

A PROPOS DE L'APPROCHE DE LA NOTION DE NOMBRE
AU COURS PRÉPARATOIRE

par Claude COMITI

L'auteur tient à signaler qu'elle s'est inspirée, pour la troisième partie de cet article des expérimentations faites en collaboration avec les instituteurs dont les noms suivent :

M. AMEVET, école d'application, Albertville
Mme BERTHIER, école de Meylan - mi plaine
Mme GROS, école de St Simond, Aix les Bains
Mme RONSEAUX, école des Balmes, Fontaine

Elle a également tenu le plus grand compte des remarques et suggestions faites par les stagiaires du Stage d'Approfondissement sur l'Enseignement des Mathématiques au Cours Préparatoire organisé en 1975 - 1976 par l'IREM de Grenoble à la COTE SAINT-ANDRE.

PLAN DE L'ARTICLE

- PRÉAMBULE.

- RÉFLÉCHISSONS ENSEMBLE.

I – QUELLES SONT LES DIFFÉRENTES MÉTHODES PROPOSÉES AUX MAÎTRES.

1.1 Avant 1970.

1.2 Après 1970.

II – OU EN EST-ON AUJOURD'HUI ?

2.1 De nombreuses études psychologiques...

2.2 Retour sur une évolution.

- EXEMPLES D'ACTIVITÉS INTÉRESSANTES DES LE C.P.

I – PREMIÈRES ACTIVITÉS SUR LES FILES.

II – UTILISATION D'UNE FILE PRIVILÉGIÉE.

2.1 Choix et construction d'une telle file.

2.2 Diverses utilisations de cette file.

2.2.1 *Etude de la file.*

2.2.2 *La file comme instrument de mesure du cardinal d'un ensemble.*

2.2.3 *La file comme instrument de comparaison de deux ensembles.*

2.2.4 *La file comme instrument de rangement des boîtes-nombres.*

III – LA SUITE DES NOMBRES.

3.1 Le «serpent» des nombres.

3.2 Autres activités ordinales.

IV – SCHEMA D'ENSEMBLE DES ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES DU C.P.

- CONCLUSION.

- BIBLIOGRAPHIE.

PREAMBULE

La notion de nombre est l'une des notions fondamentales en mathématique. L'équipe de l'IREM de Grenoble, qui mène depuis quatre ans une recherche sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire travaille tout particulièrement sur les problèmes posés par l'approche du concept de nombre par l'enfant dès le Cours Préparatoire.

Ce sujet est encore actuellement objet de recherche, non seulement au niveau grenoblois, mais sur le plan national et international, pour de nombreuses équipes réunissant chercheurs en mathématique, en pédagogie, en psychologie et praticiens (instituteurs, professeurs d'école normale...). Il nous semble cependant intéressant d'essayer de faire, pour nos lecteurs, le point actuel sur cette question.

Les objectifs de cet article sont donc les suivants :

Tout d'abord, essayer de mieux éclairer nos lecteurs sur la complexité de la notion de nombre et en particulier sur ce que cachent les mots «aspect cardinal» et «aspect ordinal» du nombre ; mettre en évidence les problèmes que cela entraîne au niveau de l'enseignement dès la classe de C.P..

Ensuite, proposer un certain nombre d'activités qui nous semblent susceptibles de favoriser l'approche de cette notion par les enfants, dès le C.P..

QUE TROUVEREZ-VOUS DANS CET ARTICLE ?

Un rapide survol mettant en évidence les avantages et les inconvénients des présentations de la notion de nombre au C.P. proposées dans les programmes de 1945, puis dans les commentaires de 1970.

Des éléments de réflexion à partir de travaux sur la question (travaux effectués de 1920 à nos jours).

Un retour sur les premiers articles écrits dans Grand IN en 1974 et 1975 sur ce thème.

Des idées d'activités déjà pratiquées dans un certain nombre de classes de C.P., activités destinées non pas à remplacer celles qui se font actuellement dans les classes, mais à les compléter.

MAIS VOUS N'Y TROUVEREZ PAS.

La «sécurité» que procurait à certains maîtres le programme en vigueur avant 1970.

Encore moins une progression nouvelle et idéale pour la classe du Cours Préparatoire.

Il nous a semblé indispensable de préciser clairement tout cela en préambule afin que le lecteur ainsi averti ne cherche pas dans cet article autre chose que ce que nous y avons mis.

RÉFLÉCHISSONS ENSEMBLE

I – QUELLES SONT LES DIFFÉRENTES MÉTHODES PROPOSÉES AUX MAÎTRES ?

1.1 La méthode d'avant 1970.

(date de parution des derniers commentaires du programme de l'école élémentaire).

On apprend aux élèves de C.P. la suite des nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ..., le nom et l'écriture de ces nombres et on se place directement au niveau du dénombrement de collections d'objets par l'intermédiaire de cette comptine, privilégiant ainsi l'aspect ordinal du nombre (on trouvera une définition des mots «ordinal» et «cardinal» au bas de la page 19).

Cette méthode a pour avantages de partir des connaissances des enfants (le début de la comptine : un, deux, trois, quatre, cinq...) et de permettre très tôt des activités de comptage.

Malheureusement, ses inconvénients sont nombreux. Outre le fait qu'elle privilégie beaucoup trop l'aspect ordinal du nombre, elle associe ce dernier à une collection donnée, d'objets très souvent de même nature. De plus, elle cache certaines propriétés importantes du nombre dont les études de Piaget ont montré la difficulté d'appréhension par de jeunes enfants (par exemple l'invariance vis à vis de la disposition des objets d'une collection, de l'ordre dans lequel on les compte, de la taille des objets...). Enfin, elle ne dissocie pas suffisamment la notion de nombre de celle de codage* de nombre, ce qui aboutit fréquemment à des manipulations de symboles sans grande signification pour de jeunes enfants et entraîne par la suite de nombreuses incompréhensions au niveau de la numération.

() Or on peut très bien commencer à travailler sur les nombres avant d'avoir appris à les coder : par exemple, on peut manipuler des collections de douze éléments et avoir la notion du nombre douze sans pour autant savoir écrire ce nombre 12 (en système décimal) ou XII (en chiffres romains) ou 22 (en base cinq).*

1.2 Il est permis de croire que c'est précisément pour supprimer ces inconvénients que les nouveaux commentaires des programmes parus en 1970, ont mis l'accent sur l'aspect cardinal du nombre (on trouvera une définition des mots «cardinal» et «ordinal» au bas de la page 19).

En gros, la nouvelle méthode préconisée consiste à faire classer par les enfants un certain nombre d'ensembles finis suivant le critère d'équipotence («... a autant d'éléments que...»), les nombres apparaissant alors comme une désignation des classes ainsi obtenues.

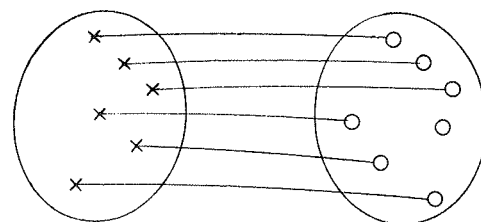
En réalité, il suffit de compulser la plupart des manuels ou fichiers, proposés aux maîtres par les maisons d'édition depuis 1970, pour se rendre compte que ces commentaires ont été, en général, bien mal interprétés, et ont donné lieu à des progressions tout aussi critiquables que celles qui existaient auparavant.

En effet, la plupart de ces manuels consacrent le début de l'année à une étude systématique des «ensembles», certains allant même jusqu'à l'étude formelle des opérations sur les ensembles ! Après quoi, ils étudient les «relations» en privilégiant les représentations sagittales. La correspondance terme à terme est alors introduite entre deux ensembles ayant peu d'éléments (moins que six !) alors qu'à ce niveau là, la nécessité n'en est précisément pas ressentie par les enfants : ces derniers ont en effet souvent une perception globale de ces petits nombres (même s'ils n'en connaissent pas le nom) et n'utilisent la correspondance proposée que pour faire plaisir à la maîtresse.

On trouve ensuite une étude fastidieuse des nombres de 1 à 5 puis on revient aux bonnes vieilles méthodes d'avant 1970 pour introduire le 6 comme le suivant du 5 : on lui consacre une leçon. C'est ensuite le tour du 7, puis le 8... Et il n'est plus jamais question de correspondance terme à terme* alors que c'est précisément pour comparer des collections d'objets dont le nombre est compris entre 6 et 15 (environ) qu'elle est particulièrement utile.

(*) Lorsque nous parlons de «correspondance terme à terme», nous ne faisons pas allusion aux dessins du type ci-contre mais à la mise en correspondance physique, par manipulation, de deux collections d'objets que les enfants ont à comparer.

