REPRESENTATION D'UN OBJET DE L'ESPACE : LA CONSTRUCTION D'UN PROBLEME*

I.R.E.M. de Montpellier

Freddy BONAFE
Lycée Mas de Tesse - Montpellier

Le travail présenté ici a été réalisé à l'I.R.E.M. de Montpellier par les enseignants suivants : Audibert G., Bellard N., Bonafé F., Brunet R., Chevalier A., Fabre C., Laurent J., Naudeillo J., Pelouzet B., sous la direction de Audibert G.

I – LA METHODE.

Notre travail de recherche expérimentale peut se décomposer en trois temps forts comme le rappelle Pelouzet (1984) :

– La pré-expérimentation sauvage.
– La pré-expérimentation.
– L'expérimentation.

Ce sont les deux premiers temps constitués par la recherche et la mise au point définitive d'un énoncé répondant à nos objectifs, qui sont présentés ici à propos d'un problème intitulé «problème SEC».

Dans un premier temps, (la pré-expérimentation sauvage) nous essayons en classe divers problèmes laissés à l'initiative de chacun et cela pendant plusieurs semaines. Des centaines d'élèves sont ainsi observés. Il s'agit de dégager un énoncé conforme aux exigences suivantes :

* Ce travail constitue une étape dans la recherche expérimentale en géométrie dont certains éléments ont été analysés et résumés par Audibert G. (1982 a.b). La méthode mise en œuvre a confirmé son efficacité lors d'une nouvelle expérience décrite et analysée par Chevalier A. (1984).

NdlR : voir aussi à ce sujet l'article de cet auteur dans petit x numéro 9 (1985).

«petit x» n° 11 pp. 37 à 64, 1986

1. Le problème fait intervenir essentiellement un secteur du champ conceptuel[1] choisi.

2. L'énoncé du problème ne laisse pas apparaître le secteur du champ conceptuel propice à la solution ; nous disons que le problème n'est pas localisé pour l'élève.

3. Nous n'utilisons pas d'habillage[2] demandant une mathématisation du problème.

4. Le problème s'adresse à tous les élèves, de la sixième à la terminale.

5. N'importe quel élève du secondaire comprend parfaitement, lorsqu'on le lui explique, un processus de résolution du problème.

6. L'énoncé est compris par les élèves en quelques minutes.

7. La solution n'est immédiatement évidente pour personne.

8. Le problème intéresse l'élève ; son intérêt est soutenu pendant au moins une heure ; et la recherche de ce problème entraîne chez l'élève une activité importante.

9. La solution du problème n'offre aucune ambiguïté.

10. Le problème est traité avec succès par au moins un quart des élèves et conduit à un net échec au moins un quart des élèves, et ceci en une heure de recherche.

C'est en fonction de l'adéquation entre l'énoncé et ces exigences que chacun peut décider de l'intérêt de cet énoncé et proposer aux autres ses observations. (Les énoncés qui suivent numérotés de 1 à 6 sont issus de cette première phase). Les autres membres du groupe peuvent alors avec leurs élèves travailler sur ces problèmes, les modifier afin de mieux contrôler leur adéquation. Ne sont retenus que ceux jugés conformes à nos exigences.

Dans un deuxième temps (la pré-expérimentation) nous observons individuellement des élèves cherchant un problème dont l'énoncé a été retenu (énoncés numérotés 7 et 8) ; au cours de cette observation quelques moments sont réservés à des entretiens entre l'expérimentateur et l'élève. Il s'agit ici de juger de la conformité de ces énoncés dans une situation différente de celle de classe permettant de préciser les réponses aux exigences. Plusieurs dizaines d'élèves sont ainsi observés et cela donne lieu à un rapport général qui va conduire soit à un énoncé définitif si les objectifs semblent atteints, soit à une nouvelle pré-expérimentation (énoncé numéroté 9) en vue d'un énoncé définitif (énoncé 10).

II – LE CHOIX DES OBJECTIFS.

Cette méthodologie décrite par Audibert (1982 a), pour être mise en œuvre, nécessite au préalable le choix d'un secteur du champ conceptuel que l'on souhaite analyser.

Depuis l'année scolaire 1981-1982 nous consacrons l'essentiel de nos moyens à l'étude des démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire dans le champ conceptuel de la géométrie euclidienne à trois dimensions, en nous centrant sur trois principales questions qu'énonce ainsi Audibert (1985 a) :

— «L'élève dessine-t-il pour résoudre un problème de géométrie à trois dimensions ? Ou bien donne-t-il sa préférence au raisonnement, à l'image mentale, à la maquette ?

— Quelles représentations l'élève utilise-t-il ? Se contente-t-il d'un petit schéma sommaire ou a-t-il besoin de dessins très techniques ?

— Quels apprentissages de la géométrie de l'espace pouvons-nous proposer à nos élèves de l'enseignement secondaire ?».

Pour tenter de répondre à ces questions un énoncé de problème a été élaboré selon la méthode décrite plus haut et expérimenté auprès de 69 élèves de la sixième à la terminale. Nous l'avons intitulé «Problème FIL», en voici l'énoncé :

«Une salle de classe a pour dimensions 7 m de long, 5 m de large et 3 m de haut. Un fil est tendu verticalement du plafond au sol. Une balle de révolver traverse la salle. Elle part d'un des coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1,5 m au-dessus du sol. A quelle distance de chaque mur le fil était-il placé ?».

Les diverses phases pré-expérimentales ont été décrites par Pelouzet (1984).

Les premiers travaux d'analyse des documents décrivant les recherches par Audibert (1985 b) ont fait apparaître :

— Un taux de réussite de 45%, conforme à nos exigences, ainsi qu'une absence de différence significative de réussite entre les classes.

— Une utilisation permanente du dessin, 348 ont été recensés, 5 par élève en moyenne. Si l'on regroupe les élèves suivant le procédé de représentation le plus proche de leur production, on obtient 43 élèves donnant des perspectives cavalières, 38 donnant des vues de dessus, 16 des vues de profil, 19 des sections planes et un seul une perspective vraie. Certains ont utilisé plusieurs de ces procédés.

— La nécessité chez quelques élèves d'un dessin technique avec instrument afin de confirmer ou infirmer une hypothèse ; mais aussi l'embarras de certains devant l'absence de règles précises conduisant à leur représentation.

— L'utilisation de la salle dans laquelle s'est déroulé l'expérience comme référence à la salle de classe, gestes à l'appui, pour visualiser, décrire, contribuer à la formation de l'image mentale.

— De nombreuses difficultés pour coordonner les différents types de dessins, ou à l'intérieur d'un même dessin, (vues de dessus et de profil confondues par exemple) et cela quelle que soit la classe fréquentée par l'élève.

— Un petit nombre d'élèves travaillant dans le plan fil-trajectoire.

Au cours de l'expérimentation du problème FIL, nous avons également constaté une confusion quasi permanente de la part des élèves entre l'objet d'étude, la salle de classe, et les représentations qu'ils en faisaient. Nous dirons que les élèves (à l'exception peut-être de celui ayant réalisé une maquette) confondaient objet et représentation. Cela paraît naturel lorsqu'il s'agit de géométrie plane mais devient vite condradictoire pour des objets de l'espace car, par exemple, des droites disjointes de l'espace peuvent être représentées par des segments sécants dans le plan.

Ces constatations nous ont conduit à penser qu'un enseignement de la géométrie de l'espace ne pouvait avoir des chances de réussir qu'à condition que soient mises en place dès les premières années du collège des procédés de représentation avec tout ce que cela comporte de savoir faire et d'apprentissage, comme le propose Fabre (1985).

