'école élémentaire à l'université. Une réflexion de nature épistémologique sur le calcul et son évolution en mathématiques au regard de l'image du calcul dans la culture et l'enseignement, et une réflexion didactique sur les besoins de l'enseignement du calcul aujourd'hui et les moyens à mettre en œuvre. C'est à propos d'une réflexion épistémologique touchant à la vision des rapports entre calcul exact et calcul approché que l'approximation est pour la première fois mentionnée dans ce rapport.

approché mais d'approximation comme outil fondamental de construction de concepts » (Kahane, 2002, p. 239). Le changement de statut que prend une notion comme celle d'ordre de grandeur va dans le même sens :

> *Avec l'entrée dans le monde de l'analyse, les rapports entre calcul exact et calcul approché vont s'inscrire dans les complémentarités nouvelles. L'analyse permettra, en particulier, de montrer que les objets mathématiques de l'algèbre que sont les équations peuvent s'inscrire dans un autre rapport mathématique, celui de l'approximation (approximation de nombres, de fonctions), et enrichir le rapport à ces objets. Des notions, comme celle d'ordre de grandeur, travaillées depuis le début de la scolarité, prendront un autre statut, en devenant les instruments fondamentaux du travail mathématique, tant théorique que pratique* (*ibid.*, p. 209).

- Le travail d'approximation avec les nombres rationnels et réels est également mentionné, celui-ci ouvrant à un ensemble de régularités et de découvertes du point de vue de l'activité mathématique. L'exemple suivant, portant sur l'exploration de développements décimaux des rationnels, illustre le potentiel d'une telle activité :

> *Une calculatrice est un outil privilégié pour explorer les développements décimaux des rationnels et conjecturer leur périodicité. Le calcul à la main peut alors utilement prendre le relais pour faire sentir ce que l'immédiateté du résultat donné par la machine ne donnait pas à voir, la raison de cette périodicité : on retombe inévitablement à un moment sur une étape antérieure du calcul, en retombant sur un reste déjà rencontré. Même mené sur un exemple particulier, le calcul à la main aura ici une valeur générique : on retombe sur un reste déjà rencontré car le nombre des restes possibles est fini. L'assurance théorique ainsi acquise peut conduire à chercher à élaborer un programme qui forcerait la machine à donner ce développement périodique, même lorsqu'il n'est pas immédiatement accessible, dépassant ainsi ses productions premières. De nouvelles explorations machine peuvent prendre ensuite le relais pour conduire à des conjectures sur les longueurs possibles des périodes, sur les variations de leur premier terme, conjectures qu'il s'agira ensuite de prouver à leur tour. Le jeu pourra se prolonger avec les approximations de réels par des fractions continues, autre mine de régularités et découvertes passionnantes* (*ibid.*, note 18, p. 214).

Cette première signification associée à l'approximation revêt une importance capitale sur le plan de l'enseignement des mathématiques, puisqu'elle apparaît comme un élément clé pour conceptualiser différents objets mathématiques et mettre en route une activité mathématique spécifique. Toutefois, il peut être facile de court-circuiter cet aspect, en sautant directement à la dimension procédurale ou calculatoire de cette approximation, sans s'attarder à son sens sous-jacent (par exemple, en montrant uniquement à quel endroit tronquer ou arrondir). C'est pourtant cette première signification qui est au fondement même de l'approximation et en représente sa raison d'être : c'est cette intention d'aborder et maîtriser les concepts et problèmes qui a conduit, sur un plan mathématique, à tenter de développer et réaliser ces approximations.

Une deuxième signification qui ressort du Rapport Kahane en est une dite opératoire. Cette deuxième signification est motivée par une intention de chercher comment il est possible de réaliser cette approximation de façon adéquate, en développant des outils à cette fin (voire d'automatiser ces outils représentatifs de l'approximation, par la construction d'algorithmes, la vérification de leur validité, l'amélioration de leur efficacité). Ces outils peuvent, en retour, offrir une compréhension bonifiée des concepts à travers leur utilisation. Les deux exemples suivants en donnent une idée :

- La méthode d'Archimède pour calculer π : par inscriptions et circonscriptions du cercle avec des polygones réguliers, Archimède développe une méthode qui permet, en s'appuyant sur le calcul des périmètres et aires de formes connues, de déterminer une valeur numérique approchée de π (entre $\frac{223}{71}$ et $\frac{22}{7}$ par exemple avec un polygone à 96 côtés). Mais, au-delà de cet algorithme, la vision géométrique qui le sous-tend vient bonifier le sens à donner au concept du nombre π. L'encadrement d'Archimède est ainsi autant une conceptualisation de π qu'une méthode pour en déterminer une valeur approchée (avec une marge d'erreur plus ou moins grande selon les polygones utilisés).

- La méthode de Héron d'Alexandrie pour calculer la racine carrée d'un nombre : en cherchant un carré connu qui soit proche du nombre pour lequel la racine carrée est recherchée (*e.g.* pour 118, le carré 121 dont la racine carrée est 11) et en prenant un rectangle de même aire (ici de côtés mesurant 11 et $\frac{118}{11}$), ceci engage à une recherche progressive d'autres rectangles « plus carrés » dont l'aire reste la même et la longueur vaut la moyenne arithmétique des deux longueurs précédentes (11 et $\frac{118}{11}$). En réitérant indéfiniment ce processus, on obtient petit à petit un rectangle de plus en plus proche d'un carré de même aire. C'est en s'appuyant sur une vision géométrique d'un nombre carré que cette méthode permet d'approcher la racine carrée d'un nombre, tout en conceptualisant cette même racine carrée de façon géométrique.

Cette perspective sur l'approximation est en ce sens ancrée dans un monde mathématique[8]. À travers l'histoire, des outils et méthodes d'approximations ont été développés en mathématiques pour aborder, explorer et conquérir certains concepts et problèmes autrement inaccessibles à ce moment de leur développement. Et, c'est souvent grâce à ces premiers pas réalisés par — et avec — l'approximation que ces concepts et problèmes ont pu être davantage maîtrisés, développés et résolus.

Le monde didactique de l'estimation

L'estimation apparaît, quant à elle, à travers un tout autre contexte que celui de l'approximation, et à partir d'intentions fort différentes. Bien qu'elle se trouve mobilisée dans la vie quotidienne et dans d'autres domaines (agriculture, géographie, etc.), l'estimation renvoie inévitablement au monde de *l'enseignement* des mathématiques et à la réflexion menée par les didacticiens des mathématiques sur certains concepts, tels celui de mesure (*cf.* Janvier, 1997, sur le volume), ou encore en contexte de calcul mental (*cf.* Proulx, 2021). Pensée en contexte scolaire, l'estimation est à resituer dans une idée d'exploration, avec une intention de favoriser une compréhension de ces concepts mathématiques (par opposition à une initiation trop hâtive aux méthodes de calcul ou de mesurage). Cette réflexion va notamment occuper beaucoup de place en lien avec le travail sur les grandeurs et mesures de grandeurs, l'enseignement sous-estimant souvent la complexité des problèmes de mesure et les multiples univers qu'ils sollicitent (*cf.* notamment Rouche, 1992 ; Brousseau & Brousseau, 1992 ; Janvier, 1997 ; Douady & Perrin-Glorian, 1989). C'est ainsi souvent dans les contextes de mesure de grandeurs qu'a pris place le travail sur l'estimation. En ce sens, la réflexion sur l'estimation est intimement liée au monde didactique, de par ses

[8] Moins développée, une troisième signification de l'approximation est liée au travail sur la modélisation d'une certaine classe de problèmes en mathématiques pour lesquels seule une résolution approchée est accessible. Dans ce contexte, face à un vaste champ de problèmes, en relation notamment avec d'autres disciplines, l'approximation devient un outil clé de modélisation pour approcher ces problèmes : *« Rendre des objets accessibles au calcul suppose un travail de modélisation, permettant de privilégier quelques caractéristiques de ces objets tout en en occultant une multitude d'autres, pour aboutir à une représentation calculable »* (Kahane, 2002, p. 177).

intentions centrées sur l'exploration et l'avancée des compréhensions mathématiques des élèves et la recherche de situations susceptibles de développer ces compréhensions. Au cœur de ce monde didactique, différentes significations émergent et sont davantage centrées sur le processus d'estimation que sur la simple réponse obtenue par celui-ci.

