REPRÉSENTATIONS MENTALES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : UNE PROPOSITION DE TYPOLOGIE

Marie LUQUETTE[1]
Université de Montréal

Résumé. La résolution de problèmes, très importante en mathématiques, pose des difficultés à de nombreux élèves. Afin de réussir à résoudre un problème, il faut s'en construire une représentation mentale adéquate. Cet article présente une recherche menée auprès de 175 élèves de 4e secondaire (16 ans) auxquels on a demandé de résoudre cinq problèmes nécessitant plusieurs étapes de résolution, puis d'en récrire l'énoncé de mémoire. Les productions des élèves ont ensuite été analysées pour identifier les types de représentations mentales, modèle de situation ou traduction directe, construites par les élèves. Les résultats montrent qu'il peut être pertinent de distinguer deux niveaux pour analyser les représentations mentales utilisées, les élèves ne construisant pas nécessairement le même type de représentation à toutes les étapes de leur résolution : le niveau local, qui concerne une relation entre deux ou plusieurs données, et le niveau global, qui concerne l'articulation des différentes relations entre elles.

Mots-clés. Résolution de problèmes, représentations mentales, compréhension d'un problème, modèle de situation, traduction directe.

Abstract. Problem solving, while very important in mathematics, is still considered by many students as a difficult task. In order to solve a problem, a proper mental representation needs to be built. This article presents a research, the objective of which was to determine which type of mental representation (situation model or direct translation) students use while solving mathematical problems. 175 secondary 4 (16 years old) students were asked to solve five problems and then to write down what they recalled from their statement. Both these productions were then analyzed. Results show that because many students do use different types of mental representations at different stages of solving, it is helpful to distinguish two different levels of mental representation for the analysis: a local level, concerning the relationship between two or more givens of the problem, and a global level, concerning the articulation of those relationships.

Keywords. Problem solving, mental representation, problem comprehension, situation model, direct translation.

Introduction

La résolution de problèmes est sans contredit l'une des activités mathématiques les plus importantes, et sa place dans les programmes scolaires, à la fois comme moyen et comme objet d'enseignement, est bien établie (voir, pour le Québec, Audet, 2017 ; Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur, 2019). Or de nombreux élèves éprouvent des difficultés importantes en résolution de problèmes (voir par exemple Crahay & Detheux, 2005 ; Demonty & Fagnant, 2014 ; Hanin & Van Nieuwenhoven, 2018 ; Marcoux, 2012; Montague *et al.*, 2011 ; Özsoy & Ataman, 2009). En particulier, nombreux sont ceux qui peinent à comprendre le problème, c'est-à-dire à s'en former une représentation mentale cohérente et adéquate (Fagnant *et al.*, 2014 ; Thevenot *et al.*, 2010).

Cette notion de représentation mentale est centrale dans la compréhension d'un problème, mais la question des représentations mentales construites par les élèves est délicate : en effet, le chercheur n'a jamais accès aux représentations effectivement construites par les élèves. Il doit se contenter d'en inférer le contenu à partir des traces laissées par l'élève, et ne peut donc les catégoriser que sur la base de certaines caractéristiques observables, comme leur cohérence et

[1] marie.luquette@umontreal.ca

leur adéquation avec l'énoncé du problème et avec les autres étapes de la démarche, le cas échéant. Même leur utilité pour la résolution du problème ne peut être établie avec certitude, puisqu'elle dépendra de l'utilisation que l'élève a faite de la représentation en question. Cependant, la construction d'une représentation mentale adéquate reste importante, puisqu'elle est considérée comme une condition essentielle à la réussite de la résolution (Thevenot & Barrouillet, 2015). Plusieurs chercheurs ont proposé des modèles expliquant comment se déroule la résolution d'un problème chez l'expert et plusieurs de ces modèles font une place à la représentation mentale (Greer, 1997 ; Julo, 1995 ; Kintsch & Greeno, 1985 ; Reusser, 1990). Cependant, moins nombreux sont ceux qui ont tenté de modéliser le processus de résolution de problème chez des novices ou chez des élèves qui n'arrivent pas à résoudre correctement les problèmes (Gamo *et al.*, 2014 ; Hegarty *et al.*, 1995 ; Lewis & Mayer, 1987). Autrement dit, peu de modèles de la résolution d'un problème incluent explicitement les représentations (ou l'absence de représentation) construites par ces élèves, de même que leur impact sur la suite du processus de résolution. Les bases théoriques à ce sujet sont donc présentes, mais moins développées que celles concernant la résolution de problèmes chez les résolveurs experts.