Apprendre aux élèves quelques règles de représentation d'un même objet :

— La perspective cavalière qui conserve le parallélisme et certaines proportions paraît d'un accès aisé aux jeunes élèves.

— Les vues qui permettent un transfert direct des résultats de la géométrie plane par conservation de certaines distances.

Et favoriser les activités de passage d'une représentation à l'autre. (On peut consulter à ce sujet Fabre (1982), Amsalem et Bonafé (1985)).

Ces constatations nous ont également conduit à expérimenter un autre problème permettant **de mieux observer** les **rapports existant entre un objet et la représentation qu'en donne un élève.**

Nous allons présenter les diverses phases de travail de construction de l'énoncé de ce problème, énoncé devant satisfaire à cet objectif principal, mais aussi conforme aux exigences rappelées dans la méthode, tout en précisant nos informations sur : les procédures utilisées par les élèves en situation de recherche, la succession de processus élémentaires[3], les différentes représentations utilisées, leur coordination, les principaux équilibres[4] ainsi que le degré de réussite.

III — DE LA NECESSITE DE MIEUX CERNER LES OBJECTIFS.

Durant la pré-expérimentation sauvage, 6 énoncés retenus par leurs auteurs comme semblant satisfaire aux exigences et objectifs cités plus haut, ont fait l'objet d'exposés au groupe de recherche.

Enoncé 1.

«Dans une salle de classe de 8 m de long, 6 m de large, 3 m de haut, on installe un faux plafond plan, incliné, de sorte que dans un coin la hauteur soit 3 m ; dans un autre coin 2,5 m ; 2 m dans un troisième coin. Quelle est la hauteur du plafond dans le quatrième coin ?».

Le premier inconvénient de ce problème réside dans le choix des coins auxquels seront affectées les hauteurs proposées et notamment dans le fait qu'un de ces choix conduit à une impossibilité (fig. 3).

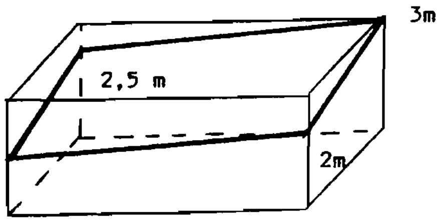


Figure 1

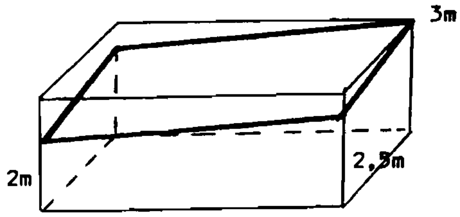
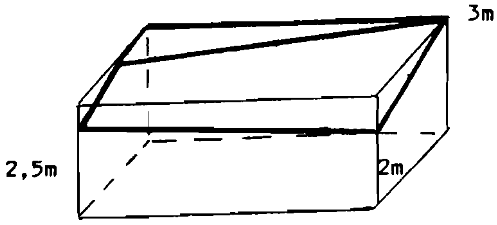


Figure 2



Le plafond n'est pas plan

Figure 3

De plus comme dans le problème FIL, il est fait appel à une salle parallélépipèdique et on obtient de nombreuses perspectives cavalières ainsi que des essais de visualisation à l'intérieur des salles de classe. On peut remédier à ces inconvénients en modifiant l'énoncé de la façon suivante :

«On désire construire un local à base rectangulaire de 8 m de long et 6 m de large dont le plafond plan sera incliné. Un coin sera à 3 m de haut, le coin diagonalement opposé sera à 2,5 m de haut, un troisième coin à 2 m de haut. A quelle hauteur sera le quatrième coin ?».

On se heurte alors à la difficulté de construction de l'image mentale et aux difficultés de traitement qui en résultent.

Mais un troisième inconvénient demeure quelle que soit la forme proposée, c'est le mot «plan» et les conditions qui font que quatre points sont coplanaires. A ce sujet, l'utilisation du théorème «un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles» n'est pas immédiate car ce théorème bien que «pressenti» n'est pas connu de tous.

Enoncé 2.

«Une carte postale rectangulaire de 9 cm de large et 12 cm de long est maintenue par un de ses coins à 10 cm au-dessus d'une table. Le coin opposé diagonalement touche la table. Un troisième coin est à 7 cm au-dessus de la table. A quelle hauteur se trouve le quatrième coin ?».

Il a été proposé entre autres à des élèves de seconde suivant l'option «technologie légère» après avoir traité la partie du programme de mathématiques consacrée à la géométrie de l'espace. Bien qu'ayant en apparence une ressemblance avec le problème précédent, il diffère au moins sur un point essentiel : la dispartion du parallélépipède rectangle et de son intersection avec un plan. On peut remarquer que les élèves manipulent : une feuille, un cahier, peuvent facilement remplacer une carte postale. La grande difficulté ici réside dans le mode de représentation de la situation[5]. La figure 4 ci-dessous donne une indication sur les dessins d'élèves et sur la difficulté causée par la projection du rectangle sur la table. Certains y voient un rectangle.

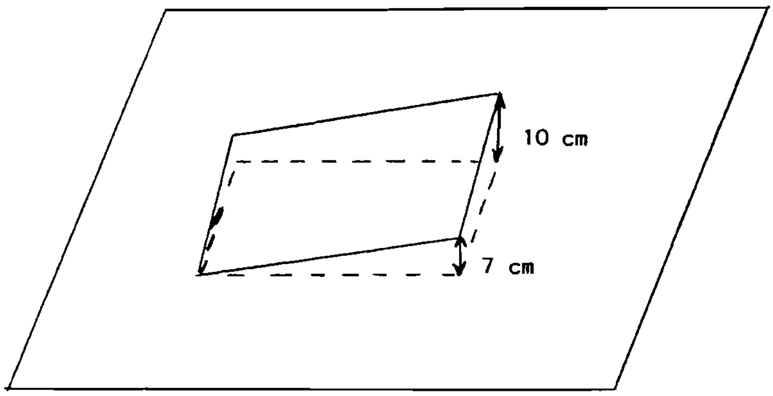


Figure 4

Une approche de la solution passe par le tracé des diagonales de la carte et de leur intersection. Ce n'est en général pas fait. Ce problème semble difficile particulièrement pour les élèves du premier cycle et de ce fait risque de donner un taux de réussite inférieur à un quart (contrainte que nous nous imposons). Il est donc écarté du moins sous cette forme. Mais non sans regret, car il met l'accent sur la facilité d'accès à l'image mentale et la difficulté qu'il y a parfois à la représenter. L'absence de règles techniques précises de représentation de l'espace ne permet pas à l'élève d'aborder facilement ce problème. Car même s'il peut sans difficulté réaliser une maquette et obtenir ainsi une vue réelle de la situation, la solution passant par des tracés annexes, il se heurte sans cesse à la projection de l'angle droit qu'il ne maîtrise pas et se trouve alors démuni.

Enoncé 3.

«Parmi tous les polygones cités ci-dessous, quels sont ceux qui peuvent être obtenus comme section d,un cube par un plan ?».

triangle équilatéral	triangle rectangle isocèle	triangle isocèle ni équilatéral ni rectangle	triangle rectangle non isocèle
triangle quelconque ni isocèle ni rectangle	carré	rectangle non carré	losange non carré
trapèze rectangle non un rectangle	parallélogramme ni rectangle ni losange	trapèze ni parallélogramme ni trapèze rectangle	quadrilatère quelconque non trapèze
pentagone régulier	pentagone non régulier	hexagone régulier	hexagone non régulier
heptagone régulier	heptagone non régulier	octogone régulier	octogone non régulier

Cet énoncé constitue ici un cas particulier. S'adressant à des adultes, aux élèves des classes de terminales, aux étudiants en sciences, il utilise un vocabulaire plus spécifique aux mathématiques et est dépouillé de tout habillage. L'image mentale du cube à ce niveau là est bien constituée, certaines de ses sections par un plan sont connues. Cependant, on constate que quelques questions constituent des obstacles et notamment celle concernant le trapèze rectangle qui englobe à la fois parallélisme et orthogonalité et peut être rattachée au problème plus général de la projection de l'angle droit.

