# LA GEOMETRIE CONSTRUITE MISE A L'ESSAI

I.R.E.M. de Strasbourg

François PLUVINAGE
Université de Strasbourg
Jean-Claude RAUSCHER
Collège Martin Schongauer, Ostwald

## I – INTRODUCTION.

Il y a quelques années, on pouvait se poser quelques questions sur la place à réserver à la géométrie dans l'enseignement mathématique : la géométrie euclidienne plane n'est pas (plus) un domaine de la recherche mathématique, le secteur des utilisations semblait privilégier le calcul à l'aide de coordonnées (la position d'un point sur un écran d'ordinateur n'est-elle pas simplement la donnée de deux nombres ?), dans beaucoup de secteurs d'activités on ne semblait guère avoir besoin de connaissances géométriques. Aujourd'hui, de telles questions radicales ne se posent plus : les mathématiciens reconnaissant, pour beaucoup de leurs réflexions, le bénéfice d'images mentales issues le plus souvent de la géométrie euclidienne plane, les utilisations ont largement évolué et font appel à bien d'autres connaissances que le seul repérage, le ou plutôt les traitements d'images se sont introduits avec force dans de multiples secteurs d'activités (très souvent aujourd'hui dans l'industrie, on travaille sur images avant de se lancer sur la matière).

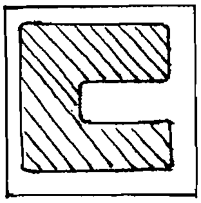
Dans un texte récent, que Gérard Vergnaud (1986) a rédigé à la suite de séances de travail de la Commission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (COPREM), trois finalités principales sont dégagées et explicitées pour l'enseignement des mathématiques :

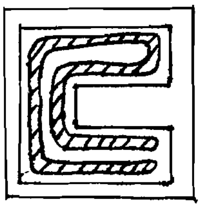
1. la transmission du **patrimoine scientifique** ;
2. la formation d'une diversité de compétences mathématiques utiles à une diversité **d'usages professionnels** ;
3. la contribution à la **conceptualisation du réel** chez l'enfant, l'adolescent et l'adulte.

Aujourd'hui, ces trois finalités sont en accord avec une pratique importante de géométrie lors de la scolarité obligatoire.

«petit x» n° 11 pp. 5 à 36, 1986

Par rapport à la première, on peut par exemple citer le livre récent de Ivar Ekeland (1984), qui montre notamment comment certaines images sont constitutives de notre patrimoine scientifique. Dans cet ouvrage qui se veut à la portée de beaucoup de lecteurs, l'auteur illustre bien sûr son propos. Comme figure qui lui semble mériter actuellement une bonne place dans nos **images mentales**, il propose la simple figure que nous avons reproduite et qui illustre la transformation dite «du boulanger» : un carré (surface) est envoyé à l'intérieur de lui-même par une injection, de la sorte que l'image du carré complet apparaisse un peu comme la lettre majuscule «C».



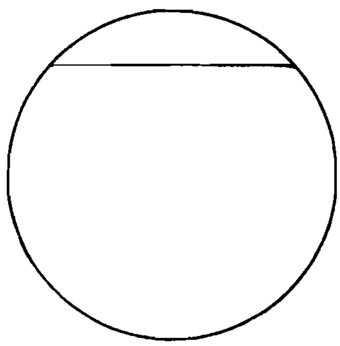


On peut imaginer de la pâte aplatie puis repliée (d'où le nom de la transformation). La répétition, puis l'itération de cette transformation conduisent à de multiples interrogations, où interviennent notamment les idées de déterminisme et de hasard, et leurs rapports mutuels.

Par rapport à la seconde finalité, ce qui importe beaucoup, c'est de savoir **manipuler des images**. On est souvent tenté d'associer ce besoin à l'idée de transformations géométriques, mais ceci nous paraît être une erreur, ou plutôt une restriction gênante : la manipulation se présente dès le tracé d'une figure, sans même qu'il soit question de la modifier ou de la déplacer. Quand on construit une figure, les **hypothèses** d'un énoncé se présentent d'une façon très semblable à un **cahier des charges** d'un produit ou d'un service. Des hypothèses envisagées peuvent être contradictoires, de même que des charges souhaitées peuvent s'avérer incompatibles.

La troisième finalité ne s'écarte pas énormément de la seconde, dans la mesure où notre environnement est largement construit. Et dans l'organisation de l'environnement, il intervient ipso facto une forte **composante de type technologique** : pourquoi tel objet est-il fait de telle façon, quels usages ont-ils été prévus lors de sa conception, quels impératifs de fabrication a-t-il fallu prendre en compte, etc. Et une prise de conscience plus poussée fait intervenir le point de vue du «faire faire», les questions de communication et d'échange : quelles commandes permettent-elles à un utilisateur un accès au traitements voulus, quelles descriptions constituent-elles une transmission efficace, etc.

Ces considérations amènent à **privilégier une «géométrie construite»**, par rapport à une «géométrie des figures idéales» ou à la «géométrie par les structures». Or les concepts géométriques ne sont pas là, en place une fois pour toutes par avance, mais dépendent de la géométrie dont ils sont issus. Les figures ne tiennent qu'un rôle modeste dans la «géométrie par les structures» ; elles ont une place centrale dans les deux premières géométries, mais avec des statuts différents. Dans la «géométrie des figures idéales», une figure effective n'est jamais parfaite, les raisonnements se tiennent sur ce qu'elle **représente**. Dans une géométrie de construction, une figure effective est envisagée comme le résultat d'un **programme de tracé** ; ou bien en se demandant comment elle a été obtenue, ou bien on cherchera à la reproduire. Lorsque l'univers des **instructions** de tracé est bien défini, une vision précise doit alors se mettre en place pour permettre de répondre. En voici un exemple très simple, mais révélateur, envisagé pour le travail de DEA (diplôme d'études approfondies) de didactique des mathématiques de Marianna Tzekakis : la figure ci-contre a été proposée à des élèves de quatrième (âge environ 14 ans), avec pour consigne de la reproduire ; mais deux reproductions ont été demandées, l'une avec les instruments usuels et l'autre en utilisant un logiciel de tracés géométriques pour table traçante (le logiciel PLAN, mis au point par Nicole Vogel pour les lycées, puis légèrement simplifié pour les collèges). En utilisant les instruments usuels, tous les élèves sont arrivés au même résultat, en traçant un cercle de rayon voulu et une corde de la longueur voulue. A l'aide du logiciel, dont les instructions isolées ne leur posaient pourtant pas de problème d'emploi, les élèves de cette observation sont parvenus à des réalisations de niveaux très variés. Ceci provient de ce qu'en supprimant la possibilité de tâtonnement à la règle, on oblige à voir la corde à tracer comme un rayon d'un cercle, autre que celui qui est à reproduire ; c'est-à-dire que la figure à **construire** est constituée de **deux cercles** et d'un segment. Ce n'était nullement évident pour tous les sujets observés dans ce cas, ce qui amène à s'interroger sur la notion de compétence en géométrie.



## II – APPROCHE SOMMAIRE DE LA NOTION DE «SAVOIR-FAIRE» GEOMETRIQUE.

Pour un observateur même peu averti, il est facile de distinguer une classe novice et une classe entraînée à des activités géométriques, les deux classes ayant fait l'objet de la même demande du professeur : «Tel jour à telle heure, nous ferons de la géométrie, alors venez avec le nécessaire !».

Chez les novices, le déballage seul prend un certain temps. On s'aperçoit de certains oublis, qui sont abondamment commentés par le professeur ou des élèves. Des confrontations spontanées du matériel ont lieu çà et là. Le démarrage de l'activité est hésitant, donne lieu à des questions. Rapidement, certains s'aperçoivent que des crayons trop mal taillés, des règles trop abimées ou une mauvaise perception de la tâche obligent à tout recommencer, et les «loups» (feuilles bonnes pour le panier) s'accumulent.

Dans la classe entraînée, le déballage passe inaperçu. Il en est de même pour les quelques oublis, qui sont facilement compensés par recours aux voisins. Rapidement, tout le monde ou presque donne l'impression de s'être investi dans l'activité. Des feuilles de figures antérieurement exécutées surgissent pour donner lieu à des confrontations avec la tâche présente s'il le faut. Les pertes de papier sont minimes, car les corrections (inévitables) sont perçues avant d'avoir eu des conséquences trop fortes. Il intervient donc plus que la seule organisation matérielle. La question qui mérite d'être posée est alors :

Au delà des observations de surface sur l'activité de classes en géométrie, y a-t-il des différences dans les acquis conceptuels ?

Pour nous, la réponse est positive, mais amène à une question plus délicate :

Quels repères permettent de situer des différences d'acquis conceptuels en géométrie ?

Les contenus mathématiques en jeu (règles d'incidence, longueurs, angles, aires, figures fondamentales, transformations,...) ne nous semblent pas suffire pour un tel repérage. L'analyse des **tâches effectives** que sollicitent les exercices de géométrie, conduit à distinguer comme des entités séparées les productions :

— de tracé ;
— de langage.

Ensuite seulement, on peut prendre en compte leurs relations mutuelles. L'activité de tracé et l'activité de langage revêtent elles-mêmes des aspects différents, selon les différentes phases de travail. Ainsi, pour une phase que Guy Brousseau (1981) situerait dans une «didactique de l'action», il y aura un emploi de langage, mais différent de celui qui apparaît dans une «phase de formulation».

Il y a donc quatre couples d'entrée-sortie possibles pour un traitement géométrique : **tracé-tracé**, **tracé-langage**, **langage-tracé** et **langage-langage**, mais il convient de plus, pour juger de productions, de distinguer langage **oral** et langage **écrit** et d'appliquer des critères différents à des niveaux de production différents. Pour le tracé, les exigences de qualité différentes conduisent à distinguer trois niveaux de réalisation :

— les croquis ou schémas de travail ;
— les réalisations présentables (dessins d'élèves au propre) ;
— les travaux de qualité professionnelle.

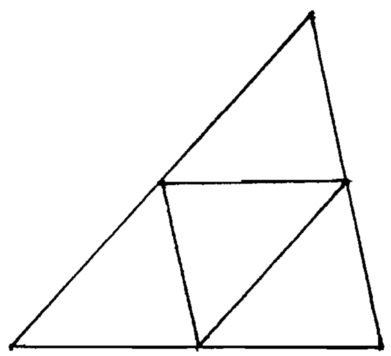
Pour un texte, il convient de distinguer selon le caractère de permanence et de généralité des assertions formulées :

— les textes narratifs, dans lesquels le ou les sujets qui interviennent sont identifiés et où l'action est localisée dans le temps (exemple : «j'ai pris ma règle et j'ai tiré un trait de A à B» est une phrase qui fait partie d'un texte narratif : emploi de «je» et du passé),

— les textes descriptifs, qui renvoient de façon générale à une situation géométrique, mais sans examen des contraintes (exemple : un programme de construction),

— les textes argumentés, contenant au moins des explications et, pour les plus élaborés, des justifications mathématiques.