En prenant conscience de ces constats, nous voyons apparaître un chaînon manquant : que font les élèves qui ne construisent pas de représentation mentale adéquate ? Il semble plutôt improbable que ces élèves ne construisent pas de représentation mentale du tout ; ils utilisent probablement d'autres stratégies, se fiant notamment à ce qu'ils comprennent du contrat didactique, comme dans le cas célèbre du problème de l'âge du capitaine (Baruk, 1985) ou dans le cas de stratégies dites « de traduction directe » (Mayer & Hegarty, 1996). Il nous semble utile de déterminer ce que ces élèves font, quelles représentations mentales ils utilisent, le cas échéant, pour les aider à progresser. En effet, au cours des dernières années, la littérature scientifique a vu émerger plusieurs dispositifs expérimentaux visant à améliorer l'habileté à construire des représentations mentales adéquates chez les élèves (Auquière *et al.*, 2018 ; Fagnant *et al.*, 2016 ; Polotskaia & Savard, 2018, par exemple). Or, comme on dit de l'erreur qu'elle est nécessaire pour un apprentissage significatif et signifiant (Charnay & Mante, 1992 ; Kosyvas, 2010), à condition qu'elle soit correctement prise en considération dans l'enseignement, il nous semble plausible qu'en reconnaissant et en intégrant les représentations incorrectes à l'enseignement, la difficulté à représenter un problème adéquatement puisse être surmontée, les représentations puissent améliorées lorsque c'est possible ou remplacées par d'autres, plus adéquates, et ce, de façon durable. L'identification des représentations mentales construites par les élèves constitue donc une première question d'intérêt.

De plus, comme nous le verrons, la très grande majorité des études empiriques fondant les modèles de résolution de problèmes évoqués ci-dessus a porté sur la représentation mentale de problèmes ne nécessitant qu'une étape pour être résolus, avec certaines exceptions notables (Thevenot & Oakhill, 2005, par exemple). Une question importante se pose alors : qu'advient-il alors de la représentation mentale dans le cas de démarches plus complexes ? Peut-on la qualifier simplement d'adéquate ou d'inadéquate ? On pourrait en effet s'attendre à voir émerger des représentations partiellement adéquates. C'est là une seconde question à laquelle nous nous attarderons dans cet article.

En première partie de cet article, nous présenterons les principaux éléments de problématique ainsi que le cadre théorique soutenant notre recherche. Nous expliciterons ensuite la méthodologie retenue pour notre expérimentation. Les résultats, qui nous permettent d'avoir un aperçu de différents types de représentations mentales utilisées par les élèves et d'en proposer une première typologie, seront décrits à partir de quatre démarches d'élèves représentatives des différents cas de figure rencontrés lors de l'analyse de nos données. À partir de ces exemples, nous montrerons comment il est possible de raffiner l'interprétation des traces des représentations mentales construites par ces élèves, ce qui pourrait ouvrir des portes pour une intervention mieux ciblée auprès des élèves éprouvant des difficultés à construire une représentation mentale appropriée d'un problème.

1. Éléments de problématique et ancrage théorique

La résolution d'un problème mathématique prend appui sur la compréhension de ce problème que le résolveur — l'élève, dans notre cas — construit. Il importe de préciser d'emblée que la compréhension du problème n'est pas une simple étape de la résolution, encore moins une étape préalable à la résolution. Au contraire, elle évolue et se raffine tout au long de la résolution, comme l'ont montré notamment Radford (1996), Verschaffel *et al.* (2002) et Verschaffel & De Corte (2008). Mais que signifie comprendre un problème mathématique ?

La compréhension d'un problème mathématique engage de nombreux processus cognitifs de même que plusieurs connaissances, mathématiques, d'abord, mais aussi sur le type de tâches et sur « les règles du jeu », au sens de Brousseau (1987) et de Greer (1997). Tous ces éléments doivent donc être coordonnés de façon cohérente et organisée pour comprendre un problème. Ainsi, on peut définir la compréhension d'un problème mathématique comme étant la construction d'une représentation mentale appropriée, cohérente avec l'énoncé du problème et permettant sa résolution (Fagnant *et al.*, 2014 ; Thevenot *et al.*, 2010). Nous présenterons donc ce que sont les représentations mentales dans un contexte de résolution de problèmes, de quels types de représentations mentales il est question ainsi que les difficultés méthodologiques que leur étude entraîne inévitablement.

1.1. Représentations mentales en résolution de problèmes

D'entrée de jeu, nous souhaitons apporter une précision épistémologique. Le concept même de représentation mentale, bien que largement repris en didactique des mathématiques, est issu de la psychologie cognitive. Le lecteur ne s'étonnera donc pas de trouver, dans les lignes qui suivent, plusieurs références à des auteurs issus de cette épistémologie. De plus, à notre connaissance, les études faites à ce sujet n'ont porté que sur des problèmes arithmétiques et, dans quelques rares cas, algébriques. Il est donc possible que certaines conclusions ne puissent s'appliquer directement à d'autres types de problèmes rencontrés en milieu scolaire, tels les problèmes géométriques, par exemple.