Une première signification associée à l'estimation est liée à l'idée d'obtenir un ordre de grandeur. L'estimation permet, ou a pour but, d'obtenir une réponse raisonnablement proche pour la situation proposée (Allinger & Payne, 1986 ; Trafton, 1986), une sorte d'« à peu près » : *« to be able to grasp the rough magnitude of numbers and quantities [magnitudes] as well as the rough shape of geometrical figures »* (Yoshikawa, 1994, p. 54). L'obtention de cet ordre de grandeur se veut aidant et « économique » pour résoudre le problème, pour permettre d'y voir plus clair. Ainsi, la nature de la réponse d'une estimation peut être autant une valeur proche, un intervalle pour cette valeur, qu'une comparaison à un référent choisi (plus grand que, plus petit que, plus du double de, etc.) (Schoen & Zweng, 1986). Par cette nature « aux alentours de », l'estimation offre aussi différentes réponses possibles et admissibles pour une même situation (Schoen, 1994), caractéristique autant de la globalité offerte par l'obtention d'un ordre de grandeur que relatif aux choix faits et au contexte sous-tendant sa réalisation. Émerge ainsi de cette première signification de l'estimation ce que Behr *et al.* (1986) nomment une boucle d'interrelation entre estimation et ordre de grandeur : pour pouvoir estimer, il faut avoir une bonne idée de l'ordre de grandeur des nombres, des mesures ou des références impliquées (longueur, surface, volume, capacité, une certaine unité, etc.), en s'appuyant sur une image mentale de ces grandeurs par comparaison à d'autres et, en retour, l'estimation elle-même aide à développer une idée de cet ordre de grandeur des nombres ou des références impliquées. L'estimation et l'ordre de grandeur sont ici intimement liés.

L'obtention de cet ordre de grandeur pointe vers un deuxième type de signification associée à l'estimation, soit celui de la dimension simplifiée qu'elle offre d'une situation. L'estimation offre une vision rapide et globale des éléments considérés (à l'opposé de détails précis et pointilleux ; Carlow, 1986 ; Coburn & Shuttle, 1986). Cette dimension globalisante rend l'estimation pratique (Allinger & Payne, 1986), voire « rapide », aidant à l'avancement de la compréhension du problème et de sa résolution. Ceci souligne la partie réflexive du processus d'estimation sur les grandeurs en cause, l'estimation permettant d'insister sur les propriétés générales associées aux grandeurs. Elle relève en ce sens du travail sur des quantités, des grandeurs (mesurables ou repérables) et leurs relations (Capponi & Clarou, 1983), contribuant en retour à donner un sens à ces quantités et grandeurs (Capponi & Clarou, 1983 ; Brousseau & Brousseau, 1992) ; et beaucoup moins d'une simple manipulation de symboles comme cela peut parfois être le cas pour l'approximation sous son aspect strictement opératoire. Par exemple, alors que l'arrondissement d'un nombre insiste sur la position à laquelle l'opération doit être menée (*e.g.* 342 566 arrondi à la centaine), l'estimation s'intéresse à la quantité globale qui va justement orienter cette estimation : autour de 340 000, près de 350 000, entre 300 000 et 400 000, etc.). L'estimation permet, en s'appuyant sur ce raisonnement des grandeurs du problème, de construire une image mentale de l'ordre de grandeur de ces mêmes grandeurs ; ce qui pour Trafton (1994, p. 86) initie une *«* conversation about numbers *»*.

En dehors des nombres, l'estimation concerne aussi l'idée d'obtenir ce que Yoshikawa (1994) nomme une perspective de la situation : une bonne idée de la façon de résoudre et des opérations à réaliser, de la nature du résultat et de sa dimension raisonnable. En ce sens, l'estimation ne se limite pas à la réponse, mais peut concerner la totalité de la situation. Yoshikawa souligne justement la différence en japonais entre *gaisan*, qui est l'idée d'obtenir un ordre de grandeur de la réponse numérique (*«* rough computation *»*), et *mitsumori* qui implique plusieurs activités de pensée, comme des évaluations numériques, autant qu'un jugement sur les situations mathématiques en cause. Il donne l'exemple suivant :

Taro veut acheter deux livres. Leurs prix sont 245 yens et 815 yens. Il possède 2 000 yens. Peut-il acheter ces deux livres ?

Yoshikawa explique qu'il est possible d'arrondir les nombres du problème, soit à 250 et 800. Leur somme donnant 1050, ce qui est plus petit que 2000, il peut acheter les deux livres. Il distingue cette approche *gaisan* d'une *mitsumori*, qui pourrait être d'observer que chacun des nombres est plus petit que 1 000 et donc leur somme est automatiquement plus petite que 2 000. Il est alors question d'une *évaluation globale* de la situation, qui se ramène aussi à une sorte d'analyse, autant quantitative que qualitative, du problème à résoudre ; ce que Carlow (1986) et Coburn et Shuttle (1986) présentent en termes d'être au fait et d'illustrer les propriétés et relations du « matériel » de travail. En ce sens, l'estimation ne se réduit pas au travail sur les nombres, et ne se limite pas à une considération de simples réponses, mais fait appel au sens à donner globalement au problème et à la situation elle-même (contexte additif ou multiplicatif, problème impliquant une proportionnalité, contexte de mesure renvoyant à des situations familières, etc.).

Cette deuxième signification de l'estimation en fait émerger une troisième, soit celle de l'estimation comme processus de résolution de problème impliquant un jugement de la part de celui qui estime (Schoen, 1994). L'estimation se décrit ici comme un processus, qui implique davantage une prise en compte du problème et de ses grandeurs, dans leur globalité, qu'une simple solution au problème. Cela rejoint les travaux menés par Saboya *et al.* (2015), l'estimation agissant comme « outil » de contrôle aux prises de décision lors de la résolution du problème. Voici un exemple :

Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives ? Explique comment tu as fait pour trouver.

Dans ce problème, une analyse est mise en œuvre par les élèves lors de la résolution arithmétique du problème. Ils cherchent alors un nombre entier de wagons, les trains ne sont pas nécessairement remplis à pleine capacité, mais les wagons doivent permettre de transporter tous les passagers, le nombre de wagons attaché à chaque train est beaucoup plus que 10, sinon seulement 280 passagers pourraient être transportés, etc. Il est donc autant question du processus d'estimation que de la réponse estimée (Usiskin, 1986 ; Schoen, 1994). Parce qu'elle diffère de l'idée d'obtenir uniquement une réponse directe, mais exige davantage une réflexion sur la réponse globale (son ordre de grandeur, les propriétés requises dans la situation, une analyse préalable des propriétés que devra posséder le résultat, etc.), l'estimation implique l'acquisition d'un certain *état d'esprit* dans sa réalisation (Capponi & Clarou, 1983). C'est aussi cette dimension qui se situe au cœur du travail de l'estimation pour Itoh et Mizusawa (1994), tout comme pour Yoshikawa (1994), ces derniers réagissant au fait que plusieurs élèves refusent de faire des estimations, tout comme certains enseignants refusent de l'enseigner ou de l'exiger, car la réponse obtenue n'est pas aussi « précise » que celle obtenue par les algorithmes habituels ou les techniques d'approximation.

