S'APPUYER SUR LE TRAVAIL DES ÉLÈVES POUR INTERVENIR ORALEMENT PENDANT LES RECHERCHES D'EXERCICES EN CLASSE DANS LE SECONDAIRE : DES DIVERSITÉS ?

Monique CHAPPET-PARIES[1]
IREM de Paris

Aline ROBERT[2]
IREM de Paris, LDAR

Résumé. Dans cet article, nous décrivons des interventions orales d'enseignants qui s'appuient, dans des séances d'exercices, sur ce qui vient des élèves pour le relier aux mathématiques en jeu. Ces interventions sont considérées ainsi comme porteuses de proximités. Nous précisons la manière dont nous apprécions et classons ces proximités, en relation avec la nature du lien qui est fait entre le contexte du travail et les propriétés générales à mobiliser. Nous donnons quatre exemples différents, illustrant cette diversité, potentiellement porteuse de conséquences variées pour les élèves. Nous discutons en conclusion de ce que les enseignants peuvent faire de ce type de descriptions.

Mots-clés. Interventions orales des enseignants, recherches d'exercices en classe, proximités, ZPD, analyses *a priori*.

Abstract. In this article, we describe oral interventions by teachers who draw on what comes from the students in practice sessions and relate it to the mathematics at stake. These interventions are thus seen as carrying proximities. We specify the way in which we appreciate and classify these proximities, in relation to the nature of the link that is made between the context of the work and the general properties to be mobilised. We give four different examples, illustrating this diversity, which can have various consequences for the students. In conclusion, we discuss what teachers can do with these types of descriptions.

Keywords. Oral interventions by teachers, research of exercises in class, proximities, ZDP, *a priori* analysis.

Introduction

Presque tous les enseignants interviennent en interaction avec ce que disent ou font les élèves pendant les séances ordinaires de recherche d'exercices[3] en classe. Ce peut être pour les questionner, les reprendre, valider leur production ou les aider, y compris à « démarrer » la résolution. Cependant, le contenu de ces interventions varie, et c'est ce qui nous intéresse, selon ce qui peut être repris du travail des élèves et/ou ce qui est ajouté d'une part, et selon la visée de l'enseignant dans sa réponse d'autre part. Il y a là une certaine marge de manœuvre pour les enseignants, même si ce qui vient des élèves formate en partie l'interaction, qu'elle soit prévue ou improvisée. Il y a une autre variable qui pourrait être étudiée, à savoir l'impact sur ce que font les élèves de ce qu'a dit l'enseignant, mais une telle analyse ne peut pas se faire « dans l'instant » et nécessite un dispositif expérimental, avec par exemple des entretiens et des questionnaires, que nous n'avons pas monté. Bien évidemment on ne peut pas isoler cette partie du discours oral de l'enseignant, constituée d'interventions locales, contextualisées, voire conjoncturelles, du

[1] monique.paries@orange.fr

[2] robertaline.robertaline@orange.fr

[3] Nous n'abordons cependant pas ici la résolution de problèmes complexes, enchaînant plusieurs questions différentes, voire des modélisations ou l'utilisation de TICE.

reste de sa pratique. Cependant, dans ce travail, nous privilégierons cet axe d'étude en essayant d'en dégager des diversités.

De nombreux travaux ont déjà étudié ce discours oral de l'enseignant produit pendant les interactions directes avec les élèves dans des séances d'exercices, interprété quelquefois en termes de régulations (une petite synthèse qui reste partielle est présentée dans Chappet-Paries *et al.*, 2014)[4]. Certaines recherches ont élargi l'étude aux discours d'accompagnement, y compris généraux, distinguant encouragements, structurations, explications (Chiocca *et al.*, 1991 ; Josse & Robert, 1993 ; Pimm, 1991). D'autres recherches se sont centrées sur les interventions liées aux mathématiques. Ces types d'interventions sont souvent exprimées dans un langage mixte (Laborde, 1983), pas uniquement mathématique, prenant la forme générale de commentaires (affirmations ou questions) que nous appelons « métamathématique » (Robert & Robinet, 1996 ; Tenaud, 1991). En particulier ont été étudiées les relances des enseignants, les interactions notamment en résolution de problèmes ou encore les évaluations formatives en séances d'exercices (Chanudet *et al.*, 2019 ; René de Cotret & Giroux, 2003 ; Haspekian *et al.*, 2019). Nous avons étudié dans des travaux antérieurs différents types d'aides (Chappet-Paries, 2010 ; Robert *et al.*, 2012), en relation avec les visées de l'enseignant par rapport à l'avancée du travail en cours, nous y reviendrons rapidement.

D'autre part, des études très locales, analysant le détail de ce qui est dit au moment où cela est dit, ont été faites sur les interventions collectives des enseignants pendant les déroulements de séances de cours (cours pris au sens restreint d'exposition des connaissances[5]) : cela a même constitué un détour introduit pour apprécier, en termes de proximités, les activités largement inaccessibles des élèves dans ces moments-là (Bridoux *et al.*, 2016 ; Chappet-Paries *et al.*, 2017b). Le travail présenté ici s'inscrit dans la continuité de ces études des cours, même si les activités sont plus observables.

Toutes ces recherches ont dégagé différents indicateurs pour apprécier ces interventions. Elles ont montré l'existence de diversités et de régularités dans les discours des enseignants de mathématiques en classe, l'interprétation en termes « d'effets sur les élèves » en étant cependant difficile, sauf en référence à des hypothèses théoriques (Horoks & Pilet, 2018).

Dans cet article, reprenant et adaptant l'étude et la typologie faites pour les moments d'exposition des connaissances (*cf. supra*), nous précisons cette analyse particulière, très contextualisée, des interventions que font oralement les enseignants en classe, pour des séances d'exercices ordinaires, intégrées au travail habituel[6]. Les élèves travaillent à leur place, individuellement ou pendant des phases collectives, ou sont envoyés au tableau, pendant un temps limité, sans production ramassée ni objectif d'évaluation (sommative). Nous nous intéressons à la manière dont les enseignants s'appuient sur ce qui vient des élèves, à l'oral. Il s'agit d'apprécier où les élèves en sont à partir de ce qu'ils disent, révélant des traces de ce qu'ils font ou ont fait. Nous cherchons à déceler des liens avec les mathématiques en jeu induits par le discours de l'enseignant pouvant rapprocher les activités des élèves et les connaissances mathématiques visées (au sens large). Ce sont ces liens que nous allons appeler ici encore des « proximités » et que nous cherchons à classifier. Mais l'étude qui a été faite pour les moments

4 Nous n'abordons pas les gestuelles de l'enseignant.

5 Nous ne faisons pas de différence entre savoirs et connaissances, si ce n'est que les connaissances sont attribuées aux élèves, et le savoir à la communauté mathématique.

6 Les enseignants nous ont donné accès à leur séance filmée par eux, mais n'ont aucune autre relation avec nos travaux. Nous en profitons pour les remercier une fois de plus !

d'exposition des connaissances doit être adaptée au travail pendant les séances d'exercices. En particulier, ces interventions peuvent avoir lieu pendant des aides[7], et, plus généralement concernent le plus souvent des activités des élèves plus accessibles et pour l'enseignant et pour le chercheur que pendant les moments d'exposition des connaissances. Notre étude a pour objectif de préciser le processus qui peut être activé par l'enseignant à partir de ces activités, y compris lors d'une aide. Ces proximités sont discursives, parce que portées par le discours oral, et cognitives, parce que liées aux apprentissages des mathématiques en jeu.

Rappelons que, en référence au cadre didactique dont nous nous inspirons, la *théorie de l'activité*, nous apprécions les apprentissages en relation avec les activités des élèves, c'est-à-dire non seulement leurs actions, visibles, mais tout ce qui les accompagne — écrits, dires, pensées. C'est de leur diversité et de leur cohérence que dépendent, à nos yeux, au moins en grande partie, ces apprentissages, appréciés en termes de conceptualisation[8]. Or si, en séances d'exercices, ces activités dépendent des connaissances à mettre en œuvre pour résoudre les tâches proposées (description mathématique des exercices, Robert, 1998), elles sont aussi fonction des déroulements organisés en classe et donc des interactions avec les élèves et des interventions de l'enseignant à propos des mathématiques en jeu. Nous travaillons ici, comme pour les cours, avec l'hypothèse, issue du modèle théorique de la *zone proximale de développement* et développée plus loin, que ces interventions peuvent gagner en efficacité si elles s'appuient sur ce qui vient des élèves, fait ou dit ; ces éléments de discours de l'enseignant, qui rapprochent très localement les mathématiques visées d'une part et les connaissances et activités actuelles des élèves d'autre part, pourraient conduire davantage à une appropriation, grâce à cet ancrage côté élèves. C'est une raison majeure de notre intérêt pour ces proximités.

Nous donnons pour commencer un exemple préliminaire qui permet de rentrer dans le vif du sujet à partir d'un petit extrait d'une « vraie » séance de classe transcrite à partir d'une vidéo tournée avec une caméra placée par l'enseignant au fond de sa classe. Nous précisons ensuite notre démarche d'analyse et nos hypothèses, puis nous présentons rapidement notre méthodologie pour développer quatre exemples issus de séances dans des établissements différents et à des niveaux variés du collège. Cela permet d'apprécier la diversité des pratiques dans ce domaine et de réfléchir en conclusion aux apports possibles de ce type d'analyse pour les enseignants.

1. Un exemple préliminaire pour présenter de quoi on parle

Nous reprenons ici des extraits d'une transcription analysée en partie dans Chappet-Paries, Levi, et Robert (2010), en précisant dans les interventions de l'enseignant ce qui constituera les proximités qui nous intéressent.

Nous recherchons plus précisément comment le professeur s'appuie sur ce qui vient des élèves (un élève interrogé puis d'autres).

La séance se déroule dans une classe de 4e (établissement ordinaire, classe ordinaire). Il s'agit de la fin de la séquence sur le théorème de Pythagore et sa réciproque[9] ; les premiers exercices de

[7] Peu fréquentes pendant les moments de cours.

[8] La conceptualisation désigne à la fois le processus menant aux acquisitions des nouveaux concepts, c'est-à-dire à leur disponibilité (utilisation correcte à bon escient) et à leur organisation dans les connaissances antérieures, et ces acquisitions elles-mêmes.

[9] Programmes des collèges, mathématiques classe de quatrième - 2005 - triangle rectangle : théorème de Pythagore

géométrie sont difficiles en début de quatrième, notamment à cause de l'exigence de démonstrations rigoureuses[10] à plus d'un pas (Duval, 1992). Le premier exercice portait sur un calcul mental de longueurs de côtés de triangles rectangles. Cet échange concerne la correction du deuxième exercice (figure 1) qui a été cherché à la maison. Le professeur recense les élèves qui n'ont pas réussi l'exercice tout en l'ayant travaillé : 9 élèves (sur 26), un bon tiers. Il recherche un volontaire parmi eux pour passer au tableau.

Enoncé

Dans la figure ci-contre, on a :

AB = 7,5 cm ; BC = 10 cm ; AC = 12,5 cm ;

CD = 10,5 cm ; BD = 14,5 cm.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

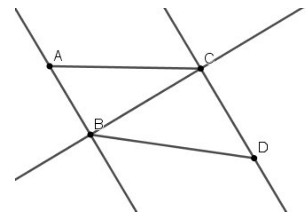


***Figure 1** : Deuxième exercice.*

Comment et pourquoi le professeur peut-il s'appuyer sur ce qui vient de l'élève, avec quels effets potentiels ?

