ANALYSE DE LA PRATIQUE D'UN ENSEIGNANT EN CONTEXTE D'UTILISATION D'UN OUTIL INFORMATIQUE POUR LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Sonia BEN NEJMA[1]
Université de Carthage- LaRINA- Tunisie

Lamjed BRINSI[2]
Université Virtuelle de Tunis- Tunisie

Résumé. L'étude présentée s'intéresse à l'intégration des outils informatiques dans les pratiques des enseignants de mathématiques dans le contexte de travaux pratiques de mathématiques dispensés dans des institutions universitaires à vocation technologique. Nous mettons en avant des enjeux didactiques de l'utilisation des technologies au service de la résolution numérique des équations différentielles. Nous étudions la pratique d'un enseignant lors de l'introduction de la méthode d'Euler explicite en première année d'université. La recherche s'inscrit au carrefour de deux approches théoriques, la théorie anthropologique du didactique nourrie par la théorie des registres sémiotiques et le modèle de la double transposition didactique et informatique. Nous analysons les praxéologies mixtes développées par l'enseignant et les difficultés rencontrées pour gérer l'articulation entre les cadres mathématique et informatique.

Mots-clés. Pratiques, enseignement, informatique, équations différentielles, praxéologies mixtes.

Abstract. This study focuses on the integration of computer tools in the practices of mathematics teachers in the context of practical work of mathematics carried out in technology-oriented university institutions. We highlight the didactic issues involved in the use of technologies for the numerical solution of differential equations. We study the the practice of a teacher during the introduction of the explicit Euler method in the first year of university. The research is situated at the crossroads of two theoretical approaches, the anthropological theory of didactics fed by the theory of semiotic registers and the model of the double didactic and computer science transposition. We analyze the mixed praxeologies developed by the teacher and the difficulties encountered in managing the articulation between the mathematical and computer science frameworks.

Keywords. Practices, teaching, computing, differential equations, mixed praxeologies.

Introduction et problématique

L'intégration des outils informatiques dans la pratique est un processus complexe pour les enseignants (Béguin & Rabardel, 2001 ; Hoyles & Lagrange, 2005 ; Clark-Wilson, Robutti & Sinclair, 2014). Plusieurs chercheurs se sont penchés sur cette thématique en tentant d'analyser la nature de cette complexité à l'aide de différentes approches théoriques et méthodologiques (Ball, Thames & Phelps, 2008 ; Geiger, 2009 ; Aslan & Zhu, 2016 ; Abboud-Blanchard, 2013 ; Abboud -Blancar *et al.* ; 2018 ; Vandebrouck & Abboud-Blanchard, 2012 ; Wilson, 2010 ; Wilson & Noss, 2015). En Tunisie, comme dans d'autres pays, l'accent est mis, depuis plusieurs années, sur la nécessité de promouvoir l'intégration du numérique dans l'enseignement des mathématiques : *« La promotion de l'utilisation des nouvelles technologies dans l'enseignement universitaire n'est plus un choix puisqu'il s'agit d'un impératif pour préparer les étudiants de la nouvelle génération au numérique »* (MES, 2014), tel est l'objectif du Ministère de

[1] sonianejma@yahoo.com

[2] lamjedbrinsi72@gmail.com

l'Enseignement supérieur tunisien et de la Recherche scientifique pour développer la stratégie de transformation numérique du secteur de l'éducation. Dans cette étude, nous nous intéressons à certaines institutions supérieures des études technologiques (ISET) dont les missions principales sont de fournir au marché de l'emploi des cadres moyens qualifiés aussi bien dans les secteurs secondaires que tertiaires, de promouvoir le recyclage et la formation continue au profit des cadres exerçant dans les entreprises (formation spécifique ponctuelle en cours de soir, formation certifiée), et de réaliser conjointement des programmes de recherches appliquées et de transfert de technologies. Ces institutions dispensent plusieurs licences appliquées en génie mécanique (GM), Génie électrique (GE), Génie informatique (GI), Science économique et Science de gestion qui débouchent sur plusieurs parcours permettant la formation de licenciés polyvalents prêts à s'adapter au marché de l'emploi. L'enseignement des mathématiques dans ces institutions est intégré au contexte général d'un enseignement technique à vocation professionnelle et a conçu, pour la plupart des licences appliquées, un élément constitutif des unités d'enseignements consacré à des notions de l'analyse et de l'algèbre intitulé : *« Ateliers de mathématiques appliquées »*. Dans la fiche matière (2019) se rapportant au rapport de la commission d'évaluation de la licence appliquée en GE, nous distinguons

> *l'utilisation de logiciels de calcul symbolique (Maple) et de calcul numérique (Matlab) pour la mise en œuvre pratique du contenu théorique du programme des unités d'enseignement mathématique 1 et 2, étude des fonctions, Intégrales, résolution d'équations différentielles, opérations sur les vecteurs et les matrices* (fiche matière, ISET Jendouba - Tunisie, 2019, p. 3).

Ce module apparaît comme un moyen de renforcer l'enseignement de certaines notions mathématiques rencontrées par les étudiants au cours des séances de cours intégrés par le biais de logiciels de calculs symbolique et numérique. Dans ce contexte, l'informatique apparaît au service des mathématiques et de la modélisation de problèmes comme il est évoqué dans le programme officiel de ces institutions (2019):

> *Cet atelier vise à développer chez l'apprenant l'aptitude à résoudre des problèmes concrets, c'est-à-dire, s'attarder à lire un énoncé, à l'analyser, à le comprendre, à le transcrire mathématiquement, à trouver la solution et à l'interpréter en utilisant Maple ou Matlab* (fiche matière, ISET Jendouba - Tunisie, 2019, p. 3).

Cette innovation engage l'ensemble du système institutionnel dans des transformations pédagogiques et didactiques profondes. Les enseignants sont ainsi invités à adapter leurs pratiques professionnelles à ces injonctions institutionnelles. Cette spécificité hybride (papier crayon et informatique) de l'environnement de travail a suscité notre intérêt pour analyser les pratiques des enseignants de mathématiques qui se sont auto-formés à l'usage des logiciels prescrits pour assurer une articulation entre les cadres mathématique et informatique. Dans cette articulation, la dimension algorithmique est souvent « distante » des mathématiques dans les pratiques des enseignants de mathématiques pour diverses raisons dont l'absence de formation spécifique dans ce domaine, le manque de ressources documentaires et une illusion de transparence des enjeux conceptuels qui en découlent. La notion de distance instrumentale a d'ailleurs été mise en avant par (Artigue, 2002 ; Haspekian 2005) pour expliquer les difficultés d'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques, et l'impact d'une utilisation non réfléchie de ces outils informatiques sur la conceptualisation par les apprenants des objets de savoir à enseigner (techniques, objets et symbolisations modifiées, apparition de nouveaux objets et symboles, de nouvelles techniques…). Comme il est souligné par Lemoyne (2004),

> *Si faire des mathématiques, comme le soulignent Descaves (2001) et Duval (1995), suppose la mise en correspondance de différents registres, on peut dire que ces étudiants effectuent des*

> *correspondances instrumentales peu productrices de sens. Cette étude montre aussi de quelle manière le recours à des outils technologiques producteurs de représentations graphiques de fonctions n'est pas, pour plusieurs étudiants, porteur de sens* (Lemoyne, 2004, p. 231).

Dans le contexte de cette recherche, nous nous intéressons à l'usage par les enseignants des outils technologiques (ici *Maple*) pour l'enseignement des équations différentielles (ED) du premier ordre à l'université, en particulier, la résolution numérique par la méthode d'Euler suggérée par les programmes officiels de ces institutions. En effet, ces méthodes numériques offrent des solutions alternatives pour les ED qui ne peuvent être résolues à l'aide de méthodes analytiques (Rasmussen, 1998) et donnent accès à des solutions approximatives. Plusieurs chercheurs ont étudié la manière dont les méthodes numériques sont utilisées pour résoudre les équations différentielles (Rowland & Jovanoski, 2004 ; Kwon, Rasmussen & Allen Keene, 2005 ; Arslan, 2010 ; Funes & Valero, 2018 ; Kwon, 2020 ; Latifi *et al.*, 2022 ; Ben Nejma & Brinsi, 2021, 2022). Les résultats montrent que les difficultés rencontrées par les étudiants sont souvent en lien avec l'interprétation des concepts mathématiques en jeu (variable, fonction, primitive) ou l'interprétation du graphique. L'utilisation des outils informatiques pour l'apprentissage des équations différentielles et le calcul différentiel en général est un moyen d'améliorer l'apprentissage des équations différentielles en combinant des représentations algébriques, numériques et graphiques (Aslan, 2016 ; Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013 ; Kown, 2020). C'est dans cette perspective que le rôle du professeur de mathématiques dans cet environnement numérique nous paraît être une composante importante à explorer. Cette recherche propose donc d'étudier la manière dont un professeur de mathématiques utilise un outil informatique pour l'enseignement des ED du premier ordre en première année universitaire dans un contexte de travaux pratiques de mathématiques appliquées. Comment articule-il les cadres mathématique et informatique dans sa pratique autour de l'enseignement des ED et compte tenu des enjeux didactiques et des exigences cognitives de chaque environnement de travail ? Quelle posture est donnée à voir de l'utilisation d'un logiciel informatique pour résoudre un problème mathématique ? Quelle est le poids de l'algorithmique dans sa pratique ?