On ne saurait trop insister sur le fait que la compréhension d'un problème dépasse largement la compréhension de son énoncé, malgré le fait que cet amalgame soit malheureusement répandu. En effet, il ne suffit pas de comprendre le texte de l'énoncé, comme on comprendrait le texte d'un article de journal, pour être en mesure de comprendre le problème : il faut développer une compréhension mathématique du problème. Plusieurs modèles fondateurs de la résolution de problèmes (Greer, 1997 ; Kintsch & Greeno, 1985 ; Mayer *et al.*, 1992 ; K. Reusser, 1988) parleront de ce fait comme de la construction d'un « modèle de problème », nécessaire à la résolution du problème. Ce ne serait, selon les auteurs de ces modèles, que sur la base d'un tel modèle de problème que l'on pourrait opérationnaliser la résolution. Le modèle de problème, qui n'est autre qu'une représentation mentale du problème, doit, pour être adéquat et permettre la résolution, intégrer une vue d'ensemble des données pertinentes, incluant celles qui pourraient ne pas être explicitement présentées dans l'énoncé et qui doivent donc être inférées (Julo, 2002 ; Kintsch & Greeno, 1985). Ce modèle de problème est généralement décrit par les auteurs comme un modèle conceptuel ne comprenant que les informations strictement nécessaires à la résolution, soit les les données, les inconnues et les diverses relations qui les lient, présentées sous une forme permettant de développer directement un plan de résolution. Il s'agirait donc d'une représentation déjà mathématisée ou « mathématisable » ; une fois cette représentation construite, le résolveur n'aurait qu'à utiliser des processus mathématiques pour arriver à la solution.

Si certains auteurs, comme Kintsch et Greeno (1985), affirment que l'on passe directement d'une compréhension « linguistique », littérale, de l'énoncé au modèle de problème, majoritaires sont ceux qui se sont inscrits en faux, soulevant le problème de l'utilisation du contexte du problème, qui joue un rôle important dans la compréhension. C'est pourquoi Reusser (1988) et d'autres à sa suite intègrent au modèle de compréhension d'un problème une étape intermédiaire entre la compréhension littérale du texte et la construction du modèle de problème, étape que Reusser nommera « modèle de situation ». Ce modèle de situation sert notamment à expliquer la prise en compte du contexte dans la compréhension d'un problème. Il consiste en une représentation de « l'histoire » du problème (René de Cotret, 2007), intégrant les données du problème, mais toujours en lien avec le contexte. Le modèle de situation permet donc une compréhension extra-mathématique du problème et, en se concentrant sur l'histoire, et donc sur les aspects plus qualitatifs du problème, le résolveur pourrait être en mesure de mieux se représenter certains aspects du problème, comme des relations implicites entre les données (Reusser, 1990). Il intégrerait ensuite ces aspects qualitatifs aux données numériques tirées de l'énoncé, le cas échéant, pour former un modèle de problème.

L'ajout du modèle de situation comme étape intermédiaire est soutenu par plusieurs études expérimentales. En particulier, plusieurs recherches ont exploré l'impact d'un énoncé contenant un contexte non-mathématique sur la compréhension et sur la résolution du problème (Adams & Lowery, 2007 ; Malefoasi, 2010 ; Kurt Reusser, 1988 ; Tijus *et al.*, 2002 ; Voyer, 2006). Malgré des différences méthodologiques, les conclusions de ces différentes études sont similaires en ce qu'elles montrent le rôle facilitateur du contexte, soutenant donc, du moins indirectement, la thèse de la construction d'un modèle de situation qui faciliterait le passage au modèle de problème (Orrantia *et al.*, 2011). Cependant, certains bémols doivent être émis concernant ce rôle globalement facilitateur, notamment concernant le fait que les énoncés de problème contenant davantage d'éléments de contexte sont généralement plus longs et plus complexes, ce qui peut occasionner des difficultés de compréhension de nature plus langagière — lexicale, syntaxique, etc. — (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022 ; Voyer & Goulet, 2013).

