UNE BANQUE D'EXERCICES DE MATHEMATIQUES : BRUYERE

Daniele BOISNARD
C.A.T.E.N. Rennes

I – PROBLEMATIQUE.

Une oreille indiscrète surprend un dialogue en salle des professeurs.

JR - Une banque d'exercices de mathématiques ? Mais pour quoi faire ? Moi je trouve tous les exercices dont j'ai besoin dans les manuels.

DB - Eh bien, pas moi. Les exercices d'entraînement systématique, d'accord ; on en trouve beaucoup et partout. Mais lorsqu'on cherche des exercices susceptibles d'aider à introduire une notion ou des exercices bien adaptés à l'évaluation, ou développant plus spécialement les facultés logiques par exemple, on est obligé de compulser une documentation importante et dispersée, voire de les construire soi-même ce qui est certes très intéressant, mais qui prend beaucoup de temps. Et comment résous-tu le problème des classes hétérogènes ?

JR - Oh moi, je fais comme si elles ne l'étaient pas. Ce n'est pas de ma faute si les enfants ne redoublent plus et arrivent au collège sans les acquis nécessaires. Je traite le programme et ceux qui ne suivent pas, tant pis !

DB - Mais ne penses-tu pas qu'avec des outils spécifiques il serait possible d'individualiser les prescriptions de travail ?

JR - Peut-être mais il faudrait d'abord faire le bilan de chaque élève pour savoir ce qu'il sait déjà faire et ce qu'il lui reste à acquérir. Alors, tu penses, avec mes 150 élèves cette année, comment veux-tu que je m'en tire ? Je passerais au moins 2 mois de l'année scolaire à faire le bilan. Qu'est-ce qu'il me restera pour faire les programmes ?

«petit x» n° 11 pp. 67 à 88, 1986

DB - Mais le programme, à quoi sert-il pour des élèves qui n'ont pas les prérequis pour l'assimiler ?

JR - Ça ce n'est pas mon problème. C'est celui des dirigeants du Système Educatif... Au lieu de répondre à nos besoins, ils nous bombardent de micro-ordinateurs dont on ne sait que faire !

DB - C'est peut-être utopique mais pourquoi ne pas essayer de tirer parti de l'introduction de l'informatique pour concevoir des outils répondant à ces types de besoins ? Les machines n'ont pas à reproduire des cours tels que nous les faisons pour des classes entières mais plutôt à nous démultiplier pour des moments particuliers et répétitifs de notre action :

— faciliter notre documentation, préparer nos tirages ;

— préparer le terrain de l'évaluation formative par une évaluation sommative indicative (quitte à ce que nous ayons à rectifier quelques dérapages inévitables, cependant le gros de la tâche pourrait être déblayé) ;

— fournir à chaque élève un menu de travail adapté à ses acquis et à ses besoins pour faciliter la démarche de travail autonome.

JR - Alors là, ce n'est pas pour demain...

Le dialogue ci-dessus est évidemment caricatural, mais il situe la démarche qui a pu être la mienne et c'est avec cette quête que j'ai abordé la période «introduction de l'informatique».

Ayant eu connaissance d'un logiciel de gestion de bases de données sur micro-ordinateur, je me suis mise à penser à l'architecture d'un produit qui pourrait avoir 3 fonctions différentes :

1. Fournir des énoncés d'exercices ou de problèmes en fonction de critères permettant de décrire les objectifs de ceux-ci.

2 Fournir des tests d'évaluation sommative permettant de dresser un bilan approximatif des connaissances de l'élève et repérant quelques-uns des modèles implicites selon lesquels il conçoit les notions et résout les problèmes.

3 Fournir des séquences de travail autonome correspondant au bilan préalablement dégagé des tests.

Ce produit se situerait donc comme aide à l'enseignant dans la perspective d'une meilleure connaissance des erreurs des élèves et d'une prescription plus individualiste à ceux-ci ou comme outil pour un apprenant responsable de ses apprentissages.

Dans cette perspective, je me suis donc attelée à la réalisation sur micro-ordinateur d'une banque d'exercices limitée à la **proportionnalité.**

II – FONCTIONS.

Cette banque : BRUYERE, comporte 3 volets distincts : EXOMA, EVAMA, OTOMA. Les 2 premiers seulement sont réalisés. Chacun d'entre eux correspond précisèment à l'une des fonctions décrites ci-dessous :

1. La fonction documentaire (fournir des énoncés) est assurée par EXOMA, banque de 222 exercices sélectionnables à l'aide de critères explicités plus loin.

2. La fonction d'évaluation (dresser un bilan) est assurée par EVAMA comprenant des tests de 10 exercices à l'issue desquels est dressé un bilan. Trois tests sont actuellement opérationnels.

3. La fonction de tutoriel (guider le travail autonome) sera assurée par OTOMA, encore à l'étude. L'enchaînement des exercices ne sera pas linéaire comme dans EVAMA mais sera déterminé par le type d'erreurs qu'aura commis l'apprenant.