Finalement, une quatrième signification liée à l'estimation réfère à sa composante de validation. L'estimation peut avoir pour but, ou encore permet, d'assurer un certain contrôle sur la situation et sa solution. La solution estimée initialement permet de juger de la validité de la réponse finale du problème. L'estimation sert ici de comparaison pour juger du caractère raisonnable de la réponse obtenue (par exemple, la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle valant 180 degrés, les valeurs des angles non-droits dans un triangle rectangle sont chacun plus grands que 0 degrés et plus petits que 90 degrés, permettant d'ajuster la réponse obtenue par le rapporteur d'angle). L'estimation fait ici appel à une forme d'anticipation de la réponse et à un contrôle en cours de route sur celle-ci (par exemple, le choix des instruments pour mesurer, les unités à choisir, les échelles graphiques à utiliser pour représenter la situation). Pour Trafton (1986), cette validation de la situation permet aussi d'ajuster en retour l'estimation obtenue, en comparaison avec la réponse au problème, ou encore pour la commenter (sur-estimé, sous-estimé). Ces entrées mènent du même coup à un approfondissement de la compréhension de la situation ; voire alimente le processus dialectique ayant cours entre ordre de grandeur et estimation (tel que souligné plus haut par Behr *et al.*, 1986).

Ces différentes significations ne sont toutefois pas considérées de façon indépendante. L'idée de validation n'est pas vue comme se présentant uniquement à la fin du processus d'estimation. Trafton (1994) et Silver (1994) insistent sur le fait que l'estimation permet un *contrôle* de la situation, de différentes façons, et à différents moments, durant le processus de résolution de problèmes :

- avant : pour obtenir une réponse grossière, un ordre de grandeur (qui implique aussi de porter un jugement sur la nature des opérations, sur le raisonnement, etc.) ;
- pendant : pour confirmer l'orientation choisie, la bonne direction, permettant d'exercer un contrôle sur le bon chemin à prendre durant la résolution ;
- après : pour évaluer le caractère raisonnable de la réponse.

Cet ancrage de l'estimation et de l'approximation dans des mondes différents, à travers leurs significations possibles, permet d'approfondir cette conceptualisation sous trois axes supplémentaires. Tel que présenté à la figure 1, ces trois axes sont relatifs au rapport qu'estimation et approximation entretiennent à la valeur exacte, au contrôle exercé dans chacun des cas et à la rationalité sous-jacente à leur utilisation. Ces axes bonifient autant le sens à donner à l'estimation et à l'approximation, que les distinctions importantes à tracer entre elles.

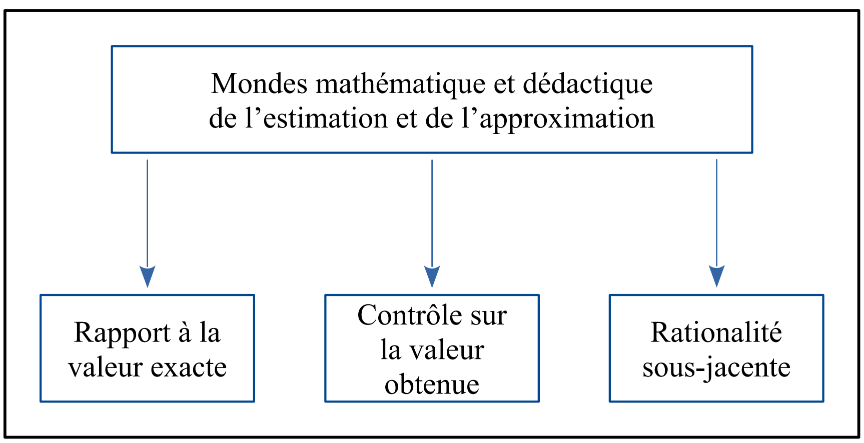

Figure 1 *: Schématisation de la conceptualisation développée pour l'estimation et l'approximation.*

4.2. Axe 1 : Rapport à la valeur exacte

Au-delà des mondes mathématique et didactique qui leur donnent forme, l'approximation et l'estimation se distinguent par la relation qu'elles entretiennent avec la valeur exacte. Dans le cas de l'approximation, et des domaines mathématiques où elle va se révéler centrale (celui par exemple de l'analyse, des nombres décimaux, des nombres réels, de la statistique), il est important de réaliser qu'il n'est pas possible d'obtenir de valeur exacte. C'est là justement que l'approximation prend toute sa pertinence, seule une valeur approchée est possible. La valeur exacte voudrait être obtenue, si elle était possible, mais une telle valeur n'est tout simplement pas accessible. L'intention est alors de s'en approcher, par approximation, tout en minimisant l'horizon d'erreur. De façon caricaturale, relativement à l'inaccessibilité de la valeur exacte, l'approximation représente quelque peu une option par dépit. L'objectif est de s'approcher le plus possible de cette valeur exacte, qui est désirée mais ne peut pas être obtenue. Ceci mène à vouloir minimiser l'écart entre la valeur approchée et la valeur exacte, par le biais d'un contrôle exercé sur l'erreur, soit à l'intérieur de balises jugées acceptables. Ainsi, alors que la valeur recherchée, si elle existait, est de l'ordre de l'exactitude, une valeur approchée est davantage de l'ordre de la précision : elle se veut la plus précise possible dans un horizon prédécidé.

Dans le cas de l'estimation, cette valeur exacte *est* accessible. Dans les contextes pour lesquels l'estimation intervient, il est possible de faire le calcul demandé, de *précisément* mesurer l'angle, la longueur, la surface, le volume, de déterminer la pente, etc. Au contraire de l'approximation, par l'estimation et le travail sur l'ordre de grandeur, ce n'est pas cette valeur exacte qui préoccupe celui qui estime : elle n'est pas ce qui est recherché. Il est avant tout question de se faire une idée de la nature d'un certain résultat ou d'une certaine grandeur (par exemple, avoir une idée de la taille d'une personne, savoir s'il est possible de faire entrer un objet dans une pièce donnée, savoir combien de personnes peuvent être accueillies dans un local ou sont présentes à une manifestation, avoir une idée de la conversion en euros d'un montant d'argent). L'intention est d'avoir une vue d'ensemble de la situation pour être, entre autres, plus en contrôle sur cette même situation. La valeur exacte elle-même n'est pas ici pertinente (Carlow, 1986 ; Chambris, 2008). Et, tel que l'explique Usiskin (1986), c'est justement l'estimé obtenu, et non la valeur exacte, qui aide à cette compréhension globale et clarifie la situation. Par exemple, dans plusieurs situations de mesure, souvent cette mesure exacte n'est jamais réalisée, soit parce qu'il est compliqué de le faire (avec les outils accessibles, par exemple) ou encore parce que la valeur estimée est suffisante et offre une idée rapide de la nature du résultat (Coburn & Shuttle, 1986 ; La Ferla Morgan, 1986) (telle une quantité de tissu nécessaire, l'argent de poche à apporter pour acheter un article, une quantité de terre à commander, etc.). Il peut aussi y avoir des aspects de la réponse exacte, par exemple la partie décimale dans $245{,}886+32{,}91$, qui peuvent ne pas être importants ou encore superflus si le contexte ne requiert que de saisir l'ordre de grandeur de la réponse ; l'estimation est alors ici privilégiée.