Voyer (2011) a poussé l'étude un peu plus loin afin de comprendre quels éléments de contexte les élèves jugeaient utiles lors de la résolution d'un problème. En faisant varier le nombre et la nature des éléments contextuels disponibles dans les problèmes et en demandant aux élèves lesquels les avaient aidés à résoudre, même s'ils n'étaient pas nécessaires en tant que tels, il a remarqué que les élèves ayant tenu compte du contexte du problème ont mieux réussi sa résolution. Cependant, cette conclusion s'appliquait surtout aux élèves moyens et forts, et moins aux élèves en difficulté. L'auteur interprète ces résultats en concluant à l'importance du modèle de situation dans la résolution, mais en émettant l'hypothèse selon laquelle les élèves faibles auraient peut-être plus de difficulté à le construire ou à en transférer les éléments importants au modèle de problème.

Coquin-Viennot et Moreau (2007) ont, pour leur part, montré l'importance de la prise en compte du contexte pour la compréhension d'un problème mathématique en présentant à des élèves des problèmes dont le contexte comportait un élément contradictoire lorsque confronté aux données numériques et des problèmes où les éléments de contexte étaient cohérents avec les données numériques. Les seconds ayant été mieux réussis que les premiers, les auteures soutiennent que les élèves tiennent non seulement compte du contexte pour la résolution, mais que ce contexte aurait une certaine primauté sur les données numériques (qui, elles, ne se contredisaient pas) lors de l'élaboration du modèle de problème, appuyant ainsi la thèse de la construction d'un modèle de situation.

Ainsi, le modèle de situation aurait pour fonction principale d'intégrer des éléments de nature contextuelle, principalement qualitative, à la compréhension que se forge le résolveur du problème, l'aidant ainsi à mieux comprendre ce dernier et à parvenir à un modèle de problème mathématisé en conformité avec les contraintes de l'histoire décrite dans l'énoncé. Or les recherches empiriques que nous présenterons à l'instant montrent que ce ne sont pas tous les élèves qui, pour tous les problèmes, arrivent à construire un modèle de situation adéquat. Cela nous amène donc à considérer les différents types de représentations mentales pouvant être construits dans ce contexte.

1.2. Types de représentations mentales

Si la communauté scientifique, à l'heure actuelle, admet avec un certain consensus l'existence et l'importance du modèle de situation pour la construction d'un modèle de problème adéquat, les différentes données empiriques montrent cependant sans équivoque que certains élèves ne semblent pas construire un tel modèle de situation.

Mayer et Hegarty (1996) relèvent par exemple qu'une bonne part des participants à leur étude semble faire fi du contexte et opter plutôt pour une stratégie que les auteurs nomment « traduction directe » (TD). Les élèves qui utilisent une telle stratégie se concentrent sur les nombres et les mots-clés présents dans l'énoncé pour les combiner et arriver rapidement à une solution, selon une stratégie que les auteurs nomment « calculer d'abord et réfléchir ensuite[2] » (Mayer & Hegarty, 1996, p. 35). Par exemple, dans l'énoncé : « Chez Arco, un gallon d'essence coûte 1,13 $. C'est 5 sous de moins par gallon que chez Chevron. Combien coûtent 5 gallons d'essence chez Chevron ? » (Lewis & Mayer, 1987, p. 366), l'expression « 5 sous de moins » invite à effectuer une soustraction, ce que feront les élèves utilisant une stratégie de traduction directe. Si, dans le cas de plusieurs problèmes simples, une telle stratégie est effectivement plus efficace que la construction d'un modèle de situation, il n'en demeure pas moins qu'elle est loin d'être universelle et qu'elle peut être mise en échec très facilement en modifiant l'inconnue dans un problème. Ces auteurs ont donc proposé aux participants des problèmes « inconsistants », dans lesquels les mots-clés employés ne reflétaient pas directement l'opération à effectuer, et ont mesuré le temps de fixation des yeux des participants sur chacun des éléments de l'énoncé du problème. Ils ont ainsi remarqué que les participants portés à utiliser une stratégie de traduction directe fixaient plus longuement les nombres et les mots-clés de l'énoncé, comme prévu, alors que les participants qui arrivaient à résoudre correctement le problème, résolvant donc la contradiction apparente, fixaient pour leur part plus longuement des éléments qualitatifs du problème. Plusieurs auteurs montrent par ailleurs que la traduction directe serait surtout employée par les novices en résolution de problèmes de même que par les élèves en difficulté (Mayer *et al.*, 1992 ; Mayer & Hegarty, 1996).

Pape (2004), de son côté, a utilisé les traces des démarches des participants de même qu'une tâche de rappel verbal de l'énoncé pour déterminer si, dans la résolution d'un problème donné, une stratégie de traduction directe ou de construction d'un modèle de situation avait été utilisée.

[2] Traduction libre de « compute first and think later ».