NIVEAUX OPERATOIRES

En référence à la taxonomie de R. GRAS, nous avons spécifié **cinq indicateurs de niveaux opératoires** relatifs à la proportionnalité par les définitions suivantes :

A – Une situation de proportionnalité étant donnée, opérer. (L'opérateur étant donné).

B – Une situation de proportionnalité étant donnée, trouver un opérateur et le faire fonctionner. (Usage direct seulement).

C – Une situation de proportionnalité étant donnée, organiser les données, trouver un opérateur et le faire fonctionner de façon directe et réciproque.

D – Faire opérer la proportionnalité dans une situation ou se mêlent d'autres concepts (aire, volume, poids...) ou composer des relations de proportionnalité.

E – Accepter, réfuter ou critiquer l'adéquation du modèle de la proportionnalité à la situation proposée.

Voyons plus précisément mais sans entrer dans les détails techniques la composition de chaque volet.

III – DESCRIPTIF.

EXOMA.

Son rôle est de faciliter la recherche et de permettre un accès rapide aux énoncés des exercices souhaités. Dans les manuels, il n'existe guère de catégorisation des exercices et c'est ce qui rend la recherche quasi-aléatoire. Il a donc fallu choisir des critères de classement des exercices et je me suis appuyée pour cela sur des travaux antérieurs notamment la taxonomie de R. Gras à partir de laquelle j'ai défini 5 indicateurs de niveau opératoire et une typologie d'activités construite par le même auteur en référence aux objectifs de l'enseignement des mathématiques (8 types).

Cette grille à permis d'illustrer le fait que la plupart des exercices de manuels se situent seulement dans quelques unes des 40 cases ainsi définies. Un des apports de notre équipe a donc consisté à élargir la palette des exercices en en créant pour les cases vierges.

Nous avons aussi estimé utile de rédiger, à niveau et type d'activité fixés, 3 habillages* différents prenant en compte la catégorie d'âge de l'utilisateur potentiel.

TYPES D'ACTIVITES

En référence à une typologie d'activités construites par le même auteur, nous avons retenu **huit types d'activités** et tenté de trouver des exercices leur correspondant pour chacun des niveaux précédemment définis :

HEURISTIQUE : chercher en tâtonnant.
TRADUCTIF : passer d'un langage dans un autre.
CLASSIFICATOIRE : classer, organiser, ordonner.
CALCULATOIRE : appliquer des algorithmes.
LOGIQUE : raisonner, prouver, enchaîner des informations.
REINVESTISSEMENT : opérer dans un contexte différent de celui de l'apprentissage.
CRITIQUE : maîtriser la vraisemblance.
PREDICTIF : estimer, induire.

* **Trois classes d'âge** ont donné lieu à des habillages d'exercices distincts :

1 – douze ans et moins ;
2 – entre douze et seize ans ;
3 – plus de seize ans.

On peut donc appeler, à l'aide de mots-clés, les énoncés d'exercices correspondant à un besoin particulier.

Par exemple.

Considérons un élève de 5ème travaillant sur la proportionnalité il sait employer correctement un coefficient de proportionnalité, on veut lui apprendre à en déterminer un dans un contexte qui l'aidera à développer ses capacités de classification, sans l'embarasser avec les pourcentages.

Les mots-clés correspondant à ce choix seront :

Proportion, pourcentage, classificatoire (pour le type d'activité), **B** (pour le niveau opératoire), **2** (pour la classe d'âge),

et cette requête se formulera :

Proportion sauf pourcentage et 2 et B et classificatoire.

Les énoncés répondant à cette prescription seront automatiquement sélectionnés par le système.

Le balisage des exercices ainsi réalisé selon 4 types de critères :

Notions, niveaux opératoires, types d'activité, classe d'âge,

est bien entendu discutable et pourra être modifié si d'autres éléments apparaissent plus pertinents pour une discrimination fonctionnelle*.

NOTIONS

Les **notions** sont celles qui, traditionnellement, figurent dans les programmes scolaires. Pour l'instant, les exercices de la maquette portent tous sur la notion de proportionnalité. Le mot-clé PROPORTION est donc inutile. Par contre des spécifications comme ECHELLE ou POURCENTAGE sont mentionnées. Un exercice peut porter sur plusieurs notions indépendantes comme par exemple POURCENTAGE et EQUATION. Il nous a donc paru utile de les mentionner chaque fois que possible.

* Figurent aussi parmi les mots-clés, des descripteurs comme **aire, volume, densité, vitesse, échelle, pourcentage, puissance, taux, etc.** qui permettent de sélectionner les exercices en fonction de la présence ou de l'absence souhaitée des notions sous-jacentes.

Cette proposition de balisage doit donc faire réfléchir à deux questions distinctes :

1. Est-il utile de codifier le contenu des exercices et peut-être même des séquences d'apprentissage ?

2. Comment définir un code simple et utile qui ait de bonnes chances d'être accepté par les utilisateurs.

EVAMA

Cette partie de Bruyère a pour fonction de gérer l'évaluation d'un ensemble d'élèves, de dresser à l'aide de compteurs appropriés, un bilan approximatif des acquis et erreurs de chacun sur une notion donnée, de les communiquer

– d'une part à l'élève, sous forme de commentaires relatifs aux succès et aux erreurs repérées ;
– d'autre part à l'enseignant sous forme de tableaux donnant l'écart de ces compteurs.