C'est ainsi au niveau de leur relation avec la valeur exacte qu'une distinction se trace entre l'estimation et l'approximation. Cette distinction mène à la considération d'un 2^{e} axe, celui relatif au contrôle exercé sur le résultat obtenu par estimation ou approximation.

4.3. Axe 2 : Contrôle sur le résultat obtenu

L'estimation et l'approximation se différencient quant au contrôle exercé sur la nature de la valeur obtenue (estimée ou approchée) et sur la justification de la démarche entreprise pour la réaliser. En d'autres mots, la réponse à la question « Quel type de contrôle est exercé sur le résultat obtenu ? » n'est pas la même dans le cas de l'estimation et de l'approximation.

Pour l'approximation, le contrôle est centré sur la marge d'erreur : Jusqu'où la valeur approchée obtenue par approximation est-elle acceptable scientifiquement ? Quelle marge d'erreur est permise ?

> *L'idée fait peu à peu son chemin qu'un calcul numérique approché n'a de valeur scientifique que s'il est accompagné d'une estimation de l'erreur [d'un horizon pour lequel l'erreur reste acceptable]* (Kahane, 2002, p. 192)[9].

L'erreur fait partie de la réponse approximée et il est important de chercher à la déterminer précisément. Il s'agit de cerner à quelle « distance » de la valeur exacte la valeur approchée déterminée (peut) se retrouve(r). Sans cette évaluation de l'erreur, la validité et la rigueur de la valeur déterminée sont incertaines au niveau scientifique. Sur le plan opératoire, il y a une idée de rigueur intrinsèque au processus d'approximation, permettant de convaincre que la démarche d'approximation a été adéquatement réalisée. La réponse obtenue est validée en fonction d'une marge d'erreur acceptable, suite à l'utilisation de méthodes d'approximations, qui permettent de confirmer que les choses sont valables, car bien exécutées à l'intérieur de balises déterminées. La validité découle de l'utilisation adéquate des méthodes d'approximation. Ainsi, ce contrôle relève davantage pour l'approximation d'une certaine *objectivité scientifique* : l'utilisation adéquate des méthodes d'approximation, avec une marge d'erreur contrôlée, permet de montrer — et convaincre de — la rigueur de l'approche utilisée. L'approximation résulte de l'application adéquate d'une méthode qui renvoie à un processus de contrôle, inhérent à sa méthode et se justifiant par elle. Loin d'être une mécanique sans sens, l'approximation est toutefois du ressort de méthodes établies qui la balisent. Il est alors possible de juger de l'utilisation adéquate et rigoureuse de l'approximation, scientifiquement parlant. D'une certaine façon, il n'y a qu'une seule réponse possible face à une demande d'approximation (342 567 arrondi aux centaines donne 342 600 et tronqué aux milliers donne 342 000). Il existe un cadre prescrit qui balise les manœuvres d'approximation.

Dans le cas de l'estimation, le contrôle à exercer sur le résultat obtenu est davantage de l'ordre de la validation relative à une certaine situation : le contrôle donné pour/sur l'ordre de grandeur recherché est relatif au contexte. Il n'y a pas ici une seule estimation possible suivant une méthode prescrite ou suivant des balises fixes. À l'opposé de l'approximation, plusieurs réponses sont justifiables en estimation, selon le contexte et les circonstances. Ce contrôle exercé relève de l'engagement réfléchi dans la tâche, et d'une pertinence à argumenter et justifier pour convaincre que l'estimation effectuée est pertinente et offre un ordre de grandeur raisonnable. En ce sens, le contrôle sur le processus d'estimation et la valeur estimée obtenue relèvent davantage d'une certaine *subjectivité contextuelle*, qui est fonction des circonstances, des objectifs et des choix faits. Par exemple, le nombre 918 peut être estimé à 900, 920 925, 950, 1 000, selon le calcul à effectuer ($918+75$; $918+100$; $918+350$; 918×2 ; $918-907{,}43$). L'estimation est aussi fonction d'une certaine aisance relative à celui qui fait le calcul (« 900 ça va vite », « 918 c'est presque 1 000 », « 918 c'est plus que 900 », etc.) et à sa capacité d'obtenir un ordre de grandeur en s'appuyant sur des référents familiers ou intermédiaires qu'il s'est construits. L'estimation s'associe ici davantage à un processus (et non à une méthode à appliquer) au cœur d'un certain état d'esprit ayant pour objectif l'obtention d'un ordre de grandeur raisonnable pour, et représentatif de, la situation concernée. Ce travail sur un plan holistique, concernant le contexte

[9] Kahane renvoie ici à *« un exemple d'intégration approchée des équations différentielles, connue aujourd'hui sous le nom de méthode d'Euler, inséparable de la conception d'une courbe comme un polygone à une infinité de côtés infiniment petits. Euler est le premier à en rédiger un exposé complet sous une forme purement numérique, mais pour ses travaux appliqués de balistique et mécanique céleste, il ne l'utilise pas, celle-ci étant trop peu précise. Elle servira à Cauchy pour démontrer un des premiers grands théorèmes d'existence et d'unicité de l'analyse. Cette démonstration fournit en retour a posteriori une évaluation de l'erreur commise en utilisant la méthode d'Euler… On peut évaluer les deux types d'erreurs : de méthode, due à la discrétisation et d'arrondi, en étudiant la sensibilité par rapport au pas h, et celle par rapport aux conditions initiales qui permet de vérifier l'estimation de l'horizon sur lequel l'erreur reste acceptable. Ceci conduit à développer des méthodes à pas variable consistant à réduire ou augmenter le pas suivant les résultats des évaluations locales »* (Kahane, 2002, p. 192).

et sa situation, se justifie précisément à travers sa capacité à obtenir cet ordre de grandeur raisonnable et représentatif.

La nature du contrôle exercé sur la réponse obtenue trace une distinction significative entre l'approximation et l'estimation. Un dernier axe à aborder est la rationalité sous-jacente au fait de s'engager dans une estimation ou une approximation. En d'autres mots, « pourquoi estimer ? » ou « pourquoi approximer ? ».

4.4. Axe 3 : Rationalité sous-jacente au recours à une estimation et à une approximation

La réponse à cette question pour l'approximation est simple : « il n'y pas d'autre choix ! ». Aller vers une approximation est en premier lieu un *choix conceptuel*, car il est impossible d'obtenir la valeur exacte avec les outils et les théories disponibles. L'approximation renvoie ainsi à un aspect conceptuel, qui permet d'avoir une main sur de nouveaux objets mathématiques, de leur donner un sens et de les approcher, bien que ce soit de manière imparfaite, à travers cette approximation. Tel que mentionné, ces raisons peuvent souvent être délaissées dans l'enseignement des mathématiques, où l'accent peut être mis davantage sur l'aspect opératoire de cette approximation (les méthodes pour approximer). Ceci fait en sorte que les raisons qui conduisent à entrer dans le monde mathématique de l'approximation peuvent ne pas être mises en avant de façon explicite. Or c'est là la raison principale de l'approximation, qui permet d'aborder des problèmes et concepts pour lesquels seule une résolution approchée est accessible (Kahane, 2002). Voici diverses situations qui motivent une telle approximation :

- *argent* : le passage à de nouvelles monnaies (par exemple, du franc à l'euro) ou la disparition de pièces de monnaie sur le marché (par exemple, le 1 cent au Canada, les pièces de 5 et 10 centimes en France) vont obliger à arrondir le résultat lors des achats payés en argent comptant ou pour rendre la monnaie (alors que la carte de crédit, elle, conserve les cents et centimes ou fait directement la conversion) ;
- *aire* : l'aire des figures aux contours curvilignes, qui sont approchées par d'autres formes, ou encore les calculs d'aire sous la courbe en calcul différentiel et intégral ;
- *calculs* : l'obtention de la racine carrée de certains nombres (3,162 comme approximation de la racine carrée de 10) ou l'utilisation de 3,1416 pour représenter le nombre π dans certains problèmes faisant intervenir le cercle.