Ce sont ces éléments qui vont nous inciter à travailler dans cette direction et à rechercher des habillages qui permettront à tout élève de la sixième à la terminale d'aborder ces questions. Remarquons accessoirement que dans une autre optique, la question concernant le pentagone régulier n'est pas dépourvue d'intérêt.

Enoncé 4.

«On a un morceau de bois de forme cubique de 10 cm de côté. On le partage en deux morceaux d'un coup de scie de manière que l'un des morceaux contienne trois coins de cube. Combien y aura-t-il de faces sciées ?».

C'est une classe de 24 élèves de cinquième qui a été plus particulièrement observée. Ce travail a été effectué en début d'année alors que la partie du programme traitant de géométrie dans l'espace n'avait pas été abordée. (Le programme de cinquième propose des «observations d'objets géométriques et physiques»).

Par contre, les notions de côtés — périmètre — constructions — mesure des angles d'un triangle et intersections de cercles avaient été traitées.

La classe était scindée en deux groupes et il faut préciser que dans le deuxième on a remplacé «on le partage en deux morceaux d'un coup de scie de manière que» par «on le scie en deux morceaux de telle manière que» ; la notion de partage induisant chez des élèves de ce niveau des parts «égales».

Il faut préciser également que le professeur a donné quelques explications à propos des mots : côté — coin — face et qu'il a signalé que le coup de scie ne devait pas «couper de coin en deux».

De nombreux élèves ont choisi d'observer une maquette : gomme, plumier, certains en ont même fabriqué une en papier. On retrouve là l'apport nécessaire de l'objet au développement de l'image mentale. A trois exceptions près, les élèves ont réalisé des perspectives cavalières afin de donner une représentation de la situation. On relève cinq procédés de recherche.

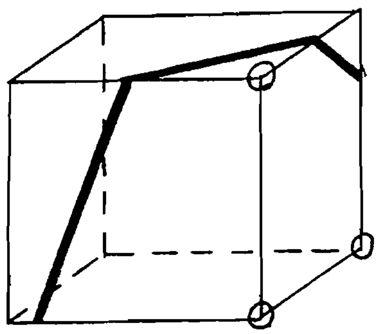


Figure 5

a) Les traits de scie sont dessinés sur trois faces au moins comme le montre la figure 5 ci-contre.

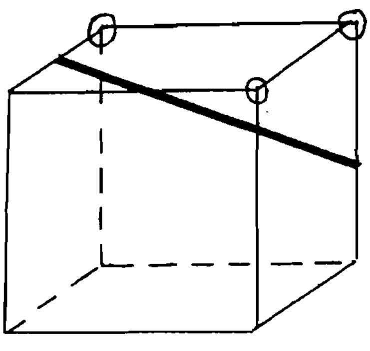
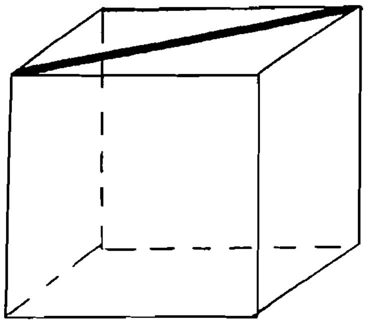


Figure 6

b) Les différents traits de scie ont pour support une même droite. Que voit alors l'enfant sur la figure 6 ?

c) La recherche s'est effectuée exclusivement sur maquette.



d) Le trait de scie qui n'est représenté que sur une ou deux faces «coupe les coins en deux» comme le montre la figure 7.

Figure 7

e) On a regroupé dans ce cas, des directions de recherche diverses : des patrons du cube dessiné — des dessins ressemblant à la figure 6 — des perspectives mal maîtrisées — des coups de scie verticaux.

Quinze élèves ont proposé une réponse correcte. Ce problème semble donc accessible à des élèves de premier cycle. Les recherches conduisant à des réponses incorrectes ne manquent pas d'intérêt par les démarches utilisées. Cependant, une grande partie du travail reste «dans la tête» et ne peut être observée. D'autre part, de nombreux élèves semblent démunis quand ils doivent vérifier leurs hypothèses.

Enoncé 5.

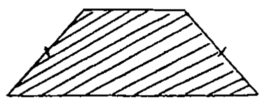
«On dispose d'un cube de 10 cm de côté, transparent qui contient du liquide coloré. On s'intéresse à la forme de la surface du liquide. Peut-elle être :

Un carré ?

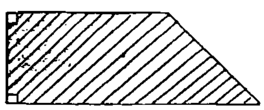
Un triangle ?

Un rectangle ?

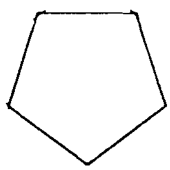
Un trapèze isocèle ?



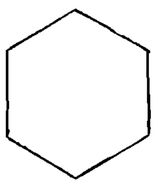
Un trapèze rectangle ?



Un pentagone ?



Un hexagone ?»



Proposé à deux groupes d'élèves de seconde suivant l'option «gestion», l'énoncé était écrit, sans commentaire, au tableau. Ces élèves n'avaient pas encore abordé en mathématiques les questions relatives à la géométrie dans l'espace. La compréhension du texte a soulevé quelques questions :

«Est-il plein de liquide ?». (Le cube).
«Ça dépend d'où on regarde la surface ?».
«Le liquide est-il prisonnier ?».

Le professeur a dû intervenir et décrire la situation dans le cas d'un seau contenant de l'eau et préciser alors la forme de la surface.

Quelques élèves ont utilisé leur gomme (ou d'autres objets disponibles) afin d'avoir une maquette, d'autres ont mimé longuement sur les murs de la classe ce que pouvait être la section. Pas un seul n'a construit une réelle maquette en papier.

Excepté quatre d'entre eux qui ont donné les réponses sans fournir de dessin, les trente autres ont produit 160 dessins dont 103 étaient des perspectives, cavalière en majorité. La plupart des réalisations étaient faites à main levée. (On peut noter qu'il n'est pas très aisé de représenter un cube reposant sur un sommet par exemple). Parmi ces trente élèves ayant fourni des dessins :

a. Huit ont montré que le problème était bien compris et que l'objet de leur recherche était la forme de la section d'un cube par un plan.

b. Neuf d'entre eux se sont intéressés non pas à la «forme de la surface du liquide» mais aux formes des différentes surfaces du liquide (y compris les surfaces de contact). Certains même se sont penchés sur les «visions» des formes dans le sens où un carré peut être «vu» comme un trapèze.

c. Les treize autres ont produit 48 dessins dont 26 semblent être des perspectives mais difficiles à analyser vu l'absence de tout commentaire.

Les figures 8, 9, 10 suivantes illustrent respectivement les catégories mentionnées ci-dessus par des productions d'élèves.

figure 8 :

un triangle

oui si on le pose par une pointe et qu'on le remplisse jusqu'au bord du côté

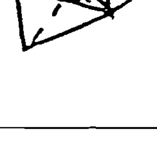


figure 9:

un triangle oui

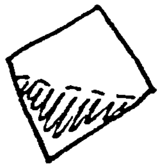
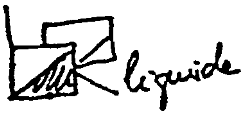


figure 10: un triangle : oui



On peut ainsi répartir les réponses en pourcentages.