Sachant que l'exercice fait suite à la présentation du théorème de Pythagore et de sa réciproque, les élèves vont peut-être essayer de l'appliquer, et pour cela repérer des triangles *ad hoc* indépendamment de la spécificité de l'exercice. L'enseignant, pour sa part, dispose d'une analyse experte de la tâche, en termes d'étapes notamment. Evidemment, l'organisation du travail adoptée par les élèves n'est sans doute pas issue de cette analyse, et l'enseignant en a conscience. Anticipant cette démarche plus contractuelle des élèves, il peut cependant essayer de rapprocher les deux démarches.

Nous donnons ci-dessous notre analyse de la tâche (experte) en termes de mises en fonctionnement des connaissances présentées en cours et des adaptations à y introduire pour l'exercice (Robert *et al.*, 2012).

Analyse de la tâche : connaissances à mettre en œuvre et adaptations attendues

Connaissances nouvelles en jeu, venant d'être introduites : calcul d'angles (droits ou non) dans des triangles dont les longueurs des côtés sont connues, utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore ou du théorème.

Connaissances anciennes : la propriété vue en sixième, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

Adaptations : la tâche est complexe dans la mesure où plusieurs étapes sont nécessaires et que c'est la conclusion qui pilote la résolution. Il faut reconnaître que le parallélisme vient du fait que les droites concernées sont perpendiculaires à une même droite ; ces propriétés s'obtiennent en appliquant deux fois la réciproque du théorème de Pythagore dans deux triangles dont on connaît les mesures des 3 côtés.

Il y a donc un changement de point de vue à mobiliser pour concevoir la stratégie (de droites parallèles à droites perpendiculaires à une même troisième — théorème ancien) et des étapes à respecter avec encore des changements de point de vue à identifier, au moins en acte : passer de la considération de triangles rectangles à celle de droites perpendiculaires, explicitant la présence d'angles droits. Il y a aussi un choix : utiliser le théorème de Pythagore ou sa réciproque.

Nous avons choisi de présenter quelques citations extraites de la séance, en en donnant le récit complet.

et sa réciproque.

[10] On distingue encore le théorème et sa réciproque.

L’élève au tableau inscrit la mesure des segments aux bons endroits et le dialogue s’installe. Pour savoir si les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles, l’élève propose de montrer que des triangles *ABC* et *BCD* sont rectangles sans faire de lien avec le résultat cherché. C’est donc une proposition d’activité intermédiaire et l’enseignant choisit de lui demander de replacer cette étape dans une stratégie globale : *« Alors en quoi ça peut nous aider ? »*.

La question viserait à ce que l’élève reconstitue ces étapes qui permettent d’aller des hypothèses à la conclusion ou, au moins, se pose cette question. Nous pourrions évoquer un lien, une proximité dans la mesure où la question oriente l’élève à chercher une relation entre sa proposition et une stratégie qui l’inclut, en réfléchissant à ce qui est déjà connu, plus généralement. Mais c’est trop difficile, l’élève n’y arrive pas, il n’y a pas vraiment de proximité ! Cela a peut-être manqué à l’élève pour résoudre l’exercice. L’analyse *a priori* alerte sur cette complexité liée aux étapes et aux changements de point de vue successifs à mobiliser et engage les chercheures à comprendre comment l’enseignant en tient compte.

L’enseignant choisit alors d’en rester à ce qu’a dit l’élève, de ne pas s’en éloigner trop et de poser une question plus limitée, lui faisant préciser où sont les triangles en question : *« Bien, donc déjà, sur cette figure, t’as identifié, t’as identifié quelle figure ? Comment as-tu décomposé la figure ? »* (*Q1*).

Cette question permet à l’élève cette fois d’expliciter sa démarche et le changement de point de vue en acte qu’il propose : passer des droites à étudier à des considérations concernant des triangles de la figure — on évoquera une proximité parce que le professeur s’appuie ce qu’a fait l’élève pour l’amener à décrire la figure autrement. C’est évidemment une aide très limitée qui ne peut être qualifiée en soi de procédurale (comme défini en 2.2.) car elle ne donne aucune information directe supplémentaire à l’élève ; elle le fait juste réfléchir à sa propre activité de résolution, avec les verbes identifier et décomposer, en l’orientant vers l’explicitation de ce qui va servir, que l’élève a sans doute en partie repéré mais peut-être pas exprès (seulement à cause du contexte). Il y a donc un rapprochement suscité par l’enseignant entre la résolution à venir de l’exercice et la description de ce qu’a fait[11] l’élève, qui va permettre à ce dernier d’aller un peu plus loin dans sa démarche. On voit ici que le professeur s’appuie sur ce qu’a dit l’élève mais veille à ne pas anticiper en donnant lui-même la démarche globale, pour l’instant apparemment hors de portée de l’élève.

L’enseignant choisit ensuite l’un des deux triangles et fait préciser quel est l’angle droit à trouver puis il a recours à des marques ostensives (codage d’angles - aide portant sur les signifiants), peut-être pour que tout le monde repère bien de quoi on parle. Nous ne les qualifierons pas de proximités car les élèves n’en sont pas à l’origine. L’enseignant mutualise la proposition de l’élève.

Puis il fait une nouvelle tentative, pour faire expliciter la démonstration du caractère rectangle supposé des triangles en jeu. *« Première question c’est est-ce qu’on a suffisamment d’informations pour démontrer qu’ils sont rectangles ? »* (*Q2*).

C’est donc une question sur les modalités d’application du théorème (non nommé) à utiliser, associée à l’activité à mener pour appliquer le théorème (démontrer). Cela appelle une réponse impliquant la contextualisation du théorème à faire dans ce cas-là. Cela relie ainsi un résultat annoncé par l’élève et sa justification à l’aide d’un théorème connu (ou en en voie d’acquisition) : cela peut porter ce que nous allons appeler une proximité, d’une connaissance à

[11] Plus exactement ce qu’il dit qu’il a fait, mais nous n’entrons pas dans la distinction ici.

son application en contexte. Ici, l'élève ne répond pas, mais un autre élève le dit : *« Oui parce qu'on a les longueurs des côtés »*. On peut espérer que l'élève interrogé va profiter de cette réponse, grâce à la proximité en germe dans la question de l'enseignant.

On peut voir aussi dans cette intervention une autre visée, dans le fait même de se demander s'il est possible d'appliquer un tel théorème. On induirait alors un lien entre une démarche en contexte et d'autres démarches analogues. On évoquerait alors une proximité d'un autre type, élargissant le point de vue de l'élève à partir d'une activité dans un cas particulier à un cas plus général. On peut penser que l'enseignant profite de l'occasion pour introduire cette réflexion constructive (généralisatrice) au moins pour certains élèves.

Le dialogue se poursuit ; l'enseignant demande à l'élève au tableau de citer la dernière propriété qu'il va utiliser pour conclure (sur les deux droites perpendiculaires à une même troisième) mais ce dernier n'arrive pas à exprimer clairement sa pensée. L'enseignant (P) relance la recherche en récapitulant ce qui est connu et ce qui est visé puis interroge un autre élève (E) qui ne cite pas la propriété qui convient.

E : *Alors si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

P : *Est-ce qu'elle a utilisé la bonne propriété ? C'est quoi les hypothèses de ta propriété, répète, les hypothèses de ta propriété c'est… ?* (l'élève se tait) (*Q3*).

P : *C'est écrit là. T'as dit quoi si deux droites sont ?*

E : *Parallèles.*

P : *On le sait qu'elles sont parallèles ou pas ? Non on va justifier, déjà c'est… Attention !*

E : *Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.*

P : *En hypothèse j'ai deux droites perpendiculaires à une même droite et c'est justement en conclusion que je veux deux droites parallèles donc t'as pas utilisé la bonne.*

L'enseignant reprend ainsi l'élève, mais sans corriger tout de suite, alors qu'il aurait pu dire quelque chose comme, « ici, comme vous cherchez des droites parallèles, il faut utiliser la réciproque de cet énoncé » ce qui aurait porté une information moins directement liée au travail de l'élève. L'enseignant fait au contraire développer ce qu'a dit l'élève, en insistant sur ce qui joue le rôle d'hypothèses dans l'énoncé qu'il a cité. Il y a là un travail demandé sur le savoir en jeu. Le fait d'être amené à saisir l'inversion qu'il a faite entre hypothèses et conclusion du théorème à choisir permet à l'élève de constater que son énoncé ne convient pas et de le rectifier en citant le « bon » théorème général à utiliser. On a donc un discours qui s'appuie complètement sur l'activité de l'élève, en termes de mobilisation d'une connaissance, en la lui faisant analyser.

Remarquons en revanche que des changements de points de vue implicites sont en jeu, signalés dans l'analyse *a priori* de la tâche. On pourrait aussi évoquer la déconstruction dimensionnelle citée par Duval et Godin (2005). Il y aurait peut-être eu lieu d'introduire des éclaircissements, liés au contexte précis, permettant de les expliciter. Il y aurait là une occasion de proximité « manquée » pour certaines élèves.

Et voici la conclusion où l'enseignant reformule les résultats obtenus en s'appuyant explicitement sur les réponses des élèves :

P : *On passe à la rédaction, est-ce que pour la méthode pour la façon de faire c'est clair pour tout le monde notamment ceux qui n'avaient pas compris ; J. et compagnie ? Donc quand vous avez des longueurs et qu'on reconnaît des triangles et quand on connaît les 3 longueurs des 3 côtés* (il montre sur le texte et le dessin) *du triangle, y a de grandes chances qu'il faut* *s'intéresser au fait qu'ils soient rectangles ou pas. Ici le fait d'avoir des angles droits peut permettre éventuellement de démontrer que les droites sont parallèles, d'accord ?*

Il y a là un commentaire méta qui relie ce qui a été proposé dès le début par l'élève et le théorème général déjà connu, avec les éléments nécessaires à la justification, encore une proximité, ici en termes de connaissance à mobiliser (à reconnaître). Ce commentaire concerne non seulement le choix du théorème à faire dès qu'on connaît les longueurs des côtés d'un triangle mais encore une stratégie possible quand on doit trouver un parallélisme : il y a là une autre proximité, en termes d'activité, qui relie ce qu'ont fait les élèves en contexte et ce qu'ils pourront faire dans des situations analogues.

L'analyse des interventions de l'enseignant, dans ces courts extraits, nous a permis de repérer différents éléments porteurs de ce que nous appellerons proximités. Toutes s'appuient ainsi sur ce qu'ont fait ou ont dit des élèves ou encore sur ce que le professeur pense que les élèves ont déjà fait ou vu (activités et/ou connaissances). Elles sont attachées à des questions ou des affirmations ou encore des commentaires méta de l'enseignant. Mais on perçoit des différences entre elles, notamment selon la manière dont contextualisé et décontextualisé interviennent :

- dans (*Q1*), le travail reste en contexte ;
- dans (*Q2*), il s'agit de passer du théorème général à son application ;
- dans (*Q3*) il s'agit de passer du contexte au théorème évoqué à tort…

Nous distinguerons plus loin ces différents types, dans la mesure où le travail provoqué n'est pas le même, mais en faisant l'hypothèse que toutes les dynamiques enclenchées sont utiles car elles co-existent dans les activités mathématiques attendues.