Il a montré qu'il était possible de classer la très grande majorité des démarches dans l'une ou l'autre de ces catégories. De surcroît, 86 % des participants utilisaient de façon prédominante l'une ou l'autre des stratégies, ce qui porte à croire que le choix de la stratégie ne serait pas largement dépendant du problème à résoudre.

Ces recherches, comme d'autres portant sur le même sujet (Mayer *et al.*, 1992 ; Moreau & Coquin-Viennot, 2003) et qui ont classé les démarches en deux catégories (traduction directe — TD — et modèle de situation — MS), portent généralement sur des problèmes « simples », qui ne demandent qu'une étape pour être résolus. Ces problèmes, toujours caractérisés par cette même simplicité, sont généralement soumis à des élèves assez jeunes (début du primaire), ce qui pourrait expliquer ce choix, mais aussi à des élèves plus âgés, voire à des adultes. La question qui se pose alors est de savoir ce qu'il se passe lorsque les problèmes demandent plusieurs étapes de résolution. Les élèves qui construisent un modèle de situation le font-ils de façon consistante tout au long de la résolution ? Inversement, les élèves qui utilisent une stratégie de traduction directe l'emploient-ils pour toutes les étapes ou seulement pour certaines ?

Notre objectif sera donc de déterminer quels types de représentations (et quelles combinaisons de types) les élèves construisent lors de la résolution d'un problème exigeant plusieurs étapes de résolution.

2. Méthodologie

Pour atteindre cet objectif, nous avons demandé à des élèves québécois de 4e secondaire (âge moyen : 16,2 ans) de résoudre cinq problèmes mathématiques et, après les avoir résolus, d'effectuer une tâche de rappel des énoncés des problèmes. Les détails méthodologiques sont décrits ci-dessous.

2.1. Participants

Les 175 participants retenus étaient répartis entre 13 groupes-classes de 3 écoles différentes. Au Québec, à ce niveau scolaire, les élèves ont le choix entre trois « séquences » ou « profils » pour leur cours de mathématiques (« Culture, société et techniques », « Technico-sciences » et « Sciences naturelles »). Ces séquences sont en fait des programmes dont les heures allouées et les contenus mathématiques abordés diffèrent ; les élèves les choisissent pour refléter à la fois leurs intérêts et leurs projets de formation future. Pour notre étude, les groupes-classes ont été choisis de façon à être représentatifs de la répartition entre les différentes séquences de ce niveau scolaire à l'échelle provinciale, ces séquences étant toutes représentées dans l'échantillon.

Les élèves ayant participé à l'étude devaient, outre donner leur consentement écrit, avoir été scolarisés en français depuis le début du primaire, ne pas présenter de trouble d'apprentissage diagnostiqué et ne pas être en retard de plus d'une année dans leur cheminement en français ou en mathématiques. Nous avons également exclu les élèves se situant au cinquième percentile ou en-dessous à une épreuve standardisée de vocabulaire (Échelle de vocabulaire en images Peabody, Dunn *et al.*, 1993) ou à celle d'habiletés cognitives générales (Matrices progressives de Raven, Raven, 2005).

2.2. Collecte des données

Dans l'étude des représentations mentales produites par les élèves, un problème méthodologique fondamental subsiste : on n'a jamais accès directement à ces représentations, seulement à leurs manifestations et à leur impact sur la résolution. Pour limiter la marge d'erreur découlant de l'interprétation de traces variées, nous avons utilisé deux instruments de collecte de données : un test de résolution de problèmes, comportant cinq problèmes, et une tâche de rappel libre.

Lors du test de résolution de problèmes, les élèves avaient un temps illimité (personne n'a pris plus de 50 minutes) pour résoudre cinq problèmes, par la méthode de leur choix. La calculatrice, habituellement utilisée à ce niveau scolaire, n'était pas permise d'emblée, mais les élèves pouvaient lever la main pour en avoir une au besoin ; l'expérimentatrice s'assurait alors que le calcul demandé avait bien été écrit sur la feuille, de façon à éviter un enchaînement de calculs faits à la calculatrice sans laisser de trace écrite, ce qui ne nous aurait pas permis d'identifier la stratégie utilisée. Les problèmes présentés aux élèves ont été choisis de façon qu'ils puissent être résolus de plusieurs façons différentes (notamment par une méthode arithmétique ou par une méthode algébrique), qu'ils soient plutôt différents des problèmes habituellement présents dans les manuels et cahiers utilisés dans les écoles, de façon à susciter un raisonnement complet plutôt qu'une analogie avec des problèmes semblables déjà résolus, et, pour limiter les éventuels biais liés à l'interprétation et à la combinaison de plusieurs registres sémiotiques, tous les énoncés n'étaient constitués que de mots et de chiffres. Le choix des problèmes a aussi été fait de façon que les différents types de représentations mentales se traduisent par des démarches différentes, afin de pouvoir inférer le plus sûrement possible ces types de représentations mentales. Ainsi, bien que la traduction directe ne mène pas toujours à des réponses erronées en résolution de problèmes, c'était le cas pour les problèmes retenus et ce, afin de pouvoir mieux distinguer les représentations construites par les élèves d'après leurs traces. Cela s'est fait principalement par le choix des termes et des structures relationnelles utilisées dans l'énoncé.