Ce travail se situe au carrefour de deux approches théoriques la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) nourrie par la théorie des registres sémiotiques de Duval (1995), et le modèle de la double transposition didactique et informatique (Briant & Broner, 2015). Dans la première partie de cet article, nous explicitons les éléments théoriques qui ont outillé cette étude. Dans une seconde partie, nous présentons notre analyse didactique des enjeux relatifs au travail mathématique dans un environnement numérique (la résolution des ED du premier ordre par la méthode d'Euler via *Maple*). Dans la troisième partie, nous mettons en lumière la méthodologie d'analyse choisie pour étudier la pratique d'un professeur de mathématique dans ce contexte en illustrant ces analyses par des extraits de transcription. Nous livrons, finalement, les principaux résultats issus de ces analyses avant de conclure.

1. Cadrage théorique

Comme évoqué précédemment dans l'introduction, ce travail de recherche prend appui sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), nourrie par une approche sémiotique et la modélisation théorique de la double transposition didactique et informatique (Briant 2013 ; Briant & Broner, 2015) qui permet de modéliser toute activité humaine ou sociale en termes de praxéologies mathématiques et didactiques. Nous analysons ces praxéologies mixtes en tenant compte des enjeux didactiques liés aux opérations cognitives requises pour passer d'un environnement de travail à un autre. D'où le choix d'enrichir cette analyse praxéologique par la dimension sémiotique en termes de registres (Duval, 1995) reprise dans les travaux de Briant (2013) via la notion de congruence entre les deux cadres algébrique et algorithmique.

1.1. La notion de praxéologie

Du point de vue de la théorie anthropologique du didactique (TAD), l'activité mathématique d'un professionnel dans une institution (ici, universitaire) peut être décrite à travers la notion de praxéologie. Ce modèle théorique conçoit une pratique comme un savoir-faire (la *praxis*) et un discours (le *logos*) qui légitime, explique et produit la *praxis*. Celle-ci se divise en deux composantes : les tâches (les choses à accomplir) et les techniques (les méthodes employées pour accomplir les tâches). Par exemple, si la tâche est de résoudre l'équation $y'(x)+2y(x)=1+x^2$, cette tâche relève du type de tâches : résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. On pourrait mobiliser une résolution algébrique dans l'environnement de travail papier-crayon en cherchant la solution homogène puis une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. On pourrait aussi recourir à l'environnement numérique en faisant appel à l'outil informatique (ici *Maple*) pour entrer l'équation et utiliser la fonction programmée de résolution. Ce sont deux techniques permettant d'accomplir ce type de tâches dans les deux environnements de travail. Par ailleurs, le *logos* peut se situer à différents niveaux. Chevallard (1999) considère comme niveaux distincts du discours les technologies (les justifications pour les méthodes choisies) et les théories (les fondements de la technologie). Le recours à la technique de résolution algébrique d'une ED, dans l'environnement informatique, peut se justifier par la rapidité de la réponse, ou la précision de la solution par rapport à une technique à la main dans l'environnement classique. Par ailleurs, le choix d'une technique plutôt qu'une autre dépend aussi des caractéristiques de l'équation à résoudre et des connaissances mathématiques et informatiques dont disposent les étudiants. Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants, la fonction programmée « dsolve » permet de donner immédiatement la solution, alors que pour une équation différentielle non linéaire, une résolution numérique devient nécessaire via la fonction « dsolve({équation,CI},y(x),numeric); » ou un programme de calcul adapté. Une praxéologie mathématique est ainsi analysée selon le quadruplet [$T/\tau/\theta/\Theta$], où T désigne un type de tache, τ une technique permettant d'accomplir les taches t du type T. Le couple [T/τ] constitue le bloc pratico-technique ou *praxis*, elle-même justifiée par une technologie θ qui s'inscrit dans un cadre théorique Θ. Le couple [θ/Θ] constitue le bloc technologico-théorique ou *logos*. La technologie θ renvoie au discours rationnel — le *logos* — sur la technique (la *tekhnê*), discours ayant pour objet de justifier « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est attendu. Pour sa part, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, qui soutiennent ces techniques. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la théorie, Θ, laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique. Ce bloc technologico-théorique dépend de l'environnement de travail et donc de la nature même des praxéologies développées selon qu'elles soient de nature mathématique, informatique ou didactique. Par ailleurs, l'analyse des praxéologies didactiques qui peuvent s'analyser selon les moments de l'étude mis en avant par Chevallard (2002) permettent de rendre compte de certains choix dans les pratiques du professeur. L'action de l'enseignant actualise ces praxéologies et permet au chercheur de les identifier selon l'environnement de travail privilégié par l'enseignant. Il s'agit, selon nous, d'un indicateur du choix d'apprêtage didactique par l'enseignant du savoir à enseigner (Chevallard, 1999). Dans ce travail, nous faisons référence à la notion de praxéologies mixtes pour décrire la pratique de l'enseignant selon trois types d'activités : l'activité mathématique, l'activité algorithmique et l'activité didactique.

1.2. La notion de praxéologie mixte

Nous utilisons la notion de praxéologie pour caractériser celles de nature disciplinaire qui désignent la réalité (mathématique ou informatique) construite dans une classe et celles de nature didactique, renvoyant à la manière dont cette praxéologie disciplinaire (Chevallard, 1999) peut être installée en classe. Ces praxéologies s'actualisent, notamment, à travers les gestes du professeur définis comme l'ensemble des moyens que propose l'enseignant pour mener l'étude de sujets placés en position d'élèves, et s'exprimant à travers des tâches *« de conception et d'organisation de dispositifs d'étude »* et *« d'aide à l'étude »* (Chevallard, 1997). Ces gestes professionnels permettent dans notre cas de décrire les pratiques d'enseignement selon qu'elle soit mathématique, informatique ou didactique. Nous faisons ainsi référence à la notion de praxéologie mathématique mixte (PMM) (Chevallard, 2002) pour caractériser un ensemble de praxéologies qui mêlent les mathématiques à d'autres disciplines. Les *curricula* actuels de mathématiques suggèrent, en effet, la mise en évidence du caractère fondamental des mathématiques pour d'autres disciplines, ce qui nécessite que vivent dans le système didactique des praxéologies mathématiques mixtes (Artaud, 2003). La notion de système didactique est proposée par Chevallard (1999) et fondée sur l'idée qu'il faut, en toute question relative à une classe, considérer solidairement professeur et étudiant avec le savoir qui est l'objet principal de leur relation. Dans ses travaux, Artigue (2020) souligne l'importance cruciale pour la communauté mathématique de prendre en charge le caractère fondamental de cette discipline pour d'autres savoirs. Elle met en évidence le poids des praxéologies mixtes dans l'enseignement supérieur et le manque de visibilité pour les enseignants et formateurs des différents enjeux. Dans le cadre de notre recherche, il est intéressant d'explorer, au sein de ce système didactique, les pratiques de l'enseignant relatives à ce phénomène d'hybridation des deux disciplines mathématique et informatique dans le contexte de l'utilisation de la méthode d'Euler pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. En quoi les praxéologies mathématiques sont-elles fondamentales dans le développement de telles praxéologies ?

1.3. La double transposition didactique et informatique

Selon Duval (1993), *« les représentations sémiotiques sont des productions constituées de signes appartenant à un système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement »* (Duval, 1993, p. 39). Un registre est un système sémiotique qui doit permettre trois activités cognitives fondamentales de la pensée : la formation, le traitement et la conversion d'une représentation. Selon Duval (1995), *« la formation d'une représentation sémiotique est le recours à un (ou plusieurs) signe(s) pour actualiser la visée d'un objet ou pour se substituer à la visée de cet objet »* (Duval, 1995, p. 37). L'activité de formation doit respecter des règles de conformité, propres au système employé, non seulement pour des raisons de communicabilité, mais pour rendre possible l'utilisation des moyens de traitement qu'offre ce système. Un traitement dans un registre sémiotique s'appuie sur une ou plusieurs transformations de représentations par *« les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales »* (Duval, 1995, p. 21). La conversion entre registres est une transformation d'une ou plusieurs représentations d'un registre à une ou d'autres représentations dans un autre registre, de telle sorte que ces dernières permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté. L'activité de conversion d'une expression algébrique d'une ED par exemple, du registre symbolique vers sa courbe solution dans le registre graphique, peut être laissée entièrement à la charge du logiciel ou de la calculatrice graphique. Briant et Bronner (2015), en s'inspirant de l'approche de Duval, étudient la notion de congruence de deux environnements : l'environnement algébrique et celui algorithmique. Parmi les programmes informatiques, ils distinguent ceux de type congruent, s'ils conservent des traces des étapes de la résolution algébrique effectuée en environnement papier-crayon, et ceux de type non congruent où la démarche algébrique ne se retrouve pas ou très peu. Les auteurs s'interrogent sur la place de la pensée algorithmique relativement à la pensée mathématique et développent la double transposition didactique et informatique relative à la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation illustrée par la figure 1.