Quel est l'intérêt de cette analyse ? Nous pouvons supposer que l'enseignant a envie d'aider les élèves n'ayant pas réussi l'exercice jusqu'au bout. Comment fait-il ? D'abord il se base sur un de ces élèves, interrogé. Ensuite, les questions qu'il pose, en induisant une réflexion sur le travail fait ou non fait, amènent des réponses qui lui permettent de rester proche de ce qui a été fait, et par exemple, comme suggéré, de ne pas introduire d'emblée la stratégie globale : cette anticipation n'aurait sans doute pas été accessible à l'élève interrogé et sans doute à d'autres. Questionner l'élève d'emblée sur une démonstration possible du parallélisme de deux droites aurait modifié les proximités utilisées ensuite, à partir des réponses obtenues, en réduisant l'appui sur l'échec initial des élèves. Le jeu des proximités utilisées amène aussi l'enseignant à faire préciser, explicitement, y compris grâce à d'autres élèves, la manière de contextualiser les théorèmes en jeu — visée de l'exercice. Autrement dit, cette analyse locale, contextualisée, révèle des éléments renforçant la stratégie de l'enseignant pour rester proche des élèves pendant cette correction, tout en amenant à dégager du point de vue des chercheures des alternatives complémentaires de proximités.

2. La démarche suivie en recherche

2.1. Les extraits de discours étudiés

C'est le travail effectif des élèves sur des exercices pouvant être provoqué par les pratiques des enseignants qui est en jeu pour nous, compte tenu des mathématiques concernées et des déroulements organisés en classe (formes de travail des élèves, durée, et échanges).

Plusieurs travaux ont précisé les analyses des tâches, en relation avec les mises en fonctionnement des connaissances et leurs adaptations (Robert *et al.*, 2012). Ainsi, reconnaître un théorème ou ses modalités spécifiques ne met pas en jeu la même activité que l'appliquer sachant que c'est ce théorème qui doit être utilisé ; de même, introduire un intermédiaire pour en rendre possible cette application, mélanger des cadres ou des registres pour mener un calcul, planifier des étapes, tenir compte des questions antérieures ou encore faire des choix, toutes ces adaptations modifient l'activité que les élèves déploient avec leurs connaissances. Cependant, ce sont les déroulements organisés sur ces différentes tâches qui nous intéressent ici, et, plus particulièrement, dans leur dimension interactive, les interventions orales de l'enseignant en relation avec ce qui est visé. Ces éléments de discours interviennent de différentes manières, dans divers commentaires (méta).

Les aides, données à l'oral, pendant des recherches d'exercices, fréquentes en classe de mathématiques[12], se distinguent par leurs visées et pourraient avoir selon les cas une influence différente et complémentaire sur les activités des élèves. Sont en jeu, outre la nature de l'exercice, le moment où ces aides interviennent par rapport au travail des élèves, et leur fonction du point de vue de l'enseignant. Nous avons distingué des aides procédurales, lorsqu'elles engagent les élèves dans une démarche à suivre en indiquant soit une procédure soit un théorème soit une méthode à utiliser. Elles peuvent servir à débloquer des élèves ou à accélérer leur recherche. Les aides constructives, quant à elles, se présentent comme une certaine généralisation du travail réalisé ; elles peuvent faire réfléchir les élèves à partir de ce qu'ils ont fait. Dans ce texte, nous relisons d'une autre manière ces aides en y cherchant dans quelle mesure on peut déceler des liens avec ce qui est jeu dans le contexte, et les identifier.

Plus généralement, les éléments de discours de l'enseignant susceptibles de contenir des proximités peuvent prendre la forme de déclarations, de répétitions avec transformations (le dire autrement), d'éclaircissements, d'explicitations, dont des mises en garde, directes ou indirectes. Elles peuvent aussi prendre la forme de rappels reliant la mémoire de la classe et ce qui est fait ou dit. Ce peuvent être encore des questions qui orientent la réflexion des élèves vers ce qui est visé, à partir de ce qui a été fait. Elles peuvent porter sur des connaissances et/ou sur des activités, que ce soit des résultats obtenus ou des démarches mises en œuvre, la distinction n'étant pas toujours facile à faire (*cf. Q1*, *Q2*, *Q3*). Ajoutons que ces interventions peuvent être spontanées, ou en réponse aux élèves. Elles peuvent accompagner des interactions individuelles ou collectives.

2.2. Une définition des proximités

Nous nous intéressons à de petits extraits de discours oraux des enseignants portant d'une manière ou d'une autre sur les mathématiques en jeu, en ne retenant, et c'est leur caractéristique, que ceux dont on peut faire l'hypothèse qu'ils s'appuient sur ce qui vient des élèves : ce sont nos proximités (Bridoux *et al.*, 2016 ; Chappet-Paries, Pilorge & Robert, 2017b).

Précisons que ce qui vient des élèves est constitué de leurs connaissances et/ou activités actuelles. Ainsi, comme dans l'exemple précédent, certaines proximités portent sur la résolution de l'exercice que fait l'élève (*cf. Q1*, *Q3*) alors que d'autres concernent directement un savoir en jeu (*Q2*), à appliquer. Il y a là une différence entre les moments d'exposition du cours et les séances d'exercices pour lesquelles la plupart des proximités portent sur les activités (cela peut aussi être le cas pour certaines tâches introductives éventuellement).

Notre expression ci-dessus « dont on peut faire l'hypothèse » mérite aussi commentaire : ou bien l'enseignant répond directement à un élève en reprenant des éléments de ce qui a été dit (ou fait)

[12] Déjà étudiées (Chappet-Paries, 2010 ; Robert *et al.*, 2012).

et en les reliant à du contenu mathématique, c'est alors explicite, ou bien, dans certains cas, c'est nous (chercheures) qui estimons que cet appui est constitué implicitement par ce que l'enseignant pense venir des élèves. Il a pu interpréter ce qu'il a repéré ou entendu, ou il est convaincu, à partir de son expérience de la classe par exemple, qu'il y a appui. Ce peut être éventuellement un rapprochement avec des éléments plus anciens, (supposés) connus, rappelés même quelquefois — connaissances ou activités.

Dans tous les cas sont en jeu des connaissances au sens large (y compris procédures, démarches, méthodes) ou des activités, non encore maîtrisées (par tous les élèves) mais « proches » de ce qui est déjà connu[13] des élèves, qui sont visées, pour appliquer des savoirs ou les renforcer.

En revanche, prévenir les élèves d'une erreur fréquente mais qu'ils n'ont pas encore eu l'occasion de commettre n'est pas étiqueté comme une proximité. De même, nous ne retenons pas comme « candidats proximités » les simples répétitions du travail des élèves, sans aucun ajout, ou les annonces sans lien avec ce travail, non que ces éléments soient inutiles, loin s'en faut ; on a déjà souligné ailleurs par exemple le rôle des structurations des cours ou démonstrations (annonces des étapes ou des sous-parties) pour le suivi des élèves (Robert, 1995). Leur utilité ne se justifie pas de la même manière.

Nous interprétons cependant certaines questions de l'enseignant faisant suite à une intervention d'élève comme des proximités lorsque cette question pousse l'élève à dépasser un peu ce qu'il a dit ou fait, grâce à l'orientation contenue dans la question.

Ce sont donc des analyses très locales, contextualisées, qui permettent de détecter et d'étudier ces proximités ou de suggérer de nouvelles occasions[14] qui, dans d'autres circonstances, auraient pu y donner lieu.

2.3. Pourquoi cette étude ?

Pourquoi s'intéresser à ces proximités ? À partir de quel moment une connaissance peut être déclarée « proche » de celle qu'a déjà un élève ? Y a-t-il toujours des connaissances sur lesquelles s'appuyer ?

Il est bien sûr impossible de répondre directement à ces questions, et encore moins pour chaque élève.

Cependant, une justification théorique de l'étude tient à l'opérationnalisation que nous faisons du modèle de la zone proximale de développement (ZPD, Vygotski, 1997) que nous adoptons et tentons d'adapter (Robert, 1998). L'hypothèse générale est que des activités des élèves, effectuées avec l'aide de l'enseignant, mettant en jeu des connaissances à acquérir proches de leurs connaissances acquises, peuvent faciliter l'acquisition visée[15]. Ainsi, dans certains cas, établir explicitement des liens entre l'activité effective en contexte des élèves et les mathématiques en jeu, qui « servent », peut participer à la transformation de connaissances presque déjà-là en connaissances (au sens large, *cf.* ci-dessus).

Dans le cas des exercices, les élèves pourraient être aidés par des commentaires de l'enseignant

[13] Ou au moins « vu » dans des cours qui précèdent les séances d'exercices.

[14] Cela ne met en aucune manière en jeu la gestion de l'enseignant auteur de l'extrait, et qui maîtrise bien mieux que nous son environnement.

[15] Nous utilisons indifféremment ici apprentissage, acquisition et conceptualisation. Les acquisitions signalent une conceptualisation réalisée, au moins en partie, les apprentissages sont associés au processus de conceptualisation.

sur ce qui est en jeu, commentaires dont ils peuvent se saisir grâce à la proximité avec ce qu'ils ont dit ou fait ou savent, même s'ils ne pouvaient pas, seuls, penser ou dire ou faire ce qui a été ajouté, expliqué, demandé par l'enseignant.

C'est « Ah, c'est ça » ou le visage qui s'éclaire, tellement gratifiant pour l'enseignant, d'un élève qui réalise quelque chose de cet ordre, et le retient.

Ainsi les proximités pourraient, dans une certaine mesure, participer à la construction des connaissances ; cela dépendrait de la qualité du rapprochement entre ce qu'ont fait les élèves, ce qu'ils peuvent « entendre », et ce que dit l'enseignant.

Réciproquement on peut aussi supposer qu'un manque de proximité entre l'état des connaissances et des activités des élèves et ce que présente l'enseignant peut ne pas faciliter une acquisition, quelle qu'elle soit. En particulier, les anticipations ajoutées par les enseignants sur lesquelles ils comptent pour contribuer à préparer, familiariser les élèves avec ce qui est attendu pourraient rater leur cible dans la mesure où ce qui est en jeu reste trop loin de ce que savent ou ont fait les élèves, leur « déjà-là »… En revanche, la réflexion sur les mathématiques à enseigner peut amener à anticiper sur le choix des tâches, en proposant des exercices dont on peut prévoir, vu les difficultés connues des élèves, qu'ils donneront des occasions de proximités. Cependant, dans certains cas, même des répétitions peuvent être à l'origine de proximités, ce qui a été déjà dit pouvant servir d'appui.

Finalement mettre en évidence les occasions de proximité, les proximités tentées et/ou manquées, aiderait à mieux comprendre ce que les enseignants développent ou non comme rapprochements éventuels entre le travail des élèves et ce qui est en jeu dans l'enseignement. Pour les enseignants, le fait d'être attentifs, pendant les déroulements, aux liens entre ce qui vient des élèves et les connaissances visées, pourrait enrichir, par des proximités, certaines de leurs interactions en classe (comme développé en conclusion).

Un intérêt annexe de cette étude, par-delà ce qui a déjà été dit, est qu'elle amène les chercheures, dans leur analyse fine des interactions, à s'interroger sur les implicites éventuels des discours des enseignants, voire sur ce qui est tellement naturalisé par eux qu'ils ne perçoivent plus les difficultés des élèves, devenues transparentes. Ces dernières peuvent apparaître néanmoins dans les interventions des élèves et attirer ainsi l'attention des chercheures.