Donnons quelques exemples de telles correspondances :
 pour comparer un ensemble de filles et un ensemble de garçons, chaque fille peut donner la main à un garçon...
 pour comparer un ensemble de cubes à un ensemble de jetons, on peut poser chaque jeton sur un cube et regarder ce qui se passe, on peut aussi poser un jeton devant chaque cube...
 pour comparer un ensemble de billes et un ensemble de gobelets, on peut mettre une bille dans chaque gobelet...
 pour comparer un ensemble de jetons bleus et de jetons rouges, on peut aligner les jetons bleus et poser devant chaque jeton bleu, un jeton rouge ...



Le seul cas dans lequel on sera amené à relier les objets d'une collection à ceux de l'autre est celui où l'on ne peut pas déplacer les objets à comparer.

En fait, ces progressions utilisent la correspondance terme à terme pour «introduire» les nombres inférieurs à six, alors que les enfants acquièrent rapidement une perception globale de ces nombres (même s'ils ne savent pas les écrire, ce qui est un autre problème). Elles abandonnent malheureusement cette correspondance au moment où celle-ci pourrait aider l'enfant à aborder un champ de nombres qui lui est beaucoup moins accessible, et où il devient indispensable de mettre en évidence les propriétés dont nous avons parlé au paragraphe 1.1

Ceci ne facilite en rien à l'enfant l'apprentissage de la notion de nombre, la compréhension globale qu'il en a n'étant finalement pas meilleure que lorsqu'on appliquait le programme de 1945.

II – OU EN EST-ON AUJOURD'HUI ?

2.1 De nombreuses études psychologiques ont été entreprises jusqu'ici dans ce domaine. Les plus connues sont celles de Piaget et de son équipe, celles auxquelles fait allusion Freudenthal dans «Mathematics as an educational task» et celles de l'Américain Brainerd (publiées dans la revue «Scientific America de Mars 1973»). Aucune ne nous semble permettre de conclure sérieusement ni à l'antériorité de l'un des aspects, cardinal ou ordinal, du nombre sur l'autre, ni d'ailleurs à leur simultanéité.

Ces études mettent cependant en valeur l'importance de ces deux aspects et apportent certains éléments pour une attitude pédagogique raisonnable au sujet de l'approche de la notion de nombre au Cours Préparatoire :

Travailler exclusivement sur un seul des deux aspects (ordinal ou cardinal) ne peut faciliter aux enfants la maîtrise des nombres. Aussi semble-t-il raisonnable de rejeter toute présentation du nombre qui sur-développerait trop longtemps l'un des aspects par rapport à l'autre. On aidera donc d'autant mieux les enfants à approcher la notion de nombre qu'on leur proposera, à chaque étape, des activités où interviennent différents aspects du nombre (cardinal, ordinal numération), activités qui les aideront à étendre progressivement le champ des nombres qu'ils maîtrisent sur tous les plans qui nous intéressent présentement.

Une telle approche nous semble susceptible de favoriser, dès le C.P., l'acquisition du concept de nombre, cette acquisition devant se poursuivre les années suivantes avec une étude plus approfondie de la numération et un travail systématique sur les opérations et leurs techniques.

2.2 Retour sur une évolution.

Dès les premières années du travail de notre équipe au niveau du Cours Préparatoire (1972-1973), nous avons mis l'accent sur l'importance des activités non numériques et en particulier sur les activités de classement dont l'un des buts est de préparer l'enfant au classement de paquets d'objets (que l'on peut appeler «sacs», «collections», «ensembles» ...) selon le critère «avoir autant d'éléments que».

On pourra relire à ce sujet les articles parus en 1974 dans Grand IN n° 3 et Grand IN n° 4 (Introduction de la notion de nombre au C.P. ; Désignation, égalité, au C.P. ; Numération au C.P.). On trouvera dans ces articles une description détaillée de la construction des «boîtes-nombres» (dans lesquelles on regroupe tous les sacs contenant autant d'objets les uns que les autres) et du rangement de ces boîtes.

Ces activités, qui se déroulaient pendant le deuxième trimestre de l'année scolaire, posaient un certain nombre de problèmes, surtout lorsqu'on en arrivait au rangement des boîtes.

Il nous a semblé que ces difficultés étaient peut-être dûes à ce que les enfants n'ayant pas suffisamment été familiarisés, dès le premier trimestre de C.P., avec les notions d'ordre non numérique, de file*...) étaient confrontés simultanément à un trop grand nombre de difficultés nouvelles.

Nous avons donc essayé, dès l'année 1974-1975 de multiplier, parallèlement aux activités de structuration de l'espace, de désignation, de classement, les activités faisant appel à la notion de rangement. Le lecteur pourra en trouver une brève description dans l'article publié en mai 1976 sous le titre «A propos de l'importance des activités non numériques au C.P.» dans Grand IN n° 9 (pages 18 à 22).

Un problème restait cependant ouvert : comment travailler assez tôt dans l'année du C.P. sur l'aspect ordinal du nombre alors que l'on ne dispose précisément pas, à ce niveau, de la suite des nombres ? (nombres que les enfants ne connaissent quelquefois pas du tout, en général pas au delà de cinq, et qu'ils ne savent de toutes façons pas écrire au début de l'année).

C'est ainsi que nous est venue l'idée de remplacer cette suite par une file de signes qui lui servirait de substitut aussi longtemps que nécessaire.

(*) Une file est formée d'êtres matériellement rangés les uns à la suite des autres.
(définition donnée par Jean Kuntzmann dans son livre : *Evolution et critique de l'enseignement des mathématiques*).

D'où est sortie cette file privilégiée ? Pourquoi l'a-t-on appelé «serpent», «chenille» ou «train» suivant les classes ? Quelles activités permet-elle ? Comment se fait, plus tard, le lien avec la suite des nombres ?

Autant de questions auxquelles nous allons essayer de répondre en décrivant ce que nous avons vu dans les classes de C.P. qui ont pratiqué ces activités, à partir du paragraphe suivant.

EXEMPLES D'ACTIVITÉS INTÉRESSANTES DES LE C.P.

I – PREMIERES ACTIVITÉS SUR LES FILES.

Il n'est pas difficile d'exploiter, dès le début du C.P., des situations rencontrées lors des activités d'éveil pour familiariser les enfants avec la notion d'ordre total* bien avant l'introduction des nombres.

Nous ne reprendrons pas ici les activités de rangement décrites dans l'article de Grand IN n° 9 cité page 14. Nous préférons mettre l'accent sur les activités mettant plus spécifiquement en œuvre des files.

1.1 Quand dit-on qu'on a une file ?

Chaque fois qu'on a affaire à des êtres matériellement rangés les uns à la suite des autres. Exemple : sur une route, une file de voitures.

On peut aussi bien sûr employer un autre mot lors des activités proposées aux enfants, par exemple le mot suite, on peut même, pourquoi pas, changer de mot suivant la situation proposée. C'est simplement par commodité que nous utiliserons ici essentiellement le mot file. Rien n'oblige le maître à introduire ce vocabulaire nouveau auprès des enfants.

Quel que soit le mot employé, la notion mathématique sous-jacente est celle de file, caractérisée de la manière suivante :

- 1) une file est toujours finie,
- 2) sur une file, il y a un ordre total.

(*) – On dit qu'il y a un ordre total sur un ensemble lorsque cet ensemble est muni d'une relation d'ordre telle que, quels que soient les éléments a et b de cet ensemble, ou bien a est avant b , ou bien b est avant a (il n'y a pas d'autres possibilités et en particulier on ne peut pas avoir d'ex-aequo).

– Aux puristes qui seraient choqués parce que nous appelons ordre une relation qui n'est pas réflexive, nous demandons de bien vouloir admettre que la réflexivité, pour importante quelle soit en mathématique a peu d'intérêt dans la vie courante !

On peut donc constater qu'il y a toujours, dans une file, un premier et un dernier élément ; qu'hormis le dernier élément, tout élément a un suivant ; qu'hormis le premier élément, tout élément a un précédent.

1.2 Donnons quelques exemples d'activités pouvant, pour certaines, être pratiquées dès la grande section de maternelle.

— Lors d'activités musicales, on voit souvent dans les classes le maître répéter à l'aide d'instruments à percussion, une suite de sons. On peut demander aux enfants de trouver un codage de ces sons. Ceci permettra de noter la suite de sons émis par les instruments. Plus tard, les enfants pourront inventer d'autres suites avec ces mêmes sons pris dans un ordre différent, suites qu'ils communiqueront à leurs camarades pour exécution.

— En éducation physique, on pourra profiter d'activités où la consigne donnée par le maître prescrit un enchaînement d'actions dans un ordre donné pour faire mettre en évidence par les enfants l'ordre dans lequel ces actions doivent être effectuées.