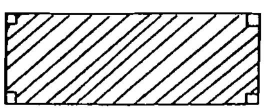
	oui	non	pas de réponse
carré	97	3	0
triangle	67	30	3
rectangle	88	12	0
trapèze isocèle	30	61	9
trapèze rectangle	50	44	6
pentagone	32	59	9
hexagone	30	55	15

Ce problème semble adapté à l'ensemble des élèves à condition que soit précisé ce que l'on entend par «surface du liquide» pour différencier avec «surface de contact» et ce que l'on entend par «forme» en différenciant ce qui est de ce que l'on voit.

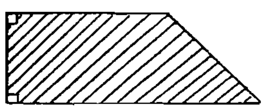
Enoncé 6.

«On a un cube en bois. On le partage en deux morceaux d'un coup de scie. On applique une des deux surfaces sciées sur un tampon encreur et on imprime son contour sur une feuille. Selon le coup de scie donné, peut-on obtenir des dessins ayant la forme d'

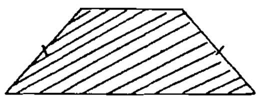
Un rectangle



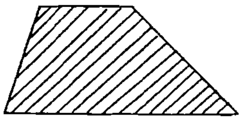
Un trapèze rectangle



Un trapèze isocèle



Un trapèze ni rectangle
ni isocèle».



Ce problème qui diffère peu du précédent sur le fond (recherche des formes des sections d'un cube par un plan) même si certaines questions ont été supprimées, s'en éloigne par la forme et les représentations qu'il peut induire. On n'a plus ici la difficulté consistant à représenter un cube sur un sommet. Cet énoncé, bien que testé en classe n'a pas fait l'objet d'un exposé particuler. il ne s'agissait plus d'une initiative personnelle mais d'une d'une synthèse des énoncés 3, 4 et 5, réalisée par le groupe de recherche. Synthèse alliant la simplicité de représentation d'un objet bien connu des élèves, le cube, l'étude de ses sections planes et délaissant le langage plus spécifique utilisé dans l'énoncé 3. Les productions des élèves semblaient conformes à nos objectifs malgré quelques difficultés de compréhension au sujet de «surface sciée» et «contour». Les élèves confondant parfois la face issue du plan de section avec une des faces d'un objet obtenu après le partage.

IV – PREMIERE PRE-EXPERIMENTATION.

A ce stade de nos travaux, nous avons pensé qu'il fallait analyser de plus près les apports des «pré-expérimentations sauvages» en passant à la deuxième phase de notre travail, la pré-expérimentation fondée sur l'observation individuelle. En effet, l'orientation choisie par les énoncés 5 et 6 présentait des intérêts :

— Le travail sur un cube, objet familier de l'enfant.

— La recherche de polygones usuels faciles à préciser.

— L'utilisation par la grande majorité de la perspective cavalière du cube. (Les élèves avaient un moyen de représentation).

— Ces problèmes étaient susceptibles d'apporter des éléments de réponse aux questions que nous nous posions.

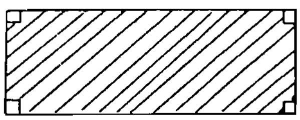
Il fallait cependant en gommer leurs effets indésirables, propres à détourner les élèves des objectifs majeurs, en modifiant quelque peu énoncés et présentation. Pour avoir, pensions-nous, la certitude que ces énoncés seraient bien compris, l'expérimentateur chargé de la présentation devait soit effectuer une démonstration avec une pomme de terre coupée en deux (donc changer «scier» en «couper» dans l'énoncé 6) soit manipuler un prisme à base hexagonale, transparent, contenant un liquide coloré afin de mettre en évidence la surface du liquide de l'énoncé 5. Ces présentations avaient également l'avantage de faire apparaître des objets au niveau de l'expérience et ainsi permettre aux élèves d'y faire référence. Le mot «contour» de l'énoncé 6 ne semblant plus indispensable était supprimé et enfin, pour l'énoncé 5, il fallait mentionner la possibilité de faire varier la quantité de liquide, afin de ne pas induire une contrainte[6] qui ne semblait pas souhaitable.

Les énoncés ainsi modifiés, il fallait en choisir un en vue de la pré-expérimentation. Devant l'abscence de consensus au sein du groupe de recherche sur le problème à éliminer, nous avons pris la décision de proposer à 19 élèves (5 de seconde, 6 de troisième, 5 de quatrième, 2 de cinquième, 1 de sixième) l'un ou l'autre des énoncés suivants. Chaque élève était observé par un expérimentateur chargé de faire un compte rendu de ses activités et disposait d'une feuille sur laquelle était reproduit un des énoncés ci-dessous. Cette feuille n'était remise qu'après l'exécution d'une des manipulations décrites plus haut.

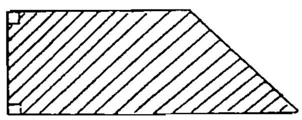
Enoncé 7.

«On a un cube en bois. On le partage en deux morceaux d'un coup de scie. On applique une des deux surfaces coupées sur un tampon encreur et on l'imprime sur une feuille. Selon le coup de scie donné, peut-on obtenir des dessins ayant la forme :

1. d'un rectangle non carré

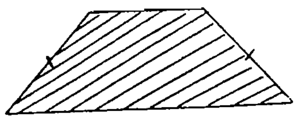


2. d'un trapèze rectangle

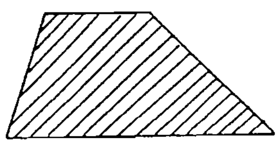


Cela est noté au tableau durant la lecture.

3. d'un trapèze isocèle



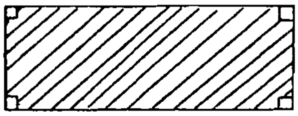
4. d'un trapèze ni rectangle ni isocèle».



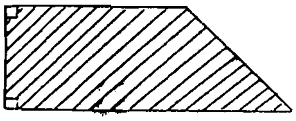
Enoncé 8.

«On dispose d'un cube transparent contenant un liquide coloré. On peut ajouter ou enlever du liquide et tenir le cube dans n'importe quelle position. Peut-on faire en sorte que la surface du liquide ait la forme :

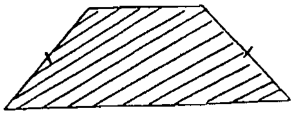
1. d'un rectangle non carré



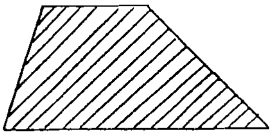
2. d'un trapèze rectangle



3. d'un trapèze isocèle



4. d'un trapèze ni rectangle ni isocèle».



a. Compréhension de l'énoncé : l'énoncé 7 a nécessité une mise au point pour quatre élèves sur neuf qui avaient identifié «surface coupée» à «forme retenue après section sur une face du cube scié». Avec l'énoncé 8, un seul élève a eu la même tentation, mais il s'est rapidement repris.

On peut noter que deux élèves souhaitaient couper le cube et ensuite couper les morceaux obtenus (afin, sans doute, d'obtenir un trapèze rectangle !).

b. Pourcentages de réponses exactes :

	énoncé 7	énoncé 8	total
rectangle	78	90	84
trapèze rectangle	45	90	68
trapèze isocèle	67	60	63
trapèze quelconque	33	40	37

C'est pour le rectangle et le trapèze isocèle que l'on trouve le plus de réponses «justifiées» (ou avec des essais de justification). Les élèves ayant traité l'énoncé 8 parviennent facilement à la solution en imaginant un cube posé sur une arête («en losange» disent-ils) à demi plein de liquide dont la surface dessine alors un plan diagonal et a une forme rectangulaire. En éliminant une partie du liquide et en soulevant un coin, ils parviennent à décrire une surface en forme de trapèze isocèle. Leurs justifications sont de type descriptif d'une situation conduisant à la solution cherchée. Les élèves ayant traité l'énoncé 7 ont des préoccupations de nature différente, ils ne cherchent pas à faire evoluer un objet mais sont plus centrés sur les représentations, et les justifications font appel au parallélisme, à l'orthogonalité, notions mal maîtrisées dans l'espace.