Il faut enfin souligner que l'inscription des commentaires des enseignants dans les ZPD des élèves peut se réaliser de différences manières et avec des effets sans doute variables. Il est extrêmement probable qu'il y a d'importantes diversités dans les manières d'apprendre des élèves et en particulier en ce qui concerne les relations entre apprendre et comprendre. C'est déjà vrai pour les petits (Huteau & Lautrey, 1999).

2.4. Classification des proximités

Compte tenu de la spécificité du travail mathématique, entre énoncés généraux et exercices particuliers, entre aspects déclaratifs et aspects procéduraux des connaissances, un des aspects à repérer dans les proximités, qui nous a semblé porteur d'impact sur les acquisitions des élèves, tient à la distinction entre un appui qui va du contextualisé présent chez les élèves à du décontextualisé introduit (ou à introduire) par le professeur ou alors, dans le sens inverse, du décontextualisé (le cours notamment) au contextualisé, ou alors un appui qui « redit » les choses autrement, au même niveau de généralité.

Ce qui vient des élèves est ainsi associé, avec l'intervention choisie par l'enseignant, à ce qui peut s'en rapprocher en termes de connaissances ou d'activités mathématiques, pas encore explicitement présentes, qu'il introduit ou fait introduire par les élèves (si c'est sous la forme d'une question). C'est la direction de ce rapprochement, entre contexte et expression générale, qui nous sert à classer les proximités (Bridoux *et al.*, 2016 ; Robert & Rogalski, 2020).

Plus précisément, si les élèves ont travaillé sur un exemple, à décontextualiser, on s'intéresse aux explicitations de la généralisation qui est faite de ce qu'ils ont dit, fait (ou savent), peut-être en actes — on parlera alors d'une proximité ascendante. Elle intervient dans le cadre de démarches plutôt inductives, où les élèves affrontent du nouveau « généralisant » ou au moins une mobilisation nouvelle (ou oubliée) d'un énoncé général. Il s'agit de les accompagner dans cette démarche.

Il y a aussi des proximités ascendantes qui portent sur une activité des élèves, en contexte, mettant en fonctionnement un énoncé général que l'enseignant, au lieu de citer directement, fait déduire de cette utilisation ou fait discuter. On pourrait dire que l'enseignant fait d'abord « remonter » l'élève du contexte à l'énoncé général qu'il a utilisé, lui permettant de constater similitude ou différence avec la connaissance à mobiliser ou le résultat attendu. Il en est ainsi de l'extrait de l'exemple préliminaire où l'enseignant reprend un théorème énoncé à tort par un élève en l'amenant à constater la confusion qu'il a faite entre hypothèse et conclusion dans son choix de théorème (*Q3*) : l'enseignant conclut en reprenant l'énoncé correct et ce qu'a vu l'élève, « en hypothèse j'ai deux droites perpendiculaires à une même droite et c'est justement en conclusion que je veux deux droites parallèles donc t'as pas utilisé la bonne ».

Si c'est une connaissance générale à faire approprier et/ou appliquer, il s'agira par exemple de clarifier ce que les élèves ont fait à partir de leurs premiers essais de contextualisation — on parlera d'une proximité descendante. Elle peut mettre en exergue les choix liés au sens de la connaissance ou aux conditions techniques d'application. La question (*Q2*) de l'enseignant dans l'exemple préliminaire *« est-ce qu'on a suffisamment d'informations pour démontrer qu'ils sont rectangles ? »* est porteuse d'une telle proximité descendante reliant le travail de l'élève (déjà entamé) et le théorème en train d'être appris.

S'il n'y a pas de changement de niveau de généralité entre ce qui sert d'appui et ce qui est rapproché, on parlera de proximité horizontale. Ce peuvent être des demandes de précision ou des commentaires sur ce que les élèves font, notamment en termes de changements de point de vue, registre ou cadre, ou vocabulaire. Ce type de proximité peut être repéré dans des explicitations de ces changements, à partir d'essais plus ou moins réussis des élèves, avec la visée d'une prise de conscience. La question de l'enseignant dans l'exemple préliminaire (*Q1*) *« Comment as-tu décomposé la figure ? »* est ainsi porteuse d'une proximité horizontale : elle fait expliciter à l'élève le changement de point de vue sur la figure qu'il a proposé.

Notons qu'une même phrase peut porter des proximités différentes selon les interprétations que peuvent en faire les élèves, entre ceux qui en restent à l'exercice et ceux qui y voient déjà un cas générique. Ainsi, la question (*Q2*) de l'enseignant dans l'exemple préliminaire *« est-ce qu'on a suffisamment d'informations pour démontrer qu'ils sont rectangles ? »* peut être porteuse d'une proximité descendante, comme nous l'avons dit ci-dessus, mais aussi d'une proximité ascendante (portant sur une activité de démonstration) pour des élèves qui l'entendraient de manière générale s'affranchissant du contexte de l'exercice. De ce fait, une même intervention peut être porteuse de proximités classées de plusieurs manières, voire être entendue de manière différente par les élèves.

Ainsi, les tentatives des enseignants de s'appuyer sur ce qui vient des élèves peuvent, sans doute utilement pour certains, accompagner toutes ces dynamiques qui peuvent intervenir. C'est ce qui justifie la catégorisation présentée, qui s'adapte à ce qu'élabore l'enseignant au sein de la démarche qu'il met en œuvre.

3. L'étude proposée

3.1. Présentation rapide des données

Comme dans l'exemple préliminaire, nous avons choisi des transcriptions de séances d'exercices en classe assez anciennes[16], déjà étudiées par ailleurs, et nous avons sélectionné des extraits illustrant de manière emblématique différents usages de proximités qui nous semblent pouvoir entraîner des conséquences différentes pour les apprentissages des élèves. Cela reste cependant non évalué. Ces séances avaient déjà fait l'objet d'une analyse de discours (Chappet-Paries, 2007) et il nous a semblé intéressant d'y ajouter l'étude des proximités. Ces présentations, adaptées à un objectif particulier précisé en titre, ne sont pas uniformes.

Ainsi, les premier et deuxième exemples illustrent une utilisation de proximités descendantes pour renforcer une connaissance déjà-là et une utilisation de proximités ascendantes pour préparer l'introduction d'une nouvelle connaissance à partir d'un exemple traité « à la main » par les élèves. Dans le troisième exemple, les proximités, surtout horizontales, semblent peu engager les élèves au-delà de l'action, les connaissances ne sont pas l'objet des liens. Dans le dernier exemple (tâche un peu plus complexe), l'enseignant doit faire face au fait qu'il y a peu d'occasions de proximités, quelles qu'elles soient, surtout au début, et doit intervenir pour faire démarrer les élèves. Grâce à des aides procédurales engageant les élèves dans l'action, l'enseignant réussit ensuite à élaborer diverses proximités, descendantes, avec les connaissances en jeu.

3.2. Méthodologie

Nous avons repéré et analysé systématiquement dans les extraits choisis, sur des résolutions d'exercices en classe, ce qui nous a semblé relever de la définition des proximités. Nous avons fait un double codage entre nous puis nous nous sommes mises d'accord. La petite taille de l'extrait et la non connaissance du contexte ne facilite pas ce repérage d'autant qu'une phrase peut contenir plusieurs proximités potentielles. En particulier, nous n'avons pas eu accès au cours précédent la séance, ce qui limite certaines interprétations. Cependant, la récurrence du type de proximité utilisé par un enseignant même dans un extrait court nous a semblé un gage de validité pour ces analyses très partielles.

Toutefois, comme dans l'exemple préliminaire, une analyse de la tâche est nécessaire pour mener à bien cette étude : elle sert de référence pour repérer ce qui est en jeu dans les activités des élèves. Il s'agit de lister les connaissances (supposées) déjà-là, celles qui sont mises au travail, nouvelles ou non, et d'analyser *a priori* les activités attendues en termes de mises en fonctionnement de ces connaissances. Cela amène à distinguer les adaptations des connaissances à l'œuvre (Robert *et al.*, 2012), que ce soient des reconnaissances de modalités d'application, des traitements mettant en jeu des changements de registres ou de cadres ou de points de vue ou l'introduction d'intermédiaires, ou des prévisions d'organisation des connaissances (démonstrations, étapes du raisonnement, etc.). Le format que nous adoptons pour donner ces analyses est adapté à chaque exercice.

[16] On a encore des ZEP et non des REP…

Dans certains cas, il est nécessaire de mener (ou d'adopter à partir de la littérature) une étude préliminaire de ce que nous appelons le relief sur la notion. Cela sert à préciser les spécificités mathématiques de la notion dans le programme étudié, complétées éventuellement par les difficultés répertoriées des élèves (déjà connues). Ces éléments servent à rendre plus consistante l'analyse de la tâche, par exemple en repérant ce qui peut renforcer un travail sur un point reconnu comme difficile et facilitent l'interprétation des interventions en classe, en référence à ce relief.

4. Les exemples détaillés

4.1. Des proximités descendantes qui peuvent contribuer à renforcer une connaissance en partie déjà-là.

L'extrait de séance analysé dans ce paragraphe (séance filmée vers 2005, Chappet-Paries, 2007, pp. 48-59) concerne l'utilisation, en classe de 3e, dans un contexte géométrique, des racines carrées[17], déjà introduites. Le collège est situé en région parisienne dans une zone sensible. Dans les phases de recherche, les élèves travaillent à leur place, le professeur circule et intervient individuellement ou publiquement. Les corrections sont écrites au tableau soit par l'enseignant, soit par un élève sous l'œil vigilant du professeur.

Enoncé

OCD est un triangle rectangle en O.

a) Calculer x et y.

b) Calculer z.

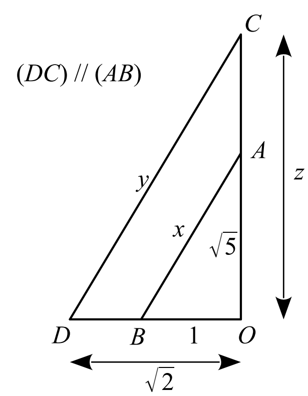


Figure 2 *: Exercice donné lors de la première séance filmée.*

Analyse des tâches : connaissances à mettre en œuvre et adaptations attendues

Connaissances enseignées auparavant dans l'année et anciennes : théorème de Thalès, racines carrées, théorème de Pythagore.

Adaptations : Il s'agit d'effectuer, pour résoudre cet exercice, plusieurs tâches successives :

- reproduction de figure ;
- reconnaissance de théorèmes adéquats (Pythagore et Thalès (direct ou réciproque) plusieurs fois de suite) et leurs modalités d'application (qui sont ici géométriquement immédiates car la figure proposée ressemble aux figures du cours) ;
- travail numérique avec les racines carrées, mettant en jeu la propriété de la racine d'un produit, mélangé à un travail géométrique ;
- dans la dernière question, utilisation des résultats précédents et choix de méthode.

Nous ne nous intéressons ici de manière détaillée qu'à la résolution de la question a) (calcul de x). Dès cette question, les élèves ont à mélanger un théorème géométrique et un calcul

[17] Programme de la classe de 3e - racine carrée d'un nombre positif - produit et quotient de deux radicaux (1998).

numérique, donnant l'occasion de revoir le sens des racines carrées.

Après un petit temps, les élèves ont reproduit la figure et cherchent la valeur de x.