Par exemple : faire un grand pas, sauter à pieds joints, s'asseoir, frapper des mains, se lever, faire deux petits pas....

Pour que personne ne se trompe, on pourra être amené à inventer des signes pour chacune de ces actions, ce qui permettra de représenter l'enchaînement des actions demandées :

□ □ □ ↑ × || | ● □ □ □

Puis chaque groupe d'enfants inventera, à partir de ces mêmes actions d'autres enchaînements dont il transmettra le message à un autre groupe pour exécution.

On peut remarquer que la suite de sons du premier exemple et l'enchaînement d'actions du second sont deux files dans le temps (l'ordre qui intervient est lié au déroulement du temps).

— Lors des activités de désignation, dans presque tous les C.P. chaque enfant adopte assez rapidement un signe qui le désigne.

On décide un jour que l'on ne se mettra pas en rang n'importe comment mais dans un certain ordre.

Comment se souvenir de cet ordre ? Le petit train des signes est proposé par les enfants et les amuse beaucoup. Si l'on veut obtenir un autre train, il suffira de changer la place des wagons.

– En lecture, le maître peut être amené à travailler sur la suite des lettres d'une syllabe (par exemple pour amener les enfants à distinguer «par» de «pra»), sur la suite des mots d'une phrase...

Remarquons ici que dans les exemples précédents il ne s'agit plus de file dans le temps mais de file dans l'espace.

– Bien d'autres thèmes de la vie scolaire ou extra-scolaire donnent lieu à de telles activités :

On a confectionné un gâteau, mettre en évidence la suite des actions faites pour se souvenir de la recette:

On revient du stade, quelles rues a-t-on longées et dans quel ordre ?

On raconte une histoire, retrouver l'enchaînement des actions qui se sont déroulées au cours de cette histoire...

1.3 Ces activités vont permettre, par l'intermédiaire de manipulations, d'actions, traduites par des représentations graphiques ou des expressions verbales, de préciser petit à petit la notion d'ordre ainsi que le vocabulaire lié à cette notion :

est avant ... ou précède ...

est après ... ou suit ...

est juste avant ... ou est le précédent de ...

est juste après ... ou est le suivant de ...

Ce vocabulaire pose souvent de nombreux problèmes aux jeunes enfants car il fait appel à des termes souvent peu employés ou mal employés par leur entourage. Aussi multiplie-t-on les difficultés lorsqu'on attend les activités numériques pour l'introduire.

Les activités proposées ci-dessus ont l'avantage de partir d'un domaine que connaît l'enfant et de l'exploiter au lieu de le négliger. De plus, elle permettent d'introduire très progressivement, et à partir de situations à la portée des enfants la notion de file et le vocabulaire qui lui est lié (vocabulaire dont la compréhension sera précieuse lorsque l'on abordera, plus tard, la numération). Elles préparent donc la voie aux activités numériques fondamentales à propos desquelles on peut espérer que le transfert de la notion d'ordre s'effectuera alors.

II – UTILISATION D'UNE FILE PRIVILÉGIÉE.

2.1 Choix et construction d'une telle file.

Les activités sur les files faites au cours du premier trimestre vont nous permettre d'en choisir une, le moment venu, sur laquelle nous travaillerons ensuite plus systématiquement et qui nous permettra de mettre progressivement en évidence certaines propriétés importantes du nombre considéré sous ses aspects ordinal* et cardinal*.

On n'oubliera pas, avant de la choisir, qu'elle va remplacer provisoirement le début de la suite des nombres. Il y aura donc en particulier intérêt à prendre une file de signes tous distincts introduite à partir d'une activité des enfants (il n'est en particulier pas question de demander aux enfants de mémoriser ces signes, la file en question n'étant qu'un instrument provisoire que l'on abandonnera dès que l'on aura suffisamment avancé dans l'année pour pouvoir la remplacer par la suite des nombres).

A titre d'exemple, nous décrivons ci-dessous comment, dans une classe de C.P. a été construite cette file que les enfants ont, plus tard, baptisé «le serpent».



Dans cette classe, comme dans de nombreuses classes de C.P., les enfants aiment bien apprendre des comptines. La maîtresse en a choisi une qui puisse, plus tard, être facilement prolongée par les enfants eux-mêmes, et dont la mémorisation ne soit pas trop facile. Il s'agit de la chanson suivante :

Refrain	{	Il était une petite poule blanche Qui allait pondre dans la grange Pondait un p'tit coco Que l'enfant mangeait tout chaud Il était une petite poule grise Qui allait pondre dans l'église
---------	---	--

(*) Note à l'usage strict des maîtres.

Étant donnée une file d'éléments, l'ordinal d'un élément de cette file est le nombre qui désigne son rang dans la file. Le cardinal de l'ensemble des éléments de la file est donc égal à l'ordinal du dernier élément de la file.

Exemple : si Jean, Leïla, Anne, Laurent, Mohammed, Françoise, Isabelle, sont en rang dans cet ordre devant leur classe, Jean est le premier de la file, son ordinal est 1, Mohammed est le 5ème de la file, son ordinal est 5, Isabelle est la dernière de la file, son ordinal est 7. 7 est aussi le nombre des éléments de cette file, c'est-à-dire son cardinal.

Il était une petite poule noire
 Qui allait pondre dans l'armoire
 Il était une petite poule brune
 Qui allait pondre dans la lune
 Il était une petite poule verte
 Qui allait pondre dans l'herbette
 Il était une petite poule beige
 Qui allait pondre dans la neige
 Il était une petite poule rousse
 Qui allait pondre dans la mousse.

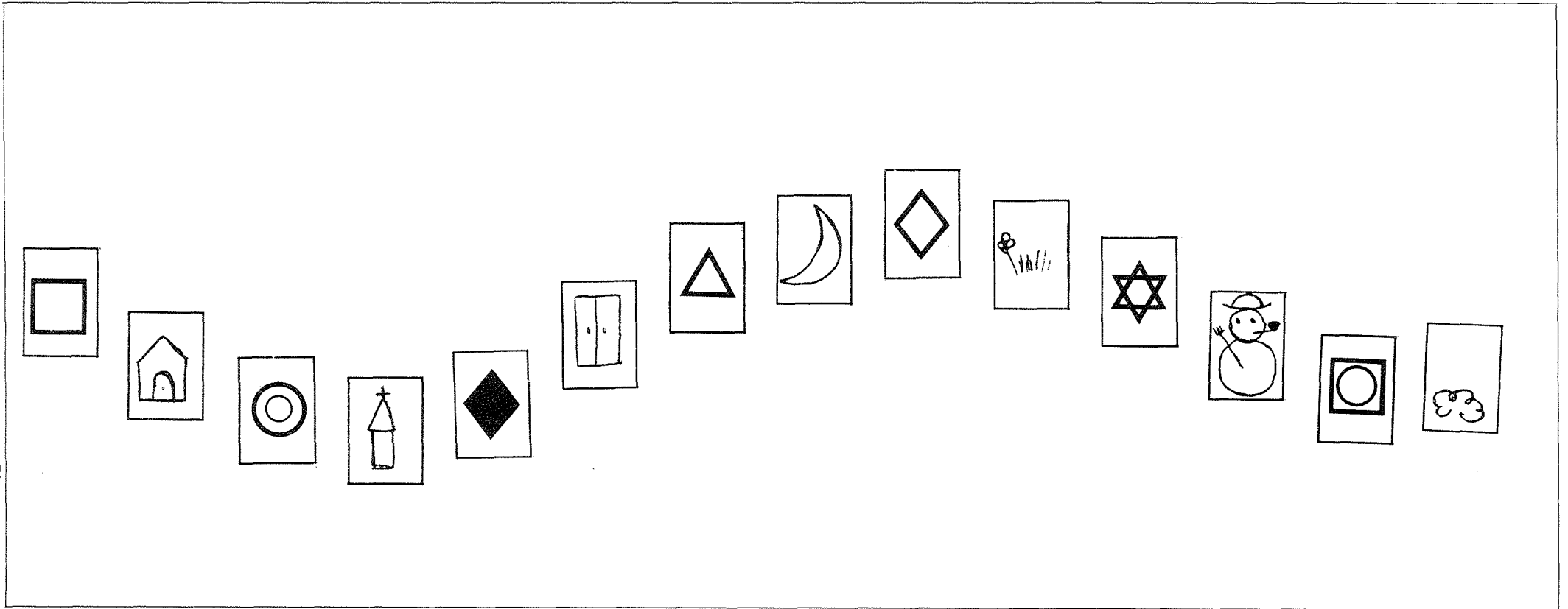
Les enfants aiment beaucoup cette chanson, ils n'ont aucune difficulté à retenir couplets et refrain mais n'arrivent pas à se souvenir de l'ordre des couplets. Pour faciliter cette mémorisation, ils proposent de «faire des signes»* que l'on affichera au tableau au fur et à mesure du déroulement de la chanson et auxquels on se référera chaque fois que l'on voudra chanter.