Il nous est apparu comme vraisemblable, à la suite de nos observations, que les **compétences** des élèves en géométrie tiennent moins à leur connaissance des concepts géométriques et des structures, qu'à leur perception et leur capacité de prise en compte des caractéristiques propres aux divers traitements. Dire par exemple d'un élève qu'il «ne voit pas» revient souvent au constat qu'**au contraire** il se laisse **piéger par la vision.**



Par exemple, considérons la figure obtenue en menant par chaque sommet d'un triangle la parallèle au côté opposé ; l'enquête effectuée en fin de classe de troisième, rapportée dans (Dupuis et al. 1978) met en évidence qu'une forte proportion d'élèves n'y voit que quatre petits triangles dans un grand triangle ; or, par construction, on a tracé trois parallélogrammes. Il peut ainsi y avoir quasi incompatibilité entre des **unités figurales apparentes** et des **instructions de tracé.** Autrement dit, la simple perception de caractéristiques du tracé demande parfois une analyse qui ne s'en tient pas aux apparences. Ceci s'apprend. De la même manière, la production d'un texte descriptif ou argumenté suppose éprouvée la différence de situation entre **dialogue et monologue.** Dans la situation courante de dialogue, l'interlocuteur présent est en mesure de solliciter tout éclaircissement qui lui paraît nécessaire ; le locuteur peut ainsi se dispenser d'analyser toutes les interprétations variées d'une instruction de tracé qu'il propose. Dans la situation de monologue, il faut apprendre à tenir soi-même le rôle d'interlocuteur pour être en mesure de repérer d'éventuelles ambiguïtés : il s'agit d'expliciter les interprétations (le «dire» et non le «vouloir dire»).

Les compétences ainsi identifiées se situent à deux niveaux pour tout traitement donné :

— au premier niveau, il y a possibilité de procéder à **l'identification,** la **représentation** ou la **désignation** des objets géométriques en jeu,

— au second niveau, il y a possibilité de procéder à une **exploration des contraintes** de la situation (par exemple en traçant plusieurs figures pour les comparer).

Ce n'est bien sûr qu'au second niveau que la notion d'**hypothèse** peut émerger pour les élèves, mais ceci ne signifie pas, bien au contraire, que le professeur ne doit pas la prendre en compte dans les situations qu'il présente aux élèves. Pour ceux-ci, une habitude de fonctionner sur la base du «consensus» (par exemple, dire d'un quadrilatère qui «a l'air» d'avoir deux axes de symétrie orthogonaux que c'est un losange) risque de rendre incertain l'accès au second niveau, sans même parler de l'explicitation d'hypothèses. Certes, dans l'enseignement de l'école élémentaire, une acquisition de vocabulaire peut passer, pour les mathématiques, par des identifications de formes analogues à celles qui fonctionnent couramment (reconnaître un arbre typique, différents arbres courants, dessiner des arbres, dire qu'un chêne est un arbre sont des approches du concept courant d'arbre ; pour leur concept d'arbre, les naturalistes doivent, eux, adopter des critères). Mais une telle approche est catastrophique au niveau du collège par rapport à la formation du raisonnement. Le premier temps, qui consiste en le passage d'une identification de **forme perceptive** (schématisée) à l'identification géométrique d'une **figure construite**, en enchaînant des instructions de construction, revient à la prise de conscience du **jeu des contraintes***.

Il est donc important pour la majorité des élèves que les **contraintes** des situations qui leur sont présentées soient **explicitées systématiquement** : ce peut-être par des textes, par l'emploi de symboles (par exemple, celui qui indique un angle droit) ou par des conventions (par exemple, l'utilisation de papier quadrillé). Jusque dans des textes officiels, on a pu rencontrer l'expression «observation d'objets géométriques et physiques» (c'est le titre du'une partie des programmes qui étaient proposés en 1977), mais l'expression «géométrie de l'ostention» qu'emploie Colette Laborde (1984) nous paraît mieux convenir à cette présentation, à laquelle nous opposons l'explicitation des contraintes. Le passage sans transition d'une géométrie de l'ostension à une géométrie déductive nous semble en effet voué à l'échec auprès de la majorité des élèves. La conséquence à en tirer est qu'il y a beaucoup **plus** à faire dans l'enseignement que l'on ne croit généralement en géométrie. Et ceci ne signifie pas y consacrer beaucoup plus de temps d'enseignement, mais mettre en pratique des activités beaucoup plus diversifiées : force est de constater que, sur toutes celles qui se dégagent des considérations présentées ici, seule une minorité est habituellement exploitée.

* A la lecture de ce passage, Raymond Duval fait la remarque suivante, qui précise que la différence entre construction selon des instructions spécifiées et tracé libre ne réside pas seulement dans le résultat obtenu (significatif dans le premier cas et beaucoup moins dans le second comme le savent bien les professeurs), mais concerne également l'observation de l'activité elle-même : du point de vue psychologique, l'activité de tracé libre ne permet pas à l'observateur de lever une ambiguïté d'interprétation tenant à la personnalité de son exécutant ; en effet, le **même** tracé peut aussi bien être l'image d'une figure construite, donc relever d'une identification géométrique, qu'être l'identification d'une forme perceptible schématisée à partir de l'environnement.

En particulier les traitements dont la sortie est un tracé sont généralement défavorisés par rapport à ceux dont la sortie est un texte (éventuellement accompagné d'une figure). Par référence à un cadre général de différenciation (puisque l'expérimentation que nous allons présenter, était placée sous un intitulé de pédagogie différenciée), il était d'ailleurs normal de permettre aux élèves de manifester des compétences variées, en leur soumettant les divers traitements géométriques à leur portée. Nous verrons que, dans les faits, la variété des tâches proposées lors de la première année de l'expérimentation s'est avérée insuffisante, ce qui nous a conduit à l'augmenter la deuxième année

## III – LE CADRE EXPERIMENTAL.

### 3.1 Cadre institutionnel.

Il s'agit d'une mise en pratique de pédagogie différenciée au collège, entreprise dans plusieurs disciplines conformément à un projet du Professeur Louis Legrand, de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Le collège d'Ostwald (communauté urbaine de Strasbourg) accueille l'expérimentation en fraçais et en mathématiques, au niveau scolaire de la sixième (élèves âgés de 11 à 12 ans) pour 1984-1985 et 1985-1986. Pour les mathématiques, un groupe de quatre professeurs du collège est impliqué dans l'opération, animée conjointement par l'IREM et le CRF PEGC de Strasbourg.

**Personnes impliquées** (les personnes en caractère gras ont également participé à la reprise en 1985-1986).

Professeurs de mathématiques du collège : MM. **Armand Baehl, Claude Mathern, Jean-Claude Rauscher, Denis Ubrig.**

CRF PEGC : Mme Françoise Mollet-Petit et M. **Claude Soumoy**, Directeurs d'études respectivement pour les mathématiques et la psycho-pédagogie.

IREM : MM. Charles Moritz et **François Pluvinage**, animateurs à l'IREM

Ont en outre participé à certaines opérations d'observation et d'exploitation de résultats : Melle Marie-José Rémigy, de l'UER des Sciences du Comportement et de l'Environnement, et Mme Touria Kabbab, professeur chargée de formation au Maroc et en stage pour études à Strasbourg.

**Thèmes principaux retenus.**

Après l'étude préliminaire effectuée en fin d'année scolaire 1983-1984, et compte-tenu tant du cadre général de l'expérimentation (pédagogie différenciée) que des questions qui se posent actuellement à propos de l'enseignement des mathématiques, il a été décidé que l'expérimentation porterait en priorité sur :

— l'acquisition d'un savoir-faire géométrique,

— des appropriations en rapport avec la proportionnalité.

Ces thèmes ne sont pas nouveaux (ils posent au contraire des problèmes d'enseignement depuis que l'enseignement des mathématiques est institutionnalisé) mais ils sont toujours importants et actuels. La façon de les délimiter et de les aborder pratiquement a résulté, elle, de considérations et de recherches récentes. L'enseignement vise moins aujourd'hui à former des exécutants sûrs de tâches précisément répertoriées, qu'à développer les capacités d'initiative et d'adaptation nécessaire notamment à l'utilisation de technologies avancées, en constante évolution. L'importance à accorder aux problèmes d'organisation et de contrôle de tâches s'en trouve donc accrue. D'autre part, la mise en évidence, à de nombreuses occasions lors de recherches, de la durée (plusieurs années) et de la progressivité des psycho-génèses d'appropriations conceptuelles conduit aujourd'hui à baliser des parcours d'apprentissage, que l'on aurait vu autrefois d'un seul tenant. Telles sont les idées générales qui, outre la différenciation des élèves, ont conduit :

— à proposer ces activités géométriques qui donnent lieu à la fois à des tracés, des mesures, des calculs et des reports, et qui soient suffisamment riches pour que se posent des questions d'organisation d'une tâche,

— à utiliser fréquemment des calculatrices pour mettre en évidence plus la conduite de calculs que leur exécution sur le papier, en visant l'objectif de conduites de calculs aussi bien menées sur les questions multiplicatives qu'additives.

L'exploitation de situations créant des problèmes a été faite conformément aux principes présentés dans le texte d'instructions générales pour l'enseignement des mathématiques au collège, qui sera mis en application à partir de la rentrée 1986.

On le voit, l'expérimentation ne se limitait pas à la géométrie, mais c'est sur l'enseignement de la géométrie que nous centrons ici nos propos. Une remarque importante mérite toutefois d'être faite : l'enseignement n'a pas isolé les recherches géométriques des activités numériques, et une telle séparation serait d'ailleurs néfaste. Dans les deux articles de «petit x» consacrés à l'appropriation de la notion d'aire, Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin (1984) expriment un propos semblable, et l'idée de «jeux de cadres» développés dans sa thèse par Régine Douady étaye un tel point de vue, en accord avec notre idée d'apprentissage par double programmation (Pluvinage 1983).

En 1985-1986, à la suite de rédaction du rapport sur l'expérimentation en 1984-1985, un certain nombre de questions nous semblaient à préciser ou revoir. Pour ce qui est de la géométrie, c'est surtout la mise en place du langage qui apparaissait sujette à caution, car nous n'avions pas pris en compte le langage comme élément constitutif des activités en géométrie, donc de la géométrie, nécessitant par suite, pour être appris, d'apparaître comme un **outil** de traitement approprié à certaines situations. C'est essentiellement en direction de l'**intégration** des «productions langagières» à l'activité géométrique qu'une reprise de l'expérimentation de 1984-1985 a été faite en 1985-1986, avec une nouvelle population d'élèves de sixième.

