
RETOUR D'EXPÉRIENCE - MODÉLISATION PAR DES AUTOMATES D'UN OBJET CONCRET, LE FLEXAGONE

Gaëlle WALGENWITZ¹

Professeure de mathématiques, INSPE de l'académie de Grenoble, IREM de Grenoble

Benjamin WACK²

Professeur d'informatique, Université Grenoble Alpes, UFR IM2AG, IREM de Grenoble

Résumé. Les flexagones sont une curiosité mathématique popularisée notamment par Martin Gardner (1956). Nous nous intéressons ici plus particulièrement à la modélisation des transformations subies par un hexa-hexa-flexagone au cours de sa manipulation, qui se traduisent par un graphe orienté ou plus précisément par un automate, formalisme présent dans de nombreuses branches de l'informatique (théorie des langages, systèmes discrets, vérification de programme...). Pour cela, nous proposons un retour d'expérience sur la mise en œuvre d'une activité à destination du cycle 4, dans laquelle chaque participant se voit confier un hexa-hexa-flexagone (non coloré initialement) dans le but d'en déterminer le nombre de faces. Une première phase de manipulation et de coloration libre permet de s'approprier l'objet tangible, mais il apparaît rapidement que l'apparence ainsi donnée au flexagone ne suffit pas à caractériser totalement son état. Les participants sont alors encouragés à développer une trace écrite (ou schématique) exploitable de leurs manipulations. Une discussion sur les problèmes que permet de traiter cette trace écrite met en évidence les processus qui ont guidé cette modélisation, ainsi que les bénéfices que l'on en attend.

Mots-clés. Modélisation, flexagone, cycle, automate, état, transition.

Abstract. Flexagons are a mathematical curiosity popularized through Martin Gardner's publications (1956). In this article, we focus on modelling how a hexa-hexa-flexagon can be transformed when folded, which can be summarized as a directed graph. More specifically, we obtain an automaton, a formalism used in various computer science domains (language theory, discrete systems, program checking...). For this purpose, we propose a feedback on the implementation of an activity in which each participant is given an (initially blank) flexagon and is tasked with determining its number of distinct faces. In a first phase, free manipulation and coloring are encouraged in order to appropriate the tangible object, but soon it becomes obvious that we will need more than the flexagon's mere exterior color to fully characterize its state. Participants are then encouraged to put together usable written (or diagrammatic) account of their manipulations. Discussing the effectiveness of that diagram, we emphasize the processes which guided that modelling activity, and its expected benefits.

Keywords. Modelling, flexagon, cycle, automaton, state, transition.

Introduction

Les programmes de mathématiques du cycle 4 prévoient une initiation des élèves à l'algorithmique et à la programmation, vue principalement sous l'angle de l'utilisation du logiciel *Scratch* pour des projets ludiques. La question des compétences que l'on cherche à développer chez l'élève dans ces activités est rarement explicitée. Il nous semble utile d'adopter une perspective plus large de l'enseignement de l'informatique au collège, et de ce qu'il peut apporter comme compétences tant spécifiques que transférables dans d'autres disciplines comme les mathématiques.

¹ gaelle.walgenwitz@univ-grenoble-alpes.fr

² benjamin.wack@univ-grenoble-alpes.fr

En particulier, l'informatique nous semble offrir des opportunités intéressantes pour modéliser, puisqu'elle nécessite de traduire des informations du monde réel dans un format manipulable algorithmiquement. C'est avec cette intention que nous avons souhaité proposer une situation d'informatique débranchée permettant une modélisation libre et dont la recherche est dévolue à l'élève. L'activité choisie a été élaborée et améliorée au fur et à mesure des expérimentations avec l'objectif de permettre d'institutionnaliser deux résultats : la démarche de modélisation et la notion d'automate.

Nous commençons par fixer le contexte avec une présentation des *flexagones*, objets mathématiques et point de départ de l'activité pour les élèves. Puis nous définissons les automates, qui constituent le formalisme cible vers lequel devrait tendre la modélisation.

Nous présentons alors l'activité proprement dite, les phases qui la constituent et nous rappelons le cadre théorique qui nous conduit à penser que l'organisation de l'activité et l'utilisation d'un tel artefact est pertinente pour l'objectif visé. Grâce à une analyse *a priori*, nous détaillons les savoirs et connaissances visés, stratégies attendues, précautions de mise en œuvre, et variables didactiques de l'activité.

Les différentes conditions d'expérimentation sont ensuite présentées et organisées sous forme d'un tableau. L'activité a été menée avec des élèves de différents niveaux, de la 6^e à la 3^e ainsi qu'avec des enseignants ; nous avons également varié les contextes : classe entière pendant l'horaire de mathématiques, petits groupes hors du contexte scolaire, groupes de travail. Les modalités de l'activité ont été remaniées au fur et à mesure des expérimentations.

Il s'en suit notre retour d'expérience. La manifestation des savoirs visés est illustrée par des traces écrites d'élèves, permettant ainsi d'explicitier leurs procédures et d'illustrer les observations qui nous ont conduits à modifier l'activité.

Enfin, nous concluons par une synthèse des conditions de mise en œuvre que nous préconisons, ainsi qu'une proposition de parcours d'activités dans lequel pourrait s'inscrire l'activité « Flexagones ».

1. Les flexagones

Curiosité mathématique découverte par Arthur Stone en 1939 puis popularisée notamment par Gardner (1956), les flexagones sont des structures origamiques de différents types et dont une des particularités est que toutes les faces ne sont pas visibles au premier coup d'œil. Ainsi, c'est en manipulant, en pliant et dépliant le flexagone d'une certaine manière, qu'on peut les exposer. Dans notre activité, et comme on peut le voir sur la figure 1, nous utilisons un flexagone qui présente en apparence six triangles équilatéraux (organisés sous forme hexagonale), on parle donc d'un *hexa-flexagone*.

La construction du flexagone rend possible une déformation, de façon à réorganiser les triangles différemment tout en conservant globalement la forme hexagonale de départ. Lors de cette manipulation, les six triangles qui constituaient le recto du flexagone sont envoyés au verso, et six nouveaux triangles (initialement cachés dans le pliage) se placent au recto. On peut visualiser cette évolution en coloriant d'une même couleur les triangles visibles simultanément. Avec la manipulation la plus classique, les six triangles de même couleur seront toujours visibles ensemble.

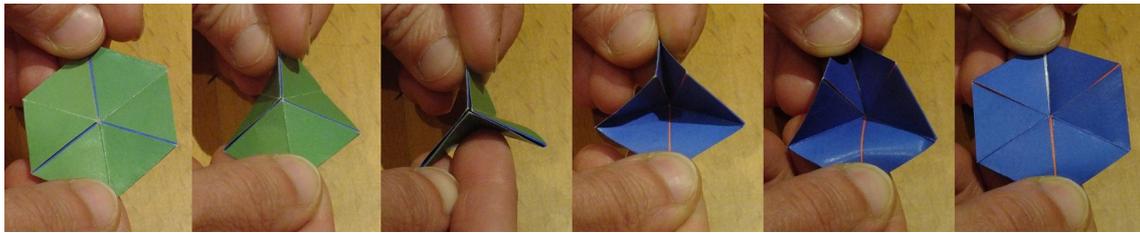


Figure 1 : Manipulation élémentaire du flexagone.

Nous avons choisi d'utiliser un *tri-hexa-flexagone* et un *hexa-hexa-flexagone*, coloriables avec respectivement trois et six couleurs. L'avantage de ces deux modèles est qu'ils se fabriquent à l'aide d'une simple bande de papier repliée et enroulée sur elle-même, dont on recolle les extrémités à la façon d'un ruban de Möbius³.

La meilleure façon de les découvrir consiste probablement à en visualiser la manipulation : Mickaël Launay (2014) propose un exemple de construction et de manipulation élémentaire des hexa-flexagones les plus simples ; d'autres patrons plus évolués sont téléchargeables sur *The Flexagon Zoo* (2007).

Notons qu'il existe une grande variété de flexagones, offrant d'autres formes (carrée, pentagonale, dodécagonale...) et transformations possibles. Sherman (2007) illustre la diversité des formes de flexagones possibles.

Un des enjeux de cette activité, et des flexagones en général, consiste à décrire les enchaînements possibles des différentes faces. Comme on le verra, les automates à états finis sont un formalisme adapté pour cette représentation.

2. Les automates

Un automate est un outil de modélisation des systèmes discrets utilisé et étudié dans de très nombreux domaines de l'informatique : informatique théorique, théorie des langages et compilation, informatique parallèle... Dans une version simple (celle qui nous intéresse), on peut considérer un automate comme un graphe orienté connexe, dont les sommets sont appelés **états**, et les arcs étiquetés, **transitions**.

Un **état** est celui du système à un instant donné. Par exemple, pour l'exécution d'un programme, ce sont les valeurs des variables. L'état dépend du passé du système et caractérise les façons dont il pourra réagir à l'avenir. L'observation extérieure du système peut apporter des informations sur son état, mais ce n'est pas toujours suffisant, car le système peut comporter des variables internes, cachées. Par exemple, l'état d'un lutin *Scratch* correspond à sa position et son orientation (que l'on peut observer directement à l'écran) mais aussi aux valeurs de ses variables (qui ne sont pas toujours affichées explicitement). Ainsi, dans un jeu, si on sait qu'un lutin n'a plus qu'un seul « point de vie », on peut prévoir qu'il mourra à la prochaine collision, mais le joueur n'a pas forcément connaissance de cette information. Dans une optique de représentation, il peut être utile d'établir un code pour décrire les différentes configurations de l'objet.

Une **transition** est déclenchée par un signal extérieur au système et provoque un changement d'état : dans l'exemple d'un programme, l'exécution d'une instruction fait évoluer les valeurs

³ Une façon d'obtenir le tri-hexa-flexagone est d'ailleurs d'aplatir un ruban de Möbius dont la longueur vaut $3\sqrt{3}$ fois sa largeur.

des variables.