Avant l'expérimentation, les problèmes ont été soumis à quelques élèves du niveau scolaire concerné afin de confirmer les indices de construction d'un modèle de situation ou de l'utilisation d'une stratégie de traduction directe qui pouvaient être décelés dans les traces des démarches. Cette pré-expérimentation a aussi permis de confirmer l'adéquation entre le niveau de difficulté des problèmes et les capacités des élèves. Les cinq problèmes utilisés sont présentés en annexe.

Dans le cadre de cet article, nous présentons le problème suivant, pour lequel les différentes démarches des élèves sont représentatives de celles observées dans l'ensemble du corpus :

> *Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de 4 500 timbres. Si Marie en a 6 fois plus que Paul et que Brenda en a 3 fois moins que Marie, quelle est la part de chacun ?*[3]

Ici, le fait d'avoir exprimé la quantité de timbres de Brenda en fonction de celle de Marie plutôt qu'en fonction de celle de Paul, ce qui aurait facilité la représentation algébrique, était un choix conscient destiné à vérifier si les élèves construisaient bien un modèle de situation ou non. De la même façon, l'utilisation d'expressions telles que « 3 fois moins », que l'on suppose connues des élèves mais où les mots, pris individuellement, évoquent des opérations arithmétiques différentes de celle attendue, fait en sorte que les élèves portés à repérer les mots-clés pour élaborer une démarche sont plus facilement identifiés. Ce problème, comme tous ceux ayant été soumis aux élèves, a été analysé à l'avance de façon à déterminer quelles étaient les données essentielles à la résolution, quelles inférences devaient être faites et quels signes de la construction d'un modèle de situation ou de traduction directe pouvaient être observés dans les démarches des élèves.

La tâche de rappel libre a été menée une fois que les élèves ont eu terminé et remis la résolution des problèmes. Pour éviter un maximum de source de biais, nous n'avons pas informé les élèves à l'avance qu'ils auraient à réaliser cette tâche. La seule consigne qui leur était donnée était de

[3] L'origine de ce problème nous est inconnue ; il nous a été fourni par René de Cotret.

réécrire le problème avec leurs mots, mais de façon qu'une personne n'ayant pas lu l'énoncé originel soit en mesure de le résoudre.

C'est une analyse combinée des traces de résolution et de la tâche de rappel, selon les critères que nous présentons à l'instant, qui nous ont permis d'inférer les types de représentations mentales mises en œuvre par les participants.

2.3. Analyse des données et émergence d'une typologie raffinée

D'abord, pour analyser des traces de la démarche de résolution, nous avons porté attention aux indices portant à croire que les participants avaient pris en considération des éléments situationnels et/ou raisonné sur les relations entre les quantités. Ces indices ont été considérés comme révélateurs de la construction d'un modèle de situation. Nous nous sommes également intéressée aux tentatives de traduire en opérations ou en équations les termes tels que présents dans l'énoncé, sans indice d'un réaménagement des relations entre les quantités ; celles-ci ont plutôt été considérées comme révélatrices d'une stratégie de traduction directe, tout comme l'absence de référence aux éléments contextuels du problème. Cette analyse des traces des démarches est largement inspirée de celle utilisée par Voyer (2006) et de Moreau & Coquin-Viennot (2003), notamment. Il est à noter que, dans le cas particulier des problèmes retenus pour cette étude, l'utilisation d'une démarche de traduction directe menait forcément à une solution erronée, alors que la construction d'un modèle de situation devait, en principe, conduire les élèves à une solution appropriée. Ainsi, les différentes cotes présentées ci-dessous peuvent donner l'impression d'une correspondance entre MS et résolution adéquate ainsi qu'entre TD et solution erronée, mais ce n'est le cas que pour certains problèmes, dont ceux utilisés pour cette étude.