Les signes qu'ils proposent sont simples et rappellent clairement, à leurs yeux du moins, la couleur de la poule ou le lieu de ponte (d'un commun accord, il est décidé que l'on ne s'occupera pas du refrain). A chaque fois qu'un signe est fabriqué, un enfant va le fixer au tableau à la suite du précédent. On obtient une configuration semblable à celle dessinée sur la page ci-contre dans laquelle chaque signe est affecté à un vers (du style «Il était une petite poule blanche» ou du style «Qui allait pondre dans la grange»).

Dès que les signes ont été fixés au tableau, les enfants ont essayé de chanter à nouveau la comptine, en se servant, pour retrouver l'ordre des couplets, de la lecture de la file des signes, de gauche à droite, lecture facilitée par le pointage successif des signes par l'un d'entre eux.



(*) Cette activité n'a débuté qu'après de nombreuses activités non numériques et en particulier celles de rangement, de désignation et de codage.



Les signes des poules sont tous différents ; de plus ils sont coloriés de la couleur de la poule.
On rencontre donc dans l'ordre les signes coloriés en blanc, gris, noir, brun, vert, beige et roux.

Les récitations de la comptine ont donné très rapidement lieu à d'autres activités. En particulier celle-ci :

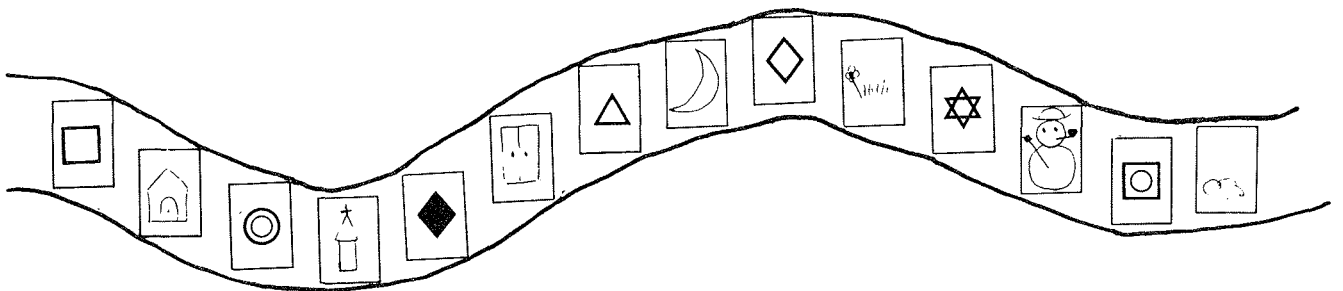
Le maître a disposé devant les enfants une collection de plus de six objets (et de moins de quatorze, car la comptine n'a pour le moment, abstraction faite du refrain, que quatorze vers). Un enfant doit prendre un de ces objets à chaque fois que ses camarades chantent un vers (au sens précédemment mis en évidence ; il ne prend donc pas d'objet au moment du refrain) et le poser dans une boîte.

Lorsqu'il a pris le dernier objet de la collection, il crie «Stop». On repère le vers sur lequel on s'est arrêté. On vide la boîte sur la table. Si le même enfant recommence le même jeu et prend les objets dans un ordre différent (ce qui est inévitable), que remarque-t-on ? Cet exercice est intéressant car il est loin d'être évident pour un grand nombre d'enfants de 6 ans qu'on s'arrête toujours sur le même vers si l'on modifie l'ordre dans lequel on prend les objets.

Mieux, le maître sera peut être étonné de constater que si le même jeu recommence avec la même collection manipulée par un autre enfant, il y aura très souvent des élèves pour lesquels il ne sera encore pas évident de prévoir le vers sur lequel on s'arrêtera.



Comme on l'a vu, les enfants qui ont fixé les signes au tableau ne les ont pas tous mis exactement à la même hauteur, certains proposent d'«encadrer» les signes par deux traits. On obtient alors :



Remarques :

1) Dans d'autres classes, les maîtresses sont parties d'autres comptines ou parfois de récitations. En voici deux exemples :

Tu vas à Paris	J'ai vu trois lapins
La chanson le dit	Faisant du patin
Sur ton cheval gris	Sur un vert sapin
Tu vas à la Haye	J'ai vu trois moineaux
Tout le monde le sait	jouant du piano
Sur ton cheval bai	Au pied d'un ormeau
Tu vas au Manoir	Et trois rossignols
Il faut bien le croire	Chantant sur un bol
Sur ton cheval noir	Do ré mi fa sol
Tu vas à Moscou	J'ai vu trois grillons
Et je ne sais où	Buvant du bouillon
Sur ton cheval roux	Au creux d'un sillon
Tu vas à Oslo	J'ai vu trois poussins
Ce n'est pas trop tôt	Faisant du dessin
Sur ton cheval gros	Dans un vieux bassin
Tu vas à Bastia	J'ai vu trois fourmis
Tout à petit pas	Qui comptaient des mies
Sur ton cheval gras.	Derrière un tamis
	Et trois chatons gris
	Parlant de Paris
	Dans un sac de riz

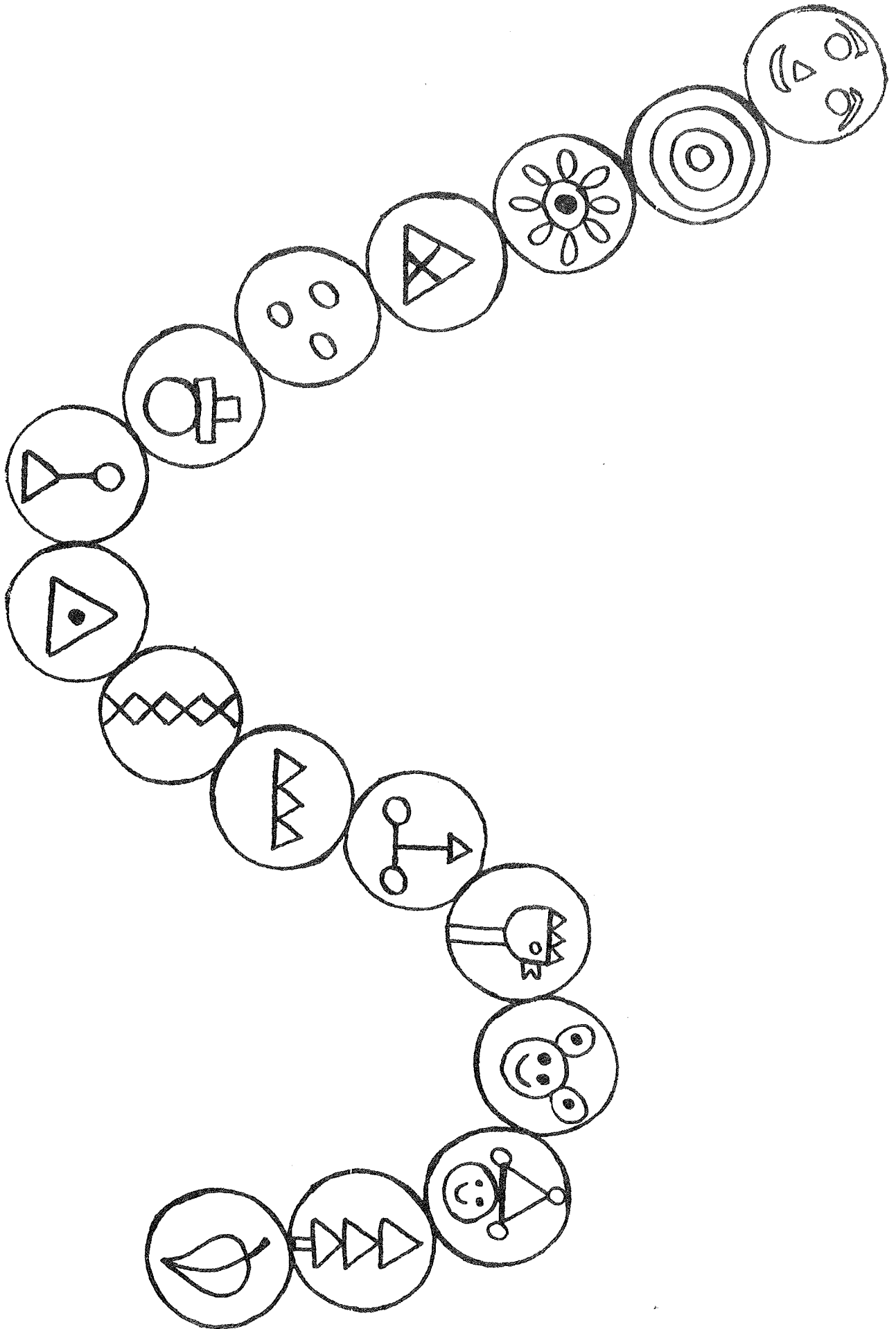
(extrait de «Chansons à ma façon»
de Pierre Gamarra).