Dans le cas de l'estimation, les raisons qui conduisent à estimer sont de trois ordres : (1) pour simplifier (l'analyse de) la situation ; (2) pour se faire une idée de l'ordre de grandeur (quantité considérée, vue d'ensemble de la situation, offrir un jugement raisonnable sur un ordre de grandeur); (3) pour voir vite ce qui se passe (pour permettre une rapidité d'exécution). L'estimation est ici, contrairement à l'approximation, un choix : il est possible techniquement de ne pas la faire et de déterminer la valeur exacte. Toutefois, cette valeur exacte est souvent peu pertinente pour ce qui est visé. En estimation, ce n'est pas la réponse exacte qui est cherchée, mais plutôt l'obtention d'un sens des grandeurs, voire de l'amplitude associée à celles-ci. Voici quelques exemples faisant appel à une estimation :

- *argent* : pour un achat, il est souvent nécessaire de se donner un ordre de grandeur relativement à ce que peut coûter un article voulu ou encore un voyage de manière à prévoir un montant d'argent global ;
- espace : pour l'organisation d'une fête dans une salle, connaître le nombre exact de personnes n'est pas toujours pertinent. Il est plutôt question d'avoir une vue d'ensemble du nombre de personnes qui pourraient entrer dans la salle (par exemple, un certain intervalle) pour planifier sa taille et son organisation ;

• mesures : pour émettre un jugement face à certaines situations de mesure, avoir une image mentale de certaines mesures peut être fort utile. Par exemple, lors d'événements marquants, tels les 27 000 décimètres cube de diesel déversés à Longueuil, au Québec, en 2015 : une estimation de ce que cette quantité représente permet d'avoir une idée de son importance environnementale, voire de la comparer à d'autres (*e.g.* la marée noire de l'*Exxon Valdez* de 1989 ou la tragédie de 2010 du *Deepwater Horizon*). Pour un déménagement, le volume exact ou les longueurs précises des meubles importe peu, mais la question est surtout de savoir si le fauteuil ou le piano « entre » dans la pièce visée. Pour l'emballage de la nourriture avec du papier d'aluminium ou avec une pellicule de plastique, il importe d'avoir une idée de la surface nécessaire pour emballer son sandwich et non des dimensions précises de ce dernier.

5. Discussion sur l'apport de cette conceptualisation

Les éléments qui précèdent permettent de mieux cerner l'approximation et l'estimation, relativement à leurs significations et leurs distinctions. Cette conceptualisation mène aussi à mieux saisir l'intérêt que l'estimation et l'approximation présentent pour l'enseignement des mathématiques et pour les travaux de recherche.

5.1. Sur le plan de l'enseignement des mathématiques

En faisant ressortir, d'une part, les liens forts qui unissent le monde de l'approximation et celui du développement de nouveaux concepts mathématiques chez l'élève et, d'autre part, celui de l'estimation et du travail sur les grandeurs, cette conceptualisation nous fournit des pistes intéressantes pour l'enseignement. Dans le cas de l'approximation, il est possible de penser, pour l'école primaire et secondaire, à l'extension du champ des nombres, soit des nombres naturels aux nombres rationnels et décimaux, puis aux nombres réels, où ces liens peuvent être mis en évidence. Il est également possible, par exemple, dans le travail sur le nombre π ou les racines carrées, de percevoir toute l'activité mathématique que ce travail engage et qui sous-tend leur approximation : explorations, conjectures, itérations, reformulations, etc. Dans cette perspective, le recours à l'approximation dans l'enseignement des mathématiques apparaît bien plus riche que celui de simples procédures auxquelles le restreint souvent cet enseignement (*e.g.* 0 à 4 s'arrondit à 0 et 5 à 9 s'arrondit à 10). L'approximation n'a en effet de pertinence que si sa nécessité est d'abord comprise. Les rapports entre la nécessité d'une approximation et le développement de concepts mathématiques apparaissent au centre du travail pouvant être mené avec les élèves. L'*intention* est de travailler sur la construction de concepts pour lesquels l'approximation apparaît comme outil fondamental de conceptualisation et d'initier l'élève au monde mathématique de l'approximation dans toute sa richesse en lien avec ces développements conceptuels. Cette entrée peut permettre à l'élève de s'initier à un tout nouveau monde mathématique, qui l'éloigne de celui qui lui est familier (faisant intervenir un certain rapport aux nombres et au calcul, jusqu'alors associé à l'idée d'exactitude du résultat) ; sans compter le développement d'une sensibilité « métamathématique » reliée à l'activité mathématique elle-même et ce qu'elle implique.

Un autre élément à considérer, toujours en lien avec l'approximation, est celui associé à l'utilisation d'algorithmes permettant de réaliser ces approximations. Notre conceptualisation, en mettant l'accent sur les liens forts entre approximation et développements mathématiques, *replace au premier plan le rapport entre approximation et raisonnement*. Sous-jacente à l'approximation est en effet présente l'idée d'encadrement, soit de rapprochement à l'aide de grandeurs intermédiaires, qui nous permet de raisonner cette approximation et de lui donner un sens, comme l'illustrent certains algorithmes développés historiquement pour approcher le nombre π ou $\sqrt{2}$. Cette facette de l'approximation qui repose sur l'utilisation d'objets géométriques (des polygones circonscrits et inscrits dans le cercle pour π, des rectangles ayant la même aire mais étant « de plus en plus carrés » pour la racine carrée) montre bien sur quoi s'appuie la construction d'algorithmes d'approximation. Autrement dit, *au cœur du calcul repris dans les algorithmes d'approximation, il y a des raisonnements susceptibles de mettre en évidence ce qui les fonde*. Nous rejoignons en ce sens les propos du rapport Kahane (2002) et l'importance de ne pas travailler uniquement sur la dimension automatisée du calcul d'approximation, mais aussi sur sa dimension raisonnée.

> *Le travail sur le calcul va comporter deux facettes : une facette qui renvoie à l'ambition d'automatisation du calcul, une facette qui renvoie à un calcul raisonné, qui peut être éventuellement guidé par des méthodes mais qui n'est pas automatisable ou que l'on ne cherche pas à automatiser […]. En fait, tout calcul un peu complexe imbrique, dans une subtile alchimie dépendant bien sûr des contextes et des connaissances disponibles, des moments où le calcul se raisonne et des moments où le calcul s'automatise* (Kahane, 2002, pp. 179-181).