Une deuxième étape d'analyse a été faite sur ces démarches de résolution afin, notamment, de pallier les limites de la distinction binaire entre modèle de situation et traduction directe. À la suite des observations réalisées lors de la première analyse, nous l'avons raffinée en nous attardant à deux niveaux d'utilisation de ces représentations mentales : le niveau local (représenté par des lettres minuscules) et le niveau global (représenté par des lettres majuscules). Nous avons considéré comme étant « locales » les représentations mentales utilisées à l'intérieur d'une même étape du raisonnement et celles qui impliquaient une seule relation entre des données. Les représentations mentales globales, quant à elles, correspondaient à celles qui permettaient de relier ou de coordonner différentes étapes de résolution et qui impliquaient donc une relation entre des représentations locales. Ce faisant, nous avons obtenu quatre types de démarches :

- cote MSms : l'ensemble de la démarche, à la fois au niveau local et global, est de type « construction d'un modèle de situation » ; il n'y a aucun indice de l'utilisation de la traduction directe ;
- cote MStd : la démarche au niveau global correspond à la construction d'un modèle de situation, mais au niveau local, on retrouve à la fois des indices de la construction d'un modèle de situation (à certaines étapes) et des indices de traduction directe (à d'autres étapes), ou alors seulement des indices de traduction directe ;
- cote TDms : la démarche au niveau global correspond à de la traduction directe, mais au niveau local, on retrouve à la fois des indices de la construction d'un modèle de situation (à certaines étapes) et des indices de traduction directe (à d'autres étapes), ou alors seulement des indices de la construction d'un modèle de situation ;
- cote TDtd : l'ensemble de la démarche, à la fois au niveau local et global, est de type

« traduction directe » ; il n'y a aucun indice apparent de construction d'un modèle de situation.

Ensuite, en ce qui concerne le rappel libre, comme l'objectif était d'identifier le type de représentation mentale utilisé par les élèves, il a été analysé sans tenir compte, par exemple, de l'exactitude des nombres ou de facteurs superficiels (comme une confusion des prénoms avec ceux d'un autre des problèmes présentés). Nous l'avons catégorisé comme un modèle de situation (MS) lorsqu'il était possible d'observer l'ajout d'éléments situationnels pertinents, qui n'étaient pas textuellement présents dans l'énoncé de départ mais qui peuvent permettre une meilleure compréhension de la situation, la conservation des relations entre les quantités exprimées en termes différents ou la transformation pertinente de ces quantités. Inversement, nous avons catégorisé le rappel libre comme une traduction directe (TD) si nous observions une tentative d'inclure une expression ou une formulation identique à celle présente dans l'énoncé originel au détriment du sens.

Dans le problème qui nous intéresse, appelé « problème des timbres », les indices suivants ont été retenus à la suite d'une analyse préalable du problème :

- pour la construction d'un modèle de situation global : les quantités de timbres de chacun des amis sont additionnées pour arriver à 4 500 ; pour une résolution algébrique, une fois la valeur de l'inconnue trouvée, l'élève répond à la question en calculant le nombre de timbres de chaque ami ;
- pour la construction d'un modèle de situation local : la collection de Marie est 6 fois plus grande que celle de Paul ; la collection de Brenda est 3 fois moins grande que celle de Marie, ou 2 fois plus grande que celle de Paul ; les inconnues sont identifiées en référence au contexte (et non simplement comme « $x=$Paul », par exemple) ;
- pour l'utilisation de la traduction directe de façon globale : 4 500 timbres représentent la collection de Marie ou le point de départ pour le calcul de chacune des collections ; l'utilisation d'un nombre non entier ou négatif pour désigner le nombre de timbres ; omission de la relation entre les quantités des amis (par exemple, en proposant une égalité entre les 3 collections de timbres pour trouver l'inconnue) ; l'inconnue ne désigne pas la même quantité tout au long de la résolution ;
- pour l'utilisation de la traduction directe de façon locale : la quantité de timbres de Brenda correspond à -3 fois celle de Marie ou à celle de Marie moins 3 ; la quantité de timbres de Marie correspond à 6 de plus que celle de Paul.

Le codage a été réalisé par l'auteure et une autre chercheure experte de la résolution de problèmes selon la méthode de l'analyse inductive générale (Blais & Martineau, 2006) et sa validité a été établie par la méthode de la vérification de la clarté des catégories (*ibid.*). Il est à noter que, dans certains cas, autant pour le rappel libre que pour la démarche de résolution, il ne nous a pas été possible de catégoriser les traces ; nous avons alors utilisé un code distinct (« ND » pour le niveau global et « nd » pour le niveau local).