2) Quant aux signes associés aux vers, ils ont été réalisés selon les classes, soit sur des cartons rectangulaires et les enfants ont par la suite parlé de serpent ou de petit train, soit sur des cartons ronds que l'on a ensuite assemblés par des attaches parisiennes, la bête ainsi obtenue étant alors appelée «chenille» par les enfants ! La confection des chenilles individuelles a été, il faut le signaler, plus facile que celle des serpents car elle s'est ramenée à un problème d'assemblage. (alors que pour le serpent la phase dessin du serpent a parfois été un peu plus longue à cause de la maladresse des enfants). De plus, la chenille était beaucoup plus facile à ranger dans le bureau des enfants que les serpents rigides.

On trouvera ci-contre un exemple de chenille réalisée dans une classe.

Et voici la chenille repliée :





2.2 Diverses utilisations de cette file privilégiée.

Dans le paragraphe précédent, il nous a semblé important de donner, dans le détail, les activités amenant à la construction de notre serpent. Par contre nous nous contenterons, à partir d'ici, de mettre en évidence, pour le maître, les différentes notions et propriétés sur lesquelles peuvent porter les activités des enfants.

Nous insistons sur le fait qu'il n'est pas question d'introduire dans les classes le vocabulaire que nous sommes amenés à utiliser ci-dessous pour la clarté de l'exposé. Il n'est pas question non plus de faire énoncer, comme nous sommes obligés de le faire ici, les propriétés que les enfants découvriront lors de leurs manipulations.

2.2.1 Etude de la file.

On peut d'abord étudier cette file en elle-même, pour consolider les notions déjà introduites précédemment d'avant, après, entre, de précédent de suivant...

2.2.2 Utilisation de la file comme instrument de mesure d'ensembles (au sens mesure cardinale bien sûr).

De nombreuses expériences permettront aux enfants de prendre conscience que :

- quel que soit l'ordre dans lequel on prenne les objets d'une collection pour les déposer, un par un, sur les écailles du serpent, en partant toujours de l'écaille la plus proche de la tête, et en posant un objet et un seul sur chaque écaille, le dernier objet de cette collection se trouve toujours posé sur la même écaille (que nous appellerons ici E),

- si l'on enlève des objets à la collection précédente et si l'on refait l'opération décrite ci-dessus, le dernier objet de la nouvelle collection est posé sur une case située sur le serpent avant l'écaille E,

- si l'on ajoute des objets à la première collection on s'arrête cette fois sur une écaille du serpent située après l'écaille E.

2.2.3 Utilisation du serpent comme instrument de comparaison de deux ensembles.

Les enfants savent déjà* comparer deux collections par correspondance terme à terme. Des manipulations destinées à mesurer deux collections distinctes avec le serpent les amèneront alors à constater que :

(*) dans les classes dans lesquelles a été menée l'expérimentation, des manipulations sur la comparaison de deux collections par mise en correspondance terme à terme (au sens précisé page 14) avaient été faites à la fin du 1er trimestre, préparant entre autres le terrain à la construction des boîtes-nombres (qui matérialiseront, dans les classes de C.P. les classes d'ensembles pour la relation d'équipotence : voir Grand IN numéro 3 et 4). Les activités décrites dans ce paragraphe n'ont été abordées quant à elles, qu'au début du 2ème trimestre, parallèlement aux activités de construction systématique des boîtes-nombres.

— si deux collections d'objets sont telles qu'on peut les mettre en correspondance terme à terme, on s'arrête sur la même écaille lorsqu'on pose leurs éléments sur le serpent. Et réciproquement, si on s'arrête sur la même écaille pour deux collections distinctes, cela signifie que les deux collections ont même nombre d'éléments.

— si une collection A a plus d'objets qu'une collection B, alors l'écaille sur laquelle on s'arrête pour A est située sur le serpent après celle sur laquelle est posé le dernier élément de B (et réciproquement),

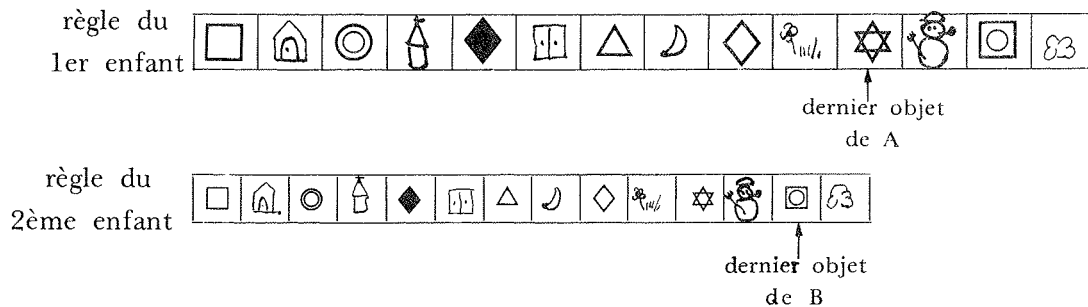
— si une collection C a moins d'objets qu'une collection D, alors l'écaille sur laquelle on pose le dernier élément de C est située, sur le serpent, avant celle sur laquelle on pose le dernier élément de D (et réciproquement).

Remarque :

Le lecteur se sera peut-être demandé pourquoi le maître n'amenait pas les enfants à construire tout simplement une règle et non un serpent ; règle qu'on aurait en effet facilement obtenue par juxtaposition des signes sur une même ligne.

L'utilisation d'une telle règle comme instrument de mesure d'ensembles nous semble dangereuse car elle risque d'introduire une confusion dans l'esprit de l'enfant avec la mesure des longueurs (confusion fréquemment rencontrée lors d'une utilisation trop exclusive du matériel Cuisenaire), la mesure de l'ensemble risquant alors de n'être plus liée, pour l'enfant, au signe sur lequel on s'arrête lors de la distribution des objets de la collection, mais à la longueur du bout de règle correspondant, ce qui est tout à fait différent.

J'ai vu, dans une classe où la règle avait été adoptée, deux enfants s'obstiner à dire qu'il y avait plus d'éléments dans l'ensemble A que dans l'ensemble B parce que, l'un ayant mesuré A sur sa règle, l'autre B sur la sienne, ils obtenaient la situation suivante :

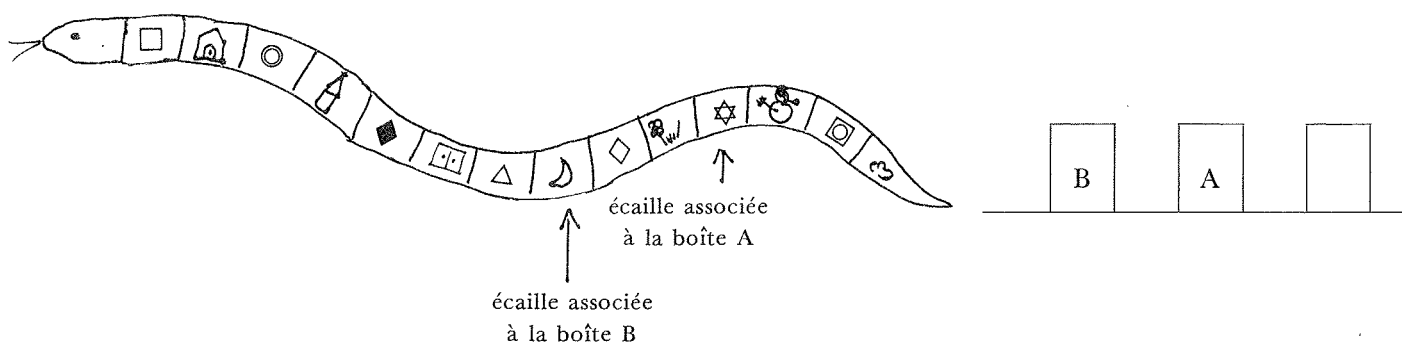


Toutes ces confusions sont évitées par l'utilisation de serpents, chenilles, trains à cricuit non rectiligne..., que l'on peut déformer à volonté et qui permettent de mettre d'autant mieux en évidence les propriétés des files qu'elles ne font pas appel en même temps à la notion de longueur.