Chaque test est conçu à partir d'une sélection de dix exercices soigneusement choisis pour révéler acquis ou modèles erronés classiques.

Aucun résultat ni commentaire n'apparaissent en cours de travail. Celui-ci peut d'ailleurs être interrompu et repris autant de fois que nécessaire.

Le bilan est accessible à partir de la fin du travail et autant de fois qu'on le souhaite.

Choisir des exercices pour qu'ils soient susceptibles de révéler le niveau atteint dans l'échelle des niveaux opératoires et des types d'activité considérés ; les **tester** sur 100 à 150 élèves et parfois plus, pour déceler les modèles erronés classiques, rectifier les énoncés en fonction des observations faites ; **choisir** les traits qui semblaient les plus pertinents à communiquer et informatiser le tout, telle a été la base de notre travail sur Evama.

Evidemment, l'architecture de base d'Exoma est respectée, à savoir le balisage par notions, niveaux opératoires, types d'activité et classes d'âge. Le bilan fait référence à ces critères.

Apparaissent en plus, des informations sur les types d'erreurs repérées, par exemple :

Erreurs d'argumentation, erreurs de calcul, erreurs d'ordre de grandeur, référence à des propriétés fausses, à une quantité brute... etc.

Cela a évidemment nécessité une étude approfondie de toutes les réponses données à un exercice comme on peut en trouver un exemple en Annexe 2.

On ne peut pas affirmer avec certitude qu'une réponse soit révélatrice de telle démarche de l'élève mais, sur un ensemble d'exercices, un faisceau de comportements identiques a tout de même une valeur diagnostique suffisante pour permettre à l'enseignant d'orienter en conséquence ses investigations et sa prescription de travail. C'est sur cette hypothèse que sont fondés les tests d'Evama.

OTOMA.

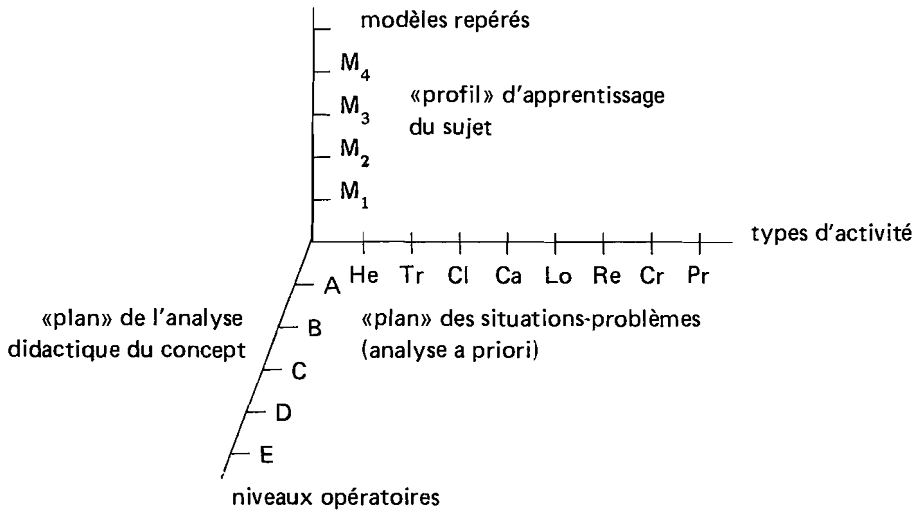
Cette dernière partie de la banque est un outil de travail autonome conçu pour gérer un ensemble de séquences en fonction

– d'une part du bilan obtenu sur Evama ;
– d'autre part des erreurs repérées.

Il s'agit donc de composer un éventail de séquences susceptibles d'apporter des remèdes aux erreurs classiques répertoriées à chaque niveau et de prévoir une organisation différenciée de ces séquences.

C'est évidemment la partie la plus difficile et nous ne sommes pas encore à l'heure actuelle, capables de fournir une maquette opérationnelle.

On peut schématiser les éléments pris en compte par la banque BRUYERE de la façon suivante :



– Les types d'activité correspondent aux objectifs de développement des habiletés chez le sujet et paraissent plus ou moins adaptés à la révélation des modèles erronés.

— Exemples de modèles repérés (qui traduisent des conceptions du sujet) :

- référence à une quantité brute,
- modèles additifs,
- moyenne compensée,
- etc.

IV — ELEMENTS D'EVALUATION.

Quelques commentaires après une préexpérimentation courte en 6ème et en 2ème dans un lycée de Redon et un collège de Lorient :

Exoma et l'un des tests d'Evama ont été laissés à la disposition de quelques professeurs au mois de mai 85 pour qu'ils mettent leurs élèves en contact avec ce produit et fassent des observations à ce sujet.

Pour permettre de recueillir un maximum d'informations, chaque élève avait à remplir une fiche d'observation sur laquelle il faisait apparaître la durée de sa consultation et des remarques libres.