**3.2 Le fonctionnement du module constitué par les trois classes de sixième.**

Dans cette partie, les enseignants de l'équipe du collège d'Ostwald, qui participent à la recherche, présentent et argumentent l'organisation de l'horaire d'enseignement des mathématiques en 6ème. Cette organisation a évolué au cours du temps. C'est aussi de cette évolution dont nous voudrions brièvement rendre compte.

La décision de travailler en équipe en fondant un module de trois classes a précédé le démarrage de la recherche présente. Cette décision résultait d'une volonté d'unir nos efforts et nos réflexions pour nous confronter à la difficile tâche des enseignant de collège qui consiste à tenter de passer d'une «école ouverte à tous» à une «école de la réussite pour tous». Or comme chacun sait, l'adhésion raisonnée à une telle perspective ne suffit pas. Il faut définir des moyens pour l'aborder. La réforme dite Haby proposait aux enseignants de mener une pédagogie différenciée dans le cadre de classes dites hétérogènes. Cette pédagogie différenciée devait s'articuler autour d'une pédagogie de soutien et d'approfondissement et s'appuyer concrètement sur le schéma horaire suivant : 3 heures d'enseignement avec toute la classe, 1 heure d'enseignement de soutien pour les uns, d'approfondissement pour les autres. Au-delà de ce cadre horaire et des incitations, les circulaires restaient vagues sur la définition d'une telle pédagogie. Après avoir essayé de «faire de notre mieux», individuellement, pendant plusieurs années, nous avons décidé de réunir nos réflexions... et nos élèves, soutenus en cela, un peu plus tard, par la rénovation des collèges d'une part, d'autre part par la recherche présentée ici. Notre idée était d'essayer de concilier les avantages d'une classe hétérogène, stimulante pour l'ensemble des élèves, et la nécessité de présenter un enseignement abordable par chacun des élèves.

Dans **un premier temps** nous nous sommes prudemment basé sur le schéma horaire Haby : pendant trois heures hebdomadaires, les élèves travaillaient dans leurs classes respectives ; classes constituées aléatoirement par l'administration en début d'année ; pendant la quatrième heure la population globale des trois classes était répartie en trois groupes pour des séances de soutient et d'approfondissement. Si le travail d'approfondissement donnait satisfaction, par contre, le travail de soutien s'est révélé bien trop ponctuel et artificiel pour les élèves en difficulté dans un domaine donné. Répéter pendant une heure ce qui n'est pas entendu et intégré pendant les trois autres est inefficace si les notions visées n'ont pas sens pour les élèves. Il fallait donc plus insister sur la différenciation des démarches d'approche des notions enseignées que sur le renforcement et le ratrapage de savoirs non intégrés par les élèves.

Dans **un deuxième temps** les années suivantes, nous nous sommes donc basé sur le schéma horaire suivant :

a. pendant deux heures hebdomadaires, les élèves travaillent dans leurs classes respectives, classes qui ont été constituées aléatoirement par l'administration ;

b. sur les deux autres heures hebdomadaires la population globale des trois classes peut être répartie en quatre groupes, un quatrième professeur intervenant sur ces deux heures alignées dans l'horaire des trois classes.

Voici comment cet horaire fut utilisé :

a. pendant les deux heures de classe nous abordions la partie des notions à enseigner qui nous semblaient (la démarche est restée subjective) poser le moins de problèmes dans une classe hétérogène ;

b. par contre dans les deux heures de groupes furent enseignées les notions plus difficiles. Les groupes étaient constitués à l'aide de tests de préacquis à propos des notions visées (comme la proportionnalité par exemple). Les tests terminaux étaient communs aux quatre groupes.

De nombreux élèves qui dans le cadre d'une classe hétérogène 4 heures sur 4 auraient été découragés par les difficultés, retrouvaient dans les deux heures de groupes l'occasion d'effectuer un apprentissage effectif des notions visées et retrouvaient alors le goût du travail, même dans la classe hétérogène. D'ailleurs les partitions réalisées d'après les tests d'entrée défiaient certaines idées préconçues à propos des élèves dits «forts» ou «faibles» : de nombreux élèves présentaient des résultats très contrastés selon les domaines évalués. D'autre part les évaluations finales, communes à tous les élèves, montraient que de nombreux élèves de n'importe quel groupe arrivaient à tirer leur épingle du jeu. Mais outre que la partition du programme semblait artificielle, il restait à approfondir la notion de différenciation des démarches selon les groupes. Le danger nous guettait entre autre de nous abandonner pour les groupes les plus faibles à ce que les didactitiens des mathématiques appellent une «réduction à l'algorithmique», les groupes «forts» réalisant une démarche mathématique couvrant les objectifs cognitifs des plus modestes (répéter, calculer, appliquer par exemple) aux plus ambitieux (conjectuer, démontrer), les groupes faibles étant cantonnés aux calculs et aux applications. Il fallait donc envisager des activités qui donnent l'occasion à **tous** les élèves de pratiquer des mathématiques et pas seulement à répéter des mathématiques. Il s'agissait donc de proposer des activités qui répondent aux conditions suivantes :

— Les activités proposées aux élèves doivent avoir sens pour eux, c'est-à-dire que les élèves doivent pouvoir y être impliqués comme sujets qui essayent d'avoir prise sur une situation. Les activités doivent donc, dans un premier temps, susciter une pensée en action pour agir et transformer une situation, même si, par la suite, l'accession à une pensée plus spéculative est visée à l'initiative des élèves par exemple, pour prouver la validiter d'une procédure d'action.

— La situation doit être abordable par **tous** les élèves. Ils doivent pouvoir démarrer sur du «connu» qui ouvre sur des conjectures ou des connaissances nouvelles qui auront ainsi sens pour les élèves. Ces connaissances pourront alors être dégagées et «décontextualisées» avec l'aide des enseignants.

Toute la difficulté est de définir des situations qui répondent aux conditions posées. C'est un effort dans ce sens que la recherche nous a facilité et c'est dans cette perspective que se dégage le schéma de fonctionnement actuel, **troisième temps** de notre évolution :

a. pour les deux heures en quatre groupes, nous profitons de la possibilité d'avoir des effectifs plus légers pour proposer aux élèves des activités débouchant sur un savoir-faire, de nouvelles notions, ou des conjectures faites par les élèves ;

b. pendant les deux autres heures en classe nous faisons :

— la formalisation et la synthèse des notions dégagées pendant les activités en groupes (ceci après une période d'activités),

— les exercices d'application suivant la synthèse d'une action,

— les devoirs d'évaluation à la suite de ces synthèses et des séances d'exercices d'application,

— les tests de préacquis avant l'abord de nouvelles notions,

— l'enseignement de notions non abordées en groupes (il en existe encore... voir le plan de travail de l'année scolaire qui suit).

Dans ce schéma de travail, tout autant que l'élaboration d'activités, c'est l'**articulation** entre les activités et le cours avec ses exercices qui a focalisé l'effort de recherche.

— D'une part, il s'agit de retenir certains aspects des activités pour les élargir et les faire déboucher sur des savoirs ou des procédures d'intérêt général (et non propres à l'activité effectuée).

— D'autre part, les textes d'entrée, les évaluations intermédiaires et l'observation des élèves et de leurs productions durant les activités permettent de différencier les contenus à transmettre dans l'enseignement, entre

- ceux qui demandent un effort d'enseignement particulier,
- ceux qui peuvent servir de point d'appui pour amorcer cet effort,
- ceux qui ne posent problème qu'à quelques élèves seulement (un effort de différenciation a postériori étant alors envisagé pour ces élèves).

## IV – REPARTITION DES HEURES DE MATHEMATIQUES
### au cours de l'année 1985-1986

| CLASSES ENTIERES | | GROUPES | |
|---|---|---|---|
| du 10-9<br>au 16-9 | – Activité de démarrage :<br>course à 20 ...<br>–Test **de préacquis** sur entiers<br>– Enquête sur le «vécu» en math. | | |
| du 17-9<br>au 30-9 | – **Activité** 1 (suites de nombres entiers) | | |
| du 3-10<br>au 11-10 | – **Cours** et **exercices** sur les nombres entiers, additions, soustractions, ordre | | |
| du 14-10<br>au 25-10 | – **Activité 2** (suites de multiples)<br>– **Test de préacquis** sur les décimaux<br>– **Test de closure** | | |
| du 5-11<br>au 17-12 | – **Cours** et **exercices** sur les nombres entiers, multiplications<br>– «Problèmes» additifs<br>– **Evaluation** sur entiers<br>– **Test** de constructions géométriques | | |
| du 29-11<br>au 17-12 | – **Activité 3** (transformations déformantes, décimaux)<br>– Problèmes multiplicatifs | du 5-12<br>au 13-1 | – **Activité** 4 (constructions points par points) |
| du 3-1<br>au 28-1 | – **Cours** et **exercices** sur les décimaux | du 16-1<br>au 30-1 | – **Activité 5** (figures téléphonées, écriture de programmes) |
| du 31-1<br>au 14-2 | – **Evaluation** sur les décimaux<br>– **1ère évaluation** en géométrie<br>– **Test d'entrée** proportionnalité | du 13-2<br>au 6-3 | – **Activité 6** (transformations dans un repère) |
| du 17-2<br>au 13-5 | En alternance :<br>– **Cours géométrie et exercices** Les figures élémentaires<br>– **Exercices** sur décimaux avec problèmes comportant des divisions | du 10-3<br>au 24-3 | – **Activité 7** (étude graphique de situations diverses) |
| | | du 10-4<br>au 26-4 | – **Activité 8** (les rectangles de «même forme», agrandissement de figures) |
| du 16-5<br>au 30-5 | – **Exercices** avec usage du rapporteur pour la reproduction et la construction de figures | du 5-5<br>au 12-6 | – **2ème évaluation** de géométrie<br>– **Cours et exercices** sur proportionnalité (suites proportionnelles, échelles, pourcentages) |
| du 3-6<br>au 24-6 | – **Exercices et cours** sur périmètre et aire de figures élémentaires<br>– Enquête sur le «vécu» de l'année | | |

## V – DESCRIPTIF DES ACTIVITES GEOMETRIQUES PROPOSEES.

Le mot «activité» recouvre des acceptions diverses. Or les activités qui nous apparaissent susceptibles de déterminer des évolutions du savoir des élèves, activités que l'on pourrait peut-être qualifier de **structurantes**, correspondent à des exigences très précises, que le texte général introductif des programmes de mathématiques 1986 pour les collèges (paru en «livre de poche» en 1985) énonce, et qu'avec Jean-Claude Sidler nous classerons en quatre points :

1. **démarrage** possible pour la quasi-totalité des élèves
2. **poursuite** enrichissante (arrêté, on «reste sur sa faim»)
3. **génération** de conjectures
4. **maîtrise** des conjectures, éventuellement après apport d'informations.

Certes, ces quatre points renvoient à l'observation du travail d'élèves, et devraient donc être précisés par des caractéristiques a priori des activités elles-mêmes. Pour ne pas trop nous étendre, nous ne le faisons pas, nous contentant de signaler que l'observation de la satisfaction ou non de cas d'exigences par une activité est des plus simples : le professeur «sur-intervient» ou au contraire «laisse tomber» pour passer à autre chose, dès qu'une exigence sur les quatre n'est pas satisfaite. De plus, le déroulement de la tâche que l'on peut faire pour soi-même est déjà très éclairant, à ceci près que l'on n'est pas toujours à même de prévoir toutes les conjectures que pourront faire les élèves. En tous cas, on voit très bien si les connaissances nécessaires au démarrage sont celles que possèdent presque tous les élèves, et si l'on est soi-même obligé de poursuivre un peu pour «y voir quelque chose». De même, si aucune question ne surgit alors à l'esprit, on peut être inquiet sur la possibilité qu'il y aura de gérer la situation pour passer à l'acquisition de connaissances et de savoir-faire.

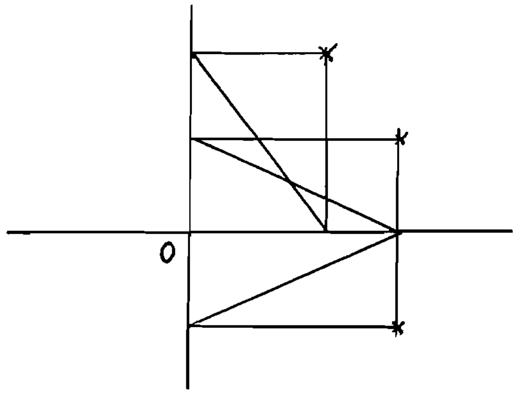
Voici les activités géométriques proposées lors des séances d'activités (nous excluons donc quelques activités uniquement numériques ou liées au repérage).

– **Une transformation.**

Cette activité est décrite en page 87 du livre de sixième de l'IREM de Strasbourg (1986), nous avons utilisé également les éléments et figures qui se trouvent en page 89 et en page 103 (exercice 40, a) du même livre. Cette activité a été pratiquée en 1984-1985 et 1985-1986.

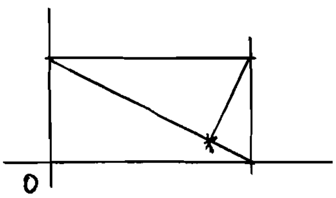
– **Constructions par points.** (Cette activité a été pratiquée en 1984-1985 et 1985-1986).

– Un schéma tel que celui représenté a été tracé au tableau devant les élèves. La longueur de diagonale qui leur a été indiquée pour leur travail sur feuille était de 9 cm (nous avons ici réduit à 3 cm). Deux courbes vont apparaître à l'issue du tracé de nombreux rectangles : le cercle, ensemble des sommets opposés à O, et l'enveloppe des diagonales.

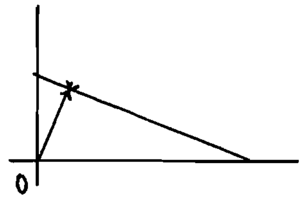



rectangles de diagonale 3 cm

– Au fur et à mesure de réalisations satisfaisantes de la construction précédente, deux nouvelles constructions sont proposées à partir des mêmes rectangles.

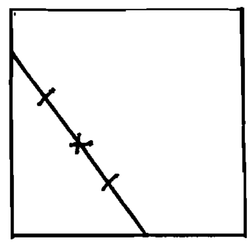



projection à angle droit
du sommet opposé à O

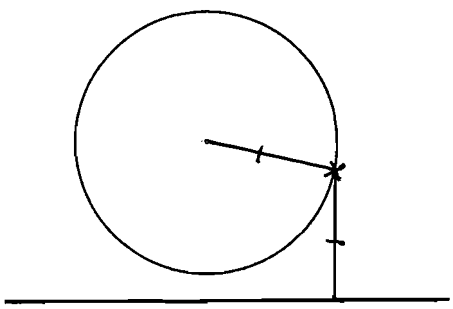



projection à angle droite de O

– A partir cette fois de l'exploitation du milieu, une nouvelle construction a été proposée sur la base du dessin ci-contre : l'ensemble des milieux de segments de longueur donnée l inscrits dans un carré de côté a (a un peu plus petit que l). Bien sûr, la formulation ci-dessus était inutile auprès des élèves : le schéma et l'habitude de faire varier des segments de longueur donnée suffisaient, avec le seul mot «milieu» pour préciser la contrainte.



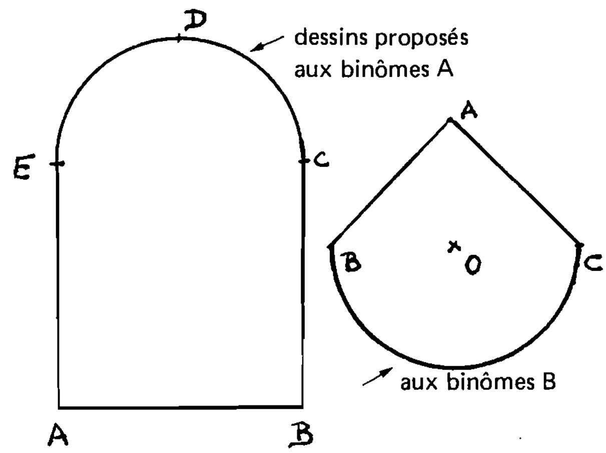
– Avec l'égalité de longueurs comme contrainte, une dernière construction a été demandée en partant d'une famille de cercles concentriques et d'une droite de référence. Les points obtenus sont ceux d'une parabole.



— **Figures téléphonées.**

L'activité se présente sous forme d'un jeu pour lequel les élèves sont répartis en équipes de quatre : deux binômes, désignés ici par A et B, «géographiquement» éloignés l'un de l'autre dans la classe. Chaque binôme reçoit un dessin. Il s'agit de décrire ce dessin à l'intention de l'autre binôme, dans le but d'en obtenir une reproduction précise. Dans un premier temps, chaque élève travaille seul à la production d'un texte décrivant le dessin qu'il a sous les yeux (et qu'il peut mesurer). Ensuite, les deux élèves d'un binôme confrontent leurs descriptions, pour en produire une synthèse qui soit la meilleur possible. Ces deux temps constituent la première phase du jeu. Lors de la deuxième phase, chaque binôme effectue le tracé qui lui est indiqué par le texte, par le second binôme de l'équipe. En cas de difficulté, des questions écrites sont autorisées : le professeur les transmet, ainsi que les réponses en retour.

A la fin du jeu, on compare les reproductions des diverses équipes, en s'aidant, en cas de litige sur la qualité des reproductions, d'un calque où figurent les dessins originaux. Une séance d'essai, pour bien comprendre le jeu, a été organisée avant la séance «officielle». Voici, réduites, les figures très simples proposées pour l'essai (leur complexité s'est avérée largement suffisante).

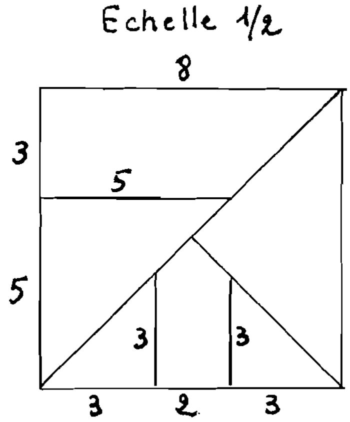



Cette activité n'avait pas été programmée en 1984-1985. Elle a été introduite en 1985-1986 pour combler l'absence de «problématique de l'expression» constatée en 1984-1985 (le vocabulaire et la phraséologie introduits dans l'enseignement ne paraissaient pas, pour beaucoup d'élèves, répondre à des nécessités précises, sinon celles de se conformer à la demande des professeurs).

— **Problème d'observation et de recherche.**

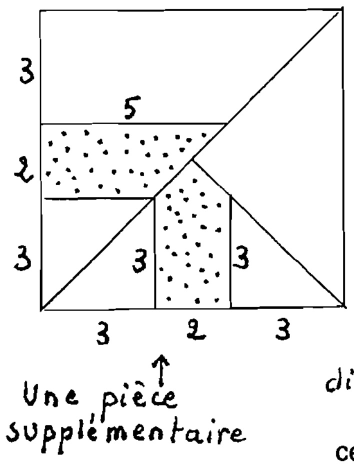
Le problème proposé consiste en la recherche du plus grand triangle rectangle isocèle qui peut être logé dans une fenêtre rectangulaire que l'on se donne. Dans un premier temps, des séances de travaux pratiques, avec découpage de pièces en forme de triangles rectangles isocèles, sont organisés, pour une recherche dans le cas de fenêtres rectangulaires de dimensions 14 cm par 8 cm et 17 cm par 12 cm. Ensuite sont prévus des travaux différenciés. Cette activité programmée en 1984-1985 n'a pas été reprise en 1985-1986, parce qu'elle s'est avérée trop «élitiste» : seuls les deux meilleurs groupes de travail en avaient tiré parti ; dans les deux autres groupes, la production n'a pas été suffisante, à cause des difficultés à intégrer les contraintes, pour déboucher sur des conjectures intéressantes.

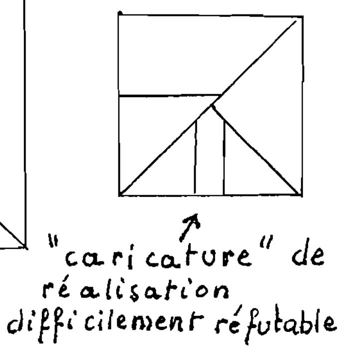
– **Agrandissements et réductions.** (Tangram et suite de rectangles).

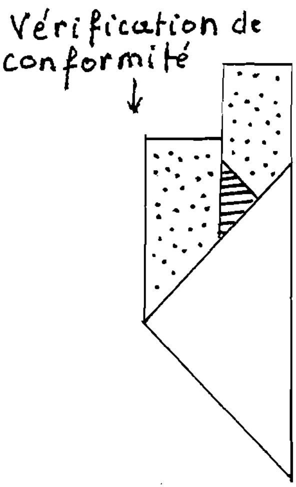



On a proposé de reproduire un puzzle de genre «Tangram» (représenté ci-contre réduit de moitié) mais en l'agrandissant de telle sorte qu'il occupe un carré de côté 10 cm. Même tâche ensuite pour des carrés de côtés 12 cm, puis 18 cm.

En 1984-1985 et 1985-1986, la tâche a été effectuée individuellement, mais ceci a permis à certains élèves de proposer des réalisations difficilement réfutables sans évocation de la proportionnalité. Or l'activité est précisément prévue comme introductive à la proportionnalité ! Pour éviter ce «**cercle vicieux didactique**», on peut organiser une séquence comme celle prévue par Guy Brousseau (1981) commençant par la réalisation des diverses pièces par des élèves différents, mais ceci prend plus de temps que celui que nous voulions consacrer à cette activité ; on peut se contenter d'un travail individuel, en ajoutant simplement une pièce comme nous l'avons illustré : ainsi, les deux pièces ayant sur le puzzle original un côté de 2 cm doivent, accolées, correspondre à la moitié d'un côté du puzzle complet. La vérification de cette condition sur les pièces proposées par un élève est très simple, comme le montre la figure ci-contre.




Les aspects géométriques de la proportionnalité étaient également introduits par l'activité intitulée «suite de rectangles». Cette activité figurant en page 241 du livre de mathématiques de l'IREM de Strasbourg (1986), nous ne la reproduisons pas ici.

## VI – GESTION DES APPRENTISSAGES, LIAISON ACTIVITES-COURS.

### 6.1 Tests d'entrée.

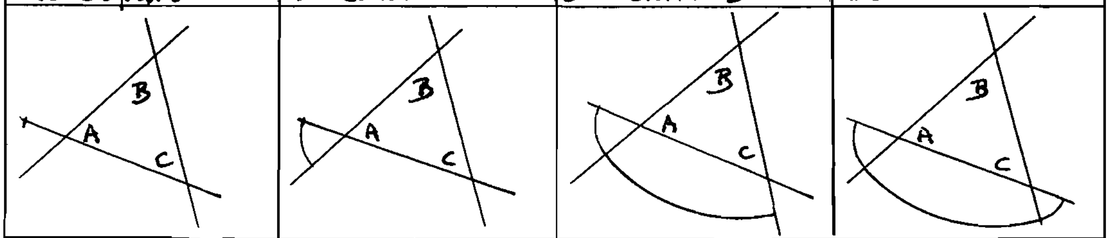
Pour la plupart d'entre elles, les activités ont été pratiquées dans les «groupes» (rappelons que le module de 3 classes donnait lieu, pour 2 des 4 heures de mathématiques, à 4 groupes de travail). Les groupes étaient constitués d'après une évaluation du niveau des élèves dans le domaine à travailler plus spécifiquement. C'est d'ailleurs un élément de différenciation intéressant qu'un même élève puisse être dans des groupes de niveaux différents selon le sujet mathématique exploité : ceci contribue à éviter de donner une étiquette trop globale au fait d'être dans un groupe fort ou un groupe faible (on est dans un groupe «fort en constructions géométriques», ou «faible sur les questions de proportionnalité», par exemple). Certes, ce mode d'organisation peut poser des problèmes, mais il convenait à l'équipe des professeurs de mathématiques, et il convient donc de le signaler sans pour autant faire du prosélytisme en sa faveur auprès d'équipes préférant d'autres modes de fonctionnement. Ce qui est d'intérêt général en revanche, c'est de disposer de **tests d'entrée.**

En géométrie, l'une des questions de ces tests d'entrée qui s'est avérée très intéressante est une construction partiellement filmée, que nous reproduisons. La question n'a été soumise aux élèves qu'en 1985-1986.

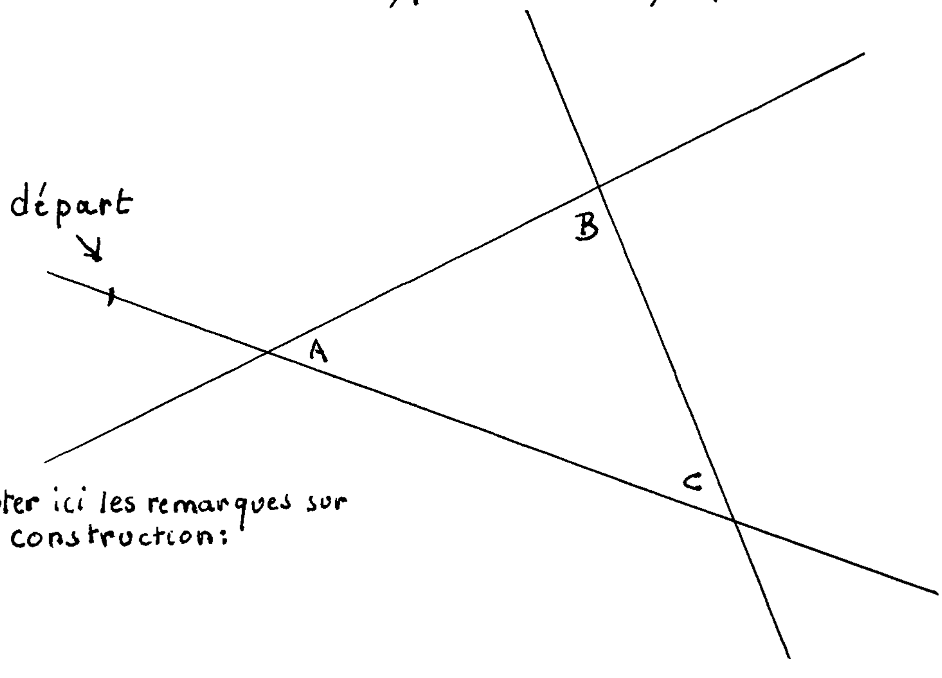
DES ARCS DE CERCLE QUI SE SUIVENT....

Voici le début du "film" d'une construction au compas :

| Le triangle ABC de départ | Un arc de cercle de centre A | Un arc de cercle de centre B | Un arc de cercle de centre C |
|---|---|---|---|




Pour le triangle ci-dessous, faire la même construction que sur le "film". Ensuite, continuer la construction de la même façon grâce à trois nouveaux arcs de cercle : de centre A, puis de centre B, enfin de centre C.




Noter ici les remarques sur la construction :

Il serait certes excessif de prétendre que l'on peut juger les capacités d'un élève en géométrie au vu de sa production sur cette seule question, et il s'est produit en effet l'un ou l'autre «accident» (par rapport aux autres productions d'un même élève), mais cette question s'avère très discriminante dans la population interrogée.

Voilà comment se sont réparties les réponses de 68 élèves présents à ce test.

**Premier groupe** : 25 élèves.

Sur ces 25 élèves, 19 ont effectué une construction parfaite ; les 6 autres ou bien ont été un peu approximatifs dans leurs tracés, ou ont pris un point de départ autre que celui donné (mais ont effectué, à part cela, une construction correcte).

**Deuxième groupe** : 16 élèves.

On peut parler de demi-réussite pour ces élèves : ils ont effectué correctement une partie de la tâche, en raccordant correctement des arcs de cercle. Mais ils ont aussi commis des erreurs.

**Troisième groupe** : 21 élèves.

On est en droit de dire que ces élèves ont été en difficulté sur cette tâche : aucun raccord correct d'arcs de cercle n'est obtenu (exemple de production : un cercle complet, de centre B).

**Dernier groupe** : 6 élèves.

Il s'agit de cas d'échec total, ces élèves ont au plus produit un tracé de cercle centré en un point autre que A, B ou C.

Notre surprise est venue du deuxième groupe : nous avons trouvé parmi les productions des **reproductions incorrectes** accompagnées de **suites correctes**. A priori, nous attendions des productions du type «bonne reproduction — mauvaise continuation», et il y en a eu en effet, mais nous n'attendions guère l'inverse.

En effet, il y a non seulement les images du «film», mais les titres des vignettes pour mettre le tracé en évidence. Mais malgré cela, le résultat figural apparent est **une** courbe dont l'allure est proche de celle d'un arc de cercle. Ce résultat figural suffit, pour certains élèves, à «inhiber» l'algorithme qui s'impose par la suite, quand la vision ne «gêne» plus.

Notons pour l'anecdote qu'un élève a été capable de **justifier** la production d'une courbe fermée, ce qui est réellement remarquable en classe de sixième.

Nous ne donnons pas ici d'autres exemples de questions de tests d'entrée, nous contentant d'indiquer qu'elles peuvent aussi bien comporter une exploration de pré-requis que de pré-acquis. Ainsi, à propos de la proportionnalité, nous avons pu constater qu'un peu plus de 10% des élèves pouvaient déjà envisager un coefficient faisant intervenir deux grandeurs différentes, alors que plus du quart ne se tirait d'affaire au départ que sur des situations du domaine purement additif ; ceci situait des écarts importants concernant cette notion.

**6.2 L'exploitation des activités.**

Le déroulement d'une activité se fait le plus souvent en petits groupes de travail, ou même en travail individuel. A la fin de cette phase, seul le professeur possède des informations sur les diverses productions obtenues. Une **synthèse** vaut donc la peine d'être organisée, dans le simple but de faire circuler ces informations parmi les élèves. Il s'agit d'une mise en commun, qui ne nécessite pas beaucoup de temps. Par exemple, au terme de l'activité de transmission de figures (figures «téléphonées»), le professeur peut rassembler ses élèves autour de sa table, pour que chacun voit les diverses reproductions obtenues et pour les apprécier.

D'une autre nature est la **mise en place** de connaissances et savoir-faire qui est dégagé de la pratique d'une activité, après cette synthèse. Dans certains articles de didactique, on désigne cette mise en place, dans sa phase terminale, par le terme laid mais évocateur (trop peut-être) d'institutionnalisation, la phase initiale correspond à une démarche d'élargissement de l'activité pratiquée vers d'autres applications que l'on appelle parfois d'un nom tout aussi barbare que le premier, mais précis : «décontextualisation». Dans l'exemple que nous avons cité, sur la transmission des figures, l'activité a soulevé des problèmes de communication à l'intérieur d'un petit groupe, et chaque petit groupe a mis au point, avec plus ou moins de bonheur, des moyens de transmettre une information très précise avec une certaine efficacité. L'extension nécessaire consiste à passer de la communication dans un petit groupe à une communication susceptible de bien fonctionner dans une société, à une autre échelle de taille. La concrétisation sera réalisée par un répertoire de géométrie, soit reproduit par le professeur, soit dicté aux élèves.

L'extension à prévoir peut aussi provenir de la nécessité de prendre en compte des variables didactiques connues par ailleurs et amenant les élèves à mettre chacun au point ses procédures, en s'écartant de la référence à la situation objet de l'activité. En voici un exemple, qui a suivi l'activité intitulée «suite de rectangle». Dans cette activité, on est amené à identifier deux familles de rectangles, dans chaque famille les rectangles ayant même forme (i.e. même rapport de la largeur à la longueur, ce qui peut se constater de manière purement géométrique). Cette identification de familles correspond déjà à un (petit) apprentissage, où la notion de rectangle se raffine, car a priori les rectangles sont identifiés par opposition aux quadrilatères qui ne sont pas des rectangles ; en intelligence artificielle, on se préoccupe d'ailleurs de telles identifications, comme cela apparaît dans un article récent de R.S. Michalski et R.E. Stepp (1984). Dans le cadre de l'activité, on est certes amené (par une question posée) à calculer des quotients, mais ce calcul n'est que second par rapport à la mise en évidence géométrique par superposition des diagonales. Il s'agit, à partir de ce point, d'introduire les élèves dans une exploitation de proportionnalité, en leur faisant rencontrer, pour les surmonter, des difficultés connues. Voici, pour ce but, une fiche de travail proposée aux élèves, qui favorise les traitements numériques.

## DES HISTOIRES DE FAMILLES.....

A I Voici pêle-mêle les dimensions de 16 rectangles.
Peux-tu, en utilisant les moyens que tu juges utiles, (dessin, découpage ou calcul), les classer par familles?

| | | | |
|---|---|---|---|
| N° 1 : 5×6 | N° 5 : 4×12 | N° 9 : 1,5×4,5 | N° 13 : 3×9 |
| N° 2 : 4×8 | N° 6 : 3×4,2 | N° 10 : 4×4,8 | N° 14 : 5×7 |
| N° 3 : 5,2×10,4 | N° 7 : 2×2,4 | N° 11 : 3×6 | N° 15 : 1,5×3 |
| N° 4 : 4×5,6 | N° 8 : 1×1,4 | N° 12 : 12×16,8 | N° 16 : 10×12 |

Remarque : les dimensions sont indiquées sous la forme :
largeur X Longueur.

A II Réalise un dessin par famille en y faisant figurer les rectangles de façon à mettre en évidence qu'ils appartiennent tous à la même famille.

B Voici quelques rectangles qui sont schématisés sans leurs dimensions réelles. Dans chaque série on voudrait qu'ils soient de la même famille que le premier de la série. Peux tu trouver chaque fois la dimension manquante pour qu'il en soit ainsi? Contrôle tes résultats.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| SERIE 1 | 2 × 5 | 3 × ? | ? × 12,5 | ? × 10 |
| SERIE 2 | 8 × 10 | ? × 7,5 | 3,2 × ? | 4 × ? |
| SERIE 3 | 8 × 32 | 5,6 × ? | 4 × ? | ? × 8 |

Bien évidemment, une telle fiche de travail ne réalise pas à elle seule une extension suffisante : la proportionnalité ne se limite pas au classement de rectangles ! D'ailleurs, comme nous l'avons signalé plus haut, certains élèves dans notre population avaient déjà des difficultés sur les énoncés multiplicatifs les plus simples. En dehors de cette fiche, de tels énoncés leur ont donc été présentés (avec possibilité de travailler sur machine pour les opérations à effectuer). Nous limitant ici à la géométrie, nous n'indiquons pas ces questions.

A ce propos toutefois, il est intéressant de mentionner le choix de concepts, et l'importance à accorder aux concepts retenus consécutivement à une activité. Ces éléments résultent de l'observation des élèves durant les activités par leur professeur.

Par exemple, il est apparu que fréquemment l'instruction de tracé d'un cercle est complexe, dans la mesure où elle nécessite en fait la coordination de plusieurs actions. A la suite du constat de difficultés à ce propos, ainsi que par rapport à des questions de désignations, voici le contenu (abrégé, et sans les figures) du répertoire sur le cercle, distribué aux élèves à la fin de la mise en place du cours sur ce sujet.

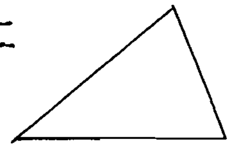
1. Vocabulaire, notation, représentation. Cercle C(O, r), cercle, rayon, cordre, diamètre.
2. Quelques cercles de même centre.
3. Quelques cercles de même rayon.
4. Construction (film) du cercle de centre O et de rayon AB.
5. Construction (film) du cercle de centre O passant par M.
6. Construction (film) d'un diamètre (AB) d'un cercle C de centre O.
7. Construction (film) du cercle dont (AB) est un diamètre.

En parallèle à de tels répertoires, la phase de mise en place (ou d'institutionnalisation) comporte la pratique d'un certain nombre **d'exercices d'entraînement**, notamment conditionnés par les **objectifs d'évaluation**. On retrouve dans ces exercices une pratique bien assise dans la tradition de l'enseignement, et il est sans doute inutile de reproduire ces exercices extraits de divers manuels pour la plupart. La sélection de ces exercices mérite cependant que l'on y consacre quelque attention. **L'évaluation** proposée sur un thème donné a été prévue en **deux temps**. Le premier temps se situe peu après la synthèse faite en fin d'activité, et l'on parle de **test de fin d'activité**. Ce test est déjà orienté vers les objectifs d'apprentissage (et non pas vers l'activité qui vient d'avoir lieu), son but est d'une part de compléter les informations des professeurs sur les capacités des élèves, d'autre part de mettre en évidence auprès des élèves ce qui leur «reste» à apprendre. Cette pratique a d'ailleurs débouché, dans l'ouvrage de l'IREM de Strasbourg (1986), sur l'élaboration pour chaque chapitre d'une page intitulée «Maintenant faisons le point». Si l'on veut cataloguer un tel test de fin d'activité, il peut être placé sous une étiquette d'**évaluation formative**, mais avec une fonction différente du test d'entrée.

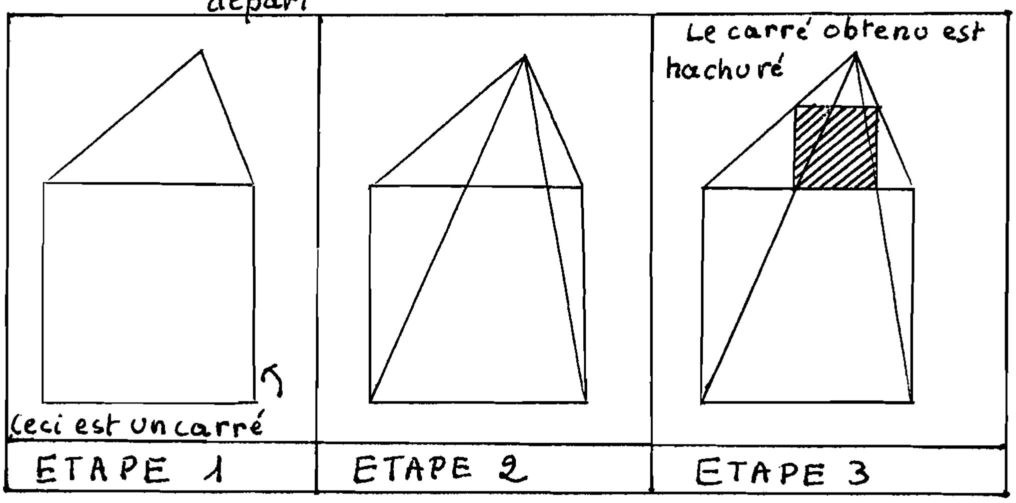
Une séquence complète est achevée par un **test terminal**, qui peut intervenir assez longtemps après l'activité initiale. Nous reproduisons en partie le test terminal de constructions géométriques ; on remarquera qu'il est daté du mois de mai, pour une activité commencée en janvier (écriture de programmes, de l'activité 5 du 16-1 au 30-1). Nous n'avons pas reproduit les feuilles réponses des élèves, qui comportaient pour la question I un triangle équilatéral auquel appliquer la construction filmée et triangle à angle obtus créant une difficulté dans cette même construction.

Feuille d'indications

I




FILM DE LA CONSTRUCTION D'UN CARRE INSCRIT DANS UN TRIANGLE




**II – PROGRAMME DE TRACE D'UN CARRE AYANT UN SOMMET DONNE ET «TOUCHANT» UN CERCLE.**

**Préparation** : tracer un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 3 cm, centré à peu près au milieu d'une feuille de papier blanc, et placer un point A à 8 cm du centre O du cercle.

**But de la construction** : obtenir un carré ABCD tel que
– le point C appartient au cercle $\mathcal{C}$
– les points B et C sont alignés avec O.

**Programme de construction.**

1. Dans le cercle $\mathcal{C}$ tracer **deux rayons perpendiculaires**, et noter I et J leurs extrémités sur $\mathcal{C}$
2. En menant de O la perpendiculaire à IJ, obtenir le **milieu H** de IJ.

} étapes pour obtenir OH, utilisé en 5ème.

3. Tracer la **médiatrice de OA**, et noter K le **milieu de OA.**
4. **Tracer un demi-cercle de diamètre OA** (ce demi-cercle est centré en K).
5. Noter le point d'intersection du demi-cercle avec la médiatrice de OA et tracer le **cercle**
   – de **centre L**
   – de **rayon égal à OH.**
6. Le cercle précédent et le demi-cercle se **coupent** en deux points : noter B l'un d'eux et tracer OB qui coupe le cercle $\mathcal{C}$ en C.
7. A partir des trois points A, B, C obtenus, achever le **carré ABCD.**

Pour la reproduction du «film» (question I), les 72 élèves présents se sont répartis comme suit.

**Réussite** : 41 élèves.

Parmi eux, 28 effectuent un dessin parfait et 13 un dessin plus approximatif.

**Demi-réussite** : 16 élèves.

Pour ces élèves, la figures obtenue s'écarte visuellement d'un carré, même si la construction est dans l'ensemble correcte.

**Echec** : 15 élèves.

En gros, on peut dire que ces élèves n'ont pas «compris» le film.

Pour la discussion qui apparaît lorsque le triangle de départ a un angle obtus, 21 élèves analysent correctement la solution.

On peut aussi comparer la situation qui ressort de ce test terminal avec la situation initiale des mêmes élèves, précédemment indiquée.

Pour le programme de construction, nous n'avons pas de point de repère initial sur la population. Le programme choisi ici est volontairement difficile pour ce niveau scolaire. Néanmoins 9 élèves le mènent à son terme, auxquels il convient d'ajouter 25 élèves qui tracent le demi-cercle de diamètre OA mais butent sur des difficultés ultérieures.

A cette image d'une évaluation des élèves, il conviendrait d'adjoindre une évaluation **par** les élèves, en forme de bilan qui leur a été demandé en fin d'année. L'analyse de ce bian est actuellement en cours.

## VII – REMARQUES ET OBSERVATIONS.

### 7.1 Remarques professorales.

A la suite de la mise en place de cet apprentissage de savoir-faire en géométrie, les professeurs ont pu être sensibles à deux types d'évolutions.

D'une part, les évolutions peuvent se repérer sur un axe de temps, pendant la durée de l'année scolaire : difficultés rencontrées au début, progrès notés, difficultés qui subsistent à la fin.

D'autre part, en retrouvant les élèves l'année suivante en classe de cinqième, les professeurs peuvent faire la comparaison avec les élèves de même niveau les années précédentes. En effet, avant l'expérimentation, l'effort d'enseignement se portait tout de suite vers la donnée du langage «correct» et les applications consistaient surtout en des énoncés (textes) demandant la production de tracés isolés commentés. La différence, entre ce schéma d'enseignement du type «j'explique, tu appliques» et celui de l'expérimentation, se traduit-elle par une différence sensible de formation des élèves ?

A ces remarques globales, il convient d'adjoindre des remarques sur les différences entre les élèves qui ont pu amener les professeurs à envisager des apprentissages différenciés.

Compte-tenu des questions soulevées par notre article, il est intéressant d'organiser les remarques sur l'activité et les compétences des élèves selon les quatre catégories les plus importantes à ce niveau scolaire :

1. production de tracé
2. production de texte
3. enchaînement texte-tracé
4. enchaînement tracé-texte.

L'enchaînement tracé-tracé (exemple : représentation d'une construction filmée) ne peut être envisagé, car il est trop peu sollicité dans l'enseignement dit traditionnel. L'enchaînement texte-texte est plus spécifique de niveaux scolaires ultérieurs.

Voici, selon ces quatre catégories, les principaux constats des professeurs concernant des élèves **en début** de sixième (âge : environ 11 ans), ou des élèves de cinquième (âge : environ 12 ans) **inexpérimentés.**

1. Production de tracés.

— Matériel le plus souvent en mauvais état, voire inexistant (crayons mal taillés, compas défaillants, équerres cassées...).

— Difficultés d'utilisation de ce matériel (difficulté à placer une équerre pour tracer une perpendiculaire, ou même règle et crayon pour tracer une droite, gestes mal coordonnés pour tracer un cercle...).

— Hésitation nombreuses et fréquentes, se traduisant par une multiplicité d'appels à l'aide du professeur.

— Incertitude sur les résultats obtenus, se traduisant aussi par des appels au professeur, mais ici pour quêter son approbation.

— Figures peu précises et peu agréables à la vue.

2. Production de textes.

— Les explications et descriptions spontanées des élèves, oralement ou par écrit, utilisent un langage très varié (traits, lignes, ronds...). En expression orale, les verbes sont souvent remplacés par des gestes. On retrouve ce que signalent par exemple Colette Laborde (1982) et Jeannine Weber-Kubler (1982).

— Lorsqu'est entrepris d'emblée l'enseignement d'un vocabulaire «correct», exigé ensuite des élèves, les confusions sont nombreuses (exemple : segment = droite = trait = ligne...).

3. Enchaînement texte-tracé.

— Les élèves donnent pour beaucoup d'entre eux l'impression qu'ils n'ont compris ni le vocabulaire ni la finalité du texte, car le professeur est amené à préciser le sens de chaque terme, même ceux qui font partie du vocabulaire enseigné.

— On ne voit pratiquement pas apparaître de tracés auxiliaires (prolonger un segment par exemple), et lorsqu'un tel tracé est parfois imaginé, il ne peut être exécuté qu'une fois demandée et accordée l'autorisation du professeur.

4. Enchaînement tracé-texte.

— Les problèmes de la reproduction ne sont pas perçus, ce qui fait que la description d'une figure ne contient pas les éléments pertinents et eux seuls (manques et redites abondent).

Par contraste, voici les principaux constats concernant les élèves (fin sième et début cinquième) à l'issue de l'expérimentation.

1. Production de tracés.

— Matériel généralement en ordre de marche. Sa nécessité peu être ressentie pour des mobiles variés, par exemple aboutir à des figures au moins aussi belles que celles du voisin.

— Autonomie d'organisation conduisant à l'emploi d'algorithmes diversifiés choisis indépendamment du professeur (par exemple, choix divers de pas lorsqu'une construction amène à des tracés pas à pas).

— Aisance des mouvements.

— Pratique spontanée de tracés auxilaires (On ose — quelle audace ! — prolonger le tracé d'une droite sans demander d'autorisation).

— Emergence de critères esthétiques pour juger des figures produites ou à produire. Mais de gros écarts inter-individuels subsistent entre les figures les moins et les plus soignées.

2. Production de textes.

Il convient de reconnaître qu'il s'agit de la catégorie dans laquelle on observe les difficultés les plus tenaces. On doit donc parler moins de résultats véritablement atteints que d'évolution.

— Moins d'autocensure à cause de l'autorisation d'emploi de langage naturel, sous réserve d'efficacité (voir le point qui suit).

— Emergence de critères de jugement de l'expression, le langage ayant été ressenti comme pouvant jouer un rôle d'outil (exemple de la transmission de messages qui a «fait bouger» les élèves).

— Grandes différences inter-individuelles :

il reste tel ou tel élève pour ne disposer naturellement que du mot «trait», ou ne pouvoir désigner un tracé que pour un geste,

la référence à la disposition : verticale-horizontale subsiste chez beaucoup d'élèves au détriment d'éléments intrinsèques à une figure.

3. Enchaînement texte-tracé.

— Autonomie importante par vécu de la dynamique interne aux tracés : les questions immédiates sur la signification de tel ou tel mot disparaissent, même et surtout chez les élèves aux performances habituellement modestes, par expérience à une cohésion d'ensemble, qui amène à considérer le mot et son environnement au lieu du mot tout seul.

— Acquisition d'une liberté de travail à l'intérieur des contraintes du texte. Celui-ci tend à être perçu comme déterminant un cadre de travail et non comme régissant toute l'activité. Comme plus haut, l'observation du recours spontané à des tracés non décrits dans le texte, sans que se posent de questions «juridiques» (sur ce que l'on a ou non le «droit» de faire) est un élément révélateur.

4. Enchaînement tracé-texte.

— Pertinence des aspects retenus pour les descriptions, permettant par exemple la reconstitution.

— Passages de simples descriptions à l'explicitation de problèmes que l'on a été en mesure de se poser, témoin la discussion surgie spontanément dans un groupe, sur le triangle rectangle isocèle (si le triangle ABC rectangle en A a un côté AB très long et un côté AC très court, on trouve en mesurant que AB = BC ; le triangle ABC n'est-il alors pas isocèle ?), ou la formulation de conjectures sur des ensembles de points, a priori ou après quelques constructions.

**7.2 Observations issues des evaluations.**

Les évaluations pratiquées ont eu deux objectifs :

— l'un, disons traditionnel, de déterminer dans quelle mesure certaines compétences, jugées importantes au vu des textes officiels, se trouvaient atteintes,

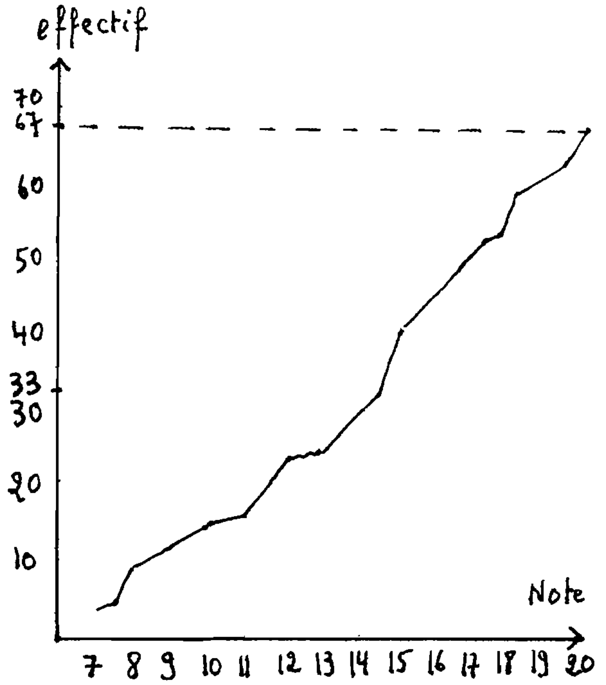
— l'autre de promouvoir les progrès des élèves comme critère de validation de l'enseignement.

Par rapport au premier objectif, seule la détermination du moment de l'évaluation, suffisamment longtemps après l'enseignement pour espérer une stabilisation des acquis, est peut-être une caractéristique qui s'écarte de la pratique usuelle, bien entendu, les élèves sont mis au courant de cette façon de procéder et prévenus à l'avance.

Le deuxième objectif exige au moins la pratique d'un test d'entrée, et il est même préférable de pratiquer une évaluation intermédiaire (en fin d'activité) qui a en outre un aspect formatif ; nous en avons déjà parlé.

Le choix des questions du test terminal dans un domaine donné peut permettre de concilier les objectifs mentionnés.

A titre d'exemple voici quelques indications concernant l'évaluation terminale sur la proportionnalité, dont le sujet (qui touche à des aspects graphiques) est reproduit en page suivante. Rappelons que l'enseignement sur la proportionnalité s'est appuyé, entre autres, sur des activités géométriques, comme on a pu le voir précédemment. D'autres part les acquisitions concernant la proportionnalité sont un objectif majeur dans l'enseignement.




Courbe cumulative croissante (au dessus d'une note : nombre d'élèves dont la note est inférieure ou égale à cette note)

Sur la courbe cumulative ci-contre on observe que 34 des 67 élèves présents à ce test ont atteint ou dépassé la note de 15 sur 20. A ce niveau, on peut se dispenser d'une analyse de détail pour affirmer tout à la fois :

— qu'une majorité des élèves a évolué, au moins du «monde» additif dans le «monde» multiplicatif (cf. test d'entrée en fin de 6.1),

— que les objectifs de la classe de sixième concernant la proportionnalité ont été largement atteints.

Pour l'anecdote, signalons que la seule question pour laquelle l'échec est majoritaire dans la population interrogée est une question purement numérique : il s'agit de la question (III, b), qui demande le produit de 65 par un nombre dont on sait

I Pour ce tableau de proportionnalité, compléter les cases vides et indiquer l'opérateur (coefficient multiplicatif)

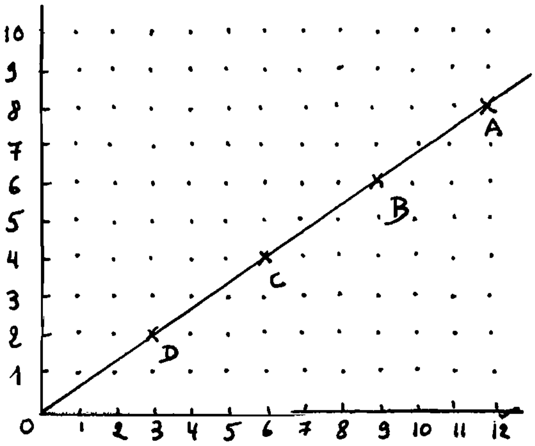
| | | | |
|---|---|---|---|
| 28 | 56 | 84 | 259 |
| 98 | | | |

× 

II a) Sur le graphique placer le point A' (12 ; 10)

b) Le point A' s'obtient à partir de A en utilisant la transformation suivante :

- On ne change pas la première coordonnée de A
- On multiplie la deuxième coordonnée par 1,25

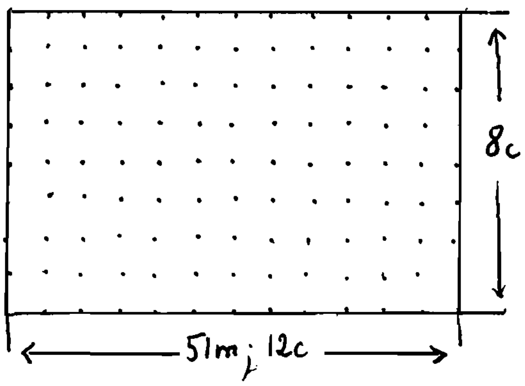



Appliquer cette transformation à B, C et D et placer B', C', D'.

III a) Trouver le nombre à placer dans le cadre : $104 \times \boxed{\phantom{00}} = 91$

b) Le produit de 52 par un certain nombre est 40,5.
Quel est le produit de 65 par ce même nombre ?

IV




Ce rectangle est le plan d'un terrain rectangulaire qui a une longueur de 51 m.

Quelle est, en m, la largeur du terrain ?

V Dans un livre de cuisine on donne la recette du pudding pour 6 personnes :
150 g de sucre
60 g de semoule
0,75 ℓ de lait

| | Sucre | Semoule | Lait |
|---|---|---|---|
| 6 personnes → | 150 g | 60 g | 0,75 ℓ |
| 4 personnes → | | | |
| 10 personnes → | | | |
| 12 personnes → | | | |

. Remplir le tableau des quantités pour 4, 10 et 12 per.

VI Une entreprise de transport loue une camionnette et propose 2 tarifs :
- Tarif A : Un versement de 250 F au départ et 1,50 F par km.
- Tarif B : Aucun versement au départ mais 2,50 F par km

On doit parcourir 100 km. Quel est le tarif le plus avantageux et quel est le prix correspondant ?

que son produit par 52 est 40,5. Cette question donne lieu à 47 échecs (complets ou partiels) et seulement 20 réussites.

Le seul «inconvénient» de ce test, mais il est de taille si l'on en croit ce qu'écrit Antoine Bodin dans (1983), c'est qu'il ne met pas «suffisamment» d'élèves en situation d'échec (seuls 12 élèves n'atteignent pas la note habituellement fatidique de 10). Mais, à notre avis, il est bon de **distinguer** les **aspects généraux** (objectifs à atteindre par tous les élèves ou presque) et les **aspects sélectifs** en évaluation sommative. Par rapport aux premiers, l'expérimentation nous a conforté dans l'idée de l'importance du contrôle (au sens de «théorie du contrôle») pour les apprentissages. Nous avons en effet systématiquement appliqué ce principe d'apprentissage, que nous avions exposé dans (Pluvinage 1983) et qui se trouve utilisé par ailleurs pour des apprentissages **par** des machines (cf. Mitchell et al. 1984). Un principe de contrôle peut par exemple amener à faire intervenir dans une même situation plusieurs domaines mathématiques (le «jeu de cadres» de Régine Douady). Sur l'évaluation d'acquis numériques mis en place notamment par des activités géométriques, nous disposons d'une vérification de **stabilité des résultats** atteints par les élèves, ce qui appuie la présomption d'une bonne **reproductibilité**. En effet, nous avons proposé un test constitué de 10 items du type «équation à trou» (exemple : $\square \times 1,25 = 19$). A une ou deux variantes près sur les 10 items, ce test était le même en 1984-1985 et 1985-1986. En 1984-85, il avait été proposé dans les mêmes conditions (calculatrices autorisées) à la population expérimentale et à une population témoin, à peu près représentative de l'ensemble des élèves du même niveau. Voici le résultat global observé :

| | population expérimentale | population ambiante |
|---|---|---|
| nombre moyen d'erreurs sur les 10 items | 2,3 | 5,2 |
| effectif élèves | 80 | 158 |

Pour plus de détails, on peut consulter le rapport sur cette expérimentation (Pluvinage et al. 1986, p. 48).

En 1985-1986, deux collèges supplémentaires ont repris ce test après avoir eu recours à une mise en place analogue (utilisation de transformations géométriques amenant à effectuer des opérations sur les décimaux, mais pas d'entraînement spécifique aux «équations à trous»). Voici le résultat global.

| | collège urbain | collège banlieue résidentielle | collège banlieue «populaire» |
|---|---|---|---|
| nombre moyen d'erreurs sur les 10 items | 1,6 | 2,2 | 2,6 |
| effectif élèves | 94 | 72 | 65 |

Ainsi, on observe quelques disparités qui peuvent être expliquées par le recrutement des élèves, mais dans une fourchette étroite, et à un niveau de réussite très supérieur dans les trois cas à celui de la «population ambiante» de l'année précédente (moitié moins d'erreur dans le troisième collège).

En ce qui concerne la géométrie, ce qui peut être mis en évidence assez nettement est ce que l'on peut espérer observer en fin de classe de sixième, donc vers l'âge de 12 ans :

— Une technique de tracé adulte pour un certain nombre d'élèves. Ceci signifie que les dessins géométriques produits ne peuvent pas être attribués à des jeunes, plutôt qu'à des adultes : désignations correctes, tracés nets, différenciation de valeurs des traits (épaisseurs, utilisation de pointillés en traits discontinus, etc.).

— Une expression encore perfectible, mais utilisant déjà la langage comme un outil de communication et pas seulement un moyen de transmettre des désirs ou des impressions. Il nous semble que vouloir atteindre à ce niveau scolaire une expression adulte, même dans des domaines limités, risquerait d'être prématuré : la prise de conscience de ce que l'on dit effectivement dans un texte, et non de ce que l'on veut dire, est sans doute trop récente pour les élèves. L'émergence de problèmes de transmission par le langage, avec des essais de réponse non encore définitifs, nous paraît suffisante.

Nous proposons, pour conclure, quelques observations, qui vont à l'appui de ces propos et débouchent sur des possibilités d'exploitation ultérieure.

— Quelques (rares) élèves ont des difficultés presque insurmontables d'expression (exemple : un texte du genre «... il faut faire comme ça $\overline{\text{O}}$...»). Il conviendrait peut-être de tenter pour ces élèves de mettre en place des transmissions orales dans les conditions du **téléphone** (pas de vision de l'interlocuteur, mais feed-backs possibles).

— Il y a un **déséquilibre** très net (qui était d'ailleurs attendu) : tracer d'après un texte est beaucoup plus facile que produire un texte décrivant un tracé. Si l'on n'y prend pas garde, les exercices usuels tendent plutôt à renforcer ce déséquilibre qu'à créer un équilibre.

— Moyennant un choix approprié de figures, la transmission engendre à elle seule l'exécution de **tracés auxiliaires**. Cette pratique si importante pour la résolution de problème peut ainsi être mise en place en dehors du champ de l'heuristique (pour autant que celle-ci n'envisage pas comme problème au sens usuel le fait d'avoir à transmettre une figure).

— L'activité de transmission de figures a conduit certains élèves à une demande spontanée d'**utilisation de documents**. Une variante intéressante à envisager est en effet la transmission assistée par des documents. On déplore trop souvent que les ouvrages scolaires soient réduite dans les faits à ne servir que de recueils d'énoncés, pour ne pas souligner d'autres possibilités d'utilisation formatives.

— Pour aller en direction de la production de textes argumentés, nous avons déjà souligné l'intérêt des activités productrices de conjectures. On peut également envisager des exercices contribuant à une telle formation ; nous avons par exemple rencontré, dans le descriptif de suivi scientifique de classes de sixième de l'I.R.E.M. de Besançon (1986), une tâche de **relevé d'erreurs** (de symétrie) avec demande d'explications, qui nous a paru aller tout à fait dans ce sens.

## BIBLIOGRAPHIE.

G. BROUSSEAU, 1981. Problèmes de didactique des décimaux. Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 2.1, Grenoble.

C. DUPUIS, R. DUVAL, F. PLUVINAGE, 1978. Sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième. Brochure A.P.M.E.P., n° 22, Lyon.

R. DOUADY, M-J. PERRIN, 1984 et 1985. Aire de surfaces planes. Petit x, n° 6 et 8, Grenoble.

I. EKELAND, 1984. Le calcul, l'imprévu : les figures du temps de Képler à Thom. Paris, Seuil.

IREM Besançon, 1983. Objectifs et évaluation. Fascicule 1 (généralités) et 2 (6ème-5ème), Publication de l'IREM de Besançon.

IREM Besançon, 1986. Suivi scientifique des programmes de collège 1986-1987. Publication de l'IREM de Besançon.

IREM Strasbourg, 1986. Mathématiques, classe de sixième, Paris, Castailla-ISTRA.

C. LABORDE, 1982. Langue naturelle et écriture symbolique. Thèse, Grenoble.

C. LABORDE, 1984. Exposé sur la géométrie. C.R. 3ème école d'été de didactique des mathématiques, Grenoble.

R.S. MICHALSKI, R.E. STEPP, 1984. Learning from observations : Conceptual clustering, in : Machine learning (an Artificial Intelligence Approach). Berlin, Springer Verlag.

T.M. MITCHELL, P.E. UTGOFF, R. BANERJI, 1984. Learning by experimentation : Acquiring and refining problem-solving heuristie, in : Machine learning (an Artificial Intelligence Approach). Berlin, Springer-Verlag.

F. PLUVINAGE, 1983. Variation de questions, questionnaires à modalités. Procedings of the IV-ICME. Birkhäuser.

F. PLUVINAGE, J.C. RAUSCHER, C. SOUMOY, 1985. Rapport sur l'expérimentation «pédagogie différenciée» conduite en mathématiques au collège d'Ostwald, IREM Strasbourg.

G. VERGNAUD, 1986. Réflexion sur les finalités de l'enseignement mathématique. Document CNRS. Paris.

J. WEBER-KUBLER, 1982. Traitement d'informations mathématiques dans une transmission orale chez des élèves de 12 et 14 ans. Thèse 3ème cycle, I.R.E.M. Strasbourg.*

* NdlR Voir à ce sujet l'article de Kubler dans «petit x» n° 6 «Une étude sur la transmission orale d'informations en mathématiques».