Dans le cas de l'estimation, notre conceptualisation met en évidence son caractère transversal dans l'enseignement des mathématiques comme forme de raisonnement à privilégier. Ce raisonnement prend appui sur une image mentale de quantités, de grandeurs et de leurs relations, venant en retour donner un sens à celles-ci. La signification même de ce que veut dire mesurer, dans le cas du travail sur les longueurs, aires, les volumes, etc., dans son acte de comparaison à des grandeurs étalons intermédiaires, y est convoquée. Estimer renvoie aussi à l'emploi de manières particulières de dénombrer ces grandeurs étalons, qui constituent une *conceptualisation en acte de la construction d'une formule* (de calcul, *e.g.*, de l'aire ou du volume) considérée dans sa forme embryonnaire. Estimer le nombre de livres qui entre dans une caisse ou le nombre de bureaux pouvant être placés dans une salle exige de visualiser la forme de la boîte ou celle de la pièce, d'imaginer la boîte remplie de livres ou la pièce de bureaux, de faire une comparaison avec un livre ou un bureau, etc. Par la suite, estimer combien de ces livres entreraient dans une autre boîte prendra appui sur une comparaison de la 2^{e} boîte par rapport à la 1re, etc. Dans le travail sur les nombres et les opérations, l'estimation contribue également à construire un sens aux quantités en présence et aux propriétés mises en œuvre dans ces estimations. Par exemple, vouloir estimer par quel nombre il faut multiplier 327 pour arriver à 100 prendra appui sur certains facteurs à retenir pour en arriver à réaliser l'estimation et aux propriétés en acte utilisées (« 100 c'est à peu près le tiers de 327, pour arriver à 100 il faut donc diviser environ par 3 ou multiplier par un nombre trois plus petit que 1 » ou « la moitié de 300 donnerait 150, je dois réduire davantage », etc.).

À travers cette conceptualisation, l'estimation se décrit comme un processus à développer tout au long du travail mené dans le domaine numérique et sur les mesures de grandeurs. En d'autres mots, et c'est ce que propose implicitement le programme d'études québécois, estimer relève d'un raisonnement clé à privilégier, en quelque sorte transversal, se mobilisant sur l'ensemble des contenus scolaires. Cette conceptualisation s'aligne avec les propos de Capponi et Clarou (1983) à l'effet que ce souci d'estimer ou sa pertinence dépasse des activités ou situations ponctuelles et est présent tout au long du cursus scolaire. L'*intention visée* à travers ces activités d'estimation est alors de développer chez l'élève un contrôle réfléchi sur l'activité de calcul, de mesurage, voire de résolution de problèmes, et de favoriser une certaine compréhension du travail sur les nombres et les grandeurs (par opposition aux techniques de calcul et de mesurage) ; travaillant du fait même les propriétés mises en œuvre au cœur de cette estimation.

Ainsi, cette conceptualisation *aide à mieux cibler*, à travers son socle fondateur, *différents contenus et aspects* de cet enseignement, où l'estimation et l'approximation peuvent être mises à profit, *tout en précisant des intentions* didactiques sous-jacentes.

Cette conceptualisation peut aussi servir de base pour penser des situations et activités d'enseignement ayant une pertinence pour le développement de l'estimation et de l'approximation. Le rapport à la valeur exacte (axe 1) représente ainsi une piste pour penser des situations permettant à l'élève de mieux voir la pertinence de l'approximation et de l'estimation. Il s'agit de faire saisir, par l'activité proposée, que la valeur exacte est à toute fin pratique non accessible, dans le premier cas, et que s'en approcher est possible et pertinent pour avancer dans le problème. Pour l'estimation, il s'agit de faire voir à l'élève, par l'activité proposée, l'importance que revêt la recherche de l'ordre de grandeur, car la valeur exacte n'est pas la préoccupation première.

Les activités proposées pourraient aussi être conçues pour travailler un certain contrôle par l'élève de cette approximation ou estimation (axe 2). Dans le cas de l'approximation, il est possible de s'interroger sur ce que peut représenter un écart acceptable entre différentes approximations : Jusqu'à quel point telle réponse reste ou non acceptable ? Jusqu'où est-il possible d'aller concernant une certaine tolérance par rapport à l'approximation au regard du problème ou de la question posée ? Comparer différentes réponses pour la même question, se prononcer sur leur viabilité, justifier et expliquer les critères et les raisons sous-jacentes aux choix faits, etc., et engager une argumentation sur ce qui constitue ou non un écart acceptable représentent des activités mathématiques importantes à mettre en route dans le cadre de l'approximation d'un certain résultat. Dans le cas de l'estimation, sur un tout autre registre, ces situations peuvent être pensées pour développer le jugement de l'élève au regard du contexte et des circonstances dans lesquels plusieurs estimations sont possibles : s'inscrire dans un certain contexte pour développer le sens de l'estimation (*e.g.* se faire une image de la longueur du bras spatial canadien utilisé par la NASA, de la quantité de diesel qui s'est déversée à tel endroit), aider à construire une image de différentes grandeurs intermédiaires pouvant être mises à profit par l'élève dans une estimation (*e.g.* « à peu près trois boîtes entrent en largeur dans la remise, et chacune des boîtes mesure presque 2 pieds, donc ceci donne 6 pieds environ de largeur »). Enfin, la rationalité qui sous-tend le recours à l'estimation et à l'approximation (axe 3) est aussi un outil intéressant pour penser des situations. L'objectif est alors de faire saisir à l'élève l'intérêt éventuel qu'il peut y avoir à approximer ou à estimer : un choix avant tout conceptuel dans le premier cas *versus* une aide qui nous permet de voir vite ce qui se passe dans le second cas.

5.2. Apports de cette conceptualisation pour la recherche

Même si quelques travaux de recherche ont avancé sur le développement de telles situations et activités d'apprentissage (voir notamment Brousseau & Brousseau, 1992, 1986 ; Capponi & Clarou, 1983 ; Bednarz & Poirier, 1994), ces chercheurs n'ont pas nécessairement pensé leurs activités en termes d'estimation ou d'approximation (*e.g.* la situation des feuilles de papier chez Brousseau a été pensée pour l'introduction aux nombres rationnels). Ou, s'ils l'ont fait, ils n'ont pas creusé ni explicité les fondements qui les guident (*e.g.* du point de vue de l'estimation, chez Capponi et Clarou ou Bednarz et Poirier). Il y a donc ici des pistes pour les travaux de recherche qui demeurent à creuser. Une telle conceptualisation peut s'avérer porteuse pour l'analyse des productions d'élèves : repérer les processus mis en oeuvre et les propriétés utilisées dans une situation donnée pour en percevoir leurs limites et potentiels. L'extrait de classe présenté en début d'article, qui est le point de départ de notre travail, permet d'appuyer la pertinence d'une telle analyse, au regard de la conceptualisation développée.