Les élèves de 6ème et de 5ème n'ont pu fournir de réponse sur les trapèzes.

c. Les dessins : les 19 élèves ont produit près de 200 dessins (plus de 10 en moyenne par élève) en grande partie à main levée. Seuls quatre élèves utilisent la règle. 80% de ces dessins sont des perspectives cavalières du cube, de petites dimensions pour la plupart. De nombreux élèves ont procédé en dessinant un cube et en essayant de faire apparaître sur le dessin la quadrilatère cherché ; mais dans quelques cas ils ont dessiné la section souhaitée et ont essayé (sans succès) de construire un cube autour.

La production de dessins est relativement homogène pour l'énoncé 7. Pour l'énoncé 8, on rencontre des extrêmes : de 1 à 25 dessins. Cinq élèves sur les neuf ayant traité l'énoncé 7 ont produit, entre autres, quinze dessins «incorrects» montrant une section mal délimitée ou gauche (non plane).

Pour une vingtaine de dessins concernant l'énoncé 8, l'exécution semble très laborieuse, les cubes ayant été positionnés de telle sorte que la surface du liquide soit horizontale.

On n'a pas relevé de dessins instables avec mélange de vues par exemple.

Les figures 11 et 12 ci-dessous illustrent le type de production rencontrée pour les énoncés respectifs 7 et 8.

figure 11

1) oui

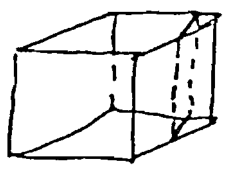
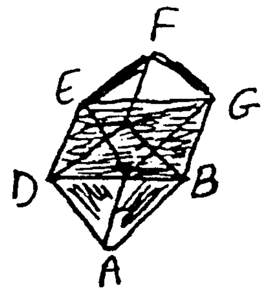


figure 12

1) DEBG est un rectangle



d. Les notions utilisées : deux notions importantes de la géométrie dans l'espace intervenaient dans la résolution de ces problèmes.

– Tout d'abord, la question de l'intersection de deux plans parallèles par un troisième plan. Le résultat est utilisé par la plupart des élèves de façon implicite et donne lieu à des dessins corrects lorsque le plan sécant est déterminé par deux arêtes parallèles. Dans les autres cas, des dessins incorrects (sections «gauches») apparaissent.

– Le problème posé par la projection de l'angle droit (le fait que deux droites de deux plans perpendiculaires ne sont pas toujours perpendiculaires) n'est pas maîtrisé sauf si un côté de la section est une arête du cube ou une parallèle à une arête de cube. A titre d'exemple, cette réaction d'élève : «... comme l'eau est entre les parois, les côtés de la surface seraient comme les parois, à angle droit...» ce qui conduit tout droit au triangle tri-rectangle !

Il faut aussi ajouter à cela que l'on rencontre différents élèves utilisant des notions qui leur sont propres mais que l'on doit signaler car elles apparaissent plusieurs fois :

– «Les arêtes d'un cube sont égales donc on ne peut obtenir de côtés inégaux» (pour la section bien sûr).

– «On trouve toujours des parallèles donc on ne peut obtenir que des rectangles».

– «Il y a toujours des angles droits donc on n'a que des rectangles».

e. Les équilibres : on peut dire que tous les élèves font face à des situations d'équilibre dans lesquelles prédominent les sommets, les arêtes, les diagonales des faces, les milieux des arêtes. Par exemple, le carré apparaît pour la moitié des élèves lors d'une section par un plan «vertical» ou «horizontal» passant souvent par le milieu d'une arête, le passage au rectangle est alors laborieux. Le rectangle est souvent obtenu comme section par un plan contenant deux arêtes parallèles diagonalement opposées et deux diagonales de face. Le trapèze isocèle est construit à partir d'une diagonale de face et d'une parallèle sur la face opposée.

f. Conclusions : le problème posé par l'énoncé 7 semble plus facile d'accès du moins en ce qui concerne les représentations. Dans l'énoncé 8 (cube et eau), les images mentales semblent plus fortes car une préoccupation due à l'habillage de l'énoncé est de positionner le cube de sorte que le plan du liquide soit horizontal, ce qui n'est pas facile à réaliser sur un dessin. Les contradictions[7] éventuelles n'apparaissent pas sur les dessins sauf pour ceux qui ayant éliminé l'habillage travaillent aux sections de cube. Pour l'énoncé 7, les élèves partent d'une position stable du cube et construisent le plan de section ce qui fait plus facilement apparaître dans le tracé, les contradictions. La succession des essais semble plus claire et plus facile à observer.

Ces deux énoncés recèlent cependant un défaut important, les réponses «oui — non» n'imposent pas de justification a priori. Il faut pour cela questionner les élèves et introduire des perturbations difficilement observables.

Enfin, un seul élève (classe de cinquième) a réalisé une maquette, mais on peut noter que certains ont regretté de ne pas avoir de cube à leur disposition. Est-il possible de leur en fournir un dans le cadre d'une expérimentation plus complète, afin peut-être de mieux cerner les relations entre un objet de l'espace et sa représentation.

V – DEUXIEME PRE-EXPERIMENTATION OU POUR MIEUX PRECISER LES OBJECTIFS.

Après cette étape dans notre travail, la question était alors «un de ces problèmes au moins est-il susceptible d'apporter des réponses précises aux questions que nous nous posons ?».

Les résultats pré-expérimentaux avaient confirmé le fait que les élèves dessinent beaucoup lorsqu'ils sont confrontés à des situations spatiales familières, que la perspective cavalière leur semble le moyen le plus adapté à la représentation du cube. Il était donc probable qu'une expérimentation étendue à une plus large population donnerait des indications dans ce sens.

L'inconvénient majeur de ces énoncés consistait dans la possibilité laissée aux élèves de répondre par oui ou par non, sans dessiner. En effet, ce type de réponse est inexploitable dans le cadre d'une étude des processus de pensée des élèves en situation de recherche de problèmes. D'autre part, nous avions pressenti au travers des explications fournies par certains des confusions entre les formes des sections et les formes des représentations de ces sections ou plus précisément entre les propriétés d'un objet et celles de sa représentation.

C'est à la suite de ces différentes observations que nous avons décidé de procéder à une nouvelle pré-expérimentation qui tout en conservant l'étude des sections planes de cubes orienterait le travail de l'élève non pas vers une représentation de l'objet lui-même mais vers la façon dont il percevait cette représentation. Nous avons alors choisi de lui fournir à la fois la maquette de l'objet et une représentation de cet objet en perspective cavalière, procédé qu'il utilise massivement.

Nous avons proposé à 18 élèves de second cycle (classe de seconde IES, seconde technologique, première F_1, première F_2, première F_3) le problème suivant.

Enoncé 9.

«On a un cube en bois de 10 cm de côté. On le partage en deux d'un coup de scie. Le coup de scie passe par les trois points A, B et C indiqués sur les feuilles dont vous disposez. On applique une des deux surfaces obtenues sur un tampon encreur et on l'imprime sur une feuille. On vous demande de dessiner exactement la forme de la tache obtenue».

A ceci il convient d'ajouter que :

— L'expérimentateur chargé de présenter l'énoncé a effectué une démonstration avec une pomme de terre qu'il a coupée en deux et appliquée (une des deux sections obtenues) sur un tampon encreur puis sur une feuille de papier.