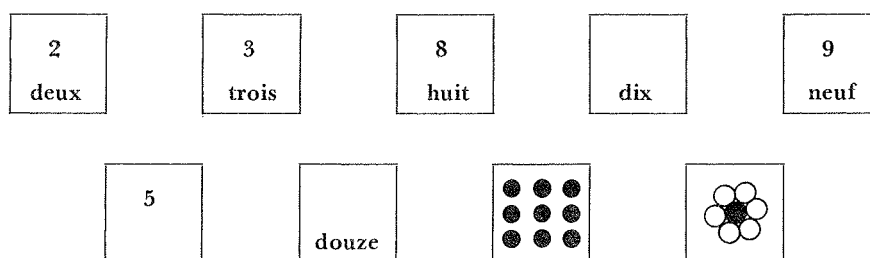
2.2.4 Utilisation du serpent comme instrument permettant de ranger les boîtes-nombres.

Enfin, lorsque l'on dispose de suffisamment de boîtes-nombres, on peut revenir au serpent et s'apercevoir alors que toutes les collections rangées dans la même boîte s'arrêtent sur la même écaille et réciproquement : ce qui permet d'associer une écaille et une seule à chaque boîte.

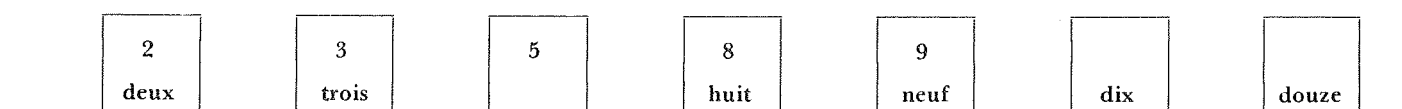
On peut alors ranger sans trop de difficultés les boîtes déjà construites en décidant, par exemple de mettre la boîte A à la droite de la boîte B si l'écaille associée à A est située sur le serpent plus loin que l'écaille associée à B.





Supposons par exemple que les enfants aient déjà construit les boîtes suivantes qu'ils ont désignées au fur et à mesure de leur construction, soit par l'écriture en toutes lettres du nombre, soit par l'écriture «en chiffre», soit par les deux (suivant les propositions des enfants, le choix du maître et le travail fait au préalable), soit encore par un signe quelconque lorsqu'il s'agit de nombres dont personne ne connaît le nom. (Par exemple, la boîte désignée par une fleur est la boîte dix-neuf fabriquée par les enfants car «on pourrait y mettre l'ensemble des enfants de la classe»).



Le serpent permet alors le rangement suivant :



Mais une question se pose immédiatement : comment faire pour les boîtes  et  ? «Le serpent est trop court !».

Certains enfants proposent d'ajouter des couplets à la comptine (ce qui n'est pas difficile si la comptine a été bien choisie) ; d'autres, qui ont complètement oublié ce point de départ, veulent construire un autre serpent à partir du premier auquel on ajouterait de nouvelles écailles.

Avec ce nouvel instrument (serpent à 19 écailles) les enfants rangent toutes leurs boîtes.

Mais ils s'aperçoivent rapidement de ce qu'il y a des écailles du serpent auxquelles n'est associée aucune boîte déjà construite. Ils essayent donc de fabriquer les boîtes qui manquent et obtiennent ainsi finalement **une file des boîtes-nombres de un à dix-neuf.**

En nommant alors les boîtes dans l'ordre dans lequel elles sont rangées lorsque la file est complète, on pourra continuer l'apprentissage de la comptine un, deux, trois, ... jusqu'à dix-neuf, avant même d'avoir avancé sur le plan de l'écriture des nombres. (Il est évident que si la boîte la plus grande était la boîte seize ou la boîte vingt-cinq, on serait allé jusqu'à seize ou vingt-cinq).

1	2	3	4	5	6	7	8	9											
	deux	trois			six	sept	huit	neuf	dix	onze	douze	treize	quatorze	quinze	seize	dix-sept	dix-huit	dix-neuf	

D'autres questions seront sans doute soulevées au cours des activités décrites dans ce paragraphe, en particulier **le problème de la boîte zéro** pourra apparaître si les enfants l'avaient construite précédemment, ou bien tout simplement parce que zéro leur semble un nombre magique et qu'ils ont envie d'en parler. On s'apercevra facilement qu'il n'y a pas d'écaille sur le serpent associée à cette boîte. Mais cela n'empêchera pas les enfants de ranger sans problème la boîte zéro à gauche de la file précédemment obtenue.

Petit à petit, les enfants prendront conscience de ce que le serpent ne sera jamais assez long car on peut toujours fabriquer une nouvelle boîte plus grande que la dernière boîte de la file précédemment obtenue et que l'on posera donc à la droite de cette dernière boîte dans la file.

A ce stade, on n'est plus très loin de la suite des nombres.

III – LA SUITE DES NOMBRES

3.1 Le serpent des nombres.

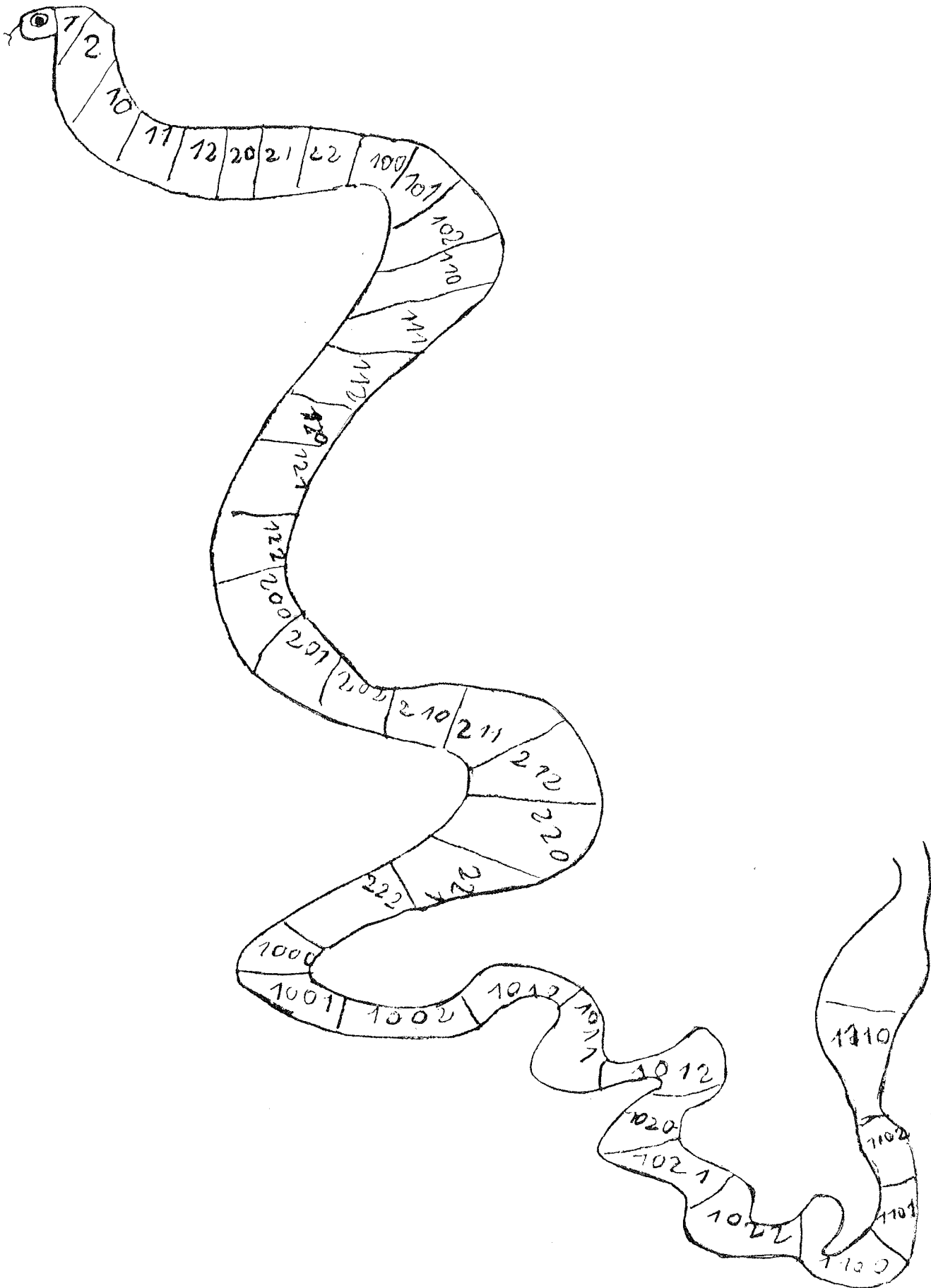
Parallèlement aux activités précédentes prennent place, au cours du 2ème trimestre de l'année de C.P., de nombreuses activités de groupements et d'échanges qui conduiront progressivement à la numération dans le système décimal (par l'intermédiaire d'activités de codage et de décodage des nombres en différentes bases qui ont l'avantage de permettre une manipulation plus facile aux enfants et de faciliter ainsi la compréhension des mécanismes de la numération : voir à ce sujet l'article publié dans Grand N, numéro 5 sous le titre Activités conduisant au codage des nombres).