Significations mises en œuvre par les élèves

Dans cet extrait, les élèves avaient à estimer la somme de 152 498 et 608 947 mentalement. Au-delà des méthodes d'arrondissement mises en évidence (arrondir au nombre supérieur ou inférieur en fonction des chiffres en présence aux centaines de mille [Franck], arrondir au nombre supérieur ou inférieur pour les centaines en tenant compte des chiffres aux dizaines et unités [situation par rapport à 50 de Philippe] et arrondir au chiffre le plus loin sur la gauche en tenant compte des chiffres dans la position précédente [Mathieu]), nous sommes dans tous ces cas sur une approximation du résultat qui relève d'une signification davantage opératoire de l'approximation que conceptuelle. De plus, cette signification opératoire se rapproche davantage d'une utilisation automatisée de procédures que « raisonnée », permettant d'expliquer les choix qui sont faits. Des questions du type « Pourquoi arrondir ainsi ? », « Sur quelle base le faire ? », « Quel contrôle exercer sur la marge d'erreur ? » et « Quelle pertinence pour avoir recours à une telle approximation ? » ne sont pas explicites dans le travail réalisé, ni les actions posées ou les explications offertes. Ceci pointe sur le niveau procédural des explications et argumentations fournies par les élèves, et de l'activité mathématique engagée, campées dans l'application de procédures apprises pour réaliser un arrondissement. À de rares occasions, dans cet extrait, apparaît un recours à une activité mathématique qui relève davantage de l'estimation : par exemple, lorsque Philippe a recours à 600 000 (au lieu de 608 900) et 150 000 (au lieu de 152 500). Cette estimation sollicite un jugement sur les quantités globales en présence et fait référence à des ordres de grandeur qui lui permettent de se faire une idée de la réponse. Le calcul avec les nombres que Philippe a arrondi (à 152 500 et 608 900) étant complexe à réaliser mentalement, ce que ses propos mettent bien en évidence, il a recours à un ordre de grandeur qui lui permet d'opérer plus facilement. La pertinence de l'estimation lui permettant de simplifier la résolution devient ici saillante.

Par ailleurs, dans cet extrait, une différence entre approximation et estimation est également visible. Par exemple, ceci se voit lorsque Franck justifie qu'il a choisi 200 000 comme résultat de l'arrondissement de 152 498, en disant que 200 est plus proche de 152. Il ne s'agit alors nullement d'un raisonnement sur les quantités globales en présence, car 150 000 dans ce cas est plus proche et peut être utilisé dans une estimation autant que 200 000. Il s'agît plutôt d'une méthode qui regarde le 52 pour juger du nombre aux centaines de mille à prendre. Par contraste, il est possible de voir que l'estimation se raisonne sur des quantités globales en présence et sur un ordre de grandeur : Philippe ramène le premier nombre à 600 000 et le deuxième à 150 000, et se donne un ordre de grandeur pour chacun d'entre eux, qui lui permet de se faire une idée du résultat. Plusieurs estimations seraient ici possibles de la part des élèves (*e.g.* 100 000 et 600 000 ; 150 000 et 600 000 ; 155 000 et 600 000) et peuvent être exploitées lors d'un retour axé sur le sens. Dans l'autre cas, l'approximation s'appuie sur des chiffres et des procédures liées à la position de ces chiffres. Elle relève davantage d'une manipulation de symboles que de quantités. Se pose alors la question centrale du nécessaire dépassement des méthodes pour aborder toute la richesse de l'approximation sur un plan mathématique. Ceci souligne, bien que de façon synthétique, les distinctions entre estimation et approximation mises en œuvre par les élèves, et l'interaction possible et potentielle pouvant avoir lieu entre l'estimation et l'approximation lors de la résolution d'un problème mathématique.

Rapport à la valeur exacte

La question posée d'entrée de jeu par le chercheur semble restreindre la liberté d'action des élèves quant aux choix à faire entre approximation et estimation. Mais, au-delà de cette considération, connaître la valeur exacte du résultat est possible ici, et les élèves le savent très bien (certains vont même plus tard durant la séance tenter de la déterminer). Bien que possible, celle-ci est par contre difficile à obtenir mentalement et reste difficile d'accès pour les élèves dans le contexte donné. L'engagement des élèves à la recherche d'une valeur précise qui se rapproche le plus possible de cette valeur exacte se fait donc majoritairement par un travail d'arrondissement à travers leurs procédures, les menant à une réponse.

Contrôle exercé sur les réponses obtenues

Lors des arrondissements réalisés, les élèves appliquent les méthodes d'arrondissement enseignées, qui leur garantissent implicitement une marge d'erreur acceptable (sans qu'ils en soient pour autant conscients). Ceci place leur contrôle dans un domaine non dépendant d'eux, mais inhérent aux méthodes d'arrondissement. Toutefois, les élèves vont choisir eux-mêmes « l'endroit » où arrondir : centaines de mille, dizaines, unités, etc. Leurs réponses sont alors relatives à leurs choix pour arrondir (car la tâche n'a pas signalé un endroit précis pour le faire, au contraire des exercices usuels d'arrondissement qui ciblent précisément une valeur de position). C'est aussi ce qui fait émerger une variété possible de réponses, reliées subjectivement à leurs choix. Ainsi, le contrôle sur la réponse oscille entre l'objectivité (dont ils ne sont pas vraiment conscients) et la subjectivité reliée à leurs choix et préférences. Lors de l'estimation à laquelle a recours Philippe, un jugement est au contraire porté sur un certain choix d'ordre de grandeur des nombres à ajouter qui lui permet d'opérer et de se faire une idée du résultat.

Rationalité qui conduit à estimer ou approximer

Le recours à l'approximation chez les élèves, alors que la question était posée en termes d'estimation, ne met pas de façon explicite en avant les raisons qui ont pu les conduire à faire cela. Il y a sans doute ici un effet de contrat lié à des méthodes qui ont été introduites en classe lors de l'enseignement, mais ceci reste implicite. Par contre, le recours à l'estimation est clairement appuyé par un souci de pouvoir opérer facilement mentalement et de se faire une idée du résultat.

Cette analyse est rapide et mérite bien évidemment approfondissement. Des analyses menées sur d'autres exemples permettraient d'aller plus loin de manière à cerner la richesse de cette conceptualisation pour la recherche en didactique des mathématiques. Mais, déjà, cette courte analyse montre l'intérêt et le potentiel de la conceptualisation développée, et de ses distinctions, pour cerner plus en détails le travail fait par les élèves et les significations qu'ils mobilisent.

Conclusion

Notre questionnement sur l'estimation et l'approximation a pris son ancrage dans le travail mathématique des élèves, soit leurs idées et manières de faire. Ces dernières nous ont en retour questionné et amené à prendre un pas de recul sur l'estimation et l'approximation, à travers certaines ressources à la disposition des enseignants. C'est en fouillant dans les lexiques et les programmes (et nous aurions pu aussi regarder les manuels scolaires) que nous avons vu de façon saillante la confusion qui existe entre estimation et approximation ; une confusion qui trouve une résonance avec le travail des élèves duquel nous sommes partis.

Ce flou entre l'estimation et l'approximation, révélé par notre analyse, fait ressortir la nécessité d'une clarification conceptuelle, dont il est possible *a posteriori* de cerner le potentiel : dans la mise en évidence des contenus et processus mathématiques permettant de travailler l'estimation et l'approximation, dans la clarification de situations et d'activités d'enseignement porteuses pour leur développement et dans l'analyse de productions d'élèves. Plusieurs verront dans cette conceptualisation une force des travaux de recherche en didactique des mathématiques, dans lesquels les mathématiques, leur compréhension, leur développement, inspirent les investigations didactiques et, en retour, dans lesquels les questionnements de nature didactique peuvent inspirer des interrogations sur les mathématiques elles-mêmes.

Il est possible *a posteriori*, à travers l'analyse de l'exemple portant sur l'estimation dans le domaine numérique (estimation de sommes de nombres entiers) d'entrevoir le potentiel de la conceptualisation développée. D'autres études devront être menées auprès d'élèves du primaire et du secondaire, dans différents domaines (numérique, géométrique, mesure), touchant aux opérations, aux pourcentages, à la mesure de grandeurs, à la résolution d'équations en algèbre, aux fonctions, etc, qui permettront de cerner, en s'appuyant sur cette conceptualisation, le potentiel mathématique que revêt le travail sur l'estimation et l'approximation, et la richesse de l'activité mathématique qui y est sollicitée chez les élèves. C'est la suite à entreprendre pour ce travail.