— Chaque élève avait à sa disposition une maquette «grossière» constituée par un cube en carton dont la longueur des arêtes était 8 cm et ceci à 5 mm près. Cette maquette était posée sur sa table de travail.

— Durant la lecture de l'énoncé, il a été distribué à chaque élève deux feuilles (figures 13 et 14) représentant des cubes en perspective cavalière sur lesquels étaient positionnés trois points A, B et C.

— Dans le cas où l'élève aurait rapidement traité les problèmes soulevés par ces deux premières feuilles, nous devions en proposer une troisième (figure 15).

— Les élèves disposaient d'une heure pour effectuer ce travail, chacun était observé par un expérimentateur chargé d'en rédiger un compte rendu.

Figure 13 : échelle 1/2.
A est à 3 cm du coin le plus proche.
B est à 3 cm du coin le plus proche.
C est à 4 cm du coin le plus proche.

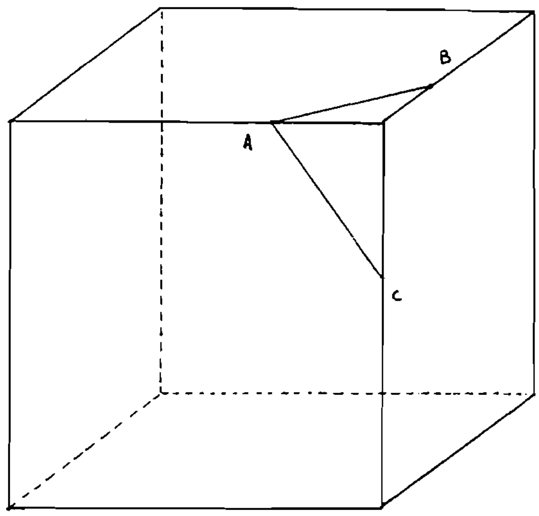


Figure 14 : échelle 1/2.
A est à 4 cm du coin le plus proche.
B est à 2 cm du coin le plus proche.
C est à 2 cm du coin le plus proche.

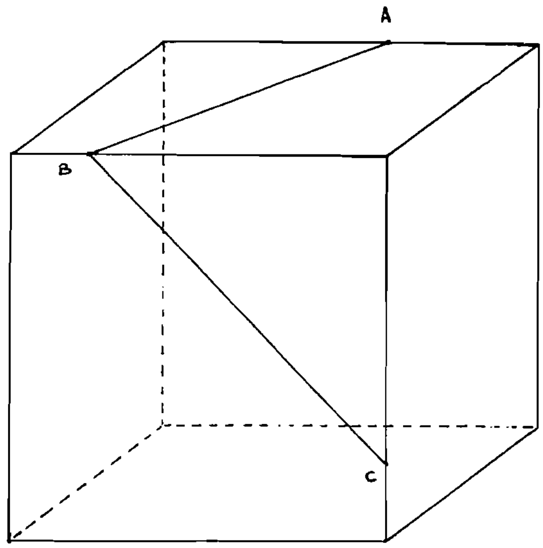
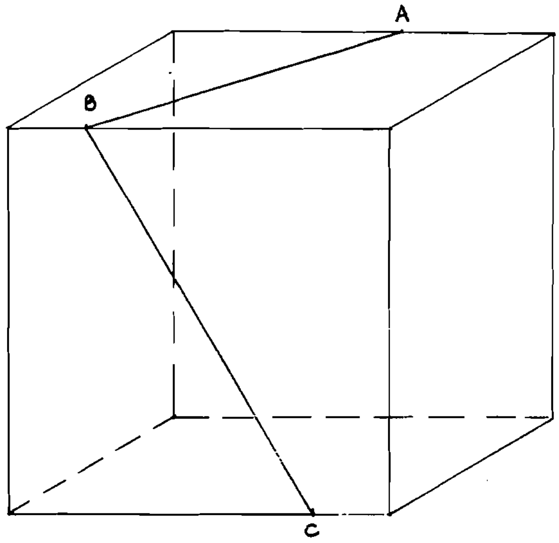


Figure 15 : échelle 1/2.
A est à 4 cm du coin le plus proche.
B est à 2 cm du coin le plus proche.
C est à 2 cm du coin le plus proche.



Avant de présenter les résultats, quelques remarques semblent indispensables.

— Le problème proposé est double, il s'agit au travers du dessin plan d'un cube et d'une maquette de **déterminer la forme** d'une section d'un cube par un plan et de **reconstituer cette section.**

— Chaque élève ayant à sa disposition deux feuilles avait le choix sur la première «à prendre» et à traiter.

— Les deux feuilles fournies donnaient soit une section triangulaire soit une section trapézoïdale. La troisième feuille, éventuellement fournie, conduisait à une section pentagonale.

a. Ordre du choix des dessins et reconnaissance de la forme de la section : 14 élèves travaillent d'abord sur la section triangulaire ; pour beaucoup d'entre eux, ce choix semble peu réfléchi. Parmi ces 14 élèves, 12 seulement aborderont la section trapézoïdale ; les deux autres manquant de temps. Un seul élève n'a pas discerné la forme triangulaire de la section (il ne discernera pas non plus la forme trapézoïdale) car il confond section et plan de section. Parmi les douze ayant abordé la section trapézoïdale, sept seulement la détermineront.

Quatre élèves travaillent d'abord sur le trapèze, ils travailleront aussi sur le triangle. On en compte deux qui ne reconnaissent pas le trapèze mais obtiennent ensuite le triangle, un qui reconnaît le trapèze mais pas le triangle, le dernier ne reconnaissant aucune des deux formes.

Pour les rares élèves ayant abordé le pentagone (deux seulement) la durée impartie est si courte qu'il est difficile d'en parler.

On peut résumer ces résultats ainsi :

		ordre de traitement				
		triangle seul	triangle puis trapèze	trapèze seul	trapèze puis triangle	
reconnaissance du	triangle et trapèze		7		0	7
	trapèze seul		0	0	1	1
	triangle seul	2	4		2	8
	ni triangle ni trapèze	0	1	0	1	2
		2	12	0	4	18

Le problème posé par la reconnaissance de la forme est donc correctement traité, on peut cependant affirmer que l'étude conjointe des deux questions (triangle et trapèze) ne semble pas conseillée. Dans tous les cas, les élèves ont tendance à reprendre dans la seconde étude la stratégie utilisée dans la première. Cette réitération nuit à la continuité de l'activité.

b. Restitution exacte des sections : le tableau précédent fait apparaître trois classes d;élèves :

– Celle des sept élèves ayant reconnu les deux formes. On en compte alors un qui restitue correctement les deux sections, deux qui restituent correctement le triangle seul et deux qui restituent le trapèze et pas le triangle.

— Celle des neuf élèves ayant reconnu une seule forme. Aucun parmi les neuf élèves n'a répondu correctement au problème posé par la restitution de la section.

— Celle des deux élèves qui n'ayant pas reconnu les formes ne pouvaient les restituer.

Le pourcentage de réussite est donc très faible et semble dû dans 14 cas (pour 11 élèves) à la confusion permanente entre les propriétés de l'objet et de sa représentation. Pour certains autres, cette confusion n'est qu'épisodique, mais on l'observe tout de même au cours du travail.

c. **Utilisation de la maquette** : 7 élèves ont utilisé leur maquette pendant onze fois et pour des raisons diverses :

— Deux fois dans un but explicatif.
— Sept fois pour confirmer ou infirmer une hypothèse.
— Deux fois pour chercher une réponse à une question posée.

Deux de ces élèves l'ont utilisée de façon quasi permanente. Il semble donc que le rôle de la maquette soit non négligeable, même dans les «grandes» classes.

d. **Questions théoriques** : la recherche de la section trapézoïdale est particulièrement significative dans la question des intersections d'un plan avec deux plans parallèles. . On compte six élèves qui utilisent la proposition vraie : si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan alors les intersections sont deux droites parallèles. Mais en même temps ils utilisent la proposition fausse : si deux plans perpendiculaires sont coupés par un troisième plan alors les intersections sont deux droites parallèles.

L'étude des contradictions provenant de l'utilisation de ces deux propositions pourrait s'avérer intéressante.

e. **Conclusions** : cet énoncé semble très favorable à l'étude de deux questions précises :

— La confusion entre l'objet et sa représentation.
— Les contradictions nées de l'application simultanée des deux propositions précédemment citées.

Cependant, l'étude des deux sections n'est pas conseillée. L'étude de la seule section triangulaire doit donner des éléments de réponse à la première de ces questions. La section trapézoïdale quant à elle couvrant les deux. (Dans le cas où l'étude de la section trapézoïdale serait retenue, il conviendrait de déplacer le point A, certains élèves ayant cru percevoir dans son alignement avec une arête verticale un effet autre que celui du hasard).

L'usage de la maquette n'est pas à négliger ; il est donc souhaitable qu'un objet soit fourni.

VI – LE PROBLEME SEC.

L'interaction entre objet, perspective cavalière et dessin plan, se situant au centre de nos préoccupations l'énoncé 9 semblait convenir à cette étude. Pourtant, la faiblesse du taux de réussite dans des classes de second cycle devait nous inciter à modérer nos ambitions. L'orientation choisie a donc été la section triangulaire susceptible de donner un taux de réussite plus proche de celui que nous nous imposons et capable de nous informer sur la confusion entretenue par de nombreux élèves entre un objet et sa représentation. Cette orientation nous imposait au préalable une réflexion sur les points suivants :

– L'énoncé devait-il demeurer dans la forme ?
– Fallait-il que le triangle obtenu soit isocèle ou autre ?
– Qu'adviendrait-il des élèves donnant comme réponse immédiate le triangle ABC obtenu en dessinant sur la perspective cavalière ? (cf. figure 13).

C'est de cette réflexion et des discussions qui ont suivi que sont nées les décisions suivantes :

– L'habillage de l'énoncé 9 doit être conservé mais il est souhaitable de changer le mot «forme» présentant quelques ambiguïté par le mot «contour». Il est en effet indispensable que les élèves comprennent que ce qui importe ici n'est pas seulement la nature du polygone obtenu mais aussi son exacte restitution. Cela semble mieux traduit par le mot «contour».

– Le fait que le triangle soit isocèle, s'il induit un facteur d'équilibre (qui peut être intéressant à analyser), est capable de réduire la difficulté de résolution du problème et donc d'améliorer le taux de réussite. Il est donc souhaitable de conserver cet aspect.

– Nous proposerons à tout élève ayant terminé, une deuxième feuille représentant la même situation, le cube ayant subi une rotation d'un quart de tour. Nous apporterons quelques modifications aux dimensions du triangle afin que dans les deux cas les dessins des contours triangulaires sur la perspective présentent une différence importante, cela permettra d'observer l'attitude des élèves qui proposent comme solution un triangle superposable au triangle ABC de la figure 16 (voir page 61). Verront-ils des contradictions ? Comment les résoudront-ils ? Cela devrait permettre également d'étudier comment les élèves appréhendent la rotation dans l'espace par le biais de représentation en perspective cavalière.

— Enfin, pour les élèves ayant répondu aux deux feuilles et considérant le problème résolu, on tiendra en réserve d'autres problèmes du même type mais donnant lieu à des sections autres que triangulaires.

L'expérimentation ainsi préparée a été effectuée dans le premier trimestre de l'année 1984-1985 auprès d'élèves de la sixième à la terminale ainsi que de première année de DEUG. L'énoncé définitif du problème SEC était le suivant :

OBSERVATION PREALABLE (effectuée devant les élèves).

On coupe une pomme de terre en deux morceaux au moyen d'un coup de couteau. On applique une des deux surfaces plates obtenues sur un tampon encreur puis sur une feuille de papier posée sur la table. On obtient une tache.

Enoncé 10.

«On a un cube de 10 cm de côté. On le partage en deux morceaux d'un coup de scie. Le coup de scie passe par les trois points A, B et C indiqués sur le dessin du cube ci-joint (figure 16).

Le point A est à 3 cm d'un sommet.
Le point B est à 8 cm du même sommet.
Le point C est à 8 cm du même sommet.

Comme avec la pomme de terre, on applique une des deux surfaces obtenues sur un tampon encreur et on l'imprime sur une feuille. On demande de dessiner exactement le contour de la tache obtenue».

La recherche terminée, on pose le même problème accompagné de la figure 17.

Figure 16

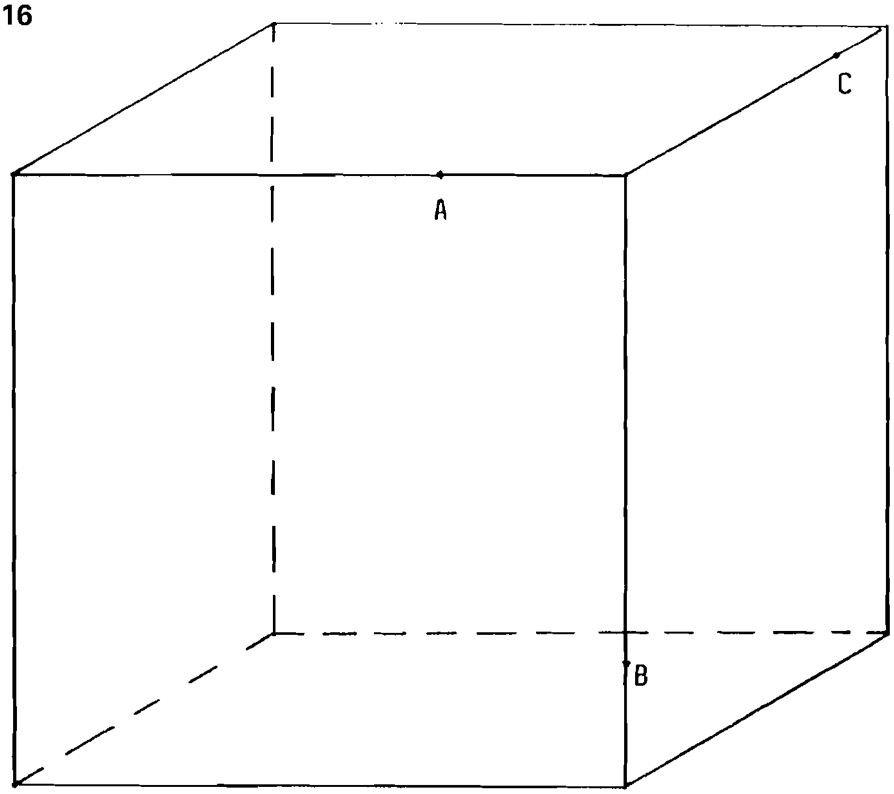
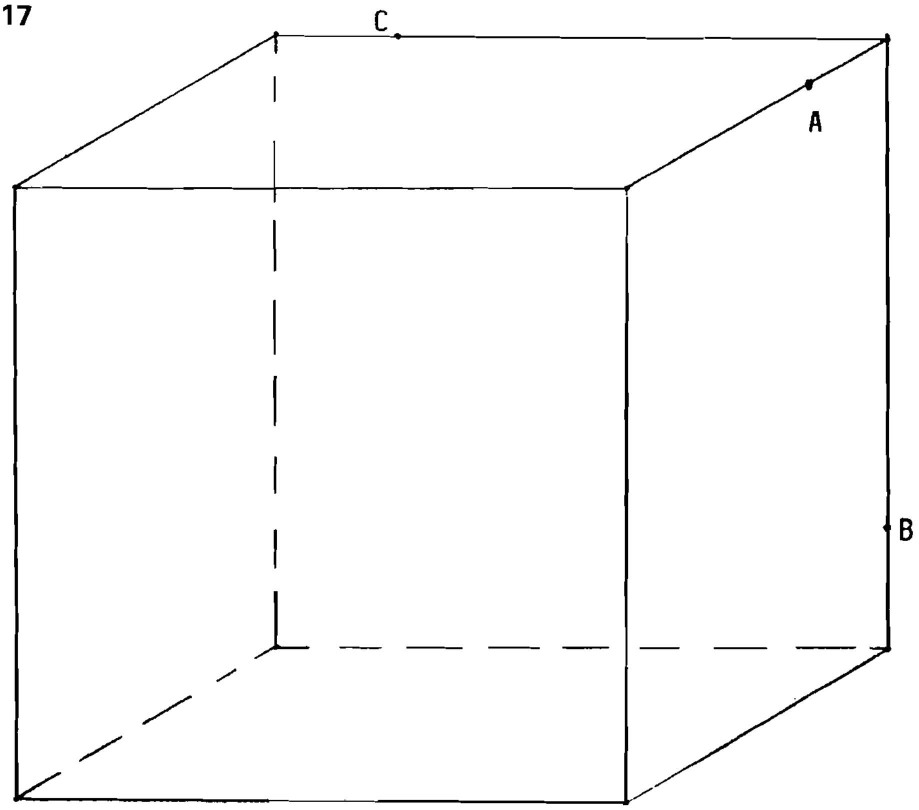