Lorsque les enfants auront appris à écrire les nombres, ils pourront désigner toutes les boîtes obtenues précédemment par l'écriture du nombre correspondant.

Il sera alors intéressant de travailler en fin d'année sur les «serpents de nombres» qui ne sont autres que le début de la suite des nombres écrite dans une base donnée : on pourra faire construire aux enfants le serpent des nombres écrits en base trois par exemple, aussi loin qu'ils le peuvent (en laissant évidemment à leur disposition le matériel, cubes emboîtables ou autres, à la manipulation duquel chacun peut revenir chaque fois qu'il en éprouve le besoin).

Un tel exercice permet au maître de mieux voir les difficultés rencontrées par chaque enfant et est à l'origine de nombreuses autres activités qui permettront de préciser l'ordre sur les nombres, le précédent et le suivant d'un nombre donné... mais aussi de renforcer l'acquisition des principes de numération.

base trois



Et lorsque les enfants auront suffisamment avancé dans le domaine, il ne sera pas rare de voir, en fin d'année, des enfants de C.P. très fiers de rapporter de chez eux le serpent des nombres écrits en système décimal (cette fois, sans manipulation mais par application des règles comprises) jusqu'à 160 ou 282* (ces enfants ne s'étant arrêtés que parce qu'ils n'avaient plus de place sur leur feuille de papier : voir le serpent ci-contre).

Une activité qui rencontre alors le plus vif succès auprès des enfants est la reconstitution d'un dessin, reconstitution obtenue en joignant dans l'ordre croissant des points numérotés (à partir de 1 par exemple, ou de 15, ou de 30, ... suivant les difficultés des enfants).

3.2 Autres activités ordinales de fin d'année de C.P.

Les enfants ont entendu, dans la vie de tous les jours, leur entourage parler de «premier, deuxième, troisième...». Eux-mêmes parfois utilisent également ces mots.

Il est d'autant plus intéressant de leur proposer des situations suscitant l'emploi de ces adjectifs ordinaux que cela permet de faire le lien avec tout ce qui a été fait auparavant sur la notion de nombre.

Sans entrer ici dans le détail de telles activités, nous nous bornerons à en donner quelques exemples.

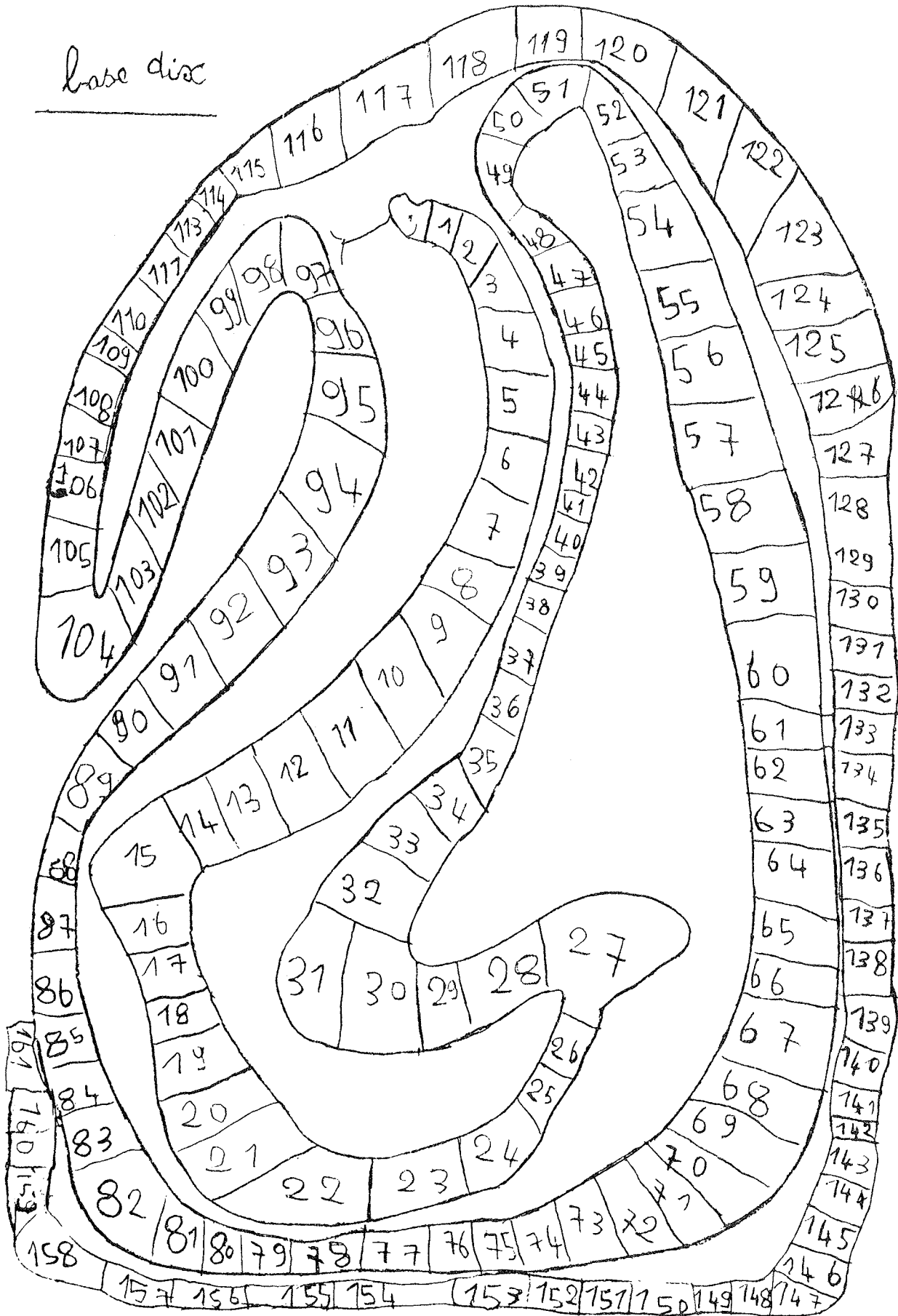
— Si au cours d'activités de lecture, un certain nombre d'images ont été fixées sur le mur, les unes à la suite des autres, on demandera aux enfants de montrer la première, la deuxième, la cinquième, la dixième, ... On pourra ainsi chercher le rang dans la file des images d'une image donnée, d'une autre image, de la dernière des images dans la file...

On pourra introduire, à propos de cette activité les écritures classiques 1er, 2ème, 3ème, ...

— Au C.P., les enfants ont généralement des difficultés à apprendre la suite des jours de la semaine. Des activités utilisant cette suite, et plus tard la suite des jours d'un mois, puis des mois d'une saison ou d'une année pourront également être proposées. On pourra par exemple s'intéresser aux enfants nés au mois de mai 1970 (si ce mois a été propice aux naissances) et reconstituer la file obtenue en rangeant les enfants suivant leur date de naissance...

(*) Le fait que le nom de ces nombres soit inconnu des enfants ne les gêne absolument pas. Il les lisent tout simplement 1.6.0 (un six zéro) ou 2.8.2 comme ils ont appris à le faire dans des bases autres que décimales.

base disc



— Si une équipe d'enfants a fait, en éducation physique, une course (ou un parcours chronométré) dans laquelle il n'y avait pas d'ex-aequo, on précisera le premier arrivé, le deuxième ... le dernier.

Il est également intéressant de proposer à la même équipe une autre activité qui aboutisse également à un rangement sans ex-aequo. Ceci aura l'avantage de mettre en évidence le fait qu'étant donné un ensemble, on peut lui associer différentes files qui ont toutes le même nombre d'éléments que l'ensemble, le rang d'un élément n'étant en général pas le même lorsque l'on change de file.

— Les jeux de l'oie fournissent aussi des activités ordinales.

Lorsqu'on aura bien joué on pourra faire un certain nombre de remarques. Par exemple, si le dé m'indique 5 et que je suis au départ, je tombe dans la mare : la mare est la 5ème case à partir du départ. Mais lorsque je suis dans la mare, si le dé m'indique encore 5, je vais arriver à la prison. La prison est la 5ème case à partir de la mare etc...

On pourra aussi mettre en évidence le lien existant entre le rang d'une case du jeu et le nombre des cases situées avant celle-ci dans le jeu. (Exemple : il y a 9 cases dans le jeu situées avant la 10ème) mais ceci est beaucoup plus difficile.