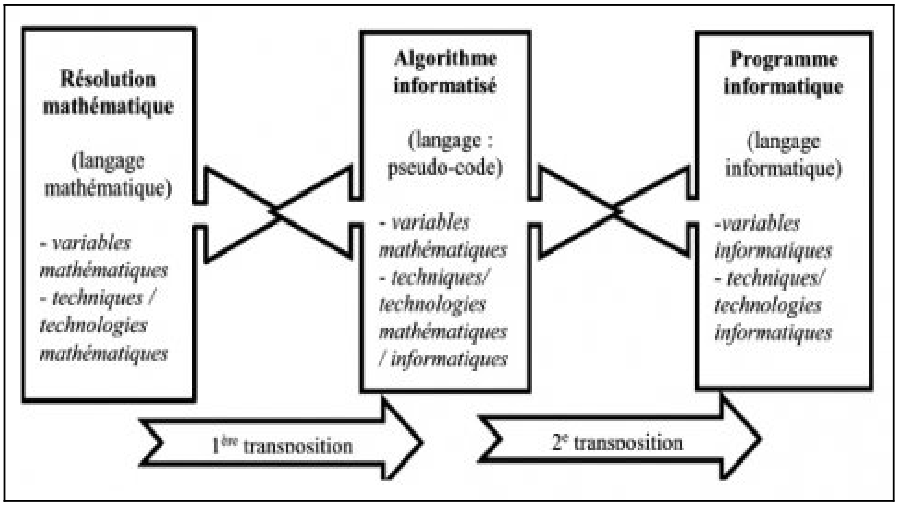


Figure 1 *: Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation (Briant & Bonner, 2015).*

La résolution mathématique consiste en la résolution du problème dans le cadre mathématique « habituel », c'est-à-dire dans l'environnement classique papier-crayon. Cette résolution peut donner lieu à un premier algorithme : « algorithme mathématique ». La résolution algorithmique a lieu une fois que la résolution mathématique est achevée, une première transposition aura lieu pour déterminer un algorithme informatisé, écrit en pseudo-code. Dans certains cas l'algorithme mathématique, utilisé habituellement dans l'environnement papier-crayon, nécessite des connaissances relatives à l'objet mathématiques en question, qui ne sont pas généralement implantés de base dans un logiciel quelconque de programmation. Si le cas se présente il est exigé d'en chercher d'autres qui tiennent compte des actions élémentaires réalisables par la machine ou le logiciel de programmation intégrée. La résolution informatique renvoie à l'opération qui aboutit à l'écriture du programme avec un langage informatique adéquat au logiciel en jeu, à la suite de la première transposition. Celle-ci se réalise au niveau du langage, il s'agit de passer d'un langage mathématique, c'est-à-dire *« le langage utilisé usuellement par les écrits mathématiques »* (Modeste, 2012, p. 62) à un langage en *pseudo-code* ressemblant semblable au langage de programmation, débarrassé de ses problèmes de syntaxe. (Modeste, 2012, p. 24) et au niveau des techniques qui diffèrent d'un algorithme à un autre, de même les technologies-théories sous-jacentes s'en trouvent alors modifiées. La seconde transposition : *transposition informatique* se fait à son tour à différents niveaux. D'abord, au niveau du langage : il s'agit de passer du langage en pseudo-code de l'algorithme à un langage informatique, c'est-à-dire un langage de programmation, ce qui nécessite une reformulation pour donner un équivalent qui soit compréhensible par la machine, selon sa structure interne et dans son langage. Ensuite, au niveau des variables, les variables mathématiques utilisées dans les algorithmes vont céder la place aux variables informatiques dans le programme informatique. Ces variables font partie de la technologie des praxéologies informatiques.

> *Lorsqu'une tâche de type « concevoir un programme pour résoudre un problème » est donnée, nous voyons émerger une double transposition didactique et informatique associée à des techniques différentes, justifiées par des technologies relevant du domaine mathématique, du domaine informatique, ou des deux conjointement* (Briant & Broner, 2015, p. 236).

Ce choix théorique révèle les exigences cognitives relatives à l'articulation de la pensée mathématique, particulièrement, algébrique qui s'opérationnalise à travers le langage et les représentations symboliques et de la pensée informatique dans le déploiement de l'activité mathématique dans un environnement numérique.

L'appareillage théorique présenté dans cette section nous permet de préciser notre problématique de recherche autour de l'étude du rôle des logiciels informatiques dans la progression des apprentissages des équations différentielles dans les pratiques des enseignants de mathématiques, à partir des questions suivantes : Au-delà des aspects algorithmiques et de visualisation, comment le recours aux logiciels permet-il d'accompagner la construction de connaissances sur les équations différentielles chez les étudiants ? En quoi le rôle du professeur de mathématiques est-il crucial ? Comment fera-t-il émerger les savoirs ou les savoir-faire mathématiques visés en utilisant un logiciel informatique ? Dans quelles mesures les exigences cognitives évoquées ci-dessus conditionnent-elles ses pratiques mathématiques dans un environnement numérique ?

En vue de mieux appréhender les enjeux relatifs aux résolutions mathématique et algorithmique des équations différentielles du premier ordre par la méthode d'Euler selon les environnement de travail classique (papier crayon) et numérique (*Maple*), nous proposons une analyse didactique qui fait l'objet de la section suivante.

2. Analyse didactique et contexte d'étude

Dans la mise en œuvre de la méthode d'Euler qui est au programme officiel des ateliers de mathématiques appliquées pour les sections GE et GM de l'ISET de Jendouba (Tunisie), trois étapes sont requises, la première consiste en la construction d'une suite de points à partir de l'équation différentielle, il s'agit du passage du continu au discret, la deuxième consiste en la détermination d'une liste ou d'une table de valeurs numériques et la dernière renvoie au passage du discret au continu en vue d'obtenir une construction graphique de solution. Chaque étape requiert un changement de registre de représentation sémiotique. Le passage de l'équation différentielle à la suite numérique est réalisé dans l'environnement papier/crayon en appliquant la suite des termes d'Euler. Pour déterminer la liste ou (le tableau) des valeurs (obtenues à l'aide de la suite numériques), il est plus efficace de recourir à un logiciel informatique. Dans ce contexte d'étude, il s'agit de *Maple*, recommandé par les programmes de cette institution. Ce logiciel est souvent utilisé pour visualiser les graphiques et pour comprendre le lien entre le graphique et les équations (Azman & Ismail, 2013). Il permet d'effectuer les calculs des valeurs numériques des termes de la suite, puis de construire une ou plusieurs courbes approchées et de les superposer dans le même repère. Il permet aussi la résolution de l'équation différentielle, c'est-à-dire, la détermination de la solution exacte d'une ED dans le cas où celle-ci est accessible avec une technique algébrique. La superposition de la courbe « exacte » avec les courbes approchées obtenues par différentes valeurs du pas h permet de mesurer l'effet du pas choisi ou du nombre de subdivisions de l'intervalle d'étude, comme il est illustré dans la figure suivante.

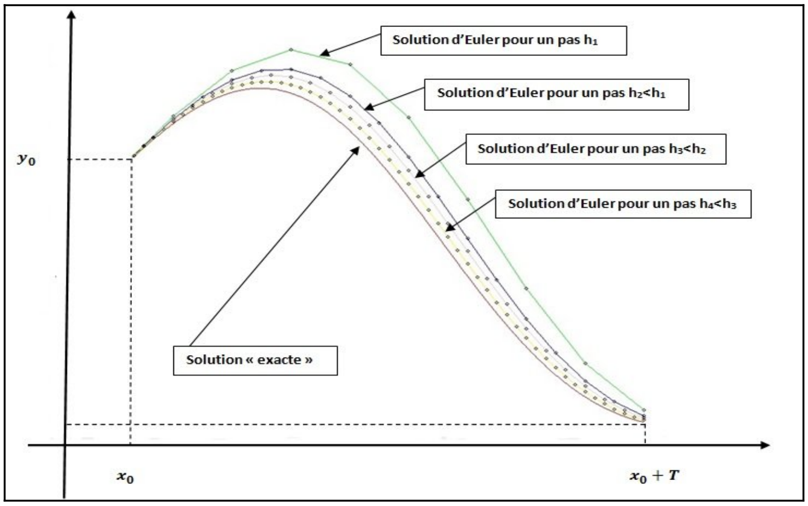


Figure 2 *: L'usage de Maple dans l'approximation des solutions d'une ED par la méthode d'Euler.*

Par ailleurs, afin de mieux appréhender les techniques de résolutions mathématique et informatique relatives à l'application de la méthode d'Euler dans la résolution d'une ED, nous avons décrit les étapes requises dans le tableau suivant.

Résolution mathématique	**Résolution algorithmique**
L'intégration numérique de l'équation différentielle $y'=f(t,y)$ consiste à calculer des valeurs approchées de y sur un intervalle [0,*T*]. Pour cela, on divise cet intervalle en N sous-intervalles égaux de longueur $h=T/N$ et on définit les instants : $t_n=n.h$ où l'entier n varie de 0 à N. h est le pas de temps. La première valeur y_0 est la condition initiale. Dans la méthode d'Euler explicite, la valeur approchée à l'instant t_{n+1} est obtenue à partir de la précédente par $y_{n+1}=y_n+h.f(y_n,t_n)$ La méthode d'Euler repose sur l'observation suivante. Supposons que la valeur exacte de Y à l'instant tn soit connue. La valeur de Y à l'instant $t_{n+1}=t_n+h$ est donnée par le développement de Taylor : $y(t_n+h)=y(t_n)+h.y'(t_n)+\frac{h^2}{2}y''(t_n)$ La méthode d'Euler consiste à négliger dans ce développement tous les termes à partir du terme d'ordre 2 en h : $y(t_{n+1})\approx y(t_n)+h.y'(t_n)$	1. Initialisation du pas h et de la durée T. 2. Initialisation des conditions initiales $t=0$ et $y=y(0)$. 3. Tant que $t<T$ faire : a. calcul de $k_1=f(t,y)$; b. $y=y+h*k_1$; $t=t+h$; c. enregistrement des données.

Tableau 1 *: Mise en parallèle des résolutions mathématique et informatique d'une ED du premier ordre par la méthode d'Euler.*

La première technique relève d'une technologie mathématique autour de la résolution numérique d'une ED qui s'appuie essentiellement sur le développement de Taylor alors que la seconde technique renvoie plus aux propriétés des courbes de fonctions. Cette mise en parallèle des deux techniques témoigne d'un effet de non-congruence entre registres dû au passage du continu au discret et inversement. Le caractère « continu » est celui pour lequel la fonction est définie en tant que « solution d'un problème de Cauchy » (définie par l'expression de sa dérivée et de sa valeur en un point), le caractère discret correspond à la suite construite à l'aide de la formule d'Euler impliqué dans l'environnement classique.

C'est donc dans la perspective d'une utilisation conjointe des environnements classique et numérique et de leur complémentarité que cette étude est réalisée. Nous avons défini quatre registres de représentation sémiotiques qui peuvent être impliqués dans les résolutions mathématiques et informatiques (Ben Nejma & Brinsi, 2021, 2022).

- Le registre numérique (RN) renvoie aux tableaux de valeurs, valeurs isolées, valeurs numériques approchées des termes de la suite d'Euler propre à l'environnement numérique.
- Le registre symbolique, formel (RS) renvoie aux expressions mathématiques, variables affectés au niveau des algorithmes impliqué dans l'environnement numérique.
- Le registre algébrique met en jeu deux aspects importants dans l'application de cette méthode et peut être subdivisé en deux registres, le registre algébrique discret et le registre algébrique continu.
- Le registre graphique (RG) renvoie aux courbes et représentations graphiques des solutions obtenues dans l'environnement numérique.

Ces données sont synthétisées dans le tableau suivant, qui illustre les étapes relatives à la méthode d'Euler selon les registres et les environnements de travail.

Environnement classique		**Environnement numérique**	
Étape 1		**Étape 2**	**Étape 3**
Registre algébrique Continu	**Registre algébrique Discret**	**Registre numérique**	**Registre graphique**
Équation différentielle	Suite numérique	Liste des valeurs numériques approchées des x_k et des y_k	Courbe des points isolés (discrets)
$y(x_0)=y_0$ $y'(x)=f(x, y(x))$	$x_k=x_0+k.h$ $y_{k+1}=y_k+h.f(x_k, y_k)$		Courbe polygonale reliant les points (continue)

Tableau 3 *: Les principales étapes relatives à la méthode d'Euler selon les registres sémiotiques.*

Pour conclure cette analyse didactique, nous adaptons le modèle de la double transposition didactique et informatique de Briant et Broner (2015) à celui de la résolution d'une équation différentielle du premier ordre par la méthode d'Euler. La figure 3 illustre cette étude qui permettra d'analyser l'articulation des deux cadres mathématique et informatique réalisée par l'enseignant et le poids accordé à la résolution algorithmique dans sa pratique.

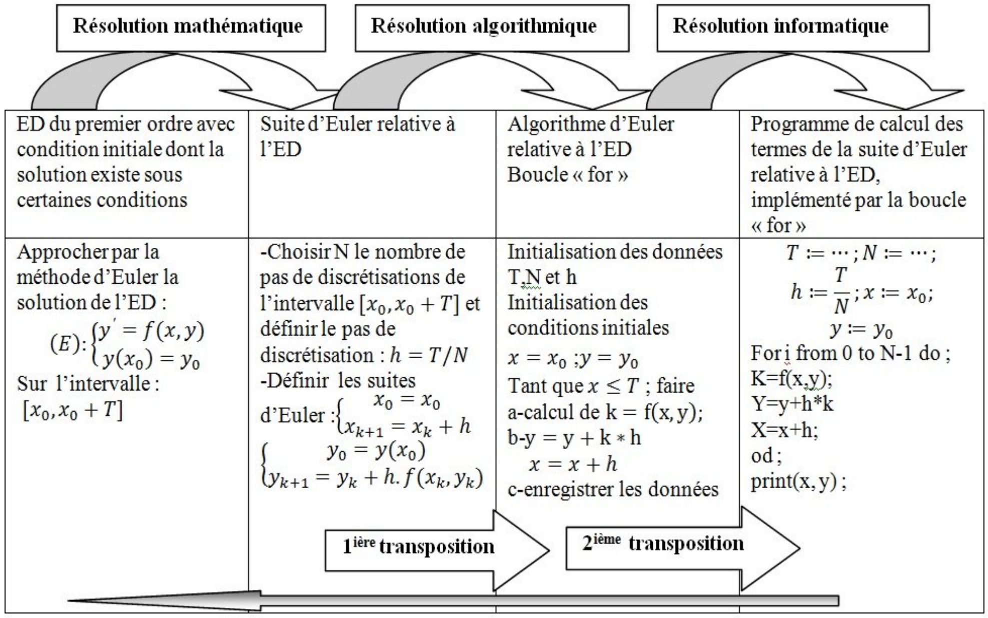


***Figure 3** : La double transposition didactique et informatique relative à la résolution d'une ED par la méthode d'Euler (Ben Nejma & Brinsi, 2021).*

Selon Tatar et Artaud (2010), la présence de praxéologies mixtes (mathématique-informatique) dans une institution amène les sujets de telle institution à changer leurs rapports à l'institutionnalisation des objets mathématiques sous-jacents. La présence de cette hybridation implique une double entrée au niveau des praxéologies. Cela pourrait conduire à une pratique différente (concernant l'ordre d'apparition des divers moments didactiques) selon l'environnement de travail choisi par l'enseignant. Par exemple, un enseignant pourrait entre autres choisir de démarrer ses travaux pratiques plaçant l'étudiant dans un moment de première rencontre soit avec une tâche nécessitant une résolution mathématique dans l'environnement classique soit avec une tâche nécessitant le recours à l'outil informatique selon qu'il problématise l'une ou l'autre des praxéologies, en donnant à l'étudiant les connaissances requises pour gérer l'environnement de travail qu'il aura choisi. Selon nous, le type de posture choisie par l'enseignant selon l'une des deux dimensions est un indicateur de sa pratique dans un contexte d'utilisation du numérique.

3. Analyse des pratiques d'un enseignant : une étude de cas

3.1. Méthodologie et recueil des données

Notre expérimentation s'est déroulée à la fin de l'année universitaire avec 16 étudiants de première année de l'ISET, section GE. Nous avons assisté à l'ensemble des séances de travaux pratiques consacrés aux équations différentielles après approbation de l'enseignant P qui a accepté de nous recevoir dans sa classe, d'enregistrer ces séances et de prendre des notes. Le professeur de mathématiques P est un enseignant du secondaire détaché depuis une dizaine d'années dans l'enseignement supérieur et s'est formé seul à l'utilisation du logiciel *Maple* afin d'assurer l'enseignement des travaux pratiques de mathématiques depuis plus de 6 ans. Le thème d'étude choisi a fait l'objet d'enseignement en cours d'analyse du second semestre mais limité à la résolution algébrique des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre. La résolution numérique via la méthode d'Euler est un objet d'enseignement explicite des travaux pratiques de mathématiques appliquées. Durant ces séances, les étudiants travaillent en binômes et ont déjà été familiarisés au premier semestre de l'année universitaire à la manipulation de certaines fonctionnalités classiques du logiciel. Nous avons procédé à l'enregistrement de la totalité des séances (3 séances de 90 minutes chacune) consacrées aux équations différentielles du premier ordre puis nous l'avons transcrit puis découpé en épisodes. Chaque épisode est lié à la description des activités de l'enseignant en fonction des gestes donnés à voir et selon la nature des praxéologies développées (types de tâches et techniques en jeu), le cadre privilégié (algébrique, algorithmique ou informatique), et la praxéologie didactique (moments de l'étude) qui les accompagne.

3.2. Analyse des données

Dans notre analyse des pratiques effectives de P autour de l'introduction de la méthode d'Euler, nous prenons en considération :

- le discours du professeur ;
- les échanges entre l'enseignant et ses étudiants ;
- les informations affichées au tableau ou projetées, les gestes relatifs à la manipulation de l'outil informatique (techniques instrumentées) ;
- les actions mises en œuvre par P lorsqu'il convoque l'un des registres ou qu'il privilégie l'une des dimensions (mathématique, algorithmique ou informatique).

Nous illustrons cette analyse par quelques extraits exemplifiant la mise en œuvre de ces éléments méthodologiques sur l'ensemble des données. Notons que le début de la première séance de travaux pratiques a porté sur un rappel des ED du premier et du second ordre déjà rencontrées par les étudiants dans leur cours d'analyse. Nous avons fait le choix, ici, de nous centrer uniquement sur l'introduction de l'approche numérique des ED du premier ordre par la méthode d'Euler.

Le professeur P commence par motiver les étudiants en mettant en avant les conditions de résolution algébrique d'une ED et les contraintes qui peuvent avoir lieu à partir d'un exemple ; il problématise ainsi la dimension mathématique dans l'environnement classique (papier crayon) pour amorcer l'introduction de l'approche numérique de résolution, comme on peut le voir sur cet extrait.

117. *P* : *Dans la résolution d'une ED que vous avez déjà vu en cours, est ce que on peut toujours calculer $A(x)$ qui est une primitive de $a(x)$ et même $\int u(x)e^{A(x)}dx$?*

118. *E* : *Oui.*

119. *P* : *Non, pas toujours, vous allez voir* [P écrit au tableau]. *Par exemple, on prend l'équation $y'-x^2 y=\sqrt{x}$.*

     Dans ce cas, $A(x)=\frac{-x^3}{3}$ et $\int u(x)e^{A(x)}dx=\int \sqrt{x}\,e^{\frac{-x^3}{3}}dx$, c'est égal à ???

120. *P* : *Nous ne pouvons pas expliciter cette intégrale, essayez par vos moyens.*

Pendant ce temps de recherche, l'enseignant contrôle les essais réalisés par ses étudiants dans l'environnement papier crayon. La tâche parait problématique pour les étudiants qui ne parviennent pas à trouver une primitive de la fonction obtenue. P saisit l'occasion pour présenter une alternative à la résolution algébrique et faire avancer son projet d'enseignement tout en conservant la travail dans le cadre mathématique. Il installe, ainsi, le moment de la première rencontre avec la méthode d'Euler en explicitant d'abord l'intérêt de recourir à la résolution numérique de l'ED. L'environnement papier crayon semble privilégié par P dans la mise en œuvre de cette praxéologie mathématique, comme il apparaît sur cet extrait.

142. *P* : *La seule façon d'obtenir des informations sur ces solutions quand on n'a pas de formules explicites est de les approcher numériquement. C'est ce qu'on appelle résolution numérique.*

143. *P* : *La résolution numérique d'une équation différentielle sur un intervalle* $[a, b]$ *consiste à déterminer une valeur approximative de la fonction solution en chaque point de cet intervalle, c'est-à-dire si on sait sous certaines conditions que F la solution de l'équation existe mais on ne peut pas la déterminer explicitement ou si l'on peut mais son expression est compliquée, comment on approche sa valeur en un point.*

144. *P* : *Il y a des méthodes d'approximation numériques des ED lorsqu'il est difficile ou impossible de trouver l'expression de la solution ou des solutions s'il n'y a pas de conditions particulières, est ce que vous connaissez la méthode d'Euler ?*

145. *E* : *Non, monsieur, pas du tout.*

L'enseignant prend entièrement à sa charge le travail mathématique en convoquant essentiellement le registre algébrique. Il s'appuie sur un simple graphique lui permettant d'expliquer à ses étudiants la subdivision de l'intervalle pour approcher la solution exacte. Les gestes de l'enseignant témoignent d'une action purement théorisée et algorithmisée mais dépourvue d'éléments technologiques qui justifient les différentes étapes de la technique, par exemple le recours à l'approximation par les développements limités et la formule de Taylor. L'enseignant ne semble pas également se soucier du caractère continu du registre algébrique convoqué par cette résolution au moment d'institutionnalisation. Ce passage du continu au discret semble considéré par P comme allant de soi, sans aucune explicitation.

146. *P* : *Notre équation est de la forme* $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, *on va considérer* $[a, b] = [x_0, x_0 + T]$.
La méthode consiste à subdiviser l'intervalle $[a, b]$ *en un nombre N d'intervalles de même amplitude égale à* $h = \dfrac{T}{N}$, *h est appelé le pas de la subdivision.*

147. *P* : [trace la figure] :

$a = x_0$ $\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_k \quad \ldots \quad x_N = b$

148. *P* : *Comment on calcule chaque* x_k *?*

149. *Ec* : *On ajoute h chaque fois.*

150. *P* : *Et donc ?…*

151. *Ec* : $x_1 = a + h$; $x_2 = x_1 + h$; …

152. *Ei* : $x_k = a + k.h$

153. *P* : *C'est-à-dire* $x_k = x_k - 1 + h$ *ou encore* $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{k+1} = x_k + h \end{cases}$.

166. *P* : [écrit et dit] $x \approx a$, *ça veut dire* $h \approx 0$. *La limite sera* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha)$, *c'est dire :*
Lorsque $h \approx 0$, *on a :* $\dfrac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \approx f'(\alpha)$, *on veut approcher* $f(\alpha + h)$, *donc…*

167. *Ec* : $f(\alpha + h) \approx h . f'(\alpha) + f(\alpha)$.

168. *P* : *Oui, c'est ça* [et écrit : si $h \approx 0$, on a : $f(\alpha + h) \approx f(\alpha) + h . f'(\alpha)$].

169. *P* : *Donc* $y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h . y'(x_0) = y(x_0) + h . f(x_0, y_0) = y_0 + h . f(x_0, y_0)$.

C'est-à-dire qu'une valeur approchée de $y(x_1)$ *est* $y_1 = y_0 + h.f(x_0, y_0)$.

Si on désigne par $y_2 ; y_3 ; ... ; y_k$ *les valeurs approchées obtenues avec la même manière de* $y(x_2) ; y(x_3) ; ... ; y(x_k)$, *qu'est ce qu'on aura ?*

170. *Ei* : $y_2 = y_1 + h.f(x_1, y_1)$ *et* $y_3 = y_2 + h.f(x_2, y_2)$ *et ...*

171. *P* : *Ainsi de suite pour* $0 \leqslant k \leqslant N-1$, *que vaut* $y_k + 1$, *une valeur approchée de* $y(x_{k+1})$ *?*

172. *Ec* : $y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k)$.

173. *P* : *Oui, on a alors, pour* $0 \leqslant k \leqslant N-1$: $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{k+1} = x_k + h \end{cases}$ *et* $\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k) \end{cases}$

Le professeur P explicite les étapes relatives à la résolution numérique par la méthode d'Euler d'une ED du premier ordre avant de recourir au cadre informatique pour des raisons de complexité et d'économie du travail que l'environnement numérique permet d'offrir. En fait son action rejoint la tendance commune de considérer qu'on apprend davantage en résolvant des équations « à la main », le recours au cadre informatique s'impose lorsqu'il n'est plus pratique, voire impossible de le faire dans l'environnement papier crayon, comme peut le remarquer dans ces échanges.

174. *P* : *Vous voyez la complication de cette technique ?*

175. *E* : *Oui, c'est trop long et compliqué.*

176. *P* : *C'est pour ça qu'on va utiliser le logiciel Maple pour déterminer la solution de manière rapide et efficace.*

Par ailleurs, tout au long des séances, les gestes de l'enseignant laissent entrevoir une mise à l'écart de la dimension algorithmique convoquée par la transposition informatique de la tâche posée en dépit des interventions de certains étudiants qui semblent intéressés par la programmation de la technique de résolution en jeu. Le passage au cadre informatique semble se limiter à des actions instrumentées de l'algorithme préétabli par P via l'exécution de commandes. Le travail mathématique réalisé par P dans l'environnement papier crayon lui sert de levier pour engager la résolution informatique. Les gestes de P s'organisent essentiellement autour des fonctionnalités de *Maple* au détriment d'une problématisation de la dimension algorithmique dans le passage d'un environnement de travail à l'autre, comme il est illustré dans cet épisode.

177. *E* : *Comment on va écrire le programme ?*

178. *P* : *Vous n'avez pas besoin de programmer quoi que ce soit, juste d'exécuter le programme sur machine à partir des commandes et le résultat s'affiche.*

179. *P* : *Maple est capable d'effectuer la résolution d'équations différentielles, la bibliothèque spécifique s'ouvre avec la commande* ***with (DEtools)***.

180. *P* : *Après avoir ouvert la bibliothèque (DEtools), il suffit d'entrer l'équation puis demander à Maple la solution, et ce avec la commande* ***>dsolve « >eq :=l'équation ; » >dsolve(eq,la fonction);***

181. *P* : *Quand il y a des conditions initiales* ***>dsolve ({équation, conditions initiales}, fonction);***

182. *E* : *On n'a pas compris les notations, monsieur, c'est quoi* $\boldsymbol{diff(y(x), x\$n)}$ *?*

183. *P* : *Attention, on désigne les dérivées de y comme pour les dérivées classiques d'une fonction* $\boldsymbol{diff(y(x), x)}$ *ou bien* $\boldsymbol{D(y)(x)}$ *pour la dérivée* y' *et* $\boldsymbol{diff(y(x), x\$n)}$ *ou par* $\boldsymbol{D@n(y(x), x)}$ *pour une dérivée nième de y.*

Le professeur P engage le moment du travail de la technique en convoquant de nouveau le cadre mathématique. Il propose une seconde tâche autour de la résolution par la méthode d'Euler d'une ED du premier ordre avec condition initiale. La question est convoquée par P qui sollicite l'utilisation du registre du tableau pour déterminer les valeurs correspondantes aux variables x_k et y_k en fonction du pas *h*.

184. *P* : *Soit l'équation :* $\begin{cases} y'=\dfrac{y}{x}-x+1 \\ y(1)=1 \end{cases}$ *; on va résoudre cette équation avec la méthode d'Euler sur l'intervalle* $[1,3]$. *On prendra* $h=0{,}2$. *Que doit-on faire ?*

185. *E* : *Il faut calculer les* x_k *et les* y_k.

186. *P* : *Oui.*

187. *E* : *1 ; 1,2 ; 1,4 ; 1,6 …*

188. *P* : *Oui, c'est ça* [P trace le tableau à la main]

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
y_k	1	1,2									

Le professeur propose alors aux étudiants de compléter ce tableau en utilisant le logiciel informatique *Maple* pour obtenir la solution exacte à partir des solutions approchées visualisées dans le registre graphique au moyen du logiciel. La pratique de P semble osciller entre deux types d'activités mathématique et informatique conformément aux deux environnements de travail sans se soucier des enjeux de cette transposition. On peut d'ailleurs, constater sur cet extrait, la difficulté rencontrée par les étudiants pour appréhender les nouvelles variables et l'enjeu de la démarche.

188. *P* : *D'abord, vous mettez Déclarer « l » la liste des coordonnées des points, ensuite, construire la courbe polygonale reliant les points et ce avec l'instruction :* $\boldsymbol{list(plot, l);}$ *puis lui attribuer un nom C1.*

189. *E* : *Ce n'est pas clair monsieur, pas compris.*

190. *P* : *Attendez que je termine.*

191. *P* : *Une fois que ces deux tâches sont faites, on va construire les points isolés avec une couleur distincte de celle de C1 qui est rouge par défaut grâce à l'instruction :* $\boldsymbol{list(plot, l, style=point, color=\ldots);}$ *et lui attribuer un nom C2.*

192. *P* : *Vous voyez ce qui apparaît sur l'écran ?*

193. *E* : *Oui, les deux courbes.*

194. *P* : *Maintenant, il reste à superposer les courbes C1 et C2 en utilisant l'instruction* $\boldsymbol{display(C1, C2);}$

L'enseignant P ne semble pas se soucier des variables informatiques qui viennent se substituer aux variables mathématiques dans la transposition informatique. La conversion du registre algébrique au registre numérique est naturalisée par l'enseignant dans le changement de cadres et le travail dans l'environnement informatique est pris en charge par l'enseignant comme une exécution d'un algorithme.

195. *P* : *Maintenant, il faut juste déclarer* x_k, y_k *et la formule d'Euler :* $y_{k+1}=y_k+h.f(x_k,y_k)$ *en remplaçant le terme* $f(x_k,y_k)$ *par son expression explicite* $\dfrac{y_k}{x_k}-x_k+1$ *et h par sa valeur étant 0,2 ; affecter chaque fois* x_k *et* y_k *par leurs valeurs obtenues en une étape, puis exécuter, cela permettra alors d'obtenir la valeur de* y_{k+1}.

196. *Eh* : *Sur l'ordinateur, on met* $\boldsymbol{>x[k]:=1.2;\ y[k]:=1.2;}$

$x_k := 1.2$

$y_k := 1.2$

>y[k+1]:=y[k]+0.2*(y[k]/x[k]−x[k]+1);

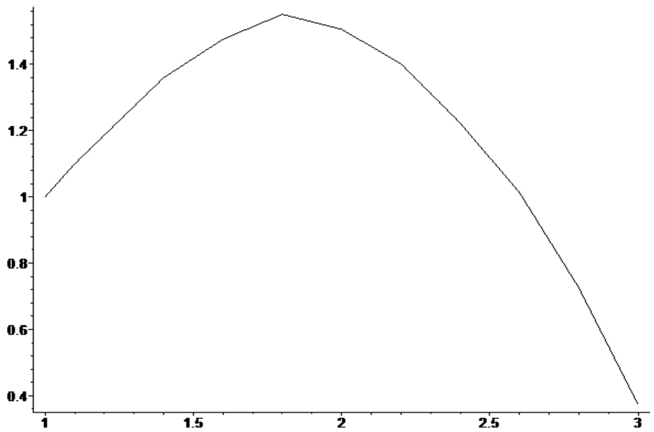
$y_{k+1} := 1.360000000$

197. *P : Vous voyez alors apparaître votre tableau complété puis la courbe solution.*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
y_k	1	1,2	1,36	1,474	1,551	1,506	1,402	1,238	1,013	0,725	0,373

>*with*(*plots*):

**>*listplot*([[1,1],[1.1,1.1],[1.4,1.36],[1.6,1.476],[1.8,1.551],[2,1.506],[2.2,1.402],
[2.4,1.223],[2.6,1.013],[2.8,0.726],[3,0.373]]);**



Les mêmes gestes repérés dans les épisodes précédents se répètent. Les étudiants ne parviennent pas à résoudre la nouvelle tâche proposée par P et demandent un éclairage de la technique mise en œuvre dans le registre graphique. Cependant, l'enseignant continue à avancer dans son projet d'enseignement en faisant la « sourde oreille » et en prenant en charge la technique numérique en dictant aux étudiants les démarches à suivre avec une nouvelle valeur de N (10).

197. *P : Oui, et si le nombre N est grand ?*
198. *Ea : On fait un programme.*
199. *P : Comment ? On va essayer* [le silence règne dans la salle].
200. *P : Bon, vous écrivez* [P écrit au tableau]*, ensuite vous le faites sur machine.*

```
>N:=10;
T:=3-1;
h:=T/N;
x[0]:=1;y[0]:=1;
f:=(x,y)->y/x-x+1;
for k from 0 to N do;
x[k+1]:=x[k]+h;
y[k+1]:=y[k]+h*f(x[k],y[k]);
od;
```

Le professeur intervient aussitôt pour préciser que le critère d'arrêt (from 0 to N do ;) est erroné en ramenant un discours technologique propre au registre numérique :« pour $k=N$, on aura un point supplémentaire $A_{N+1}(x_{N+1}, y_{N+1})$ qui ne fait pas partie de la liste visée : $N+1$ points dont le premier est d'abscisse $x_0=1$ et le dernier est d'abscisse $x_N=3$. P ne problématise par le langage formel (pseudo-langage) en jeu dans l'algorithme et les étudiants se contentent d'exécuter le programme dépourvu de sens via la commande ***evalf*** pour approcher les valeurs des y_k , remplaçant *N* dans le critère d'arrêt par $N-1$.

201. *P* : *Tu calcules y_{k+1}, donc tu dois t'arrêter à $N-1$, de plus Maple vous donne des valeurs exactes.*

```
>N:=10;
T:=3-1;
h:=T/N;
x[0]:=1;y[0]:=1;
f:=(x,y)->y/x-x+1;
for k from 0 to N-1 do;
x[k+1]:=x[k]+h;
y[k+1]:=evalf(y[k]+h*f(x[k],y[k]));
od;
```

Toujours dans l'environnement informatique, le professeur convoque le passage au registre graphique au moyen de l'action « >***plot***$(\boldsymbol{sol}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})$***;*** » qui permet de donner par défaut la courbe de la fonction « sol » sur l'intervalle considéré. La pratique de P semble se réduire à une exécution de commandes dépourvue de sens pour les étudiants comme nous pouvons le voir sur cet extrait.

215. *P* : *Voilà, comme-ça Maple nous donne les x_k et les y_k que l'on veut, et comment on trace la courbe reliant les points $A_k(x_k, y_k)$?*

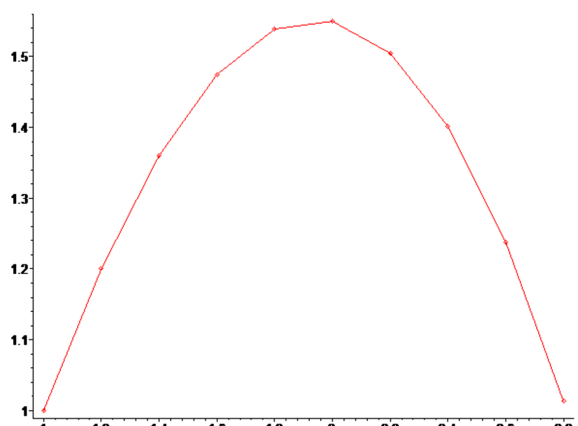
216. *E* : *Avec la commande listplot ?*

217. *P* : *Quoi ? Vous allez écrire tout dans la liste, et si on a 300 points ?*

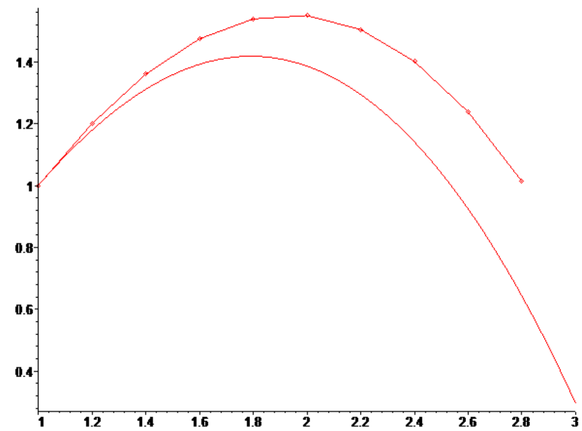
218. *Ei* : *Il ya une autre commande plot…*

219. *P* : *Vous la connaissez déjà !* [Pas de réponse].

220. *P* : ***plot***$([[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{k}],\boldsymbol{y}[\boldsymbol{k}]]\$\boldsymbol{k}=\mathbf{0}..\boldsymbol{N}])$ *? De plus ajoutez* ***evalf*** *à* $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{k}+\mathbf{1}]$.



À la suite de l'obtention de la courbe d'Euler sur l'intervalle $[1,3]$ avec un pas $h=0{,}2$, P propose le travail de la technique dans le registre graphique : déterminer la solution exacte de l'ED avec *Maple* et construire sa courbe sur l'intervalle $[1,3]$ et superposer la courbe de la solution exacte avec celle d'Euler. La visualisation des deux courbes solutions de l'ED permettra de mettre en évidence un déphasage qui se réduit au fur et à mesure que le pas *h* diminue, comme l'illustre le graphique suivant, obtenu sur l'écran (le PC de l'enseignant). À ce moment, nous pouvons imaginer que les étudiants formulent des conjectures sur ce qui va se passer. Cliquer sur la commande pour démarrer une animation qui leur permet de vérifier leurs conjectures. Cependant, il semble que la perte de sens du travail graphique convoqué par la méthode d'Euler conduit l'enseignant à prendre en charge la résolution du problème et sa modélisation dans le registre graphique.



235. *P* : *Qu'est-ce que vous constatez ?*

236. *P* : *Comment vous voyez les courbes ? N'est-ce pas décalé par rapport à la courbe exacte ?* [Silence absolu].

237. *P* : *Quand l'approximation devient meilleure ?*

238. *P* : *Si on remplace le $N=10$ par $N=100$ dans le programme, qu'est-ce qu'on obtient ?*

L'absence d'interactions conduit l'enseignant à se réfugier dans le cadre mathématique pour justifier la résolution informatique sans se soucier des variables informatiques en jeu dans l'algorithme relatif à la méthode d'Euler, comme on peut encore le remarquer sur cet extrait.

245. *P* : $\alpha \in [a, b]$, *alors il existe p tel que* $x_p \leqslant \alpha < x_{p+1}$, *et alors on peut approximer* $y(\alpha)$ *par* y_p. *Il suffit de déterminer le p :* $a+p.h \leqslant \alpha < a+(p+1).h$, *soit* $p \leqslant \frac{\alpha - a}{h} < p+1$, *donc p est la partie entière de* $\frac{\alpha - a}{h}$.

L'instruction qui donne la partie entière est ***floor(le réel)***.

Donc il suffit d'écrire **p:=floor((α-a)/h); y[p]**…

246. *E* : *Monsieur, je n'ai pas compris.*

3.3. Principaux résultats et discussions

Les analyses présentées ci-dessus et illustrées par quelques extraits sont conduites sur l'ensemble des séances consacrées par P. Elles ont permis d'apporter des éléments de réponse aux questions soulevés par notre problématique, notamment :

- De quelle manière le professeur de mathématiques intègre-il un outil de programmation numérique pour accompagner ses étudiants dans la construction de connaissances mathématiques ?
- Quelle importance accorde-t-il au travail algorithmique ?

- Qu'est-ce qui caractérise la pratique du professeur dans les deux cadres informatique et algébrique ?
- Quel est l'impact sur l'activité des étudiants ?

Les analyses conduites révèlent que les praxéologies développées par le professeur de mathématique P, tout au long des séances consacrées aux équations différentielles, caractérisent certains aspects de sa pratique que nous clarifions dans cette section.

Le premier aspect renvoie aux ingrédients mathématiques convoqués par P mais attendus pour que des compétences liées à la résolution numérique des ED soient effectivement travaillées par les étudiants. Le professeur demande tout au long des séquences de convoquer le cadre mathématique en laissant de côté des éléments théoriques nécessaires à la conceptualisation de la méthode d'Euler et de recourir au cadre informatique pour des besoins pratiques. La pratique de P tente de réaliser un équilibre entre les deux niveaux de la praxéologie mixte, le niveau mathématique qui vient en amont et le niveau informatique qui vient en aval. Le niveau algorithmique est mis en arrière-plan par rapport aux deux premiers. Ainsi, il nous semble que la présence de praxéologies mixtes dans une telle institution peut conduire les enseignants de mathématiques à modifier leur rapport au savoir mathématique en privilégiant une dimension du travail de résolution du problème au détriment de l'autre. La présence de la double dimension (mathématique et algorithmique) dans le processus de transposition informatique implique une double entrée au niveau des praxéologies, ce qui expliquerait en quelque sorte les régulations apportées par l'enseignant lorsqu'il s'appuie sur le travail mathématique pour justifier la résolution informatique.

Le second aspect est relatif à une absence d'exploitation de la dimension algorithmique au niveau de la double transposition didactique et informatique. Cette dimension ne semble pas problématisée par l'enseignant bien qu'elle soit revendiquée à maintes reprises par les étudiants. Il semble que la résolution algorithmique n'est pas perçue, par l'enseignant, comme une composante de la praxéologie mixte.

Le troisième aspect est relatif à la gestion par l'enseignant des dialectiques entre les différents registres sémiotiques impliqués dans les deux cadres algébrique et informatique. Le plus souvent, ce travail de conversion est naturalisé par P et prise entièrement à sa charge. Nous avons pourtant constaté, au long des séances, la difficulté pour les étudiants de reconnaître, dans deux registres différents, des représentations d'un même objet, par exemple, la fonction solution d'une équation différentielle dans le registre algébrique par son expression et celle de sa courbe représentative dans le registre graphique obtenue par la méthode d'Euler lorsqu'elle est visualisée dans le cadre informatique.

Le quatrième aspect est relatif aux difficultés conceptuelles repérées chez les étudiants dues en partie aux pratiques de l'enseignant, notamment dans l'affectation des variables et des rapports entre les variables informatique (emplacement dans la mémoire de l'ordinateur destiné à stocker des données effaçables) et les variables mathématiques. Variables et affectation de variables sont de ce fait des connaissances qui peuvent engendrer plusieurs confusions chez les étudiants dans le changement d'un cadre à l'autre, en particulier, lorsque la pratique de P ne problématise pas ce passage et sous-estime son impact sur la conceptualisation des notions mathématiques en jeu.

Conclusions

L'étude de cas réalisée dans le cadre d'un environnement de travail hybride, à l'interface des mathématiques et de l'informatique, révèle un système de contraintes qui pèsent sur les pratiques des enseignants de mathématiques pour développer des praxéologies mixtes et permettre de renforcer, chez les étudiants, des connaissances interdisciplinaires. La pratique observée oscille entre deux positions : consolider des connaissances mathématiques chez les étudiants comme un moyen de les engager dans le processus de transposition informatique via les fonctionnalités du logiciel d'une part, et développer des connaissances liées à l'utilisation des outils informatiques au détriment de la dimension algorithmique de l'activité mathématique, d'autre part. On peut d'ailleurs se demander si ces connaissances font partie du sens commun chez l'enseignant ou si elles sont liées à des connaissances spécifiques du contenu dans le domaine de l'informatique. On peut aussi s'interroger sur les raisons explicatives de cette distance instrumentale et l'influence du contexte d'enseignement sur la pratique de l'enseignant. Souvent, l'enseignant a recours à des praxéologies mathématiques pour justifier des praxéologies informatiques. Sa pratique se base sur des connaissances spécifiques aux mathématiques mais qui restent implicites pour justifier une technique algorithmique ou informatique. Sa pratique est susceptible d'engendrer des difficultés conceptuelles chez les étudiants, allant jusqu'à la perte de sens du savoir à enseigner. Les praxéologies développées dans l'environnement informatique faisant appel à des exigences cognitives évoquées dans notre analyse didactique semblent pourtant pauvres et dépourvues d'éléments technologiques et remettent en question la dimension algorithmique dans la résolution de problèmes interfaces mathématique-informatique. En effet, l'implantation de l'algorithme de résolution est fortement conditionnée par des praxéologies mixtes prises en charge par l'enseignant. La présence d'éléments extra-mathématiques à l'intérieur d'une organisation didactique portant sur la résolution d'un problème mathématique, dans notre cas la résolution numérique des équations différentielles interpelle de nouvelles questions : Comment introduire les savoirs ou les savoir-faire mathématiques visés dans le cas de la méthode d'Euler ? Faut-il développer des éléments de savoir et des savoir-faire extra-mathématiques ? Comment les intégrer au niveau des praxéologies mixtes ?

En guise de conclusion, il nous semble que les prescriptions officielles de telles unités fondamentales d'apprentissages, telles que les travaux pratiques de mathématiques appliquées, assurées par des enseignants de mathématiques, nécessitent avant tout une nouvelle culture du numérique. Dépasser la conception des artefacts technologiques comme de simples adjuvants pédagogiques exploités dans des praxéologies mathématiques est un défi institutionnel important à promouvoir dans une formation interdisciplinaire spécifique à ces deux disciplines. L'étude des conditions de diffusion de praxéologies mathématiques mixtes à l'université apparaît ainsi comme un champ de recherche didactique essentiel à développer.

Références bibliographiques

Abboud-Blanchard, M. (2013). *Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Études des pratiques et de la formation des enseignants. Synthèses et nouvelles perspectives*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Université Paris Diderot.

Abboud, M., Clark-Wilson, A., Jones, K. & Rogalski, J. (2018). Analyzing teachers' classroom experiences of teaching with dynamic geometry environments: Comparing and Contrasting two approaches. *Annales de didactique et de sciences cognitives, Special English-French issue, 23*, 93-118.
https://doi.org/10.4000/adsc.319

Abboud, M. & Coles, A. (éds.) (2018). Anglo-French use of theory in mathematics teaching,

teaching development and teacher education. *Annales de didactique et de sciences cognitives, Special English-french issue, 23*, 7-15.
https://doi.org/10.4000/adsc.280

Artaud, M. (2003). Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques « à calculatrice » et leur écologie. *Archives ouvertes EduTice, juin 2003*. Reims, France.
https://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00001315/document

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245-274.

Artigue, M. (2020). Didactical engineering. In S Lerman (éd.). *Encyclopedia of Mathematics Education, Second Edition*. New-York: Springer (pp. 202-206).

Arslan, S. (2010) Do students really understand what an ordinary differential equation is? *International Journal of Science and Mathematics Education, 41*(7), 873-888.

Aslan, A. & Zhu, C. (2016). Influencing factors and integration of ICT into teaching practices of pre-service and starting teachers. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2*(2), 359-370.

Azman, A. & Ismail, Z. (2013). *Learning differential equations: A meta synthesis of qualitative research*. Paper presented at the International Seminar on Quality and Affordable Education. Johor, Malaysia.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Béguin, P. & Rabardel, P. (2001). Concevoir pour les activités instrumentées. *Revue d'intelligence artificielle, 14*(1/2), 35-54.

Ben Nejma, S. & Brinsi, L. (2021). The introduction of digital resources in higher institutions of technological studies: the resolution example of differential equations in *Maple* environment. *International Journal of Innovation Scientific Research and Review (IJISRR), vol. 03, issue 11*, 1987-1993.
http://journalijisr.com/issue/introduction-digital-resources-higher-institutions-technological-studies-resolution-example

Ben Nejma, S. & Brinsi, L. (2022). La résolution des équations différentielles dans un environnement informatique. *Mathematice, Revue Sesamath, vol. 78*, article 1472
http://revue.sesamath.net/spip.php?article1472

Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.

Briant, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français*. Thèse de l'Université de Montpellier.

Briant, N. & Bronner, A. (2015). Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. In L Theis (éd.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. *Actes du colloque EMF2015 - GT3*, 231-246.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 17*/3, 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 19*/2, 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. *Actes de la XI[e] école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage (pp. 41-56).

Clark-Wilson, A. (2010). Emergent pedagogies and the changing role of the teacher in the handheld mathematics classroom. *ZDM mathematics education, 42*(7), 747-761.

Clark-Wilson, A., Robutti, O. & Sinclair, N. (éds.) (2013). *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development.* London : Springer.

Clark-Wilson, A. & Noss, R. (2015). Hiccups within technology mediated lessons: a catalyst for mathematics teachers' epistemological development. *Research in Mathematics Education, 17*(2), 92-109.

Descaves, A. (2001). L'apprentissage du sens, certes ! Mais dans quel sens prendre le sens ? In JC Lebreton (dir.). *Actes du XXVIII[e] colloque COPIRELEM sur la formation des professeurs.* Tours : IREM d'Orléans-Tours (pp. 75-98).

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65. IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages Intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Funes, J. O. & Valero, E. (2018). Animations and interactive creations in linear differential equations of first order: the case of Geogebra. *Journal of Physics: Conference Series, vol. 1141, 012126, october 2018*. IOP Conference Series (pp. 1-4). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1141/1/012126

Geiger, V. (2009). Factors affecting teachers' adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling. In *Abstracts of the 14[th] international conference on the teaching of mathematical modelling and applications*. Hamburg: University of Hamburg. http:// www. ictma2009. de/media/files/ICTMA14_ Abstracts _ FINAL. pdf

Haspekian, M. (2005). Apports et limites du tableur dans l'enseignement de l'algèbre. Questions d'instrumentation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2012, Enseignement de l'algèbre élémentaire - bilan et perspectives*, 123-136. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Hoyles, C. & Lagrange, J. B. (éds.) (2005). Digital technologies and mathematics education. Rethinking the terrain. *The 17[th] ICMI Study*. New York: Springer.

Hoyles, C., Noss, R., Vahey, P. & Roschelle, J. (2013). Cornerstone Mathematics: designing digital technology for teacher adaptation and scaling. *ZDM - Mathematics Education, 45*, 1057-1070.

Kendal, M. & Stacey, K., (2002). Teachers in transition: Moving towards CAS - supported classrooms. *ZDM, 34*(5), 196-203.

Kwon O. N., Rasmussen, C., Allen Keene, K. (2005). Students' retention of mathematical knowledge and skills in differential equations. *School Science and Mathematics, 105*(5), 1-13.

Kwon, O. N. (2020). Differential Equations Teaching and Learning. In S Lerman (éds.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham (pp. 220-223).

Latifi, M., Eseghir, A., Elmaroufi, A., Hattaf, K. & Achtaich, N. (2022). Modeling with Differential Equations and Geogebra in High School Mathematics Education. *Journal of Educational and Social Research, 12*(3), 47-61.

Lemoyne, G. (2004). Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 227-240.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de l'Université de Grenoble.

Rowland, D. & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(4), 503-516.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast, 10*(1/2), 279-302.

Stols, G. & Kriek, J. (2011). Why don't all math's teachers use dynamic geometry software in their classrooms? *Australasian Journal of Educational Technology, 27*(1), 137-151. University of South Africa. https://doi.org/10.14742/ajet.988

Tatar, M. A. & Artaud, M. (2010). Constituer une organisation mathématique mixte. Changer le rapport à l'institutionnalisation. In A Bronner, M Larguier, M Artaud, M Bosch, Y Chevallard, G Cirade & C Ladage (éds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. IUFM de l'Académie de Montpellier (pp. 677-696).

Vandebrouck, F. & Abboud-Blanchard, M. (2012). Analyzing teachers' practices in technology environments from an Activity Theoretical approach. *International Journal for Technology in Mathematics Education, vol. 19.4*, 159-164.

Commission Nationale des Études Technologiques. Licence Appliquée en Génie Électrique - Plans d'études & Fiches matières.

https://isetsl.rnu.tn/useruploads/files/plan-etude-genie-electrique.pdf

Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche scientifique, des technologies de l’information et de la communication de l’enseignement supérieur (MES) (2014). Arrêté https://www.mtc.gov.tn/fileadmin/Investisseurs/Cahier_des_Charges/Arrete2014_1280.pdf