E : *Monsieur, racine de 5 fois racine de 5 ça fait 5.*

P : *Ah je sais pas. Peut-être, sûrement, oui sûrement. Comment tu le sais ?*

Par cette demande de justification ou d'appel à la mémoire, l'enseignant met en jeu une proximité descendante (connaissance supposée déjà là à contextualiser ici) — associée au mot « savoir », utilisé dans la question ci-dessus et aussi plus loin. La réponse est peut-être inattendue :

E : *À la calculatrice.*

P : *Ah, à la calculatrice tu le sais, il n'y a pas une autre manière de savoir ?*

Par cette question l'enseignant suggère qu'il existe une autre méthode, sans rejeter la réponse même si ce n'est peut-être pas ce qu'il attendait. La proximité induite est horizontale ou descendante (selon que l'élève répond sur le cas particulier ou en toute généralité).

Fait suite une longue intervention de l'enseignant qui mutualise la réponse de l'élève puis répète sa question. Il fait de nouveau appel à la mémoire des élèves, ce qui est porteur de proximités descendantes reliant les réponses et le savoir en jeu déjà travaillé *« Je répète la question : Est-ce que racine de 5 fois racine de 5 est égal à 5, et, et je lui demande pourquoi elle le sait… Qu'est-ce que racine carrée de 5 ? Quand est-ce que tu as vu la racine carrée de 5 la première fois ? »*. Il obtient une réponse :

E : *Avec Pythagore.*

P : *Avec Pythagore, oui. Tu arrivais sur $AB^2=5$ et qu'est-ce que tu cherchais ? … Alors $AB=$?. Tu suis là ? $AB^2=5$ et AB positif dans la propriété de Pythagore et donc qu'est-ce qu'on en déduisait ?*

E : …

P : *$AB=$ racine carrée de 5. Donc on voit que AB est égal à $\sqrt{5}$ et je réponds à ta question AB^2 si je l'élève au carré ça fait 5*

Le professeur valide la réponse de l'élève et rappelle ce qui a été précédemment fait en classe. Par ces interventions, porteuses de proximité descendante, il contextualise les résultats obtenus précédemment (la définition de la racine carrée d'un nombre positif) à partir de ce que l'élève a dit et de ce qui a été fait antérieurement, quitte à surinterpréter peut-être certaines réponses (*cf.* « à la calculatrice »). C'est pour lui l'occasion de consolider la notion de racine carrée d'un nombre positif, en tant que savoir. Les études de relief sur cette notion en révèlent la difficulté (Dumail, 2007), d'où l'intérêt pour nous de tous ces rapprochements.

Dans la suite de la séance, nous n'avons pas repéré beaucoup de proximités mais plutôt des aides procédurales permettant d'accélérer la résolution.

4.2. Des proximités ascendantes qui accompagnent des activités géométriques introduisant une nouvelle connaissance numérique

L'extrait de séance analysé dans ce paragraphe concerne l'introduction, en classe de 3e d'un établissement classé ZEP des règles de calcul portant sur la racine carrée d'un produit[18] (séance filmée vers 2005, Chappet-Paries, 2007, pp. 64-67). Le collège est situé dans la région parisienne en zone sensible.

[18] Programme de la classe de 3e - produit et quotient de deux radicaux (1998) — maintenant en 2de.

Enoncé

On donne OA=2 ; AC=2 ; OB=1 ; BD=1.

Calculer la valeur exacte de AB et de DC.

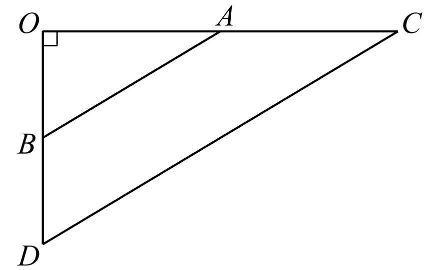


Figure 3 *: Exercice donné lors de la deuxième séance filmée.*

Analyse des tâches : connaissances à mettre en œuvre et adaptations attendues

<u>Connaissances nouvelles</u> : théorème de Thalès, racines carrées, théorème de Pythagore.

<u>Connaissances anciennes</u> : théorème de Pythagore, théorème des milieux.

<u>Adaptations</u> : La première question amène une utilisation (simple et isolée) du théorème de Pythagore dans le triangle *OAB* rectangle en *O* pour calculer la longueur *AB*. On trouve $AB=\sqrt{5}$.

La deuxième question présente un choix entre trois méthodes pour calculer *DC* :

- utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle *OCD* en calculant les longueurs *OC* et *OD* (on trouve $CD=\sqrt{20}$) ;
- reconnaître que A est le milieu de [OC] et B milieu de [OD] et utiliser le théorème des milieux à reconnaître aussi (il y a donc deux étapes) ;
- utiliser la réciproque du théorème de Thalès, à reconnaître, pour démontrer que les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles puis le théorème de Thalès, à reconnaître, pour calculer *DC* (étapes) (on trouve dans les deux derniers cas $DC=2\sqrt{5}$).

Comme la configuration des triangles *OAB* et *ODC* est classique et que les longueurs en jeu sont des nombres petits, les adaptations ne semblent pas très importantes.

La professeure passe dans les rangs et intervient individuellement, les élèves cherchent puis elle intervient publiquement et le dialogue s'installe.

L'objectif de l'enseignante est en fait d'amener les élèves à montrer que les nombres $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{20}$ sont égaux, grâce à un raisonnement géométrique connu et accessible, afin de s'approcher des règles de calcul nouvelles sur la racine carrée d'un produit. Nous allons cependant présenter plusieurs extraits, porteurs de proximités différentes selon la nature des savoirs en jeu (anciens ou nouveaux).

La première intervention de l'enseignante concerne un premier théorème à utiliser. Le mot *Thalès* s'entend dans la classe et l'enseignante reprend :

> P : *Alors est-ce que (AB) est parallèle à (CD), en tout cas c'est pas une hypothèse. Plus précisément que Thalès, la réciproque de Thalès. On pourrait montrer que (AB) est parallèle à (CD) avec la réciproque de Thalès (Q4). Je sais pas si ça sert. On verra.*

Cela peut porter une proximité descendante, mais cela peut aussi dépasser ce que les élèves ont pensé. Le nom du théorème pourrait venir seulement d'un effet de contrat, à partir de la figure. L'enseignante précise d'emblée qu'on ne sait pas encore si les droites concernées sont parallèles, alors que les élèves n'ont peut-être pas encore réfléchi à la mise en fonctionnement du théorème. Elle oriente ainsi la proposition initiale vers l'utilisation de la réciproque de Thalès (qu'elle cite immédiatement), éventuellement encore loin de la réflexion de certains élèves. Une alternative à cette aide (qui serait alors procédurale) serait (si le temps n'était pas compté !) de poser une question pour faire préciser leur idée aux élèves.

Cependant, suivant la piste de la réciproque, les élèves disent qu'ils n'ont pas les mesures. L'enseignante pose alors une question générale sur le choix de la méthode à adopter portant une proximité descendante, sur une activité, à partir de la question, la précisant cependant en demandant comment faire.

> P : *Quelles mesures ? On va les calculer. AB et CD, on va les calculer. C'est pas parce qu'on a parlé de Thalès qu'on doit absolument s'en servir. Bon alors. Chut ! Oui alors pour calculer la valeur exacte de AB qu'est-ce que vous proposez comme méthode ?*

Elle valide la réponse des élèves (le théorème de Pythagore) et leur demande de justifier (proximité descendante, à partir de leur proposition, mettant en jeu le savoir) :

> P : *Pour AB, on utilise le théorème de Pythagore. Pourquoi le théorème de Pythagore ?*

Elle incite alors les élèves à compléter leur réponse (proximité horizontale sur le savoir)

> P : *Oui, parce qu'il manque une longueur et que le triangle est ?*

Un élève vient recopier au tableau ce qu'il a écrit et le professeur récapitule les résultats obtenus par les différentes méthodes (*cf.* analyse des tâches). Elle fait participer les élèves en leur laissant compléter ses remarques, avec un jeu de proximités horizontales au niveau de l'activité des élèves et descendantes au niveau des connaissances en jeu.

L'enseignante récapitule ensuite les résultats trouvés :

> P : *Ça veut dire que sûrement 2 fois $\sqrt{5}$ c'est égal à ?*
> E : $\sqrt{20}$.

L'enseignante explique alors son objectif :

> P : *En fait, c'est là que je voulais arriver. Je voulais arriver à vous montrer que $\sqrt{20}$ c'est aussi égal à 2 fois $\sqrt{5}$.*

Puis, par un commentaire méta, elle tente d'amener les élèves vers la connaissance nouvelle esquissée :

> P : *Bien, alors maintenant est ce que vous avez une idée pour expliquer, essayer de voir comment on peut passer bien de $2\sqrt{5}$ à $\sqrt{20}$? Il semblerait que ça soit égal puisqu'on a trouvé, qu'on vient de le voir sur un exemple numérique.*

L'enseignante propose de chercher à expliquer l'égalité des deux nombres, trouvée par les élèves, en formulant une règle de calcul générale concernant la racine carrée d'un produit. La démarche est « ascendante », partant d'un contexte particulier pour arriver à exprimer un savoir en jeu.

Un élève se lance :

> E : *2 fois 5 fois 2.*

L'enseignante va mutualiser cette réponse et, en demandant une justification supplémentaire, encourage l'élève à poursuivre son raisonnement (proximité horizontale)

> P : *2 fois 5 fois 2, pourquoi ? Alors tu dis que 20 c'est 4 fois 5 et après ?*

Ici, l'enseignante fait presque un pari : que l'élève a lu 2 fois 5 fois 2 comme 4 fois 5… Surinterprétation ? Elle continue :

> P : *Tu dis que 4, c'est le carré de 2. Tu peux l'écrire la suite pour voir comment tu l'écris,*

comment tu termines après ?

L'élève, qui s'est immédiatement saisi de ce que vient de dire l'enseignant même s'il n'en était pas conscient au début, écrit $\sqrt{2^2 \times 5}$.

L'enseignante suggère alors (proximité ascendante visant à faire prendre conscience aux élèves qu'il manque quelque chose pour pouvoir conclure) :

> P : *Il y a une petite étape intermédiaire que j'aimerais que tu termines.*

Elle reprend avec une proximité ascendante en termes de connaissance :

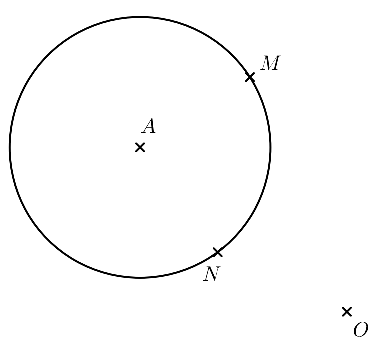
> P : *Elle a dit que 4 c'est 2^2. Ce que tu nous as pas dit quand tu passes de là à là, tu supposes que tu peux faire ça. Tu supposes que quand on a la racine d'un produit c'est égal au produit des racines. C'est ça que tu fais. La racine, tu l'as distribuée sur les deux parties. Il semblerait que ça soit égal puisqu'on a trouvé, qu'on vient de le voir sur un exemple numérique. Donc avant de le voir tout le temps on va voir si ça marche avec d'autres nombres.*

Nous faisons l'hypothèse que la proximité ascendante portée à ce moment-là par le discours de l'enseignante, qui explicite le théorème en acte de l'élève, peut faciliter l'acquisition future de la propriété correspondante, ancrée sur un travail en contexte partagé. On voit bien au passage la relation entre la tâche choisie et l'occasion de proximité « créée ».