Figure 17



NOTES.

1. Nous adoptons la définition donnée par Vergnaud (1981).

«Un champ conceptuel est un espace de problèmes ou de situations problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion».

Nous choisissons le champ conceptuel de la géométrie euclidienne à trois dimensions avec pour principaux concepts les distances, les angles dont l'angle droit en particulier, le parallélisme, les intersections, les barycentres, les polyèdres, les corps ronds, les aires et volumes, les transformations ainsi que les théorèmes de Thalès, Pythagore.

Nous estimons de plus que l'acquisition de ces concepts est très dépendante des représentations planes qui leur sont associées.

2. Cette exigence a dû être abandonnée dans le cadre de la géométrie de l'espace car nous avons voulu observer quels dessins étaient les plus naturels aux élèves et ce souci nous a conduit à ne pas suggérer de dessin dans un premier temps. Par ailleurs, le vocabulaire de la géométrie de l'espace n'étant pas connu de tous les élèves de l'enseignement secondaire, il fallait obtenir des énoncés ne le faisant pas directement intervenir et ainsi accessibles à tous.

3. La définition proposée par Audibert (1982 a) est la suivante :

«Nous partons de l'hypothèse suivante : la recherche d'un problème de géométrie est la succession d'un certain nombre de processus élémentaires. Un processus élémentaire est composé d'une première étape qui consiste à anticiper une image, d'une deuxième étape qui consiste à réaliser un dessin et d'une troisième étape qui consiste à enregistrer des observables et à coordonner observables et idées ; ce qui conduit à une nouvelle anticipation».

Cette succession, utile aussi bien au niveau de l'observation du travail de l'élève qu'à l'expérimentateur chargé de rapporter ce travail, constitue un excellent canevas pour celui qui doit en faire l'analyse. Mais cette succession a été observée en géométrie plane ; est-elle encore d'usage en géométrie de l'espace ?

4. Nous associons deux notions au mot équilibre, ces deux notions sont rapportées par Audibert (1985 a).

«L'élève atteint une position d'équilibre si un résultat obtenu en cours de recherche à tendance à bloquer momentanément ou définitivement le processus de découverte de la solution et si ce résultat correspond à une situation mathématique spécifique».

«Une contrainte d'équilibre est une contrainte non nécessairement inférée par l'énoncé, bloquant ou perturbant, momentanément ou définitivement, le processus de découverte de la solution».

Nous avons de plus en plus conscience de l'importance de ce phénomène tant dans les situations de recherche de problèmes que celles plus directement liées à l'apprentissage.

(NdlR : voir aussi le paragraphe e pages 52-53).

5. Afin de mieux saisir les difficultés de la représentation et en particulier de la perspective cavalière on peut s'intéresser au problème suivant : une carte postale rectangulaire de 9 cm de large et de 12 cm de long est maintenue par un de ces coins à 10 cm au-dessus d'une table. Le coin opposé diagonalement touche la table. Un troisième coin est à 7 cm au-dessus de la table. Dessiner cette carte postale dans une perspective cavalière d'angle de fuite 30° et de rapport de réduction 1/2.

6. Une contrainte est pour nous une consigne que veut respecter l'élève dans la résolution de son problème, cette consigne n'étant pas nécessairement donnée dans l'énoncé. Il faut ajouter que cette consigne n'est pas toujours explicitée par l'élève et que dans ce cas c'est l'observateur qui tente de la mettre en évidence et en donne sa propre interprétation.

7. Concernant les notions qui se rattachent aux contradictions, on peut consulter Audibert (1982 a, 1985 a) et Chevalier (1984).

Nous pensons qu'il est souhaitable de faire intervenir ces contradictions dans des situations de classe afin d'améliorer un apprentissage.

BIBLIOGRAPHIE.

AMSALEM A. et BONAFE F. 1985. Géométrie dans l'espace et angles en classe de seconde. I.R.E.M. - USTL, place E. Bataillon - Montpellier (36 pages).

AUDIBERT G. 1982 a. Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane, Vol. 1 et 2 ; nouvelle édition : publication APMEP - 1984 n° 54 (831 pages).

AUDIBERT G. 1982 b. Géométrie euclidienne plane dans l'enseignement secondaire français. Actes du colloque international sur l'enseignement de la géométrie, sous commission belge de la CIEM, Mons 31 août, 2 septembre 1982, édité par G.Noël, Université d'état de Mons, Belgique (page 225 à 239). Nouvelle publication dans le Bulletin de l'APMEP 1985 n° 349 (pages 349 à 363).

AUDIBERT G. 1985 a. Une problématique en géométrie de l'espace. IREM-USTL place E. Bataillon - Montpellier (63 pages).

AUDIBERT G. 1985 b. Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL. IREM-USTL place E. Bataillon - Montpellier (79 pages).

CHEVALIER A. 1984. Le problème QAT : symétrie, vérification, algorithme de construction, la pratique de l'élève. Edition IREM-USTL, place E. Bataillon - Montpellier (442 pages).

FABRE C. 1982. **Perspective cavalière.** Bulletin de la régionale de l'APMEP de Montpellier n° 1, juin 1982. **Nouvelle publication** Actes du colloque Inter-IREM géométrie, journées SMF Marseille **1/2 juin 1984. IREM de Marseille (pages VI.1 à VI.15).**

FABRE C. **1985.** Mettons les pieds dans... l'espace. **Edition IREM-USTL place E. Bataillon - Montpellier (8 pages).**

PELOUZET B. **1984. Phases pré-expérimentales d'une recherche sur la géométrie de l'espace.** Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, journées SMF, **Marseille 1/2 juin 1984. Publication de l'IREM de Marseille (pages V.1 à V. 18).**

VERGNAUD C. **1981. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.** Recherches en didactique des mathématiques. **Vol. 2-2 (pages 215 à 231).**