Dans le cadre du développement logiciel, des protocoles de communication ou encore de la conception des processeurs, les automates sont largement employés pour **modéliser** et garantir le bon comportement de ces systèmes.

Plus proche des préoccupations des élèves de collège et de lycée, les automates sont également utilisables pour concevoir un programme en suivant une démarche raisonnée, afin d'éviter de coder par tâtonnements et par couverture progressive de cas. Dans la vie courante, le fonctionnement de systèmes physiques simples peut être modélisée par des automates : distributeur de café (le changement d'état est provoqué par l'insertion de pièces ou la sélection d'une boisson), digicode (qui change d'état lorsqu'on appuie sur une touche).

Prenons ainsi l'exemple d'un digicode à 4 chiffres. Le comportement du boîtier au fur et à mesure des touches tapées par l'utilisateur peut se modéliser par l'automate à 5 états figure 2.

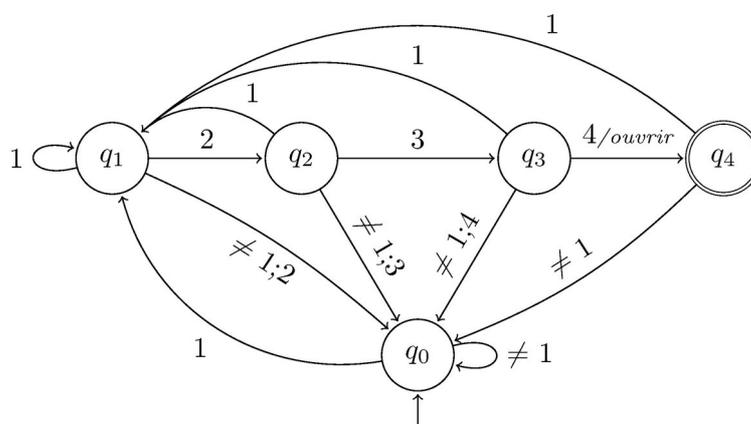


Figure 2 : Un automate modélisant le fonctionnement d'un digicode.

On peut se convaincre sur cet automate que le code correct est 1234 (c'est la seule séquence de quatre chiffres qui amène de l'état initial q_0 à l'état q_4 , dans lequel la porte s'ouvre). Notons également que, même si on tape d'autres chiffres au préalable, les transitions qui ramènent à q_1 assurent que tout chiffre 1 tapé sera pris en compte comme étant le début du code.

Une fois cet automate établi, on peut s'appuyer dessus pour écrire un programme, par exemple avec une variable qui mémorise l'état courant de l'automate, et une boucle qui redemande de taper un chiffre tant que la porte n'est pas ouverte.

Dans notre activité, dans un premier temps, l'**état du flexagone** est caractérisé par la **couleur de sa face visible (dessus)**. On s'apercevra ensuite que cette variable n'est pas suffisante : plusieurs faces présentant la même couleur se comportent différemment ! Il s'agit donc de deux états distincts du flexagone. Pour les distinguer il faut considérer un **couple**, constitué de la couleur apparente et d'une autre variable : **la couleur de la face dessous**, ou **la disposition des triangles** (repérable en ajoutant par exemple un cercle au centre de l'hexagone, cf. figure 4).

Quant aux **transitions** permettant le changement d'état, il s'agit des exécutions de l'une des **manipulations élémentaires** possibles (figure 1). Dans certaines configurations et selon la façon dont on plie le flexagone, la manipulation représentée figure 1 ne peut pas être achevée : le flexagone refuse de s'ouvrir. Dans le modèle, selon l'état du flexagone, il y a donc une ou deux

transitions distinctes possibles.

Ainsi, les deux flexagones utilisés dans l'activité peuvent être modélisés par les automates de la figure 3, sous réserve des couleurs choisies pour les faces. Les états de même couleur entourés d'un cercle et d'un hexagone servent à distinguer deux faces d'apparences identiques mais constituant des états distincts.

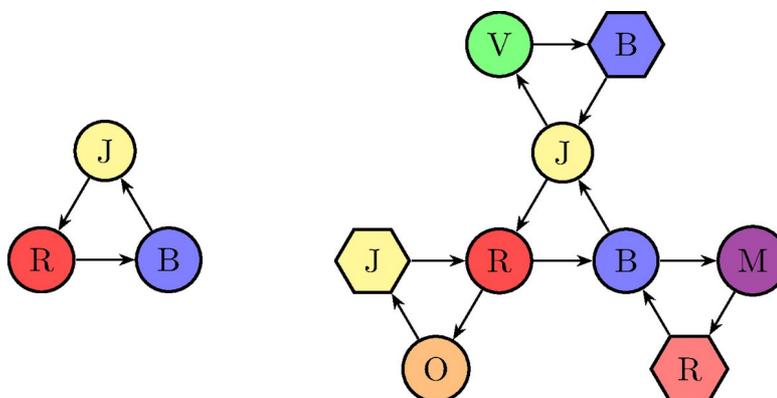


Figure 3 : Automates du tri-hexa-flexagone et de l'hexa-hexa-flexagone.

3. « Flexagones » : une activité « débranchée »

Les activités « d'informatique débranchée », courant pédagogique initié par (Bell, Witten & Fellows, 1996), permettent par leur mise en œuvre de rendre tous les élèves actifs, par la manipulation mais aussi dans les interactions qu'elles suscitent. Ces situations de recherche aux multiples interactions : élève-élève, élève-enseignant, élève-objet, placent l'activité et les échanges au centre du processus d'apprentissage : une approche constructiviste, dans laquelle les élèves sont guidés par des questions leur permettant de découvrir les concepts de l'informatique par eux-mêmes (Bell *et al.*, 2019). Véritables outils pédagogiques, les activités débranchées permettent d'initier les élèves à la pensée informatique (Wing, 2006). En effet, « *en mettant le clavier à distance, on apprend à structurer ses idées, à chercher une approche satisfaisante, à raisonner, [...]* » (Cabane, dans Collectif, 2017).

L'activité d'informatique débranchée « Flexagones »⁴ que nous présentons dans cet article repose sur la manipulation et l'exploration d'un tri-hexa-flexagone dans un premier temps, puis d'un hexa-hexa-flexagone avec comme objectif d'arriver à la modélisation du fonctionnement de celui-ci. Elle se déroule en cinq phases et sa mise en œuvre nécessite deux heures.

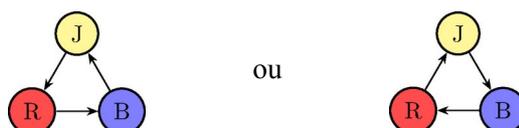
Alors que les élèves se voient confier un flexagone, et poser un certain nombre de questions à propos de celui-ci, une manipulation passive de l'artefact s'avère rapidement insuffisante pour en percevoir complètement le fonctionnement. La mise au point d'un modèle du flexagone, et plus spécifiquement des transformations qu'il subit au cours de sa manipulation nécessite une approche instrumentale de l'artefact au sens défini par Rabardel (1995) : « *le terme instrument désigne l'artefact en situation, inscrit dans un usage, dans un rapport instrumental à l'action du sujet, en tant que moyen de celle-ci* ». Ainsi, l'exploration du flexagone permet d'engager les élèves dans une démarche de modélisation. C'est cette démarche même qui est travaillée ici, plus que l'utilisation d'un modèle donné.

⁴ Un descriptif détaillé de cette activité est téléchargeable sur <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/informatique-de-l-ecole-jusqu-au-lycee/activite-algorithmique-le-flexagone-1139015.kjsp?RH=413148517470877>

3.1. Plan de l'activité

La **première phase** porte sur la découverte d'un premier type de flexagone : le tri-hexa-flexagone. Le flexagone de démonstration est coloré. Les élèves découvrent son recto, son verso, puis par une manipulation élémentaire (figure 1) l'enseignant fait apparaître une troisième face colorée. Cette caractérisation, dans laquelle une face correspond à l'assemblage hexagonal de 6 triangles d'une même couleur, sera amendée dans la troisième phase. Les élèves reçoivent ensuite et manipulent chacun un flexagone préalablement colorié. Il est demandé aux élèves de proposer une représentation de l'enchaînement des faces (couleurs) du flexagone.

L'objectif de cette première phase est d'arriver à institutionnaliser un premier modèle : le **cycle** ainsi que la notion même de **modélisation**. Il est possible de modéliser l'organisation du tri-hexa-flexagone de deux façons, selon le sens dans lequel on le manipule :



La **deuxième phase** porte sur la découverte d'un deuxième type de flexagone, un hexa-hexa-flexagone. Les élèves se voient confier un flexagone blanc et ont pour première tâche de déterminer le nombre de faces distinctes dans celui-ci. Ils le manipulent, l'explorent, et attribuent une nouvelle couleur à chaque face découverte. C'est au cours de cette exploration que la **caractérisation d'une face** par une couleur va s'avérer insuffisante : les élèves constatent qu'avec qu'une couleur identique, les faces accessibles ne sont pas toujours les mêmes.

Les notions d'**état** et de **transition** émergent au cours de la **troisième phase**. La couleur ne suffisant pas à caractériser complètement l'état du flexagone, les élèves sont invités à « marquer » chaque face (couleur) d'un symbole qui traverse les six triangles, par exemple un cercle ou une étoile au centre.

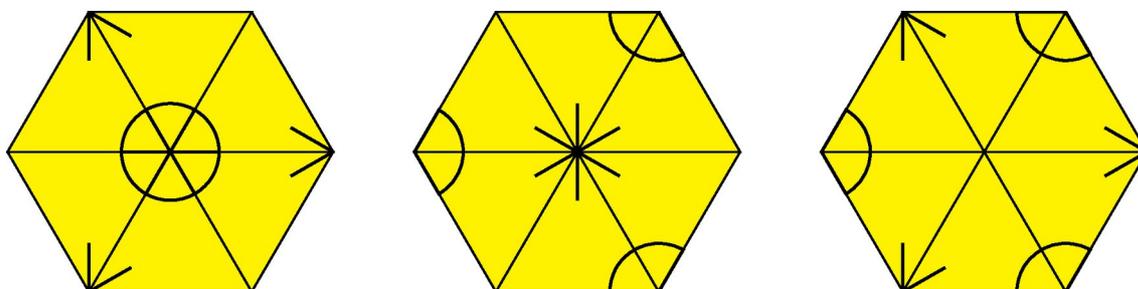


Figure 4 : Les trois dispositions possibles pour une face marquée.

Ainsi, lors de la manipulation, chacun pourra aisément identifier l'état du flexagone, caractérisé par le couple : une couleur et une disposition des triangles dans l'hexagone (chaque triangle reste à la même place par rapport aux autres mais subit une rotation comme représenté figure 4). Dans le cas du flexagone, la notion de transition est incarnée par la manipulation élémentaire qu'on lui fait subir pour faire apparaître une autre face.

La **quatrième phase** est consacrée à la modélisation du fonctionnement de l'hexa-hexa-flexagone. Les élèves ont pour mission de produire un « mode d'emploi » de leur flexagone afin qu'une autre personne (camarade, enseignant...) puisse facilement et efficacement effectuer des tâches telles que « passer d'une face donnée à une autre » ou « obtenir une face à coup sûr ». Ce qui motive la modélisation est donc non seulement le besoin de prédire le comportement du

flexagone, mais aussi de savoir agir sur lui pour produire certains résultats. Si le modèle du **cycle** est pertinent pour modéliser localement certains enchaînements de trois états, un modèle plus complet est nécessaire pour capturer l'organisation globale du flexagone : états accessibles et transitions possibles.

L'objectif de cette phase est donc de déboucher sur un automate similaire à celui présenté en figure 3. La construction de l'automate permet de s'assurer que toutes les configurations et transformations possibles du flexagone ont été explorées de façon exhaustive. Au cours de cette construction, on note que tous les états envisageables ne sont pas accessibles. Par exemple l'automate de la figure 3 permet de voir que l'hexa-hexa-flexagone ne peut jamais présenter du rouge au recto et du vert au verso, ou encore qu'on ne pourra pas observer toutes les dispositions de la couleur orange. Réciproquement, la manipulation du flexagone en parallèle du suivi d'un chemin sur l'automate doit pouvoir valider ou invalider l'automate construit.

L'activité se termine par une **phase d'institutionnalisation**, au cours de laquelle les notions d'état et de transition sont établies comme des constituants d'un automate. Pour effectuer une mise en commun, comme les élèves ont pu marquer leurs flexagones avec des couleurs et symboles très différents, l'enseignant pourra présenter l'automate de son hexa-hexa-flexagone de démonstration (figure 3). Il effectuera plusieurs manipulations pour illustrer en quoi le modèle permet de résoudre divers problèmes sans recourir à la manipulation directe de l'objet : par exemple, l'automate permet de prédire le nombre minimal de mouvements nécessaires pour passer d'une face donnée à une autre, ou la suite de faces qui apparaîtront lors de ces mouvements.

Certains choix de manipulation et de modélisation peuvent être ici discutés : quel automate obtiendrait-on en autorisant le retournement du flexagone ? Doit-on considérer le retournement comme une nouvelle forme de transition possible (c'est acceptable, mais conduit à un automate plus complexe) ? Comment peut-on distinguer les multiples transitions issues de certains états (un marquage des arêtes que l'on plie peut y aider) ?

3.2. Modélisation à l'aide d'un artefact

Guidés tout au long de l'activité, les élèves, en utilisant et en agissant sur le flexagone, entrent dans le processus de modélisation grâce au cycle didactique mis en œuvre :

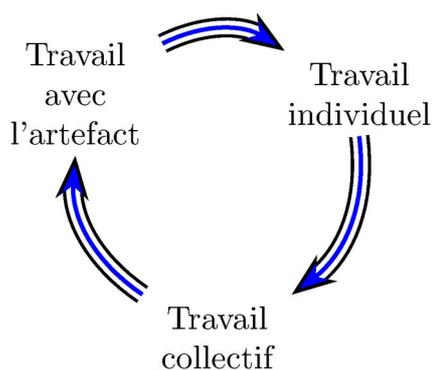


Figure 5 : Cycle didactique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, 2014).

Le flexagone joue le rôle d'instrument de médiation sémiotique au sens défini par Bartolini Bussi et Mariotti (2008) dont le *potentiel* (Mariotti & Maracci, 2010) est défini par le double lien sémiotique :

- un artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée, il s'agit du lien artefact/tâche ;
- cet artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage et reconnaissable par un expert, il s'agit du lien artefact/connaissance.

Le guidage de l'activité permet l'évolution des « *signes artefact* » (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) attachés directement à la manipulation du flexagone et à la tâche d'exploration proposée vers les « *signes mathématiques et informatiques* » visés : la modélisation du fonctionnement du flexagone par un automate.

Artefact cognitif, l'automate permet de « *conserver, exposer et traiter l'information dans le but de satisfaire une fonction représentationnelle* » (Norman, 1993) et joue un rôle dans le développement cognitif de celui qui l'utilise. Il permet aux élèves de s'engager dans des cycles d'action/perception (Norman, 1993), et d'évaluer l'état de l'objet « flexagone » lorsqu'ils le manipulent. L'automate permet aux élèves de relier entre eux les états du flexagone par des transitions représentées par des symboles. Ainsi il permet d'ouvrir vers d'autres questions et méthodes en lien avec les activités de programmation.

Enfin, l'enseignant fait verbaliser par les élèves les différentes étapes qui ont permis l'élaboration d'un modèle, en dégagant ce qui resterait valable pour la modélisation d'un autre objet (par exemple, un livre dont vous êtes le héros, une règle de jeu, le flot de contrôle d'un programme...) :

- exploration libre de l'objet, observation de certaines caractéristiques (par exemple le fait qu'une couleur ne suffit pas à caractériser un état) ;
- identification de certaines régularités ou structures (ici, les cycles) ;
- recherche d'exhaustivité dans l'exploration ;
- synthèse des structures identifiées dans un formalisme unique (ici, un graphe étiqueté).

Si la plupart des modélisations utilisées en mathématiques au collège et au lycée reposent sur des modèles connus (fonctions, géométrie, probabilités...), dans l'activité « Flexagones », la tâche qui consiste à trouver un modèle approprié est beaucoup plus nettement dévolue aux élèves et c'est là tout l'intérêt et l'originalité de notre activité.

4. Analyse didactique *a priori*

L'enjeu de l'activité « Flexagones » est double : d'une part, l'acquisition de connaissances informatiques ; d'autre part, le développement de la compétence *modéliser* au fil des phases de l'activité.

Il n'y a pas vraiment de connaissances préalables mobilisées, mais le problème est complexe parce qu'il s'agit d'aborder les notions d'état et de transition et le fait que celles-ci sont indissociables. En effet, on ne peut définir la notion de transition sans faire référence à l'idée d'état. Réciproquement, pour énumérer les états exhaustivement, il faut pouvoir parcourir les transitions puisque c'est ce qui permet de passer d'un état à un autre, et même parfois utiliser les transitions sortant d'un état pour le distinguer d'un autre.

4.1. Savoirs et connaissances visés

Une première catégorie de savoirs visés concerne les systèmes discrets, tels qu'on pourra en rencontrer dans beaucoup d'activités informatiques, et dont le flexagone est un exemple.

- Une notion qu'on retrouve dans de multiples domaines des sciences, et qui est ici fondamentale pour analyser le flexagone, est la notion de **cycle**. Si elle est introduite pour modéliser l'enchaînement des faces du tri-hexa-flexagone, elle s'avère tout aussi pertinente lors de la modélisation du deuxième flexagone.
- Les notions d'**état** et de **transition** que nous avons définies dans la section sur les automates sont au centre de notre activité.

D'autre part, on vise une progression dans deux des six compétences décrites dans l'introduction au programme de mathématiques, pour le cycle 4 :

*Pour certains élèves, l'accès à l'abstraction ne peut se faire que s'il est précédé par deux phases intermédiaires : celle de la **manipulation**, puis celle de la **verbalisation** (mise en mots) ou de la **représentation** (mise en images). De nombreux objets réels (carreaux de mosaïque, morceaux de ficelle, balances et autres instruments de mesure, solides, etc.) permettent d'approcher certaines notions abstraites (numération, fractions, équations, aires et volumes, etc.) de manière tactile, sensorielle. Il ne faut pas se priver d'y recourir lorsque cela s'avère nécessaire, même au collège [Éduscol, 2020, p. 128].*

L'activité « Flexagones » s'inscrit pleinement dans cet esprit et permet de travailler particulièrement les compétences *modéliser* (traduire en langage mathématique une situation réelle, valider ou invalider un modèle) et *représenter* (utiliser, produire et mettre en relation des représentations). Le potentiel sémiotique (Mariotti & Maracci, 2010) du flexagone en tant qu'artefact offre notamment l'opportunité d'exposer les élèves à deux nouveaux modèles et permet de travailler ces compétences par des manipulations effectives mais aussi par l'évolution des *signes* dans les procédures observées chez les élèves.

4.2. Stratégies attendues

Dans la **première phase**, la manipulation du tri-hexa-flexagone, on attend peu de prise d'initiative : le flexagone fourni est déjà coloré, et la préoccupation première des élèves est de réussir à manipuler l'objet comme expliqué par l'enseignant. La consigne qui leur est donnée est de produire une représentation :

- Tous les élèves devraient parvenir à recenser, sous une forme ou une autre, les trois couleurs présentes sur leur flexagone.
- La représentation demandée devrait traduire l'évolution du flexagone au cours des manipulations, ce qui sera souvent exprimé sous forme de flèches entre les faces observées. D'autres élèves écriront des phrases pour relater la succession des faces, ou plus implicitement dessineront les couleurs dans l'ordre où elle apparaissent.
- Après trois manipulations du tri-hexa-flexagone, on revient à la face initiale. Certains élèves traceront alors un doublon de cette face initiale (*cf.* figure 9). Il convient de les questionner pour savoir s'ils la conçoivent réellement comme une nouvelle face, auquel cas ils doivent poursuivre leur exploration pour valider ou invalider cette hypothèse ; ou s'ils ont tracé deux représentations d'une même face, auquel cas leur représentation peut être améliorée.
- La plupart des élèves s'attachent à dessiner fidèlement l'aspect visuel du flexagone, ce qui est assez chronophage. C'est l'occasion d'initier une discussion sur le niveau d'abstraction pertinent pour obtenir un modèle : on pourra faire remarquer que la forme hexagonale ne nous apprend rien sur l'état de l'objet. À l'inverse, on verra plus tard que trop d'abstraction (uniquement la couleur) peut également entraver la modélisation.

Citons également un écueil que l'on peut rencontrer dans cette phase : certaines

productions consistent à expliquer graphiquement la manipulation du flexagone ; outre que c'est un exercice compliqué, un rappel à la consigne sera nécessaire pour préciser que l'objectif est de représenter le résultat de la manipulation plutôt que la manipulation elle-même.

Les **deuxième et troisième phases** de notre déroulement sont conçues pour permettre la mise en place de plusieurs stratégies :

- l'exploration aléatoire du flexagone et le coloriage des faces blanches rencontrées au fur et à mesure ;
- une prise de notes plus ou moins structurées à propos des faces déjà vues : simple énumération des couleurs déjà utilisées ; séquence des faces parcourues ; tentatives réussies pour passer d'une face à une autre ;
- une prédiction par le calcul du nombre d'états : certains élèves peuvent démontrer le flexagone fourni et observer qu'il est constitué d'une bande de 18 triangles (19 si on compte les triangles collés entre eux pour fermer la bande). Ils peuvent alors affirmer que 6 couleurs sont nécessaires pour colorier les 36 triangles constituant les faces du flexagone. Pour ceux qui ont compris que chacune des faces peut se retrouver dans 3 dispositions distinctes (*cf.* schéma en phase 3), ils peuvent également prévoir un total de $6 \times 3 = 18$ états. Cependant, ce calcul ne fait que donner un majorant, puisqu'il s'avérera que certaines combinaisons couleur-marquage ne sont pas atteignables. Par ailleurs, ce calcul repose sur deux hypothèses, qui ne sont fondées que par l'étude empirique des états observés : que plusieurs triangles de couleurs différentes ne seront jamais rassemblés dans une même face ; et que les orientations des triangles d'une même couleur seront toujours cohérentes (même symbole au centre).

La **quatrième phase** de l'activité est très dépendante du déroulement des phases précédentes. On peut signaler deux stratégies expertes possibles, mais qu'on ne s'attend pas à voir émerger spontanément chez la plupart des élèves :

- la construction complète d'un automate modélisant le flexagone (figure 3) ; comme on le verra sur les traces écrites des élèves, même si la plupart produisent des représentations parcellaires de cet automate, plusieurs obstacles existent à sa finalisation ;
- même sans une construction explicite de cet automate, il existe une méthode systématique pour parcourir l'intégralité du graphe des états, qui consiste à manipuler le flexagone sans jamais le tourner sur lui-même, sauf lorsque la manipulation devient impossible avec les arêtes choisies ; si cette méthode, appelée parcours de Tuckey, est simple à mettre en œuvre, elle n'est pas naturelle (la plupart des élèves ont tendance à effectuer une rotation du flexagone durant la manipulation), et surtout pour démontrer son exhaustivité il faut une connaissance fine des propriétés intrinsèques des flexagones.

On s'attend plutôt à obtenir des représentations partielles du fonctionnement du flexagone. L'absence de guidage et le choix des mots pour la consigne de la phase d'exploration du flexagone laissent la place à une représentation graphique comme textuelle. Si la forme textuelle devrait rapidement apparaître comme inefficace, une forme graphique satisfaisante a peu de chances d'émerger chez un élève qui n'utilise pas déjà régulièrement des graphes. Notre expérimentation auprès d'un public d'enseignants comportant des informaticiens et des mathématiciens a confirmé cette hypothèse, ces derniers ne recourant pas naturellement au tracé de cycles, mais plutôt à des représentations linéaires.

4.3. Précautions de mise en œuvre

Passer les consignes

Le mot « face » peut changer de signification au cours de l'activité. Pour faire passer la consigne aux élèves, on emploie ce mot car il est connu de tous et il peut être illustré en montrant un flexagone déjà préparé, avec les faces déjà colorées. Intuitivement, le mot « face », comme dans les polyèdres, désigne un élément plan de l'objet considéré. Il est rapidement associé à une marque particulière (couleur, symbole...) qui apparaît sur le flexagone (les triangles individuels qui composent les hexagones ne sont pas facilement dissociables et les élèves ne ressentent donc pas le besoin de les nommer). Après les premières manipulations, il apparaît que la disposition des marques posées sur les faces peut changer, ce qui révèle que cette disposition est une information supplémentaire dont il faut tenir compte. Le mot approprié pour désigner ces deux informations est « état » mais il n'est pas supposé connu par les élèves, il y a alors un choix à faire : (1) introduire le mot « état » à ce moment de l'activité, ou (2) garder le même mot « face » mais convenir ensemble qu'il désignera maintenant un marquage avec une disposition particulière.

La nature des mouvements autorisés doit être précisée. En effet, selon que le retournement du flexagone est permis ou pas, et considéré ou pas comme un changement d'état, le nombre d'états décrivant la situation n'est pas le même. Pour l'hexa-hexa-flexagone, il y a 9 états accessibles si on ne considère pas le retournement, mais 18 si on l'autorise et qu'on considère le résultat comme un nouvel état (et la notion de « disposition » à considérer n'est plus la même). Dans l'expérimentation, nous avons fait le choix de ne pas autoriser le retournement.

Fabriquer les flexagones

La fabrication du flexagone n'apportant pas une compréhension particulière des notions visées, on peut faire le choix de ne pas le faire fabriquer par les élèves, d'autant qu'ils peuvent rencontrer des difficultés liées à la motricité ou la perception de l'espace, sans lien avec le problème et les notions étudiées. Cependant, l'enseignant lui-même doit prendre en compte dans sa préparation le temps de construction d'un nombre suffisant de flexagones ! À titre indicatif, avec un peu de pratique, il faut compter une heure pour construire une dizaine d'exemplaires.

Manipuler les flexagones

La **manipulation des flexagones** peut poser des difficultés d'ordre technique : à partir d'une même face, il y a parfois plusieurs façons de plier, ce qui donne accès à de nouvelles faces, mais le fait qu'il y ait plusieurs mouvements élémentaires n'est pas forcément évident dès le début de l'activité. On peut faire le choix de le montrer dès le début, avec le flexagone utilisé en introduction, sans que cela ait un impact sur les apprentissages visés.

Illustrer / marquer les faces

Selon l'illustration du flexagone ou le choix de marquage fait par les élèves dans le cas d'un flexagone initialement vierge, il est possible que le changement de disposition des marques ne soit pas relevé, ou qu'il ne soit pas considéré comme signifiant. Cela peut être une phase dans l'exploration du problème qui nécessite une mise en commun pour s'assurer que tout le monde remarque ce phénomène et en comprenne l'importance.

Mener une recherche exhaustive des états

Une difficulté importante consiste à **énumérer les différents états**, et donc à **établir un code**

pour les désigner. Ce point est inhérent au problème et le faire prendre en charge par l'enseignant lors de la phase d'exploration serait contre-productif pour la compréhension de la notion d'état. Par contre, pour les phases suivantes, il est utile que tous les élèves aient compris l'intérêt d'avoir un codage systématique des états.

4.4. Variables didactiques

Nous avons identifié six variables didactiques susceptibles de modifier les stratégies des élèves et d'avoir un impact sur les apprentissages des élèves et l'acquisition des savoirs visés :

- **utilisation d'un tri-hexa-flexagone en phase 1**

Dans nos premières expérimentations, cette phase était absente. Nous l'avons introduite avec deux objectifs : permettre aux élèves de se familiariser avec la manipulation du flexagone sur un exemple simple ; et faire émerger la notion de cycle, afin de la rendre disponible dans les phases suivantes.

- **flexagone donné aux élèves préimprimé ou non**

Un marquage ou la coloration préalable du flexagone accélère l'activité et simplifie la communication entre les élèves, puisque ceux-ci disposent tous d'un objet rigoureusement identique. Il peut en revanche constituer un obstacle à l'appropriation de l'objet par les élèves.

- **marquage des faces libre ou non de l'hexa-hexa-flexagone**

L'enseignant peut faire le choix de donner une consigne stricte quant au marquage des faces du flexagone, ou au contraire laisser les élèves libres de choisir la forme de ce marquage.

- **nombre de faces du flexagone**

Il est possible de construire des hexa-flexagones pour un nombre quelconque de faces. Le plus simple est le tri-hexa-flexagone. Nous avons choisi de faire travailler les élèves avec un hexa-hexa-flexagone, qui nécessite 6 couleurs pour être colorié et présente 9 états distincts répartis sur 4 cycles. Un avantage non négligeable de ce flexagone pour l'enseignant est sa facilité de construction : son patron est en effet constitué d'une simple bande de papier rectiligne, repliée en forme de triangles équilatéraux en quinconce.

Un tétra-hexa-flexagone et un penta-hexa-flexagone existent, utilisant respectivement 4 ou 5 couleurs, et présentant 5 ou 7 états répartis sur 2 ou 3 cycles. S'ils permettent une version simplifiée de l'activité, leur patron plus complexe peut rendre leur construction gourmande en temps comme en papier. Notons qu'après l'hexa-hexa-flexagone, le prochain flexagone dont le patron est rectiligne est un dodéca-hexa-flexagone, qui utilise 12 couleurs !

Il existe également des flexagones avec d'autres formes, comme des tétra-flexagones dont les faces, carrées, sont constituées de 4 carrés plus petits, mais là encore leurs patrons ne sont pas linéaires, ou leur manipulation est plus complexe.

- **caractérisation d'un état**

Nous avons choisi d'utiliser la couleur de la face et la disposition de ses triangles pour définir un état du flexagone. Une autre caractérisation possible serait le couple de couleurs présent au recto et au verso du flexagone (ce qui permet notamment à certains élèves de percevoir la distinction entre face et état). Si ce choix évite de passer par une seconde étape de marquage, il présente un risque dans la manipulation : il est vite fait de retourner son flexagone par mégarde, ce qui change totalement l'ensemble des états possibles ou des transitions possibles (selon qu'on considère un couple de couleurs orienté ou non). L'élève se retrouve à devoir concilier les

modélisations de deux objets distincts (le flexagone observé depuis sa face « recto » ou depuis sa face « verso »), ce qui constitue une difficulté supplémentaire importante.

- **retournement du flexagone au cours de la manipulation**

En théorie, ce mouvement pourrait être considéré comme une transition de plus du système étudié, mais en pratique il rend la notion d'état plus difficile à percevoir. Par ailleurs il conduit à un graphe différent, et présente le risque de considérer toutes les transitions comme étant réversibles. La notion de transition orientée nous semble intéressante à aborder, nous avons donc fait le choix d'interdire aux élèves de retourner le flexagone en cours d'activité.

5. Expérimentations de l'activité

L'activité « Flexagones » a été expérimentée sur deux années scolaires avec cinq groupes distincts, de la 6^e à la 3^e ainsi qu'avec un groupe d'enseignants, comme indiqué dans le tableau 1.

		Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Groupe 5
Mise en œuvre et consignes	flexagone de démonstration	oui	oui	oui	oui	oui
	hexa-hexa-flexagone à construire	non considéré	non considéré	oui	oui	non
	tri-hexa-flexagone	non considéré	non considéré	non considéré	non considéré	oui
	matériel pour la prise de notes	le cahier de mathématiques	une feuille	pas prévu	le cahier de mathématiques	le cahier de mathématiques
	consigne pour amener à la modélisation du flexagone	savoir passer d'un état à l'autre	écrire une notice / un mode d'emploi du flexagone	écrire une notice / un mode d'emploi du flexagone	écrire une notice / un mode d'emploi du flexagone	rechercher les cycles et modéliser le fonctionnement du flexagone
Variables didactiques	nombre de faces du flexagone	6	6	6	6	3 puis 6
	hexa-hexa-flexagone pré-imprimé	non considéré	non considéré	oui	oui	non
	hexa-hexa-flexagone blanc	oui	oui	oui	oui	oui
	marquage des faces de l'hexa-hexa-flexagone	ne pas colorier toute la face	libre	libre	ne pas colorier toute la face	libre puis marquer le centre du flexagone
	non-retournement lors de la manipulation	non considéré	non considéré	non considéré	oui	oui
	caractérisation de l'état	orientation des marquages choisis	couple de couleurs recto-verso	orientation des symboles préimprimés	orientation des marquages choisis	couleur + marquage

Tableau 1 : Mise en œuvre, consignes et variables didactiques choisies pour chaque expérimentation.

Le contexte et la chronologie des expérimentations sont les suivants :

Groupe 1 : Une classe de 5^e de 28 élèves.

L'expérimentation a été menée par une des animatrices du groupe IREM auteur de l'activité dans une de ses classes et dans le cadre d'un cours de mathématiques. La séance a duré 1 h.

Groupe 2 : Un groupe mixte composé de 10 élèves de 3^e et de 5 étudiants de L3 Informatique, tous simples participants.

L'expérimentation a été menée par le groupe IREM auteur de l'activité avec un animateur et les autres en observation, auprès d'élèves de 3^e en stage d'observation en laboratoire⁵. L'atelier a duré 45 min.

Groupe 3 : Un groupe d'une vingtaine d'enseignants de mathématiques et d'informatique.

⁵ <https://persyval-lab.org/fr/content/accueil-de-coll%C3%A9giens-en-stage-d%C3%A9couverte>

L'expérimentation a été menée par le groupe IREM auteur de l'activité avec un animateur et les autres en observation dans le cadre d'un séminaire IREM. L'atelier a duré 1 h 30.

Groupe 4 : Une classe de 5^e de 28 élèves.

L'expérimentation a été menée par deux membres du groupe IREM auteur de l'activité, une animatrice et une observatrice, dans le cadre d'un cours de mathématiques. La séance a duré 2h.

Groupe 5 : Une classe de 6^{ème} de 28 élèves.

L'expérimentation a été menée par trois membres du groupe IREM auteur de l'activité, un animateur et deux observateurs, dans le cadre d'un cours de mathématiques. Deux étudiantes de M2 MEEF Mathématiques présentes ont aussi été observatrices. La séance a duré 2 h.

6. Analyse *a posteriori*

6.1. Mise en œuvre de l'activité

Le travail de recherche mené autour de cette activité et la diversité des publics qui l'ont expérimentée nous ont permis un ajustement très fin des conditions de mise en œuvre.

Organisation matérielle

Au cours d'une pré-expérimentation les élèves avaient utilisé des feutres ou surligneurs pour colorier les faces du flexagone. Cela a eu pour conséquences d'humidifier le papier, et de rendre le flexagone rapidement inutilisable. Par la suite nous avons imposé aux élèves l'utilisation de stylos ou de crayons de couleurs pour l'identification des faces.

Lors du séminaire IREM, les enseignants étaient installés sur des chaises munies de petites tablettes. Nous avons pu observer que l'aménagement de l'espace est un élément à ne pas négliger si l'on souhaite favoriser le passage à l'écrit. Il est donc nécessaire que les élèves disposent de papier, de crayons de couleur et d'un espace de travail suffisant pendant les recherches, sans quoi ils sont réticents à amorcer une prise de notes qui est fondamentale pour la construction d'un modèle.

Manipulation

La manipulation demande de la dextérité. Certains élèves effectuent d'autres pliages que la manipulation dite élémentaire, à la suite desquels le flexagone a bien la forme hexagonale usuelle mais des triangles de couleurs différentes se trouvent sur une même face⁶. Le flexagone devient alors inutilisable car il s'avère compliqué de le ramener dans un des états prévus initialement. Accorder un temps particulier à la présentation pas à pas de la manipulation élémentaire est donc essentiel.

L'utilisation d'un flexagone « grand format » de présentation est une constante dans la mise en œuvre de la l'activité et semble requis pour viser une communication efficace.

Avec le groupe 5, nous avons observé l'effet de la manipulation d'un tri-hexa-flexagone en première phase. Elle permet de limiter les erreurs de manipulation par la suite, et rend le geste de la manipulation élémentaire d'un flexagone automatique et satisfaisant.

La construction de l'hexa-hexa-flexagone est coûteuse en temps et source de frustration pour les

⁶ Voir quelques exemples de telles manipulations en vidéo sur <http://loki3.com/flex/hexa.html>

élèves qui n'y parviennent pas. De plus l'expérience des groupes 3 et 4 nous a montré que la manipulation d'un flexagone récemment collé n'était pas adaptée.

Engagement des élèves dans la recherche exhaustive

Après une période de manipulation, on peut observer un découragement chez certains élèves, qui stagnent dans leurs recherches. Afin de re-dynamiser la recherche et ré-engager les élèves dans la tâche, il est important de leur donner à voir les progrès des autres, de leur montrer qu'il est possible de trouver plus de faces.

Ainsi, faire monter progressivement les enchères à voix haute, et lancer un défi collectif au groupe, peuvent relancer les recherches et être source de motivation. On encourage également une communication intermédiaire entre les élèves, que ce soit à l'échelle de la classe ou de plus petits groupes, de façon à créer une émulation dans la recherche des faces, et à mettre en commun les observations clés comme la découverte de cycles ou de l'ambiguïté face/état.

Par exemple, il est possible de faire appel au collectif grâce au questionnement suivant : « Quel conseil donner à quelqu'un qui est bloqué avec trois couleurs ? »

Organisation du travail à plusieurs

Certains élèves ont tendance à travailler en binôme, l'un manipulant le flexagone pendant que l'autre se charge de la prise de notes ; cette organisation n'a pas lieu d'être imposée *a priori*, mais elle présente certains avantages. Elle facilite le respect des consignes, car un élève qui garde son flexagone en main a moins tendance à le retourner par mégarde ; elle oblige le scripteur à une prise de notes rigoureuse pour suivre ce qui se passe dans des manipulations qu'il ne contrôle pas directement ; enfin elle renforce l'idée d'une correspondance univoque entre l'objet concret et son modèle, les deux élèves du binôme devant accéder à un même niveau de connaissance sur leur flexagone. On recommandera néanmoins à de tels binômes d'alterner les rôles de manipulateur et de scripteur entre les différentes phases pour une meilleure compréhension du modèle par les deux élèves.

Évolution des consignes

Le dernier point d'ajustement porte sur la consigne pour amener à la modélisation du flexagone et l'émergence de l'automate. En effet, les expériences menées nous ont permis d'observer le rôle de celle-ci dans la démarche de modélisation des élèves.

Nous avons tout d'abord complété la première version « proposer une représentation qui permette de savoir comment passer d'un état à un autre » en passant par l'image de ce que pourrait être la représentation du fonctionnement : une notice, un mode d'emploi du flexagone.

Ce premier ajustement était pertinent puisqu'il a permis aux élèves de mieux comprendre les attendus, sans pour autant rendre la notion de modèle trop formelle.

L'introduction de la notion de cycle lors de la première phase avec le tri-hexa-flexagone a permis de proposer une consigne plus claire et aux objectifs explicites. C'est finalement grâce à ce dernier ajustement qu'il nous a été possible d'institutionnaliser la démarche de modélisation avec les élèves. Il nous semble donc déterminant.

6.2. Manifestation des savoirs visés dans les procédures observées

Chez la plupart des élèves, la prise de notes spontanée se fait sous une forme linéaire, voire purement textuelle, qui peut être un obstacle à la schématisation et à l'émergence du modèle.

Une consigne du type « réaliser un schéma » ne suffit pas à dépasser cet écueil, au contraire puisqu'elle semble encourager les élèves à représenter la manipulation élémentaire du flexagone, plutôt que son organisation globale. Ceci nous confirme dans notre choix d'institutionnaliser la notion de cycle dès le début de l'activité, et nous a conduits à proposer la modélisation préalable du tri-hexa-flexagone (dans notre dernière expérimentation) afin de découvrir une première représentation graphique élémentaire dès le début de l'activité et ainsi renforcer le cercle didactique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) qui met en œuvre l'instrumentation du flexagone.

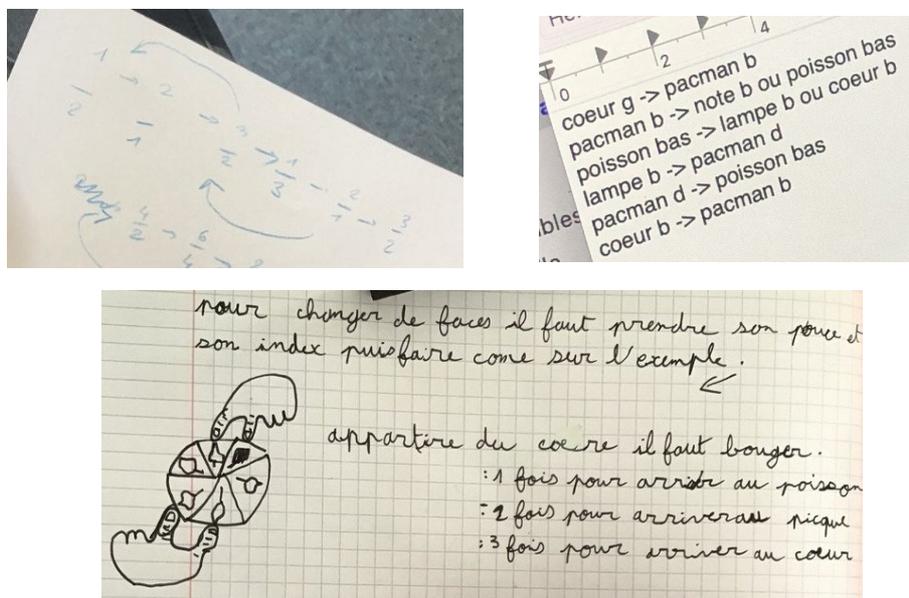


Figure 6 : Des représentations trop linéaires ou ne constituant pas un modèle.

La notion de cycle

Si le tri-hexa-flexagone semble *a priori* trop pauvre pour être intéressant à modéliser, son automate étant constitué d'un unique cycle de 3 états, il se révèle très utile à des fins de démonstration des manipulations élémentaires, ainsi que pour mettre en évidence la notion de cycle.

Dans le groupe 5, dans lequel nous avons commencé l'activité par cette étude, la notion de cycle est apparue assez spontanément chez la plupart des élèves.

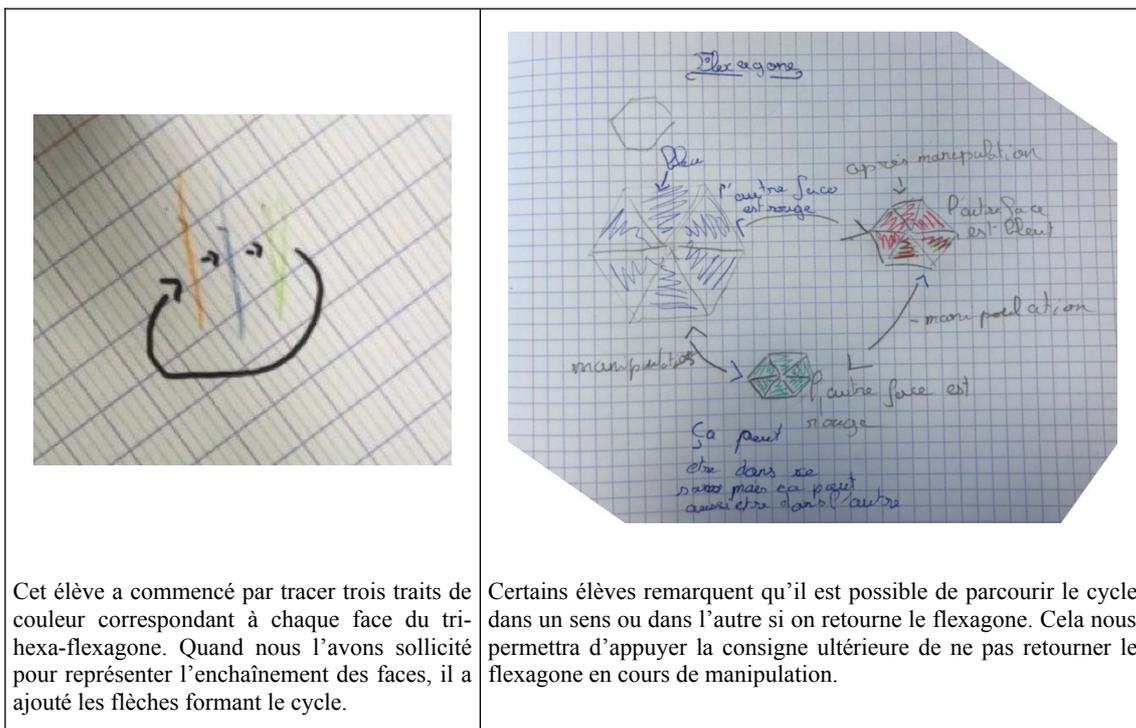


Figure 7 : Manifestations d'un cycle chez les élèves du groupe 5.

L'identification de la notion d'état

Il s'agit là d'une étape importante dans la mise en place du modèle. La notion de face n'est pas suffisante pour représenter toutes les informations nécessaires à la description du flexagone.

Dans le cas de l'hexa-hexa-flexagone, les groupes 3 et 4 ont montré qu'un marquage préalable des faces peut poser problème si les élèves ne se l'approprient pas suffisamment pour voir que la disposition des triangles dans les faces est importante. À l'inverse, un hexa-hexa-flexagone initialement blanc favorise un investissement de tous les élèves, chacun personnalisant son objet.

En effet, les cinq groupes ont eu l'opportunité d'explorer un flexagone blanc, et à chaque fois les élèves ont remarqué que certaines faces qui semblaient identiques au départ, ne l'étaient en fait pas : les coloriages ou les symboles notés ne sont pas dans le même sens ou le verso du flexagone est différent. En s'appuyant sur ces remarques, qui peuvent être complétées par la manipulation du flexagone de démonstration, l'enseignant demande aux autres élèves s'ils peuvent mettre le même phénomène en évidence sur leur propre flexagone. Une mise en commun est alors nécessaire pour statuer sur l'information qui définit une « face » et formaliser la notion d'état du flexagone.

La variété des marquages choisis au sein d'un même groupe constitue une bonne garantie que certains de ces marquages soient sensibles à la rotation des triangles qui constituent les faces, et donc que la disposition soit détectée comme un paramètre crucial dans la caractérisation des états.

Enfin, dans tous les cas, comme nous l'avons constaté avec le quatrième groupe expérimental, il faut éviter de proposer à la suite un flexagone blanc pour l'exploration libre puis un flexagone imprimé pour la modélisation, les élèves pouvant se sentir frustrés de n'avoir pas exploré leur objet personnel jusqu'au bout et se désinvestir de la seconde partie de l'activité.

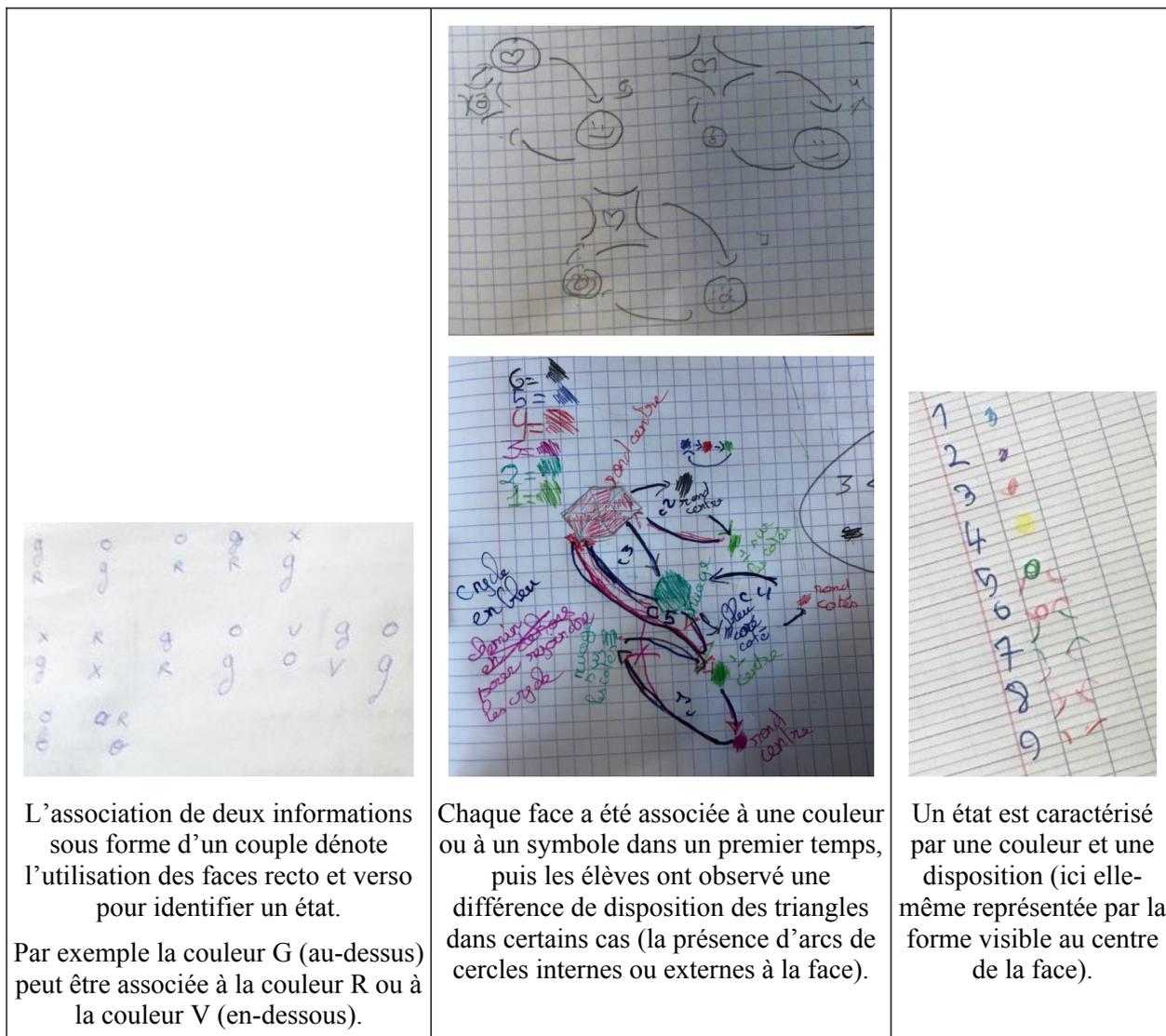


Figure 8 : Quelques codages des états observés chez les élèves.

La notion de transition et sa représentation

La notion de transition et sa représentation peuvent être observées lorsque les élèves commencent l'élaboration de leur mode d'emploi/notice du flexagone.

Plusieurs procédures ont alors été mises en œuvre :

Enchaînement linéaire des faces

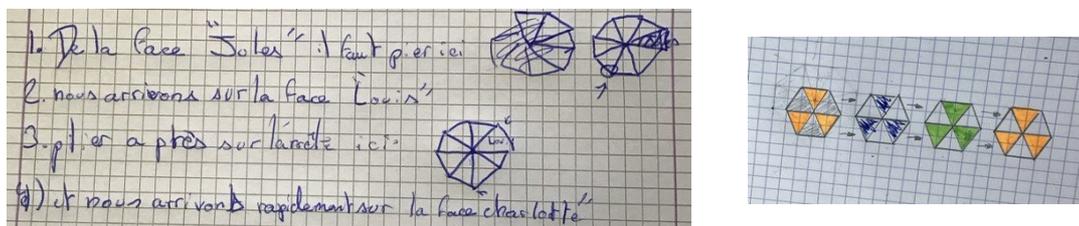
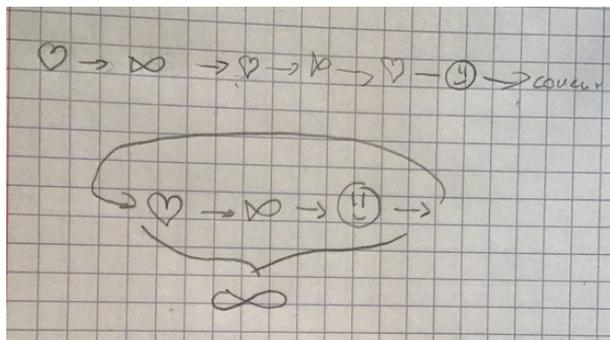
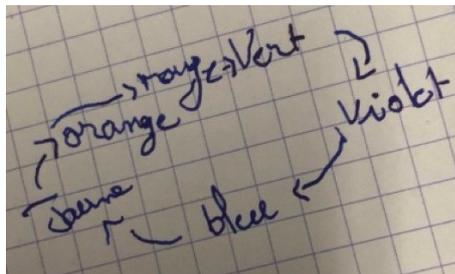


Figure 9 : Enchaînement linéaire des faces, sous forme de texte ou de schéma.

Présence de cycles dans l'hexa-hexa-flexagone

Sans avoir identifié la structure complète de l'automate sous-jacent, certains élèves identifient l'existence de cycles de 3 états.

Si l'on retourne 3 fois en partant par le marron, puis vert, ensuite Bleu, on retourne sur le marron.



Dans certains cas, un cycle est perçu mais qui n'a pas le caractère élémentaire des cycles de longueur 3. Il est très probable que la prise de notes soit ici lacunaire, puisque la manipulation correcte du flexagone ne permet pas de passer par les 6 couleurs en seulement 6 étapes.

Figure 10 : Détection de cycles sous forme de texte ou de schéma.

Recherche d'exhaustivité

En apparence, cette procédure semble plus adaptée pour répondre aux questions posées, puisqu'elle aborde directement les changements de couleur qu'on peut opérer sur le flexagone. En revanche, elle ne suffit pas à faire apparaître toute la structure de l'automate, et le nombre important de transitions (12 si on mène la recherche à son terme) conduit à une production difficilement exploitable.

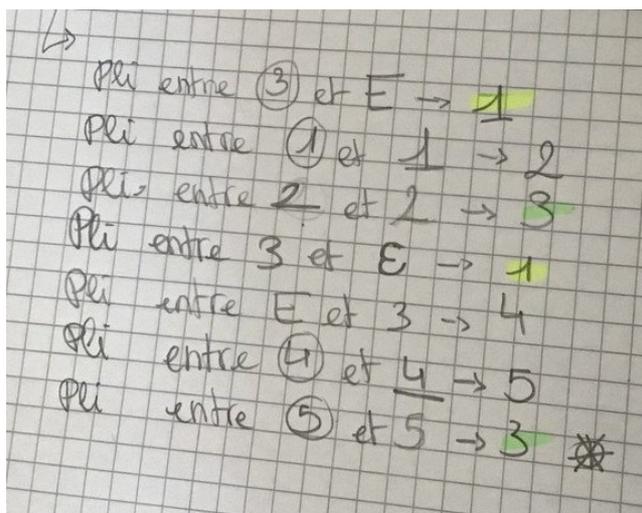


Figure 11 : Liste de transitions.

Cette procédure évite à la fois l'écueil du cycle unique et celui de la liste de transitions, mais elle ne fait toujours pas apparaître un modèle global. On peut également se demander si l'élève a correctement identifié les différents états qui connectent ces cycles entre eux. Sur cette photographie, on observe d'ailleurs une confusion entre les notions d'état et de transition : ce sont les flèches qui sont colorées.

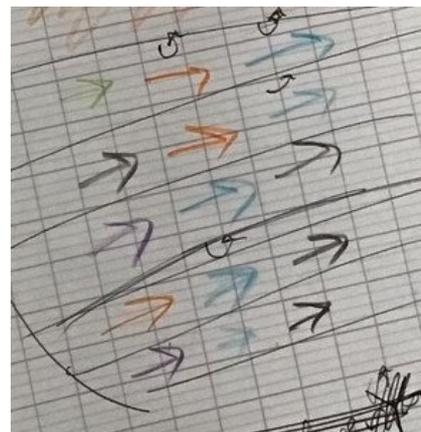


Figure 12 : Liste de cycles.

Cet élève est parvenu à trouver les 4 cycles qui constitueront à terme l'automate du flexagone.

Il lui reste à comprendre comment raccorder ces cycles entre eux.

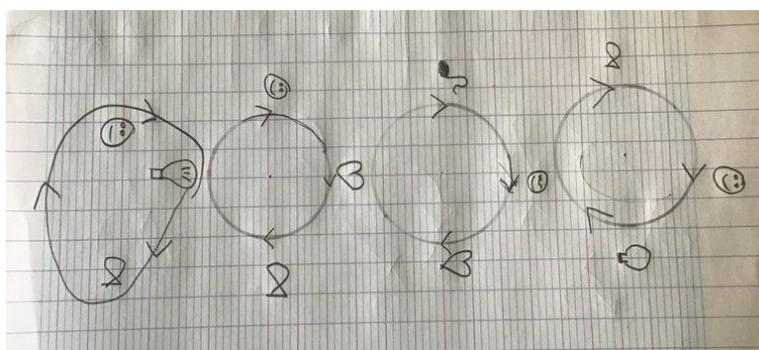


Figure 13 : Liste de cycles représentés graphiquement.

La notion de transition est souvent présente dans la production écrite des élèves, mais celle d'état n'est pas formalisée. Une mise en commun est nécessaire pour arriver à la modélisation du fonctionnement du flexagone par un automate.

Construction de l'automate

En raison notamment du temps accordé à l'expérimentation l'activité, la construction de l'automate n'a pu être observée que dans les groupes 2 et 5.

Ici, l'élève semble avoir listé exhaustivement les états possibles de son flexagone, pour ensuite répertorier les transitions menant de l'un à l'autre. Il apparaît rapidement que la disposition des états sur la feuille ne permettra pas d'obtenir une représentation pertinente de l'automate.

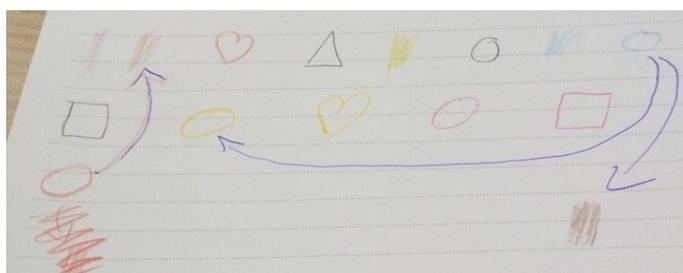


Figure 14 : À partir d'une « liste d'états ».

Cet élève a listé les faces atteignables à partir de chacune d'entre elles. Cependant, il n'a pas pris en compte la différence entre face et état qui était visée à l'étape précédente : par exemple, ce sont deux incarnations distinctes de la face noire qui permettraient d'atteindre les faces rouge, bleue, rose et jaune.

On soupçonne que l'élève a retourné son flexagone durant sa première phase de prise de notes. On retrouve cette confusion dans son prototype d'automate, dans lequel apparaissent des transitions non conformes aux consignes de manipulation : un flexagone manipulé correctement ne permet pas de faire l'aller-retour directement entre deux faces, comme c'est le cas ici entre la jaune et la rouge par exemple.

Ici, l'automate est élaboré progressivement au fur et à mesure de l'exploration des cycles. On note que l'élève a visiblement retourné son flexagone en cours de séance, ce qui se traduit par un cycle bleu/carré/triangle (à droite de la figure) et le cycle inverse (en haut).

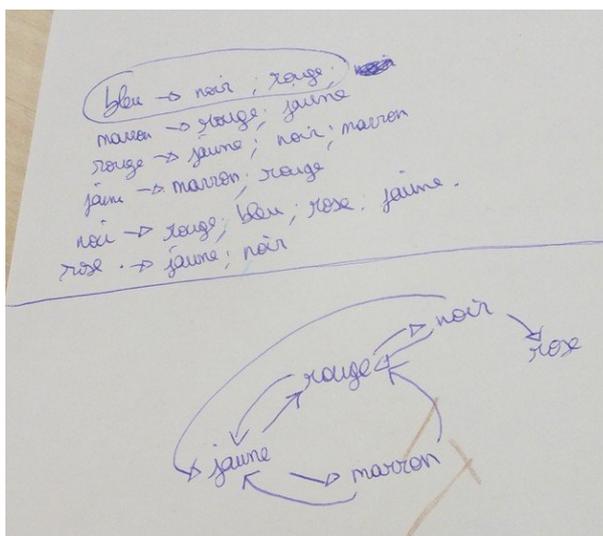


Figure 15 : À partir d'une liste de transitions.

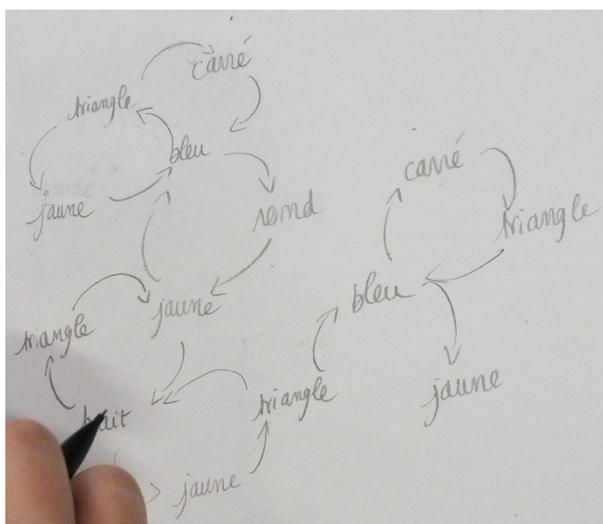


Figure 16 : Découverte progressive de l'automate.

Trois des quatre cycles de longueur 3 de l'hexa-hexa-flexagone sont correctement identifiés.

Un début d'articulation est proposé mais qui ne fait pas apparaître la distinction entre face (ici un symbole) et état. De plus, la superposition visuelle des cycles risque de pénaliser l'élève pour la suite de la construction de l'automate et/ou son exploitation.

Il est à noter que cette représentation très aboutie est la production d'un élève de 6ème, du groupe dans lequel nous avons mené la dernière expérimentation.

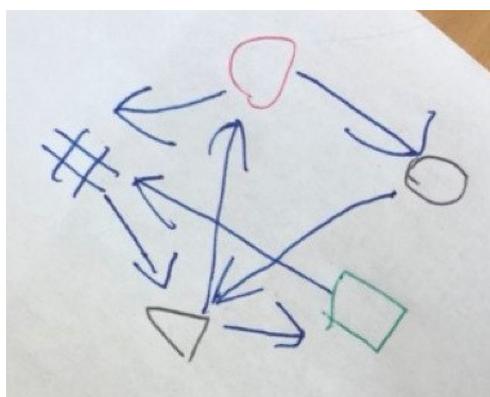


Figure 17 : Automate quasi-complet.

Conclusion

Autres ajustements envisagés

Les différentes expérimentations nous ont permis d'affiner nos choix de mise en œuvre, et de préciser les consignes données à l'enseignant dans la fiche d'activité « *Flexagone* ». Si la pertinence de certains choix a été confirmée lors de la dernière expérimentation, trois derniers ajustements méritent d'être proposés ici.

L'activité est prévue pour deux heures mais une organisation en deux temps est aussi possible pour éviter la lassitude observée chez certains élèves : un premier d'une demi-heure serait celui de la phase 1 et le deuxième d'une heure et demi pour les phases suivantes. Scinder l'activité entre les phases 2 et 3 est possible aussi mais demande de s'assurer que chaque élève retrouvera son flexagone personnalisé lors de la deuxième séance.

L'identification des faces de l'hexa-hexa-flexagone par un coloriage de la face (plutôt que la numérotation d'un triangle par exemple) est nécessaire au bon déroulement de la suite de l'activité pour faciliter la mise en commun, notamment au moment de la caractérisation de l'état. Il nous paraît donc important d'insister sur la précision de la consigne à ce moment. Lors de la dernière expérimentation (groupe 5), cette précision nous a fait défaut et cela a été un obstacle pour certains élèves : « Ah, mais toi tu mets des couleurs ? Mais c'est plus malin en fait ! ».

Enfin, la quatrième phase nécessite un guidage fin : lister les cycles ; les rassembler ; s'assurer qu'on a tout parcouru, sont les étapes à expliciter et à mener pas à pas avec les élèves afin de s'assurer qu'ils puissent tous arriver à l'élaboration de l'automate et à son institutionnalisation comme objet de savoir informatique.

Inscription dans un parcours d'activités

En amont de notre activité, il est pertinent de proposer une activité mettant en jeu une forme de cycle et sa représentation : restes de la division euclidienne, phénomènes périodiques, boucle dans un programme *Scratch*.

Pour réinvestir les connaissances acquises à propos des automates, on peut proposer ensuite de modéliser des règles de jeux simples (score d'un jeu au tennis, jeu de Nim), par exemple pour déterminer le gagnant à la fin d'une partie ou déterminer si toute partie se termine en temps fini. D'autres activités débranchées mobilisant des automates pourront également être abordées, comme *Le labyrinthe des automates* proposé par More dans (Collectif, 2017, pp. 40-45).

On peut également amener les élèves à se questionner sur les finalités de l'activité de modélisation : acquérir une compréhension fine de l'objet considéré, en proposer une représentation lisible et exploitable pour résoudre efficacement des problèmes à propos de cet objet. D'autres activités de modélisation ouvertes (hors automates) pourront être proposées pour entretenir cette démarche.

Apprentissages manipulatoires en informatique débranchée

Aborder l'informatique par des activités débranchées peut sembler un paradoxe, tant l'informatique est associée, dans nos représentations, aux ordinateurs. Tout enseignant qui a eu l'occasion d'en mettre en place leur reconnaîtra pourtant plusieurs avantages : conduire à une réflexion personnelle au lieu de se reposer sur un dialogue essais-erreurs avec la machine ; contourner des prérequis techniques ou matériels ; se focaliser sur les concepts généraux plus que sur un usage spécifique ; modéliser des objets pour un traitement numérique

indépendamment d'un langage machine. L'approche ludique et la manipulation d'objets concrets rendent ces activités attractives et permettent à tous les élèves d'entrer dans la tâche, même ceux qui sont moins à l'aise avec le numérique (Busuttil & Formosa, 2020).

Pour autant, si on s'intéresse plus en profondeur aux retours d'expériences disponibles, on constate qu'il est difficile de sortir du jeu pour aller plus loin. Les activités débranchées ne débouchent pas toujours sur une institutionnalisation très solide, et les savoirs et compétences acquis par les élèves ne semblent pas évidents à transférer dans d'autres contextes.

Nos expérimentations multiples et les différents écueils rencontrés confirment qu'une idée centrale forte n'est pas suffisante pour constituer une activité exploitable en classe, et qu'il est nécessaire de penser en détails les conditions préalables à sa mise en place, les guides et les étayages dont auront besoin les élèves. Par exemple, le passage par la modélisation préalable du tri-hexa-flexagone, possibilité que nous avons écarté *a priori*, n'est devenue que tardivement une variable didactique dans nos expérimentations et nous a permis de lever un écueil important à l'entrée dans la modélisation.

Références bibliographiques

- Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Dans L. English (éds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (second edition)*. New York et Londres : Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9780203930236.ch28>
- Bell, T. & Lodi, M. (2019). Constructing computational thinking without using computers. *Constructivist Foundations*, 14(3), 342-351.
<https://constructivist.info/14/3/342>
- Busuttil, L. & Formosa, M. (2020). Teaching Computing without Computers: Unplugged Computing as a Pedagogical Strategy. *Informatics in Education*, 19(4), 569-587.
<https://doi.org/10.15388/infedu.2020.25>
- Collectif (2017). Enseigner l'informatique sans ordinateur. *Tangente Éducation*, 42-43. Éditions POLE.
- Gardner, M. (1956). Flexagons. *Scientific American*, 195(6), 162-168.
- Mariotti, M. A. & Maracci, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique : une ressource pour le professeur. *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, 91-107.
- Norman, D. A. (1993). Les artefacts cognitifs. *Raisons Pratiques*, 4, 15-34. Traduction française partielle par F Cara de Cognitive artifacts. Dans J.M. Carroll (éds.), 1991. *Designing Interaction* (pp. 17-38). Cambridge: Cambridge University Press.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : A. Colin.
- Sackur, C. (2003). Allers-retours entre la pratique de classe et la recherche sur l'enseignement

des mathématiques. *Bulletin de l'APMEP n° 447* (pp. 430-442).
<https://publimath.univ-irem.fr/biblio/AAA03050.htm>

Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. *Communication of the ACM*, 49, 33-35.

The Flexagon Zoo (2007). <https://www.flexagon.net>

Launay, M. (2014). Les hexaflexagones. <https://www.youtube.com/watch?v=aQo8tYQuWQw>

Sherman, S. (2007). Flexagons. <http://loki3.com/flex/>

Éduscol (2020). BOEN n° 31 du 30 juillet 2020.

<https://eduscol.education.fr/document/621/download>