Deux questionnaires avaient aussi été élaborés. Le premier, à remplir avant la consultation, cherchait à déceler la façon dont l'élève ressentait le rôle des exercices dans l'apprentissage des mathématiques, ses difficultés à comprendre les énoncés, ses souhaits par rapport à un travail autonome.

Le second, à remplir après, cherchait plutôt à cerner l'appréciation portée par l'élève sur le produit.

Voici les résultats globaux pour chacun de ces questionnaires. Notons que si ces résultats sont exprimés en pourcentages c'est seulement pour en faciliter la lecture, nous n'oublions pas que le nombre d'élèves examinés (76) ne nous permet pas d'y voir autre chose que des tendances.

ELEVES	**QUESTIONNAIRE numéro 1** (avant expérimentation)
1 — A ton avis, est-il utile de faire des exercices pour comprendre les mathématiques ? non **0%** un peu **30%** beaucoup **70%**	
2 — En général, rencontres-tu des difficultés à comprendre les énoncés d'exercices ? oui **48%** non **48%**	
3 — T'arrive-t-il de faire d'autres exercices que ceux qui te sont proposés par ton professeur ? oui **54%** non **46%**	

4 – As-tu déjà eu besoin d'avoir à ta disposition une collection supplémentaire d'exercices ?
oui **15%** non **84%**

5 – Aimerais-tu avoir une telle collection à ta disposition ?
oui **65%** non **30%**

6 – Aimerais-tu choisir toi-même les textes des exercices dans une telle collection ?
oui **47%** non **50%**

7 – Aimerais-tu pouvoir utiliser cette collection
uniquement dans la classe **18%**
dans ton école ou ton collège (pas forcément dans la classe) **13%**
partout, y compris chez toi **67%**

8 – Pour mieux comprendre un sujet, penses-tu qu'il vaut mieux
faire de nombreux exercices semblables **34%**
faire des exercices assez différents **66%**

9 – Chaque fois qu'on te propose un exercice, aimerais-tu pouvoir trouver facilement et selon tes besoins, des exercices de même type plus faciles ou plus difficiles ?
oui **87%** non **10%**

10 – Aimerais-tu avoir la possibilité de contrôler tout seul ton travail ?
oui **74%** non **25%**

11 – Penses-tu que l'ordinateur pourrait t'aider en mathématiques ? Pourquoi ?
oui **82%** non **13%**

Les grandes tendances nous paraissent être les suivantes :

– Grande importance attachée au nombre des exercices (70% : beaucoup) et à leur variété (2/3 des réponses), tendances qui semblent s'affirmer avec le nombre d'années d'étude.

– L'idée d'une collection d'exercices à disposition de l'élève est bien accueillie avec un souhait de grande accessibilité.

Notons au passage que la classe et l'établissement scolaire sont encore peu perçus comme des lieux favorables au travail autonome.

– Au sujet de 2 questions, les tendances de réponses sont inversées en 6ème et en 2ème :

■ difficulté à comprendre les énoncés

	oui	non
2ème	60%	38%
6ème	28%	72%

▪ choix par soi-même des exercices

	pour	contre
2ème	44%	54%
6ème	56%	44%

Ceci explique peut-être cela....

Enfin, le mythe de l'ordinateur se porte bien. A 80%, il est perçu comme facteur d'aide en mathématiques. Les raisons invoquées par les élèves sont les suivantes.

	POUR	CONTRE
6ème	– plus agréable que le prof – plus intéressant que le prof – a les moyens, tout est enregistré en lui – donne les bonnes réponses, vite – est sûr de ne pas se tromper – a beaucoup de mémoire – vérifie ce qu'on lui dit – explique simplement avec quoi répondre aux questions posées – explique plus clairement que le prof – ne tape pas, ne crie pas – est un supplément au prof	manque d'explications
2ème	– voir soi-même ses fautes sans le prof, voir ses lacunes – travailler seul, se corriger soi-même – être plus concentré – avoir le temps de réfléchir – évaluer ses connaissances exactes – refaire l'exercice jusqu'à ce qu'il soit bon – avoir un grand choix d'exercices en tous genres et de tests pour comprendre – l'ordinateur peut corriger et guider immédiatement et automatiquement, donner d'autres solutions justes, être un professeur à domicile – l'ordinateur est impartial – l'ordinateur incite à la réflexion ce qui est nécessaire en math – l'ordinateur nous amuse et on peut lui faire confiance.	– l'ordinateur montre mais n'explique pas – n'approfondit pas les réponses à nos interrogations – on n'est pas très sûr de son efficacité.

QUESTIONNAIRE numéro 2 (après expérimentation)

Nous n'avons aucun résultat sur la banque d'énoncés EXOMA qui n'a pu être mise à la disposition dans les CDI faute de machines. Cinq élèves seulement ayant pu la consulter une fois, nous considérons que l'expérimentation de ce volet reste à faire, en veillant à ce que ses conditions d'utilisation soient bien conformes à ce qui a été prévu lors de sa construction.