Références bibliographiques

Allinger, G. D. & Payne, J. N. (1986). Estimation and mental arithmetic with percent. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.), *Estimation and mental computation* (pp. 141-155). Reston, VA: NCTM.

Baruk, S. (1995). *Dictionnaire des mathématiques*. France : Seuil.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1984). Problèmes d'apprentissage de la mesure au primaire et éléments d'apprentissage pertinents. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, 24*(3), 9-17.

Bednarz, N. & Poirier, L. (1994). *Construire un sens à la mesure. 1) Estimation ; 2) Mesurer, ça veut dire quoi ?* [vidéo VHS, couleur, 44 *min*.]. Production bureau des moyens d'enseignement, CECM.

Behr, M. J., Post, T. R. & Wachsmuth, I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.), *Estimation and mental computation* (pp. 103-111). Reston, VA: NCTM.

Benton, S. E. (1986). A summary of research on teaching and learning estimation. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.), *Estimation and mental computation* (pp. 239-248). Reston, VA : NCTM.

Bouvier, A., George, M. & Le Lionnais, F. (2009). Dictionnaire des mathématiques. Presses Universitaires de France : Paris.

Brousseau, N. & Brousseau, G. (1992). Le poids d'un récipient. Étude des problèmes de mesurage en CM. *Grand N, 50*, 65-87.

Brousseau, N. & Brousseau, G. (1986). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

Brousseau. G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(1), 37-127.

Capponi, B. & Clarou, P. (1983). C.P.P.N. *Petit x, 1*, 41-56.

Carlow, C. D. (1986). Critical balances and payoffs of an estimation program. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.), *Estimation and mental computation* (pp. 93-102). Reston, VA : NCTM.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. [Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII].

Champlain, P., Mathieu, P., Patenaude, P. & Tessier, H. (1996). *Lexique mathématique - enseignement secondaire (2e édition)*. Beauport, Canada : Éditions Triangle d'Or.

Coburn, T. G. & Shuttle, A. P. (1986). Estimation in measurement. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.), *Estimation and mental computation* (pp. 195-203). Reston, VA: NCTM.

Côté, R., Gagnon, M., Perreault, N. & Roegiers, X. (2002). *Leximath : lexique mathématique de base (2e édition)*. Laval, Qc : Beauchemin.

Davis, P. (1961). *The lore of large numbers*. MAA: Washington DC.

Deledicq, A. (2004). *Maths - Lycée*. France : Éditions de la Cité.

Douady, R. (1984). *Dialectique outil/objet et jeux de cadres. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. [Thèse d'état, Université Paris VII].

Douady, R. & Perrin, M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface place. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 387-424.

Dufour, N. (2011). *Dictionnaire mathématique CEC*. Anjou, Qc : Éditions CEC.

Hilton, P. & Pederson, J. (1986). Approximation as an arithmetic process. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.), *Estimation and mental computation* (pp. 55-71). Reston, VA: NCTM.

Itoh, A. & Mizusawa, Y. (1994). Assessment of computational estimation. Dans R. E. Reys & N. Nohda (éds.), *Computational alternatives for the 21st century* (pp. 63-75). Reston, VA : NCTM.

Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, 37*(3), 28-41.

Kahane, J.-P. (2002). *L'enseignement des Sciences Mathématiques. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Chapitre 4, le Calcul* (pp. 171-262). Paris : Éditions Odile Jacob.

La Ferla Morgan, V. R. (1986). Teaching measurement estimation through simulations on the microcomputer. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.), *Estimation and mental computation* (pp. 204-211). Reston, VA: NCTM.

Mobouli, V. (2020). *Étude de la résolution de situations-problèmes par des élèves en difficulté* *d'apprentissage en mathématiques au 1er cycle du secondaire : potentialités et difficultés*. [Thèse de doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal].

Proulx, J. (2021). Investigating the specific and alternative nature of mental mathematics strategies: the case of systems of equations. *Journal of Mathematics Education, 14*(1), 71-91.

Reys, R. E. & Nohda, N., avec Shimizu, K. & Smith, D. (éds.) (1994). *Computational alternatives for the 21st century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States*. Reston, VA: NCTM.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.

Saboya, M., Bednarz, N. & Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre : analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. Partie 1 : la résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 20*, 61-100.

Schoen, H. L. (1994). Assessing computational estimation: research and new directions. Dans R. E. Reys & N. Nohda (éds.), *Computational alternatives for the 21st century* (pp. 87-97). Reston, VA: NCTM.

Schoen, H. L. & Zweng, M. J. (éds.) (1986). *Estimation and mental computation*. Reston, VA: NCTM.

Silver, E. (1994). Treating estimation and mental computation as situated mathematical processes. Dans R. E. Reys & N. Nohda (éds.), *Computational alternatives for the 21st century* (pp. 147-160). Reston, VA: NCTM.

Tozzi, M. (2018). Former un animateur aux processus de pensée philosophiques : des compétences pour conceptualiser. *Revue internationale de la didactique et des pratiques de la philosophie, 77*, 1-15.
http://diotime.lafabriquephilosophique.be/numeros/077/005/

Trafton, P. R. (1986). Teaching computational estimation: establishing an estimation mind-set. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.) *Estimation and mental computation* (pp. 16-30). Reston, VA: NCTM.

Trafton, P. R. (1994). Computational estimation: curriculum and development efforts and instructional issues. Dans R. E. Reys & N. Nohda (éds.), *Computational alternatives for the 21st century* (pp. 76-86). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (1986). Reasons for estimating. Dans H. L. Schoen & M. J. Zweng (éds.) *Estimation and mental computation* (pp. 1-15). Reston, VA: NCTM.

Yoshikawa, S. (1994). Computational estimation: curriculum and instructional issues from the Japanese perspective. Dans R. E. Reys & N. Nohda (éds.), *Computational alternatives for the 21st century* (pp. 51-62). Reston, VA: NCTM.

Documents ministériels - Québec

MELS (2009). (Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur du Québec). *Progression* des apprentissages au secondaire - mathématiques (PDA)*.

MELS (2016). (Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur du Québec). *Progression des apprentissages au secondaire - mathématiques (PDA)*.

MEQ (2006). (Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur du Québec). *Programme de formation de l'école québécoise - mathématiques. Enseignement primaire*.

MEQ (2006). (Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur du Québec). *Programme de formation de l'école québécoise - mathématiques. Enseignement secondaire (1er cycle)*.

MEQ (2007). (Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur du Québec). *Programme de formation de l'école québécoise - mathématiques. Enseignement secondaire (2e cycle)*.

Documents ministériels - France

MENSR (2015) (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche). *Programme de mathématiques. Cycles 2 et 3. Programmes de l'école élémentaire ; Cycles 3 et 4. Programmes du collège*. BOENJS, spécial n° 11 du 26/11/2015.

https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400

MENSR (2019a) (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche). *Programme de mathématique de seconde générale et technologique*. BOENJS, spécial n° 1 du 22/01/19.

https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=38502

MENSR (2019b) (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche). *Programme de mathématiques de première technologique, séries STD2A, STHR, STI2D, STL, STMG et ST2S*. BOENJS, spécial n° 1 du 22/01/19.

https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901630A.htm

MENSR (2019c). (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche). *Programme de mathématiques de première générale*. BOENJS, spécial n° 1 du 22/01/19.

https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm