COURRIER

Nous avons reçu de Monsieur Michel COURRIERE, Professeur d'Ecole Normale à Nice, le compte-rendu d'un travail effectué en classe de CM2. Nous publions ce compte-rendu intégralement.

ACTIVITES NUMERIQUES POUR LES ENFANTS ET REFLEXIONS METHODOLOGIQUES POUR LE MAITRE A PARTIR DE PUISSANCES – RACINE CARREE – MACHINE A CALCULER

Titres surprenants pour un travail à l'école élémentaire.

Ce n'est vraiment pas du programme !

Quant à la machine à calculer ne risque-t-elle pas de faire que les enfants négligeront le calcul, et n'est-elle pas plutôt à éviter, du moins à l'école primaire ?

Le rapport qui suit essaie de montrer comment, à partir d'une situation (provenant des enfants), il est possible d'aborder un ou plusieurs PROBLEMES qui mettent en jeu une stratégie, tout en permettant de réinvestir les techniques opératoires.

Contexte.

Cette activité s'est déroulé les 3 et 10 mai 1976 dans le CM2 de M. Castello, Ecole Fuon Coda, à Nice, avec l'autorisation de M. Marin ; I.D.E.N. de Nice-Centre.

Point de départ.

Un enfant ayant amené à l'école une calculatrice de poche, des questions se sont posées quant à la signification et l'utilisation de certaines touches.

arc	sin	cos	tan	C

hyp	D/R	lnx	e^x	log
x^2	$\sqrt{x}$	l/x	x !	$\sqrt[x]{y}$
STO	RCL	Σ	x ⇋ y	y^x

CE	EE	π	÷
7	8	9	×
4	5	6	−
1	2	3	+
0	•	+/−	=

I – SÉQUENCE.

E - A quoi sert cette touche $\boxed{\sqrt{x}}$?

M - Observez la liste que j'écrits au tableau.

Pourriez-vous indiquer comment on trouve les nombres de droite ?

2	4
3	9
5	25
6	36
13	
25	

Chaque enfant rédige sur une feuille. Les résultats sont du type : «on multiplie la nombre par lui».

Il faut noter qu'il n'y a pas, à ce niveau, de formalisation en langage mathématique.

M - Trouvez les nombres qui manquent.

Ceci est fait très rapidement.

M - On dit que : «on élève au carré», $6 \times 6 = 6^2$.
Il y a d'ailleurs une touche sur la machine qui permet de faire cela.

E - Ah oui ! la touche $\boxed{x^2}$

Les enfants à tour de rôle manipulent la machine en vérifiant leur résultat de 2 manières, à partir d'un nombre choisi.

$\boxed{8}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$ ⟶ 64

$\boxed{8}$ $\boxed{x^2}$ ⟶ 64

E - Mais si au lieu de 2 fois 6, on l'a 3 ou 4 fois ?

Ici il était prévu après x^2, *de revenir à la question* $\sqrt{x}$.
Les enfants orientent le travail autrement.

M - Par exemple on écrira : $6 \times 6 \times 6 = 6^3$.

E - Comment le calcule-t-on avec la machine ?

M - Cherchez.

Après avoir observé les touches de la machine et procédé par tâtonnement et par élimination, les enfants ont découvert la touche $\boxed{y^x}$.

Si ce travail ne met pas en jeu une technique opératoire, il habitue les enfants à chercher et à découvrir un algorithme, c'est-à-dire une suite de tâches à accomplir dans un certain ordre.

Dans cette première approche, on se contente d'un algorithme oral. Par la suite, quand il sera couramment utilisé, on pourra demander de donner par écrit des ordres à un manipulateur.

E - On tape $\boxed{6}$ puis $\boxed{y^x}$, puis $\boxed{3}$ et $\boxed{=}$

M - Comment va-t-on calculer :
$16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$?

E - On multiplie 16 par 16 par 16, 7 fois.

M - Tu pourrais le faire sans la machine ?

E - Oui mais c'est long, cela va plus vite avec la machine.

M - Sur combien de touches faut-il appuyer ?

Dénombrement par les enfants.

E - Sur 21.

E - On pourrait écrire que c'est 7 fois 16.

M - Viens l'écrire.

E - 16^7.

Il faut noter qu'apparemment il y a erreur : l'enfant aurait dû dire «16 puissance 7».

Mais en fait c'est bien son idée ; il n'y a pas confusion entre puissance et multiplication.

Le mot «puissance» n'est pas encore rendu utilisable, alors que l'opération, elle, fonctionne.

D'où le danger qu'il y a d'introduire simultanément notion, symbole et vocabulaire, ou de penser que l'enfant n'a pas compris parce qu'il ne sait pas s'exprimer.

M - Pourrait-on faire le calcul avec la machine ?

Utiliser une machine n'exclut pas la réflexion, puisqu'on est amené à choisir le meilleur «programme».

E - Oui : $\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$

E - Cela va beaucoup plus vite que tout à l'heure car on appuie sur 5 touches au lieu de 21.

E - Et puis on risque moins de se tromper ; tout à l'heure on pouvait oublier de taper un 16.

Ici une remarque très importante concernant le problèmes des notations.

En général, quand on écrit $16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 = 16^7$, *il n'y a simplification qu'au niveau de l'écriture, puisque pour calculer* 16^7, *on doit revenir à la forme multiplicative.*

Ici, par contre, avec une machine possédant la touche $\boxed{y^x}$.

Il y a simplification également au niveau de l'algorithme de calcul.

Pour qu'une nouvelle notation introduite soit assimilée et réinvestie, il faut :

– soit qu'elle apporte une simplification réelle au niveau de l'écriture,
– soit qu'elle introduise un algorithme spécifique plus simple.

Appliquons cette remarque à certaines notations introduites ou non à l'école élémentaire.

a) Multiplication et addition.

L'écriture : $47 + 47 + 47 + 47 + 47 = 47 \times 5$,

– apporte un racourci dans le message,

– et surtout, quand on possède l'algorithme de la multiplication, permet une détermination beaucoup plus rapide de 235 (réciproquement, une telle écriture motive l'introduction de l'algorithme).

Par contre, l'écriture $8 + 8 + 8 = 8 \times 3$, *introduite à priori, est purement formelle, car les enfants savent que* $8 + 8 = 16$ *et que* $16 + 8 = 24$.

a) Puissance et Multiplication.

Il n'y a pas (en dehors de la machine), de technique spécifique du calcul des puissances (on doit revenir au produit).

L'introduction de ce symbolisme a donc comme unique intérêt une simplification d'écriture :

– ce n'est pas le cas pour : $5 \times 5 = 5^2$,

– ce sera la cas pour $1000000000 = 10^9$, *et plus tard pour des distances sidérales (par exemple : essayer d'écrire en produit* 10^{23}, 10^{36}, *...).*

c) Division et multiplication.

On motivera, pour le calcul d'un quotient et d'un reste, bien davantage le besoin d'une technique de division, pour un exemple comme «225 par 7», que sur un exemple comme «13 par 3». (Puisque l'écriture immédiate : $13 = (3 \times 4) + 1$ *permet de déterminer* $q = 4$ *et* $r = 1$*).*

a) et c) nous montre que pour motiver l'introduction d'une nouvelle technique de calcul (cela serait valable pour les dénombrements), il faut présenter des problèmes pour lesquels les techniques précédemment connues sont en échec ou deviennent fastidieuses.

Puis, après la découverte de cette nouvelle technique, on l'appliquera y compris au cas pour lesquels elle n'était pas à priori indispensable.

d) «Chaîne d'opérateurs» et notation fractionnaire.

Ecrire $(\times 3)\ (: 4) = (\times \frac{3}{4})$, *n'introduit pas de nouvelle technique, puisqu'au contraire, pour multiplier par* $\frac{3}{4}$, *il faut multiplier par 3, puis diviser par 4 (ou le contraire quand c'est possible).*

C'est donc surtout au niveau du décodage d'expressions comme : «prendre les trois quart», que cette égalité prend tout son sens à l'école primaire.

Revenons à la question posée, concernant la touche $\boxed{\sqrt{x}}$

M - Reprenons le tableau de tout à l'heure, et essayez de le compléter:

2	4
3	9
5	25
6	36
13	169
25	625
	64
	100

E - 8 et 10.

M - Pourquoi ?

E - Si on multiplie 8 par 8, on trouve 64.

E - C'est le contraire du carré.

M - Et bien on l'appelle «racine» et le signe est $\sqrt{x}$, celui que vous avez vu sur la machine.

La recherche des nombres dont le carré est 64 ou 100, peut être faite au CM à propos du calcul de la longueur du côté d'un carré, connaissant l'aire.

Par contre la signe $\sqrt{}$ n'est introduit ici que parce qu'il provient d'une question précise des enfants.

M - Par exemple cherchez le nombre qui correspond à : 1024.

32 | 1024

E - $\boxed{1024}$ $\boxed{\sqrt{x}}$ $\longrightarrow$ 32

Recherche d'un algorithme sur la machine.

E - **Mais si on n'a pas de machine ?**

Question vraiment unanime de la part des enfants. La machine n'est donc pas un frein à l'apprentissage de techniques de calcul, mais bien au contraire une motivation.

M - Essayez de chercher.
Trouvez le nombre qui correspond à | 2025.

Il s'agit ici véritablement d'un problème : les enfants sont amenés, d'une part à élaborer des des stratégies, à les améliorer, d'autre part à utiliser des techniques de calcul au programme (tables : produit d'un nombre de un chiffre par lui-même, multiplications, carré de nombres terminés par 0, encadrements, ...).

E - On n'a qu'à essayer en prenant des nombres et en les multipliant par eux.

E - Oui, mais il est plus grand que 32.

M - Pourquoi ?

E - Parce que 2025 est plus grand que 1024.

E - Et moi je suis presque sûr qu'il est terminé par 5.

M - Pourquoi ?

E - Parce que 2025 finit par 5, et il n'y a que 5 qui se termine par 5 quand on le multiplie par lui.

E - Je vais essayer 35. Et moi 45.

M - Maintenant vous allez essayer de trouver pour | 2209.

Quelques extraits des recherches des enfants.

Exemple 1 :

40	50	48	47
X 40	X 50	X 48	X 47
1600	2500	2304	2209

Exemple 2 :

40	50	43	47
X 40	X 50	X 43	X 47
1600	2500	1849	2209

Exemple 3 :

40	45	46	47
X 40	X 45	X 46	X 47
1600	2025	2116	2209

Remarquons que :

– Nous sommes en train d'assister à la découverte par des enfants de CM2, d'un algorithme de l'extraction de la racine carrée.

– Ils n'en sont **pas** *encore au stade de la formalisation, et donc de «rédaction» de solution, mais on voit très bien la démarche suivie par les enfants dans leur souci de faire le moins d'essais (et donc de calculs)possible.*

– La recherche est tout à fait indispensable. Il serait sans intérêt et parfaitement inutile, de leur donner la méthode, même en la leur expliquant elle ne serait pas réinvestie par la suite.

DEUXIEME SEQUENCE.

Les enfants, sur leur demande, avaient à chercher des nombres dont le carré était donné.

- 3721
- 784
- 9025
- 610
- 4096
- 3136

La relation numérique de lien verbal : ... a pour carré ..., étudiée ici n'ayant pas à être déterminées parmi d'autres, la formulation n'est pas indispensable.

La consigne était :

– trouvez ces nombres,

– essayez de faire le moins de calcul possible.

Voici quelques résultats. Aucun modèle de rédaction ou de présentation n'était imposé.

On notera, en dehors du fait que tous les résultats sont exacts, certaines différences et même des notations incorrectes.

Pour Lundi 10 Mai 1976

1) 3721 = 61 X 61   62 X 62 = 3844
2) 784 = 28 X 28   23 X 23 = 529   26 X 26 = 676
3. 9025 = 95 X 95   90 X 90 = 8100   85 X 85 = 7225
4) 610 = 29 X 29 = 841   27 X 27 = 729   26 X 26 = 676
24 X 24 = 576   26 X 26 = 676   610,09 = 24,5 X 24,5
5) 4096 = 64 X 64   63 X 63 = 3969   64 X 64 = 4096
6) 3136   56 X 56   46 X 46 = 2116   66 X 66 = 4356

Le plus proche de 610 s'est 610,09 = 24,7 X 24,7

61	3721
28	784
95	9025
64	4096
56	3136

$3721 = 61^2$
$784 = 28^2$
$9025 = 95^2$
610 =
$4096 = 64^2$
$3136 = 56^2$

3721	61 en deux operation
784	28 en une operation
9025	95 en trois operation
610	entre 24 et 25 en 3 operation
4096	64 en deux operation
3136	56 en deux operation

3721	61	3 c
784	28	2 c
9084	95	4 c
4096	64	1 c
3136	56	3 c

610 est infesable

3721 = 61X61
784 = 28X28
9025 = 95X95
610 = rien
4096 = 64X64
3136 = 56X56

$3721 \sqrt{x}$ = 61 essaie un nbres qui est 59.
$9025 \sqrt{x}$ = 95 essaie deux nbres qui sont 93 et 85...
$4096 \sqrt{x}$ = 64 trouver tout de suite

$784 \sqrt{x}$ = 28 essaie 2 nbres 22 et 32
$610 \sqrt{x}$ = ce n'est pas un carré parfait
$3136 \sqrt{x}$ = 56 essaie 1 nbre 46

Dans certains travaux écrits, et dans les explications, on voit l'utilisation et même un début d'explication d'une méthode :

— recherche de l'ordre de grandeur : 20 X 20 ; 30 X 30 ; ...
— recherche du chiffre possible pour les unités.

M - Essayez de m'expliquer par écrit, comment vous avez fait pour trouver 28 à partir de 784.

Voici quelques réponses :

c'est entre 20 et 30. 25 par 25 c'est 625 et comme je sait que mon, nombre termine par 4 ce c'est ou 2 ou 8 c'est 28

que je sais que 20 x 20 font 400 et que 30 x 30 font 900 donc c'est entre 30 et 20. J'essaie avec 25 je trouve 625 donc c'est entre 25 et 30. Il faut que le dernier chiffre ~~soi~~ du nombre que je dois trouver se finisse par 8, parce que 8 x 8 = 64. dans 64 il y a 4 unités et dans 784 il y a 4 unités donc c'est 28

28 parce que 8 X 8 = 64 automatiques
cela devrai tomber juste
on a fait 20 par racine carré = 400
ensuite 30 par racine carré : 900
alors on 25 par racine carré mais on s'est
dit que 5 X 5 = 25 alors on a fait 28
parce que 8 x 8 = 64

A partir de l'exemple 610, nous sommes amenés à nous intéresser aux nombres qui ne sont pas des «carrés parfaits». (mot proposé par un enfant).

De plus les enfants cherchent maintenant systématiquement le chiffre des unités.

M - Pouvez-vous trouver $\sqrt{7257}$.

E - 7257 n'a pas de racine carrè parceque 7 le de chiffre des unités n'est dans aucune table de multiplication.

Mal formulé, mais l'enfant se comprend (et est compris des autres) ; il veut parler de la table des carrés (diagonale de la table de Pythagore de la multiplication).

M - Est-ce qu'il y a d'autres nombres qui ne sont pas des carrés, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver en multipliant un nombre par lui-même ?

Cette périphrase est lourde et inutile. Les enfants utilisent parfaitement le mot «carré».

E - Ceux qui sont terminés par 3.

M - Et puis ?

E - Par 2, par 8.

Voici la rédaction (non demandée) d'un enfant :

si le chiffre qui m'est donné se termine par 2, 3, 7, 8, je suis sur qu'il n'y a pas de racines carré

M - Par quoi est terminé le carré d'un nombre terminé par 0 ?

E - Par 0.

M - C'est vrai, mais il y a mieux que cela.

Les enfants font des recherches et des calculs.

E - Il y a toujours deux zéros !

M - Oui.

E - Ah ! c'est pour cela qu'on ne trouvait pas de nombre pour 610, parce qu'il n'y a qu'un zéro !

EN GUISE DE CONCLUSION :

– Devait-on faire ce travail ?

– Qu'a-t-il apporté aux enfants ?

– N'est-ce pas une préparation à la classe de 3ème, qui favorise une élite de la classe ?

Comme support aux réponses et à l'analyse de ce travail, prenons quelques extraits des COMMENTAIRES du «PROGRAMME DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT ELEMENTAIRE» (2/1/70).

1ère Partie : RESOLUTION DE PROBLEMES.

«... Les thèmes seront les plus divers. Ils permettront en particulier une certaine initiation des élèves à la vie courante de leur époque, que l'enseignement élémentaire se doit de leur donner. Toutefois, les situations retenues dans ce domaine correspondront aux préoccupations et aux intérêts des enfants».

Ces commentaires se passent de commentaires ! ce travail a été entrepris à partir de **questions des enfants** sur une **calculatrice de poche,** amenée **par un enfant.**

Cette phrase peut également permettre de comprendre pourquoi il y a peu de problèmes dans les manuels. Quel auteur pourrait en effet prévoir que les élèves de l'Ecole Fuon Coda de Nice s'intéresseront à une calculatrice de poche le 3 mai ?

«Elles seront (les situations) suivant les cas, soit des motivations sur l'introduction de notions nouvelles, soit des applications de propriétés ou de relation préalablement étudiées par les élèves».

On a à faire ici aux deux cas :

– Introduction, non pas vraiment de notions nouvelles (la racine carrée n'est pas au programme), mais familiarisation avec ces notions, et utilisation d'un vocabulaire qui ne sera plus mystérieux pour les enfants. A noter également que bien que la racine carrée ne soit pas au programme, la recherche de la longueur du côté d'un carré quand on connaît l'aire, trouve sa place dans le chapitre MESURE en liaison avec la GEOMETRIE.

– Utilisation de propriétés et relations et particulièrement activités numériques figurant explicitement dans le programme :

- tables de multiplication (et plus particulièrement table des carrés),
- ordre de grandeur, évaluation,
- calcul mental (produit par lui-même d'un nombre de 2 chiffres terminé par 0),
- technique de la multiplication.

Pour ses propres recherches, chaque enfant a fait à chaque séquence entre 13 h 30 et 15 h, entre 15 et 25 multiplications.

«... Résoudre un problème, c'est analyser la situation et les informations données, dégager éventuellement des chaînes de situation élémentaires, les schématiser, afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent, utiliser ces relations et leurs propriétés pour en déduire les renseigne ments cherchés».

Les enfants ont été amenés, à partir de schémas opératoires simples, à élaborer une stratégie pour arriver au résultat et découvrir ainsi un algorithme de l'extraction de la racine carrée.

Tous les enfants ont participé et sont arrivés aux «solutions».

Les différences ont portés sur la rapidité (plus ou moins grand nombre d'essais) et sur les formulations des résultats ou des démarches (pages 76 et 77).

«... C'est dans de telles activités que s'affermit la pensée mathématique des élèves et qu'ils prennent mieux conscience du pouvoir qu'elle leur donne sur le monde extérieur».

C'est réellement le cas ici : les enfants se sont dotés d'un outil qui leur permet de résoudre le problème posé. De plus, et ce n'est pas le moindre intérêt, ce type d'activité leur permet de ne pas rester passif devant un PROBLEME, et les habitue à ne pas toujours avoir de solution toute faite ou déjà vue.

Combien d'élèves de 2ème ou 1ère, qui ont à résoudre une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 2025$, et dont ils doivent prendre la racine carrée, utilisent le plus souvent les méthodes suivantes :

- lecture d'une table,
- utilisation d'une machine.

Quand ils n'ont ni l'un ni l'autre, leur attitude est la suivante :

- ils essaient de se souvenir de la méthode apprise (par tous) en 3ème ; de l'extraction de la racine carrée : mais la plupart d'entre eux (et d'entre nous) l'a oubliée.
- ils écrivent alors le résultat sous la forme $\sqrt{2025}$, ce qui est tout de même moins simple que 45 et présentera des difficultés pour les calculs ultérieurs (écriture des racines en particulier).

Ils auraient pu (mais n'y pensent pas !) :

- calculer 10×10, 20×20, 40×40, 50×50 (mentalement),
- remarquer que 2025 étant terminé par 5, le chiffre des unités doit être 5.
- un essai de 45 (sans aucun calcul préalable) fournit la solution. Il suffit pour cela d'utiliser des techniques de CM, mais surtout d'avoir développé en eux l'aptitude au raisonnement et une attitude de recherche.

Les activités présentées ne constituent en rien un modèle, ni un sujet de travail à imposer aux enfants, mais un exemple de démarche qui aide à développer le raisonnement de l'enfant en dehors d'un modèle tout fait, et en même temps à le faire évoluer avec aisance dans le domaine numérique.