Pour EVAMA, voici les résultats globaux pour un effectif de 76 élèves :

8 – T'es-tu testé(e) sur EVAMA ? oui ☐ non ☐

9 – Si oui, par rapport aux contrôles habituels, ce test t-a-t-il renseigné(e)

	sur ton niveau	sur tes difficultés
mieux	44%	54%
moins bien	13%	6%
aussi bien	35%	29%

10 – Préfères-tu que ton niveau soit estimé par
un enseignant **55%**
une machine **27%**
les deux **16%**

Précise éventuellement pourquoi **l'enseignant explique et corrige**
la machine est impartiale, on est plus concentré.

11 – Es-tu gêné de ne pas connaître le résultat à la fin de chaque exercice ?
oui **71%** non **28%**

12 – As-tu apprécié de te tester seul avec EVAMA ?
oui **98%** non **2%**

13 – Souhaiterais-tu ce type d'évaluation dans d'autres disciplines ?
oui **94%** non **2%**
Sur d'autres sujets en mathématiques ?
oui **94%** non **3%**

Au vu de ces résultats, nous estimons que ces tests, d'une conception nouvelle, sont bien acceptés par les élèves, ce que renforcent d'ailleurs les remarques individuelles faites sur leurs fiches d'observation.

Il est cependant à noter que persiste une forte attente d'explications des erreurs commises à chaque pas, attente que doit prendre en compte OTOMA. Ce n'est que lorsque les 3 volets pourront être présentés en parallèle que la structure prendra tout son sens pour l'apprenant. Malgré ce handicap, le taux de satisfaction est très élevé. Les remarques qui suivent explicitent un peu plus les raisons de cette satisfaction...

«Parfois mal présenté».

«Interessant, permet de contrôler des capacités. Exercices assez difficiles».

«Le premier bilan disparaît trop rapidement. Pourtant les exercices étaient bien».

«Intéressant. Il permet d'évaluer ses réflexes sur ce genre de sujet, sa logique, de juger sa réflexion».

«Je trouve que ce test est très intéressant, il me renseigne mieux sur mon niveau».

«Très intéressant, mais surtout amusant. Travailler ainsi c'est plus distrayant et j'ai beaucoup plus envie de travailler».

«Je trouve cela assez intéressant car cela nous permet de voir notre niveau réel ! et par nous mêmes. On devrait le faire plus souvent !!! Cela nous change des cours ! Un point me gêne : pas la réponse après chaque exercice».

«Pas si évident qu'il le paraît aux premiers abords, mais intéressant. Ça permet de tester nos connaissances et on s'aperçoit que ce qui devrait être connu ne l'est pas».

«Très intéressant et à renouveler plus souvent. Petite critique sur le niveau trop élevé dans chaque catégorie».

«C'était bien. Il y avait des problèmes assez difficiles, mais j'ai aimé».

«La lecture sur le test est facile à lire et j'aime bien réfléchir».

«Je trouve que c'est amusant de travailler tout seul sur un ordinateur».

«J'hésite un peu. C'est un petit peu compliqué, mais c'est intéressant».

«Le test est très intéressant. Les exercices sont, dans l'ensemble, assez différents. Je pense que cela peut beaucoup aider en mathématiques».

«Il faudrait que j'ai un ordinateur chez moi pour m'entraîner».

«Je le trouve intéressant et cela m'a un peu aidé en suivant les remarques vers la fin du programme. J'aimerais aussi que cela puisse se faire sur d'autre cours. Exemple les nombres relatifs».

ANNEXE 1

EXEMPLES D'EXERCICES DE MEME NIVEAU ILLUSTRANT DES ACTIVITES DIFFERENTES.

Niveau A Heuristique.

Titre : FARCEUR.

Enoncé : Un petit farceur a déplacé certains nombres de ce tableau.

12	6	15	20	10	>>>>>
					X 2,5
50	4	8	30	20	<<<<<

Remets-les à leur place.

Clef : proportion\1\A\heuristique.

Niveau A Calculatoire.

Titre : ORAGE.

Enoncé : Le son parcourt dans l'air environ 340 m à la seconde.

Quelle distance nous sépare d'un orage sachant que Nathalie a noté 4,5 secondes entre l'éclair et le bruit du tonnerre ?

Clef : proportion\1\A\calculatoire\vitesse.

Niveau A Réinvestissement.

Titre : ALPINE.

Enoncé : Un fabricant de jouets veut réaliser un modèle réduit de l'Alpine Renault A 310 à l'échelle 1/20.

La longueur hors-tout du véhicule est 4,18 m, sa plus grande largeur est 1,64 m et sa hauteur 1,15 m.

Quelles sont les dimensions du modèle réduit ?

Clef : proportion\1\A\réinvestissement\échelle.

Niveau A critique.

Titre : CREPES SUCREES.

Enoncé : Valérie, Chantal et Sandie, 3 amies friandes de crêpes, discutent de leurs recettes de pâte.

— Valérie : «moi, je mets 100 g de sucre».

— Chantal : «et moi, 200».

— Sandie : «et moi, 250 mais, pour 600 g de farine».

Peut-on savoir qui des trois amies fait les crêpes les plus sucrées et pourquoi ?

Clef : proportion\1\A\critique.

Niveau A Prédictif.

Titre : MILLION.

Enoncé : Crois-tu avoir déjà vécu un million de jours ? Un million d'heures ? Et un million de secondes ?

Clef : proportion\1\A\prédictif.

EXEMPLES D'EXERCICES ILLUSTRANT UN MEME TYPE D'ACTIVITE A DES NIVEAUX DIFFERENTS.

Critique A.

Titre : LANCERS DE DES.

Enoncé : Des enfants s'amusent avec un dé.

Pascal jette le dé 10 fois de suite et obtient 4 fois la face six. Il affirme alors à ses camarades : «si je le lançais 20 fois de suite j'obtiendrais donc 8 fois le six !».

A-t-il raison ?

Clef : proportion\1\A\critique.

Critique B.

Titre : CHANDELEUR.

Enoncé : Pour la chandeleur, les élèves d'une classe décident de faire des crêpes. Ils trouvent la recette suivante dans un livre de cuisine : «pour 4 personnes, préparez une pâte avec 6 œufs, 10 cuillerées à soupe de farine, 8 verres de lait, 20 g de beurre, 16 g de sucre, 6 cuillerées à café de sucre vanillé».

Comme ils sont nombreux, ils décident d'augmenter les quantités. Ils préparent la pâte avec : 15 œufs, 25 cuillerées à soupe de farine, 20 verres de lait, 50 g de beurre, 35 g de sucre, 15 cuillerées à café de sucre vanillé.

Jacques dit qu'ils ont respecté les proportions ;

Corinne n'est pas d'accord.

Qui a raison et pourquoi ?

Clef : proportion\1\B\critique.

Critique C.

Titre : VACANCES ANGLAISES.

Enoncé : Un français est parti en vacances en Angleterre avec sa voiture. Il traverse une localité anglaise à la vitesse de 60 km/h. La limitation de vitesse est de 30 miles/h.

L'automobiliste est-il en infraction ? (Le mile vaut environ 1 609 m).

Clef : proportion\3\C\critique\vitesse.

Critique D.

Titre : TARTES.

Enoncé : Dans une boulangerie, on trouve deux sortes de tartes aux pommes :

– des petites, parfaitement circulaires et ayant 5 cm de rayon ;

– des grandes, également circulaires et ayant 10 cm de rayon.

Jacques achète une grande tarte.

Paul préfère, pour le même prix acheter deux petites.

Jacques affirme qu'il en a plus que Paul pour le même prix.

Paul, quant à lui, déclare, que cela revient au même.

Lequel a raison ?

Clef : proportion\1\D\critique.

Critique E.

Titre : CONTROVERSE 2.

Enoncé :

1,5	7	10	2,3	1,8	14,5
8,75	11,5	45	3,25	2,30	21,5

Annie, Marc et Michel sont d'accord : le tableau ci-dessus n'est pas un tableau de proportionnalité.

Annie dit : «Avec deux calculs, on peut le prouver».

Marc : «Mais non, tu dois en faire six !».

Michel : «A mon avis, il en faut au moins trois».

Qui a raison ?

Clef : proportion\1\E\critique.

ANNEXE 2

EXEMPLE D'ANALYSE DE REPONSES FIGURANT DANS LE TEST.

Nous avons voulu essayer de déterminer, pour un élève donné, à quel niveau d'usage de la proportionnalité il réussit et éventuellement, quels types de modèles erronés il emploie.

Pour atteindre cet objectif, nous avons construit un test en dix exercices pour chacune des 3 classes d'âge.

Chacun des exercices a été choisi pour que sa réussite soit révélatrice de l'atteinte du niveau que cet exercice représente.

En outre, pour chacun d'eux, la majeure partie des réponses erronées est interprétable et se catégorise en flux d'erreurs significatives de l'utilisation de modèles implicites déjà répertoriés.

Dans le test, des exercices de même niveau relèvent de types d'activité différente (cela pour permettre à un élève handicapé par un type d'activité, de se révéler dans un autre).

Les exercices du test EVAMA 2 se situent comme suit :

niveaux / types d'activité	A	B	C	D	E
TRADUCTIF					
CLASSIFICATOIRE					
CALCULATOIRE					
LOGIQUE					
REINVESTISSEMENT					
CRITIQUE					
PREDICTIF					

Seul le niveau E n'est testé qu'une fois.
7 types d'activité sont représentés.

Enoncé.

A et B sont deux récipients à base carrée et à parois verticales.
Voici leurs caractéristiques :

	côté du carré	**hauteur**
A	10 cm	22 cm
B	5 cm	35 cm

Le récipient A contient un liquide que l'on veut transvaser dans B.
Ce liquide atteint une hauteur de 7 cm dans A.

Quelle hauteur atteindra-t-il dans B ?

Sur cet exercice, proposé à 259 élèves de 4ème ou de 3ème, nous avons obtenu 25 modalités de réponses dont 20 correspondent à des modèles reconnus que nous expliciterons ci-dessous en signalant leur fréquence approximative d'emploi.

Les modalités de réponses rencontrées le plus frequemment semblent pouvoir se classer en fonction des critères suivants :

1. Reconnaissance (ou non) de la proportionnalité inverse qui régit la relation «hauteur - base» (volume constant).

2. Reconnaissance (ou non) de la «proportionnalité directe — puissances deux» qui régit la relation «côté - aire de base».

3. Prise en compte (ou non) de données non pertinentes pour la résolution de problème : hauteur des récipients.

4. Référence implicite à des propriétés fausses comme :
   — la conservation de l'espace vide dans les récipients ;
   — la compensation entre dimensions.

5. Usage d'algorithmes de calcul ou d'analogies fréquemment rencontrés en mathématiques mais n'ayant pas de rapport avec la situation - problème.

Pour faciliter la lecture de l'analyse des réponses, nous désignerons dans la suite par :

- P_1 : La proportionnalité inverse.
- P_2 : La prise en compte d'une aire.
- P_3 : L'éviction de données non pertinentes.
- P_4 : La référence a des propriétés fausses.
- P_5 : L'usage d'algorithmes ou d'analogie sans signification concrète.

A — Modalités de réponses expliquées.

1. Prenant en compte la proportionnalité inverse.

28 cm **10%** C'est la bonne réponse.

Deux procédures ont été explicitées.

1 — «Le carré de A est quatre fois le carré de B donc la hauteur de B sera quatre fois celle de A».

2 — Calcul du volume d'eau dans A et division par l'aire de la base de B.

Cette réponse correspond au tableau de proportionnalité suivant :

10 X 10	x
5 X 5	7

14 cm **28%** C'est la réponse la plus fréquente, elle correspond à

- La reconnaissance de la proportionnalité inverse (P_1).
- La non prise en compte de l'aire de base (non P_2).
- L'éviction de données non pertinentes (P_3).

Explication procédurale la plus courante : «la base est divisée par 2 la hauteur doit être multipliée par 2».

Les élèves ayant fait cette réponse n'ont pas une connaissance suffisante de la notion de volume. Des observations, manipulations et expériences leur seraient sans doute très utiles pour fonder et consolider l'algorithme de calcul.

Cette réponse correspond au tableau de proportionnalité suivant :

10	x
5	7

4,4 cm **1%** Cette réponse n'a été rencontrée que deux fois, on peut donc négliger
4 4 cm ce courant, cependant on doit noter qu'elle correspond à :

- La reconnaissance de la proportionnalité inverse (P_1).
- La non prise en compte de l'aire de base (P_2).
- La prise en compte de données non pertinentes (non P_3).

Ce qui est conforme au tableau de proportionnalité suivant :

22	x
35	7

On peut penser que la réponse 44 correspond plus probablement à une correction de vraisemblance sur 4,4 qu'à une simple virgule. (La dimension attendue devant être supérieure à 7).

8,8 **1%** Cette réponse est peu fréquente mais correspond à une situation qu'on pouvait s'attendre logiquement à rencontrer :

- La reconnaissance de la proportionnalité inverse (P_1).
- La prise en compte de l'aire de base (P_2).
- La prise en compte de données non pertinentes (P_3).

Ce qui est conforme au tableau de proportionnalité suivant :

10 X 22	x
5 X 35	7

Résumons ceci dans un tableau :

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">P_3</th><th colspan="2">non P_3</th></tr>
<tr><td>P_2</td><td>28
(10%)</td><td><table><tr><td>10 X 10</td><td>x</td></tr><tr><td>5 X 5</td><td>7</td></tr></table></td><td>8,8
(1%)</td><td><table><tr><td>10 X 22</td><td>x</td></tr><tr><td>5 X 35</td><td>7</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>non P_2</td><td>14
(28%)</td><td><table><tr><td>10</td><td>x</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td></tr></table></td><td>4,4
(1%)</td><td><table><tr><td>22</td><td>x</td></tr><tr><td>35</td><td>7</td></tr></table></td></tr>
</table>

Il est intéressant de noter que les flux correspondant aux 2 dernières réponses sont très négligeables par rapport à ceux des 2 premières (2% contre 38%). La reconnaissance de la proportionnalité inverse semble donc impliquer pratiquement l'éviction de données non pertinentes.

B — Modalités de réponses excluant la proportionnalité inverse.

Lorsque la proportionnalité inverse n'est pas reconnue, les réponses sont beaucoup plus éparses ; cependant les flux correspondant à l'éviction des données non pertinentes demeurent les plus forts comme le montre le tableau ci-dessous :

	P_3	non P_3
P_2	1,75 (5%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 10 & 7 \\ \hline 5 \times 5 & x \\ \hline\end{array}$	2,78 (1%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 10 \times 10 & 7 \\ \hline 5 \times 5 \times 5 & x \\ \hline\end{array}$ 8,75 (1%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 10 & 35 \\ \hline 5 \times 5 & x \\ \hline\end{array}$ 5,5 (2%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 22 & 7 \\ \hline 5 \times 35 & x \\ \hline\end{array}$
non P_2	3,5 (3%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 & 7 \\ \hline 5 & x \\ \hline\end{array}$	11,1 (2%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 22 & 7 \\ \hline 35 & x \\ \hline\end{array}$

C — Modalités de réponses montrant l'utilisation de propriétés fausses.

1. Conservation de l'espace vide.

10 cm — espace vide repéré uniquement par la hauteur :

22 - 7 = 15
35 - 15 = 20 la hauteur sera donc de 20 cm dans B.

25 cm — espace vide repéré par une aire :

22 × 10 = 220 220 - 70 = 150 la hauteur sera donc de 25 cm
35 × 5 = 175 175 - 150 = 25 dans B.

Liquide 10 × 7 = 70.

2. Compensation.

10,5 cm — «Le carré de A est 1/2 fois plus grand, la hauteur de B sera 1/2 fois plus grande».

Donc $7 + \frac{1}{2} \times 7 = 7 + 3{,}5 = 10{,}5$.

19 cm — $7 \times 2 = 14$ et $14 + 5 \Leftrightarrow 19$.
«Les 5 cm de moins du côté vont dans la hauteur».

Ces réponses, peu fréquentes, montrent malgré tout la persistance en 4ème ou 3ème de collège, de modèles que l'on croirait depuis longtemps évincés par l'expérience chez des enfants de cet âge. Il n'en est rien. Aussi me paraît-il important de fournir encore à ce niveau, les situations susceptibles d'ébranler ces modèles ou, au moins de les dépister.

D — Modalités de réponses utilisant des algorithmes ou des analogies sans signification concrète.

2,2 cm $5 \xrightarrow{\times \mathbf{7}} 35$
$10 \xrightarrow{\times \mathbf{2,2}} 22$
hauteur d'eau considérée comme opérateur multiplicatif.

11,8 cm A : $\frac{22}{10}$; B : $\frac{35}{5}$

$\frac{35}{5} - \frac{22}{10} = \frac{70}{10} - \frac{22}{10} = \frac{48}{10} = 4,8$

différence 4,8 donc $7 + 4,8 = 11,8$.

Ces procédures montrent que, pour quelques enfants au moins, le jeu abstrait sur les nombres, en relation avec des situations didactiques classiques, prend le pas sur la signification concrète.

Bien sûr, on trouve encore d'autres modalités de réponses correspondant à des modèles

plus simplistes	13 cm $\longrightarrow$ 35 - 22 ou 5 cm $\longrightarrow$ 35 : 7 = 5
ou mixtes	21 cm $\longrightarrow$ 7 × 2 = 14 et 35 - 14 = 21
ou inexpliqués	33 cm $\longrightarrow$ 35 - 7 = 28 et 28 + 5 = 33.

Cependant, il est intéressant d'estimer le poids des grandes causes d'échec :

1. non reconnaissance de la proportionnalité inverse	: 60%
2. non éviction de données non pertinentes	: 54%
3. non prise en compte de la notion d'aire	: 80%
4. référence à des propriétés fausses	: 5%
5. Usage d'algorithmes ou d'analogies sans signification concrète	: 8%

Ces différents facteurs étant mêlés, il n'est pas étonnant que le taux de réussite à cet exercice soit faible (10%).

Le test a pour but de repérer les réussites aux différents niveaux et dans les divers types d'activités. Il vise également la détection chez un utilisateur, à l'aide d'analyses comparables à la précédente, de l'usage de modèles erronés qui le font échouer, l'objectif didactique étant alors de tenter d'y remédier.

Il est évident que cet outil n'est pas un filtre fin, il est seulement conçu pour effectuer une première catégorisation, aidant ainsi le maître ou l'élève isolé. Il ne saurait en aucun cas remplacer l'enseignant pour une analyse plus fine et donc plus adaptée au niveau thérapeutique.

Bruyère.

Fleur discrète de l'hiver
qui égaie la lande bretonne
et fertilise la terre qui l'a portée...

QUELQUES REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

DUPUIS C. et PLUVINAGE F. (1982). La proportionnalité et son utilisation. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 2.2.

GRAS R. (1979). Contribution à l'étude expérimentale à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques. Thèse d'Etat. Rennes I.

GRECO (1985). Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Rapport d'activité thème IV.

JULO J. (1983). Acquisition de la proportionnalité et résolution de problèmes. Thèse 3ème cycle. Rennes I.

LONDEIX H. (1983). Approche génétique et différentielle du développement intellectuel. Thèse 3ème cycle. Bordeaux I.

RICCO G. (1978). Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans. Thèse EHESS.

RICCO G., VERGNAUD G., ROUCHIER A. (1983). Représentation du volume et arithmétisation. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 4.1.

VERGNAUD G., ROUCHIER A., RICCO G., MARTHE P., METREGISTE R. (1978). Quelle connaissance les enfants de 6ème ont-ils des structures multiplicatives élémentaire ? Un sondage. Bulletin APM n° 313. Vergnaud G. (1981).

VERGNAUD G., ROUCHIER A., DESMOULIERES S., LANDRE C., MARTHE P., RICCO G., SAMURCAY R., ROGALSKY J., VIALA A. (1983). Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de 5ème. Recherches en didactique des Mathématiques. Vol. 4.1.

VERGNAUD G. (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité. Peter Lang.