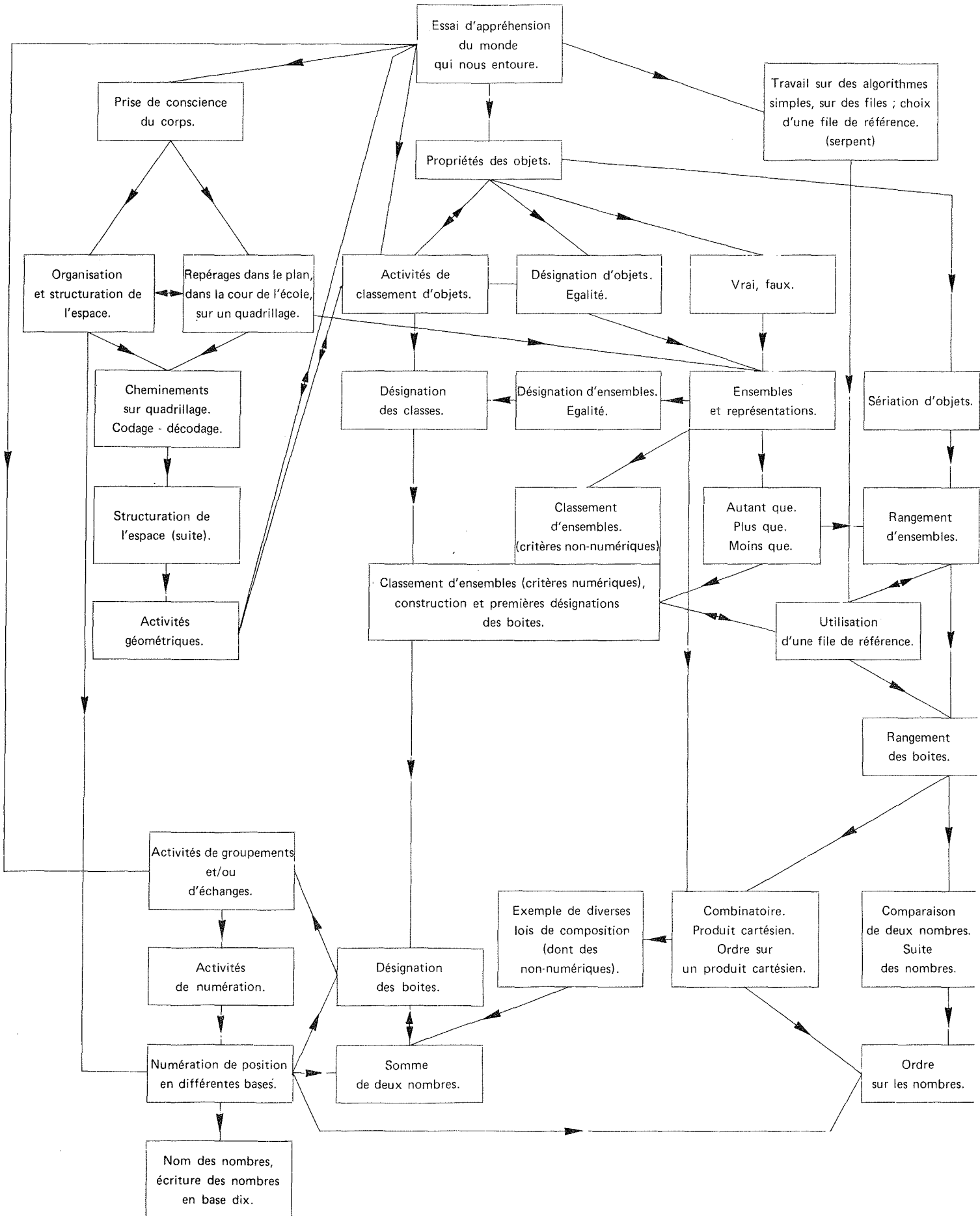
— Si l'on veut commencer à faire mémoriser l'alphabet aux enfants on pourra proposer de nombreux jeux mettant en évidence la file des lettres de l'alphabet et utilisant le rang de chaque lettre dans cette file. Par exemple, on écrit les lettres de l'alphabet les unes à la suite des autres sur une ligne, trouver le mot auquel je pense en écrivant d'abord la 2ème lettre de l'alphabet, puis la 18ème, puis la 1ère, puis la 2ème puis la 15ème.

Les enfants chercheront très vite une méthode leur évitant de partir toujours du a pour trouver le rang de la lettre qui les intéresse et prendront par la suite le plus grand plaisir à coder et décoder des messages.

**SCHÉMA D'ENSEMBLE
DES ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES
AU C.P.**

Le schéma que vous trouverez ci-contre, et dont un premier projet a été précédemment publié à la fin de l'article «A propos de l'importance des activités non numériques au C.P. «Grand IN numéro 9), essaie de mettre en évidence comment les activités mathématiques du C.P. s'imbriquent entre elles.

Le lecteur pourra en particulier essayer de situer où s'intègrent, dans ce schéma les activités décrites dans cet article.



EN GUISE DE CONCLUSION

Les commentaires officiels du programme du 2 janvier 1970 préconisent «l'emploi systématique de la correspondance terme à terme (qui) permet de classer des ensembles et d'attribuer à chaque classe un nombre».

Certaines interprétations de ces commentaires ont abouti parfois à une construction des nombres considérés comme des êtres isolés et indépendants les uns des autres en attendant que l'étude de la numération et l'apprentissage de l'écriture des nombres permettent de parler d'ordre sur les nombres. Ces interprétations sont d'ailleurs compréhensibles puisque fortement induites par le libellé du programme du C.P. qui est le suivant :

- Activités de classement et de rangement.
- Notion de nombre naturel.
- Nommer et écrire des nombres.
- Somme de deux nombres.

Les activités que nous avons décrites dans la deuxième partie de cet article nous semblent avoir en particulier l'intérêt de permettre, sans remettre en cause la méthode de construction du nombre rappelée dans le premier alinéa de ce paragraphe, de pallier l'inconvénient des interprétations résumées ci-dessus.

En effet, en donnant l'occasion aux enfants d'effectuer très rapidement un rangement des boîtes-nombres construites par correspondance terme à terme, et en leur suggérant la construction des boîtes manquantes entre la plus «petite» et la plus «grande» des boîtes déjà possédées, elles ont l'avantage de permettre à l'enfant de prendre très vite conscience de ce que les nombres ne sont pas indépendants les uns des autres, mais au contraire liés par cette **réalité fondamentale qui est la suite des nombres.**

Plus tard, on utilisera à toute occasion cette suite des nombres. Par exemple, on pourra l'écrire dans une base donnée, l'écrire de deux en deux, de trois en trois, etc...

De même, en début d'année de CE1, à propos de l'addition quand ils ont à calculer par exemple $8 + 5$ ou à résoudre $8 + \cdot = 13$, la plupart des enfants (pour ne pas dire tous) reprennent le comptage de 1 à 8 puis complètent jusqu'à 13... Il est permis de penser que les activités décrites éviteront ces difficultés ou tout au moins faciliteront plus tard le passage à un calcul plus efficace, comme elles favorisent en particulier au CE1 la mémorisation de la table d'addition ainsi qu'au CE2 l'acquisition de la technique de la soustraction.

BIBLIOGRAPHIE

Programme de mathématiques de l'enseignement élémentaire. Horaires, programmes, instruction.

Service d'Édition et de vente des publications de l'EN - 29, rue d'Ulm - PARIS 5ème.

BRAINERD In Scientific America (numéro de mars 1973).

COLMEZ F. L'enseignement des mathématiques aux niveaux préélémentaire et primaire.

Rapport présenté au 3ème Congrès International sur l'Enseignement des Mathématiques Karlsruhe 16-21 août 1976.

DANIAU J. & S. Activités mathématiques des enfants de 5 à 6 ans à l'usage des maitres.

Editions Cedic.

FREUDENTHAL H. Mathematics as an Educational Task.

Grand IN numéros 3, 4, 5, 9.

GRECO P. - GRIZE J.B. - PAPERT S. & PIAGET J. Problèmes de la construction du nombre.

EEG, tome XI, Presses Universitaires de France.

INRDP Mathématique Cours Préparatoire, documents de recherche numéro 1 et 2.

Service des études et recherches pédagogiques - 29, rue d'Ulm - PARIS 5ème.

IREM de BORDEAUX Enseignement des Mathématiques au Cours Préparatoire.

IREM de BORDEAUX, 351, cours de la libération - 33405 TALENCE.

KUNTZMANN J. Evolution et étude critique des enseignements de mathématique.

Editions CEDIC.

PIAGET J. & SZEMINSKA A. La genèse du nombre chez l'enfant.

Delachaux et Niestlé.