4.3. Des proximités engageant peu de dynamique au-delà de l'action

Cette séance d'exercices concerne une classe de 5e d'un collège de la banlieue parisienne classé ZEP. Elle a été enregistrée dans les années 2000 et a pour objet l'utilisation de propriétés de la symétrie centrale[19]. Des observations recueillies (Paries, 2002 ; pp. 564-577), on peut déduire que lors des cours précédents, les élèves ont appris comment construire le symétrique d'un point, d'un segment, par une symétrie centrale donnée. Quelques propriétés ont également été vues : le symétrique d'un segment est un segment de même longueur, le symétrique d'un angle est un angle de même mesure.

Enoncé distribué aux élèves



- *Reproduire la figure en vraie grandeur et la coder sachant que l'angle $\widehat{MAN}$ mesure 90° et que le rayon du cercle est de 4 cm.*
- *Construire les points M', N', A', symétriques respectifs des points M, N, A par rapport au point O.*
- *Expliquer pourquoi on a $A'M' = 4$ cm et $A'N' = 4$ cm.*
- *Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{M'A'N'}$? Justifier la réponse (sans mesurer l'angle).*
- *Tracer le cercle de centre A' qui passe par les points M' et N'. Que peut-on dire des deux cercles ?*

Figure 4 *: Exercice : utilisations de la symétrie centrale.*

[19] Le programme est celui de 1997 : l'élève doit être capable de construire géométriquement le symétrique par rapport à un point, d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un angle, d'un cercle et d'utiliser des propriétés de figures symétriques pour justifier une égalité de distances, une égalité angulaire.

Analyse des tâches : connaissances à mettre en œuvre et adaptations attendues

<u>Connaissances nouvelles</u> : symétrie centrale, définitions, constructions, premières propriétés.

<u>Connaissances anciennes</u> : constructions de cercles.

<u>Adaptations</u> : Pour reproduire la figure en respectant les mesures de longueur et d'angle, il faut utiliser le compas et choisir, pour placer les points M et N, l'équerre ou le rapporteur. La position du point O n'est pas précisée, ce qui peut être une difficulté.

La construction des points M', N' et A', amène à appliquer directement les définitions et méthodes vues dans le cours. Il faut ensuite utiliser directement le théorème sur la conservation des longueurs et des angles pour justifier les résultats sur les mesures des longueurs $A'M'$ et $A'N'$ et prévoir celle de l'angle $\widehat{M'A'N'}$.

La dernière question permet de découvrir en acte que l'image d'un cercle est un cercle « égal ».

Nous nous intéressons ici au début et à la fin de la séance.

L'exercice est à résoudre sur le cahier d'exercices des élèves et les corrections se font au tableau par le professeur.

L'objectif visé par l'enseignante est de démontrer que l'image d'un cercle par une symétrie centrale est un cercle de même rayon qui a pour centre l'image du centre du cercle initial par cette même symétrie. Mais s'agit-il seulement d'introduire les mots « symétrique d'un cercle » et de le décrire ou de justifier plus avant qu'on a construit le symétrique du cercle initial ? Ce n'est pas clair. La réciproque n'est bien sûr pas demandée. En fait les élèves construisent le symétrique d'un point M quelconque du cercle de centre A et de rayon 4 cm et montrent que son symétrique M' appartient au cercle de centre A' (symétrique de A) et de rayon 4 cm. Quel est le raisonnement précis en jeu ?

La professeure, tout en distribuant l'énoncé, annonce aux élèves l'objectif visé, résoudre un problème simple qui va leur permettre en acte de s'emparer d'un mode de raisonnement nouveau qui va servir *« d'exemple de ce qu'on attend de vous à partir de la cinquième en géométrie, c'est-à-dire non seulement identifier des figures mais être capable d'expliquer des réponses, de justifier des réponses »*. Il n'y a pas de proximité dans cette annonce, ce qui ne veut pas dire qu'elle n'est pas utile. Les élèves lisent l'énoncé et très rapidement certains interviennent :

E : *J'ai pas de rapporteur.*
E' : *Moi non plus.*
P : *Vous avez vu la dimension de l'angle ?*

La question s'appuie directement sur la réaction des élèves, non pour leur donner l'information qui pourrait les aider à continuer leur construction de la figure, mais pour les inciter à s'intéresser à une donnée qu'ils ont peut-être négligée. Elle porte une proximité descendante indirecte (reconnaissance d'un nom d'angle et activité implicite pour le construire) mais le blocage persiste. On peut noter l'utilisation du mot « vu » qui signale une perception plus qu'une action… Devant le blocage, l'enseignante reprend :

P : *Absolument, uniquement le rapporteur ?*

Cette question fait appel à ce que les élèves connaissent déjà concernant le choix et l'utilisation des instruments. Elle peut induire une proximité horizontale ou descendante (selon que les élèves entendent ou non une question générale), qui relie ce qui est à faire (la construction, non citée) à ce que les élèves ont dit. Même s'il était possible d'utiliser le rapporteur, peut-être est-ce le ton de l'enseignant qui semble dissuader les élèves de continuer dans cette voie alternative non retenue par l'enseignante. Un élève évoque alors le compas, puis l'enseignante amène les élèves à évoquer l'équerre pour tracer un angle droit. Ses questions sur la nature de l'angle puis sur l'instrument à utiliser pour tracer un angle droit pourraient mettre en jeu pour certains élèves une proximité descendante sur les angles droits et horizontale sur l'équerre.

L'enseignante a finalement amené les élèves à la construction attendue par elle grâce à des questions sur la dimension et la nature de l'angle puis l'instrument à utiliser, ces questions pouvant orienter la réflexion sur ce qui est attendu.

Les 35 minutes suivantes sont consacrées à des explications de vocabulaire (les mots symétriques, respectifs), au repérage des questions posées dans l'énoncé puis des dimensions à respecter pour reproduire et compléter la figure. Certains élèves n'ont toujours pas abordé la construction.

L'enseignante prend ensuite en charge le rappel de la construction du symétrique d'un point dans le contexte de l'exercice. Elle s'appuie ici sur le fait que certains élèves n'ont rien fait pour les questionner : *« Alors, méthode de construction du symétrique d'un point. Je vais le faire à main levée. Vous avez le point A, ici le point O. Qu'est-ce qu'on fait ? ».* On peut se demander si la question que pose l'enseignante porte sur le tracé (dessin) ou sur des éléments géométriques liés à la configuration représentée par chaque dessin (avec une proximité horizontale si l'enseignante s'en tient au tracé qui a été fait ou descendante si elle se réfère à la méthode exposée en cours, liée à une activité générale).

La réponse des élèves, limitée à une action correcte mal exprimée, n'est manifestement pas celle qu'attend l'enseignante.

> E : *On fait passer le trait. On trace un trait madame.*
> P : *On trace quoi ?*

Cette demande implicite d'utilisation du vocabulaire mathématique peut porter une proximité horizontale. Les élèves répondent ensuite correctement à chaque « petite » question de l'enseignante (sur des noms de points) qui peut donner lieu à des proximités horizontales, associées aux verbes tracer, mesurer, reporter, et qui, pas à pas, amènent la construction du symétrique de A par rapport à O sans aucune référence à quelque chose de général ni même énoncé des propriétés mathématiques en jeu.

L'enseignante valide les réponses pas à pas des élèves et les prolonge en indiquant un instrument de report suggérant un autre choix possible que la règle pour obtenir des longueurs égales. Cette proximité horizontale est peut-être une occasion manquée éventuelle de proximité descendante : pourquoi on fait ça ?) :

> P : *Alors on mesure là et on reporte pour obtenir le point ?*

La précision attendue peut s'entendre comme une proximité descendante en tant que précision de vocabulaire (symétrique de A) ou horizontale (nom du point).

La conclusion de l'enseignante concerne ce report des mesures à l'aide du compas :

> P : Donc les élèves qui utilisent le compas pour faire le report de mesure… C'est bien mais ils n'ont pas besoin de construire un cercle qui ne sera pas faux mais qui va surcharger la figure. Ce qu'il faut simplement, quand on utilise le compas, c'est faire un arc de cercle qui va venir à l'intersection avec la droite de départ. Un arc ça suffit.

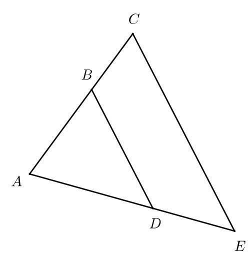
Cette proximité horizontale maintient les élèves sur le tracé de la figure (à ne pas surcharger). C'est peut-être encore une occasion manquée de proximité descendante qui aurait visé à préciser la raison de ce report de mesure et la propriété utilisée.

Lorsque l'enseignante pose la question « qu'est-ce qu'on fait ? », deux types de questionnement sont possibles, celui du tracé et celui de la géométrie abstraite associée. En effet la littérature didactique sur la géométrie (Duval, 1992) insiste sur la nécessaire transition vers la géométrie abstraite dès la classe de cinquième. Or la professeure fait ici le choix de se restreindre plutôt au tracé. Les proximités ne concernent pas, pour la plupart des justifications. La construction instrumentée l'emporte sur la propriété à utiliser. Ainsi, le mot égalité n'est pas prononcé pour le report des mesures. Est-ce pour entraîner le maximum d'élèves ? Mais ils restent alors dans le « comment faire » et non dans le « pourquoi ». Tous continuent à travailler. Cependant, peut-être certains élèves sont-ils freinés dans le développement d'autres stratégies et en attente de justifications. On peut se questionner sur le rôle cognitif des proximités utilisées, sachant que, dans des séances ultérieures où les élèves seront plus à l'aise avec la connaissance, la stratégie de l'enseignante pourra être différente.

4.4. Une résolution d'exercice sans occasion de proximités permettant d'« aller plus loin »

La classe de troisième d'où est tiré l'extrait (filmée vers 2005, Chappet-Paries, 2007, pp. 60-64) est située dans un établissement classé ZEP. Pendant cette séance d'exercices, la tâche que les élèves ont à résoudre est complexe car l'exercice proposé mélange les cadres numérique et algébrique appliqués à un exercice de géométrie, sans indication (et avec des étapes à introduire). Toutes les connaissances à utiliser ont déjà été présentées en cours, la dernière étant la résolution « d'équations quotients ».

Enoncé



Le point B appartient au segment [AC], le point D au segment [AE] et les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Les longueurs sont exprimées en centimètres.

On donne $AB=x$; $BC=4,5$; $CE=8$ et $BD=5$.

Calculer x.

Figure 5 *: Exercice donnée en 3^e dans un étal-blissement classé ZEP.*

Analyse de la tâche : connaissances à mettre en œuvre et adaptations attendues

Connaissances nouvelles : résolution d'équations quotients.

Connaissances anciennes : théorème de Thalès.

Adaptations : la tâche est complexe, sans aucune étape explicite alors qu'il y en a plusieurs à suivre, avec mélange non explicite de différents cadres (numérique, algébrique et géométrique).

La figure est donnée avec l'énoncé. Il s'agit de :

- reconnaître une figure « clé » d'application du théorème de Thalès ;
- exprimer les différents rapports égaux $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}$;
- remplacer chaque longueur par sa valeur (le calcul de AC demandant un traitement algébrique) ;
- choisir le premier et le dernier rapport pour calculer x (mélange des cadres numérique et algébrique). On obtient $\frac{x}{x+4,5}=\frac{5}{8}$;
- Dernière étape : reconnaître une équation déjà étudiée et effectuer les produits en croix pour la réécrire. On trouve $x=7,5$.

L'extrait étudié concerne le démarrage et le début de la résolution de l'équation.

Une des difficultés est déjà, pour les élèves, de choisir un cadre de recherche. L'énoncé demande un calcul ce qui peut suggérer un cadre numérique ou algébrique à certains alors que la figure fournie peut les orienter vers un cadre géométrique d'autant que les derniers exercices travaillés en classe sont des résolutions d'équations (on se trouve un peu hors contrat). L'autre difficulté majeure est le mélange des cadres numérique et algébrique avec l'expression de la longueur AC en fonction de x alors que les autres longueurs ont des valeurs numériques. Il faut faire la somme de deux nombres n'ayant pas le même statut, x doit être conçu et utilisé comme un nombre généralisé et ajouté à un nombre « ordinaire ». Ainsi, l'utilisation du théorème de Thalès nécessite un calcul algébrique, ce qui est repéré d'expérience par les enseignants comme une difficulté.

L'énoncé est distribué aux élèves. L'enseignant trace la figure au tableau puis circule dans la classe. Plusieurs temps de recherche individuelle sont ménagés entrecoupés de bilans et corrections intermédiaires. Dans les phases de recherche, les élèves travaillent à leur place, le professeur circule et intervient individuellement ou collectivement. Les corrections sont faites soit par l'enseignant qui écrit au tableau, soit par un élève interrogé et qui écrit sous l'œil vigilant du professeur.

Après avoir beaucoup encouragé les élèves à se lancer dans le travail, l'enseignant les interroge pour les aider à repérer le cadre de départ du travail à mener. Un élève répond et suscite une réaction de l'enseignant :

E : *Ah, il faut utiliser de la géométrie.*

Le professeur, qui ne veut pas tout dire, tente tout de même d'orienter les élèves vers le cadre géométrique ajoutant au propos de l'élève le mot « figure » (proximité horizontale, associée à une activité, le démarrage de la résolution) :

P : *Tu utilises ce que tu veux, néanmoins tu as une figure géométrique donc peut être le point de départ c'est un point de départ géométrique.*

Certains élèves continuent à écrire des expressions numériques. Le professeur dresse alors un état des lieux :

P : *Pour le moment, il y a deux points de départ différents, il y a ceux qui sont partis sur une équation directement et il y a ceux qui sont partis sur la géométrie,*

et encourage les élèves à poursuivre leur recherche dans le cadre, quel qu'il soit, où ils se sentent à l'aise. Après un moment, il conclut son intervention en ne laissant plus le choix aux élèves :

P : *Au niveau géométrique, vous êtes partis sur quel théorème ?*

Ainsi, le professeur place les élèves dans le cadre géométrique (aide procédurale pour les derniers élèves bloqués) et dans ce cadre les questionne en s'appuyant sur une proximité descendante (associée à une activité, le choix d'un théorème).

Un élève passe au tableau pour écrire le début de la correction (avec le théorème de Thalès) que le professeur commente. Mais les élèves semblent attendre un résultat numérique.

Il faut un déblocage pour que les élèves arrivent à écrire que $AC=4,5+x$. Or l'enseignant ne peut développer de proximité faute de proposition sur lesquelles s'appuyer (*cf.* analyse *a priori*). Pour faire trouver l'expression de AC, il indique un intermédiaire :

P : *Si vous aviez $x=2$, que vaudrait AC ?*

Les élèves réussissent alors à calculer AC (6,5). Sans explicitation supplémentaire, on arrive enfin à l’écriture des égalités issues du théorème de Thalès. Le calcul attendu résulte de l’égalité de deux des rapports écrits au tableau. C’est l’occasion de travailler sur une équation quotient $\frac{x}{x+4{,}5}=\frac{5}{8}$. Ce type d’équation vient d’être présenté en cours. Les élèves bloquent.

P : *Comment je dois faire ? Qu’est-ce qu’il faut faire ? S’il vous plaît. Là je vous sens complètement largués. Comment est-ce qu’on doit faire pour calculer avec Thalès qu’est-ce qu’on fait d’habitude ? Oui, qu’est-ce qu’on prend ? Voilà qu’est-ce qu’on prend ?* (question pouvant induire une proximité descendante à partir de leur réflexion et de leurs connaissances)

E : *On prend ce qu’on connaît et on calcule, on prend les produits en croix.*

Le professeur complète la réponse de l’élève (proximité horizontale) puis relance la résolution (proximité descendante) :

P : *D’accord, donc, là, on veut ce morceau là, ce quotient, parce qu’il y a ce que l’on cherche et on prend ce que l’on connaît, et comment est-ce qu’on fait pour trouver x, là ? là-dedans ?*

Aucune réponse des élèves à cette question du professeur qui évoque les exercices déjà rencontrés. Il indique finalement aux élèves le cadre de la résolution (algébrique) avant de relancer le travail. On pourrait évoquer une proximité descendante si cela s’appuyait sur le travail des élèves — mais cela ne semble rien évoquer chez eux —, c’est donc simplement une aide procédurale, qu’il est obligé de pousser plus loin, jusqu’à retrouver les (des) élèves…

P : *Mais rappelez-vous quand même, on a fait un exercice là-dessus sur les équations, exercice 3, feuille je ne me rappelle plus son numéro mais la feuille juste avant, normalement l’exercice 3, regardez dans votre cours, mais comment est-ce qu’on fait pour résoudre une équation comme ça ? parce que là, maintenant, qu’est-ce qu’il fait ? qu’est-ce qu’il se passe ? c’est plus de la géométrie, la géométrie, elle s’arrête, en gros, elle s’arrête là, là ou là, si on veut, maintenant, pour trouver x, ce n’est plus de la géométrie, c’est quoi ?*

E : *Du numérique.*

P : *Oui mais quoi en numérique ?*

E : *Une équation.*

P : *Une équation pour trouver x alors essayez de le faire.* (proximité horizontale pour des élèves ayant eu une première idée, ou aide pour les autres ?)

Il faut encore 10 minutes aux élèves pour arriver à trouver x… avec des aides procédurales de l’enseignant sur le traitement de l’égalité des produits en croix.

Dans cette séance, le professeur ne réussit pas à s’appuyer sur ce que font ou disent les élèves pour enclencher quelque chose. Il y a peu matière à proximité parce que des liens ne s’établissent pas entre les questions posées, ce que les élèves ont déjà vu, y compris très récemment, et leurs réponses, et ce malgré les explications de l’enseignant.

Conclusion

Portée et limites de l’étude des proximités - éléments de discussion

Indiquons tout de suite une limite évidente à ce travail. En fait, grâce à l’analyse *a priori* mais faute d’informations suffisantes sur ce qui précède et suit l’extrait dans la classe étudiée, le chercheur ne peut repérer que des proximités possibles ; de plus il n’a aucun moyen de savoir si elles ont été entendues, et encore moins si elles ont eu un effet (attendu), même pour certains élèves seulement. Cependant, dans les exemples préliminaire et n° 2, on a des indices sur le fait que les proximités atteignent leur cible et contribuent à leur petite mesure à installer les connaissances visées pour certains élèves au moins. Ces questions d'évaluation des effets des proximités peuvent ouvrir une nouvelle piste de recherche, notamment avec une étude sur un ensemble cohérent de séances.

Nous avons mis en évidence dans les exemples des diversités dans les proximités portées par les interventions des enseignants, que nous avons classées, par-delà les différences liées aux tâches et au contexte, et cela peut nous engager à réfléchir à leurs conséquences éventuelles, même si cela reste potentiel.

Au niveau des apports possibles en termes de connaissances des élèves, les interventions « sans changement de niveau » peuvent sans doute participer à une dynamique cognitive. Toutefois dans certains cas (exemple n° 3), elles ne mettent pas en jeu de connaissance, dans la mesure où l'appui sur les actions des élèves en reste à ces actions sans que soit engagé de lien avec ce qui justifie ou peut faire choisir les procédures précisées dans ces interventions, sans profiter du potentiel d'élargissement des perspectives ou de généralisation en germe. Ce peut être pour ne pas effrayer les élèves, ne pas risquer de les perdre. Dans d'autres circonstances, cela aurait pu éventuellement être fait (nous évoquons alors une occasion manquée de proximité — mais qui pourrait ne pas du tout convenir dans la classe étudiée —, comme déjà indiqué). On peut se demander si, compte tenu de la stabilité des pratiques[20], la récurrence de telles interventions à l'exclusion d'autres types, ne peut pas, à terme, constituer un certain frein aux apprentissages, même si c'est gratifiant pour tous, car le temps de l'étude avance.

Certaines autres interventions peuvent tout autant être sans beaucoup d'effets sur certains élèves, si, par exemple, la distance entre contexte et décontextualisé reste trop grande pour eux (hors d'atteinte au moment où elles sont produites). En particulier, quelquefois, il n'y a pas vraiment encore de quoi s'appuyer sur ce que font les élèves — notamment s'ils ne font rien du tout… (exemple n° 4). De même, anticiper une difficulté répertoriée avec une intervention porteuse d'une « proximité » descendante appuyée seulement sur des activités à venir des élèves peut ne servir à rien, et ce tant qu'ils n'ont pas été confrontés à ce qui est en jeu. Dans ce cas, il n'est pas exclu qu'il faille tout simplement renoncer à commenter ce qui est encore hors d'atteinte, ou encore se contenter de donner une aide procédurale, qui permettra dans un deuxième temps de parler des liens avec les connaissances. Rien n'empêche ensuite de proposer un exercice analogue amenant les élèves à réutiliser les connaissances mises précédemment en jeu et qui pourra, cette fois, donner lieu à proximité.

Par ailleurs, du côté des proximités ascendantes, profiter du travail des élèves pour le (faire) généraliser n'est pas toujours facile : c'est associé à une démarche inductive moins habituelle que la démarche déductive, qui s'appuie d'emblée sur la connaissance générale en jeu.

Une autre restriction peut être soulevée dans le cas où ce qu'ajoute l'enseignant pouvait en réalité être trouvé par les élèves, soit avec un peu plus de temps de recherche, soit grâce à une question (exemple n° 2, question 4). Se pourrait-il que des proximités jouent comme des freins, minorent la recherche de certains élèves en les mettant trop vite sur une piste de résolution, voire leur donnent les réponses attendues par des interventions pensées porteuses de proximités descendantes, alors qu'elles n'induisent peut-être que des « effets Jourdain » limités à la situation (Brousseau, 1982) ? Elles seraient basées sur des surinterprétations de ce qui vient des élèves et non sur des éléments de leur ZPD. Mais comment apprécier la limite entre ce qui est proche et ce qui serait « trop loin » des connaissances actuelles ? Peut-être même n'est-il pas exclu que, à

[20] Une autre recherche consisterait à analyser chez plusieurs enseignants les proximités produites en les mettant en relation avec d'autres éléments de pratiques.

partir d'un effet Jourdain, s'enclenche « quand même » une acquisition… Certes, intervenir rapidement évite des attentes improductives de ces élèves, dont on connaît l'effet délétère sur leur attention et la continuation de leur travail. Là encore, on voit l'importance des différences éventuelles entre élèves et la difficulté à faire des choix d'intervention face à l'hétérogénéité. Cette dernière pourrait amener des effets différenciateurs de certaines proximités, en enrichissant encore la réflexion de certains élèves parce que « le discours de l'enseignant est dans leur ZPD », et en revanche ne servant à rien pour d'autres qui n'en sont pas encore là.

Deux éléments de discussion nous semblent constituer des perspectives de recherche, outre la question d'évaluation : d'abord, l'extension de l'usage du modèle individuel de la ZPD à quelque chose de collectif, qui concerne la classe[21] ; ensuite, l'apparente contradiction, évoquée plus haut, entre une interprétation des interventions de l'enseignant en termes d'effets limitants sur les apprentissages (effet Jourdain), liés au contrat didactique (TSD) et une interprétation en termes de travail dans la ZPD (TA) pouvant participer à des acquisitions.

Retour sur les pratiques

Tous les enseignants de mathématiques produisent, spontanément, plus ou moins, ce type de discours. En fait, en particulier pendant la résolution collective d'exercices en classe, on peut difficilement imaginer une séance sans que le discours de l'enseignant soit émaillé d'interventions qui stimulent le travail des élèves. Cela varie davantage lorsqu'il s'agit de reprendre au bond les élèves. En particulier on peut se demander de quelle manière l'enseignant réagit lorsque l'objet de questions d'élèves est un implicite de son discours, ou quelque chose qui demanderait une nouvelle explicitation. Il peut y avoir ainsi des occasions manquées, faute de temps, faute d'interprétation de ce qui est apparu, faute d'arriver à trouver un lien. Il y a aussi des tâches qui ne donnent pas ou peu l'occasion de proximités : par exemples certaines tâches répétitives sans jeu sur les variables didactiques. Cela indique une certaine marge manœuvre des enseignants. Produire des proximités constitue une variable très locale pour l'enseignant, sur ce qu'il ajoute aux contenus mathématiques et à leur utilisation, en relation avec ce qu'il entend ou voit ou perçoit dans la classe. Cela engage une reconnaissance permanente de « l'état » des élèves et des écarts éventuels que l'on peut expliciter. La question se pose ainsi de la nature des proximités, de leurs diversités, voire de leurs choix éventuels en référence à ce qui est retenu ou non par l'enseignant dans ce qui vient des élèves et aux tâches.

Cependant, on ne peut pas expliciter tout pour tous en classe ! Pendant une séance, on ne peut pas dire tout ce qui serait possible, ni même reprendre tous les élèves, et il faut quelquefois faire le deuil de certains élargissements, de certains retours en arrière, de certaines reprises de suggestions d'élèves. L'équilibre entre explications, indications procédurales, discours mathématique et activités autonomes des élèves est sans doute une des grandes difficultés du métier d'enseignant pendant la classe. Cet équilibre à atteindre pour « doser » ce qu'on ajoute à un moment donné dans une classe dépend de beaucoup de variables — les contenus, les élèves, le temps… Là où certains verraient une occasion de proximité manquée, d'autres apprécieraient le fait de ne pas détourner les élèves de l'essentiel par un commentaire supplémentaire. De plus, tout ne peut se décider à l'avance et c'est à chaque fois grâce à son expérience que l'enseignant s'adapte à la classe et choisit, par exemple, d'expliciter ou de seulement citer telle ou telle propriété. En revanche, on l'a vu dans Chappet, Pilorge *et al.* (2017a), certaines proximités sont improvisées à partir de questions ou de réponses d'élèves, et correspondent souvent à des explicitations d'éléments laissés involontairement implicites et qui semblent bien utiles, pour la compréhension des élèves et leur mémorisation ultérieure. Mais, encore une fois, sont-elles

[21] C'est une question soulevée depuis longtemps par Rogalski.

adaptées à tous les élèves ? Que faire si les élèves n'interviennent pas ou peu et dans des directions très différentes, ce qui rend difficile une reprise destinée à éclaircir ce qui est visé ? Comment tenir compte des manques d'attention des élèves, inévitables, alors que les interventions en question sont très locales ?

Cela dit, on a rappelé que les pratiques des enseignants expérimentés sont assez stables (Robert, 2007 ; Chappet-Paries *et al.*, 2012) — et on peut se demander si tous les types de proximités possibles sont pratiqués par un enseignant donné, d'où la tentation d'élargir systématiquement la palette des possibles en présentant la classification… On peut suggérer que, selon les élèves, il y a des différences dans la manière d'apprendre, certains se révélant plus sensibles à des proximités ascendantes, d'autres au contraire à des proximités descendantes. Le rapport au savoir intervient sans doute ici. Ceci engagerait à diversifier les proximités produites. Ainsi, compte tenu de l'importance des contenus, des tâches possibles, des réactions des élèves, la vigilance des professeurs est largement à mobiliser, pour adapter ce qu'ils retiennent comme appui dans ce qui vient des élèves, voire pour choisir des tâches donnant des occasions de proximités. On a aussi indiqué une variabilité dans le choix des mots utilisés pour initier la proximité (voir, savoir, faire, utiliser…) qui peut aussi engager une réflexion.

Vers des formations ?

Enfin, on peut se demander dans quelle mesure les enseignants peuvent bénéficier de ces travaux, notamment grâce à des formations. Schématiquement, on peut ainsi penser qu'une vigilance de l'enseignant, centrée sur ce qui vient des élèves, permettant d'improviser des proximités adaptées, pourrait être développée de manière assez systématique, comme c'est déjà le cas chez un certain nombre d'enseignants, soulignons-le. Cela gagne à être précédé d'une réflexion antérieure à la classe, fondée sur le relief et sur la spécificité du contenu en jeu, et portant sur des tâches ou des questions pouvant donner de bonnes occasions de proximités. En tout cas, être très attentif à tout ce qui vient des élèves, à ce qu'ils savent, ce qu'ils ne savent pas ou moins, peut aider à choisir les interventions qu'il s'agit ensuite le plus souvent d'improviser, au bon moment. Se demander comment rebondir sur ce qui vient des élèves ou n'en est pas venu, s'il y a lieu de le retenir ou non, comment l'exploiter pour l'enrichir deviendrait une préoccupation « naturelle », une posture, associée à la question du lien à faire, avec sa direction. Avec l'idée qu'en réalité on fait souvent des sortes de paris sur l'interprétation de ce qu'ont dit ou fait les élèves…

Comment, dès lors, peut s'acquérir une telle posture ? Est-ce une affaire de prise de conscience ? Peut-être à partir de vidéos contrastées, où les enseignants gèrent différemment leurs séances, les participants peuvent repérer différents modes d'intervention, les discuter, les interroger. C'est à la charge du formateur d'en indiquer à la fois des justifications théoriques et des conditions d'application, compte tenu d'une réflexion à engager sur les contraintes liées à la notion et aux programmes mais aussi à l'établissement, à la classe et aux élèves.

Références bibliographiques

Brousseau, G. (1982). Les « effets » du « contrat didactique ». *Actes de la IIe école d'été de didactique des mathématiques*. IREM d'Orléans.

Bridoux, S., Hache, C., Grenier-Boley, N. & Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 21*, 187-233.

Chanudet, M., Coppé S., Gandit, M. & Moulin, M. (2019). Analyse des interactions didactiques dans une perspective d'évaluation formative. Nouvelles perspectives en didactique : Géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques. *Actes de la XIX^e école d'été de didactique des mathématiques*. Paris, 2017.

Chappet-Pariès, M. (2007). Enseigner les mathématiques en ZEP et ailleurs. *Cahier de Didirem, 55*.

Chappet-Pariès, M. (2010). Circulation du savoir en classe de mathématiques : quelles variabilités dans les pratiques des enseignants ? Études de cas. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 15*, 9-44.

Chappet-Pariès, M., Levi, M.-C. & Robert, A. (2010). Enseignants de mathématiques du secondaire : stages et formation professionnelle en master ? *Document pour la formation des enseignants du laboratoire André Revuz, 13*. IREM de Paris.

Chappet-Paries, M., Robert, A. & Rogalski, J. (2012). Que font des élèves de troisième et de quatrième avec un même enseignant dans une séance de géométrie ? In F Vandebrouck (éds.). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès (pp. 95-138).

Chappet-Pariès, M., Robert, A., Millon-Fauré, K. & Drouhard, J.-P. (2014). Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques ? Questions méthodologiques et premiers résultats. *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz, 12*. IREM de Paris.

Chappet-Paries, M., Pilorge, F. & Robert, A. (2017a). Pour étudier le dispositif de classe inversée. Analyse des moments d'exposition des connaissances en classe et de capsules vidéo. *Petit x, 105*, 37-72.

Chappet-Pariès, M, Pilorge, F. & Robert, A. (2017b). Un scénario de formation de formateurs : les activités d'introduction, les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour la classe inversée, s'appuyant sur le thème « sens de variation des fonctions » en seconde. *Document pour la formation des enseignants du laboratoire André Revuz, 16*. IREM de Paris.

Chiocca, C. Josse, E. & Robert, A. (1991). Méthodes d'analyse du discours de l'enseignant. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, S6* (1991), 132-135. http://www.numdam.org/item/PSMIR_1991___S6_132_0/

Dumail, A. (2007). La racine carrée en troisième. Des enseignements aux apprentissages. *Cahier de DIDIREM, 57*.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x, 31*, 37-61.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Haspekian, M., Horoks, J., Kiwan-Zacka, M., Pilet, J. & Roditi, E., (2019). Régulation des apprentissages et évaluation formative : quels regards didactiques ? *Actes de la XIX^e école d'été de didactique des mathématiques*. Paris, 2017.

Horoks, J. & Pilet, J. (2018). Effets potentiels d'une évaluation des pratiques enseignantes d'évaluations sur les apprentissages algébriques des élèves au collège. *Actes du Colloque EMF 2018* (pp. 1030-138).

Huteau, M. & Lautrey, J. (éds.). (1999). *Approches différentielles en psychologie*. Rennes : PUR.

Josse, E. & Robert, A. (1993). Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(1/2), 119-154.

Laborde, C. (1983). Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : langue naturelle et écriture symbolique. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 199-203. https://revue-rdm.com/1983/deux-codes-en-interaction-dans-lenseignement-mathematique-langue-naturelle-et-ecriture-symbolique/

Paries, M. (2002). *Pratiques des enseignants de mathématiques : analyse des discours accompagnant la résolution d'exercices au collège*. Thèse de l'Université Denis Diderot, Paris 7.

Pimm, D. (1991). Teaching as a metacomunication. *Proceedings of PME XV*.

René De Cotret, S. & Giroux, J. (2003). Le temps didactique dans trois classes de secondaire 1 (doubleurs, ordinaires, forts). *Éducation et francophonie, 31*(2), 155-175.

Robert, A. (1995). Analyse des discours non strictement mathématiques accompagnant les cours de mathématiques. *Educationnal Mathematics studies, 28*, 73-86.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(2), 139-190.

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré. *Recherches en didactique des mathématiques, 27*(3), 271-312.

Robert, A. & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques, 16*(2), 145-176.

Robert A., Penninckx, J., Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe*. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Robert, A. & Rogalski, J. (2020). D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, 22*. IREM de Paris.

Tenaud, I. (1991). *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes*. Thèse de l'Université Paris 7.

Vygotski, L. (1984/1997). *Pensée et langage*. Paris : La dispute.