Soulignons que tous ces éléments ne sont que des indices et ne peuvent en aucun cas indiquer avec certitude le type de représentation mentale utilisé par l'élève. Ce n'est que par la combinaison de plusieurs indices provenant de plusieurs sources que nous pouvons tenter de déterminer quel(s) type(s) de démarche a (ont) le plus probablement été utilisé(s). C'est pourquoi, pour chacun des problèmes et pour chacun des élèves, nous avons tenté de mettre en relation les indices provenant des traces de la démarche et ceux provenant de la tâche de rappel qui lui est associée. Nous avons alors codé le type de démarche utilisé pour chaque problème de la façon suivante :

- si le type de démarche identifié pour la tâche de rappel concorde avec celle identifiée pour la démarche de résolution, c'est ce type qui est retenu ;
- si le type de démarche pour l'une ou l'autre des tâches (tâche de rappel et résolution du problème) n'a pas pu être identifié, ce qui a été assez fréquent dans les tâches de rappel, mais plutôt rare (45 cas sur 875, soit environ 5 % des cas) dans les démarches de résolution, nous avons retenu le type de démarche identifié pour l'autre tâche ;
- s'il y a contradiction entre les deux tâches :
    - au niveau global : c'est le modèle de situation qui est retenu, puisque des indices de construction de ce modèle ont été trouvés ; il est donc impossible d'affirmer avec certitude qu'un tel modèle n'a pas été construit ; ce fut le cas pour 43 problèmes sur 875 (moins de 5 % des problèmes résolus) ;
    - au niveau local : si, par exemple, une cote MSms avait été attribuée à la tâche de rappel, mais que des éléments de traduction directe locale ont été trouvés dans la démarche de résolution, la cote finale attribuée à ce problème est MStd puisque cette cote inclut à la fois des éléments de modèle de situation et de traduction directe au niveau local ; ainsi, les cotes MStd et TDms ont été priorisées, puisqu'elles incluent déjà des éléments des deux types de démarche au niveau local. Les cotes locales ont été modifiées dans 28 cas sur 875 (environ 3 % des problèmes résolus).

La méthodologie présentée ici nous a permis de cerner, dans une très grande majorité de cas, le type de représentation mentale utilisé par les élèves. C'est ce dont nous traiterons maintenant.

3. Résultats et analyse

Nous analyserons d'abord la fréquence observée des combinaisons de types de représentations possibles (MSms, MStd, TDms et TDtd) pour l'ensemble des cinq problèmes soumis aux élèves. Nous poursuivrons en montrant des exemples de productions d'élèves pour chacune de ces combinaisons afin d'avoir un aperçu plus qualitatif des représentations mentales possiblement construites par ces élèves.

3.1. Fréquence de chaque combinaison observée

La construction d'un modèle de situation à la fois au niveau local et au niveau global (MSms) reste, de loin, la combinaison la plus fréquente, même si elle représente moins de la moitié des cas observés (43 % des problèmes résolus).

À l'inverse, les combinaisons les moins fréquentes (en excluant les cas où il nous a été impossible de déterminer la représentation globale et/ou locale utilisée), à 14 % des cas chacune, sont celles d'une traduction directe aux deux niveaux (local et global ; TDtd) et d'un modèle de situation global jumelé à des éléments locaux de traduction directe (MStd).

La dernière combinaison, celle où l'élève construit un modèle de situation pour certaines étapes, mais de façon locale seulement, et raisonne en utilisant une traduction directe pour le niveau global, se situe entre les pourcentages précédents, à 22 %. Ces données sont représentées dans le tableau 1, dans lequel nous avons aussi inclus la répartition pour le problème des timbres, que nous analysons ici plus en détail.

Type de démarche	Fréquence d'utilisation dans le problème des timbres (%)	Fréquence d'utilisation pour l'ensemble des problèmes (%)
MSms	49	43
MStd	24	14
TDms	7	22
TDtd	7	14
MSnd	1	0
NDms	2	1
TDnd	1	1
NDtd	3	1
NDnd	5	3

Tableau 1 *: Répartition des types de démarches utilisées*[4].

Dans le problème des timbres, on constate que la répartition des démarches est légèrement différente : si le modèle de situation local et global (MSms) reste prédominant, c'est le modèle de situation global accompagné de quelques éléments de traduction directe au niveau local (MStd) qui occupe la deuxième position, alors que les deux autres combinaisons sont aussi utilisées l'une que l'autre, à 7 % chacune. On remarque cependant que l'analyse du problème des timbres a été plus imprécise que celle des autres problèmes, ayant mené à un nombre plus élevé de démarches où le type de représentation mentale n'a pas pu être déterminé (total de 12 % des démarches, contre 6 % pour l'ensemble des problèmes, incluant celui des timbres).

3.2. Exemples pour chacune des combinaisons possibles

Afin de mieux comprendre à quoi correspondent ces catégories de représentations mentales, nous présentons ci-dessous les productions de quatre élèves, autant pour la démarche de résolution de problèmes que pour la tâche de rappel, avec l'analyse de chacune en ce qui concerne les indices de représentations mentales.

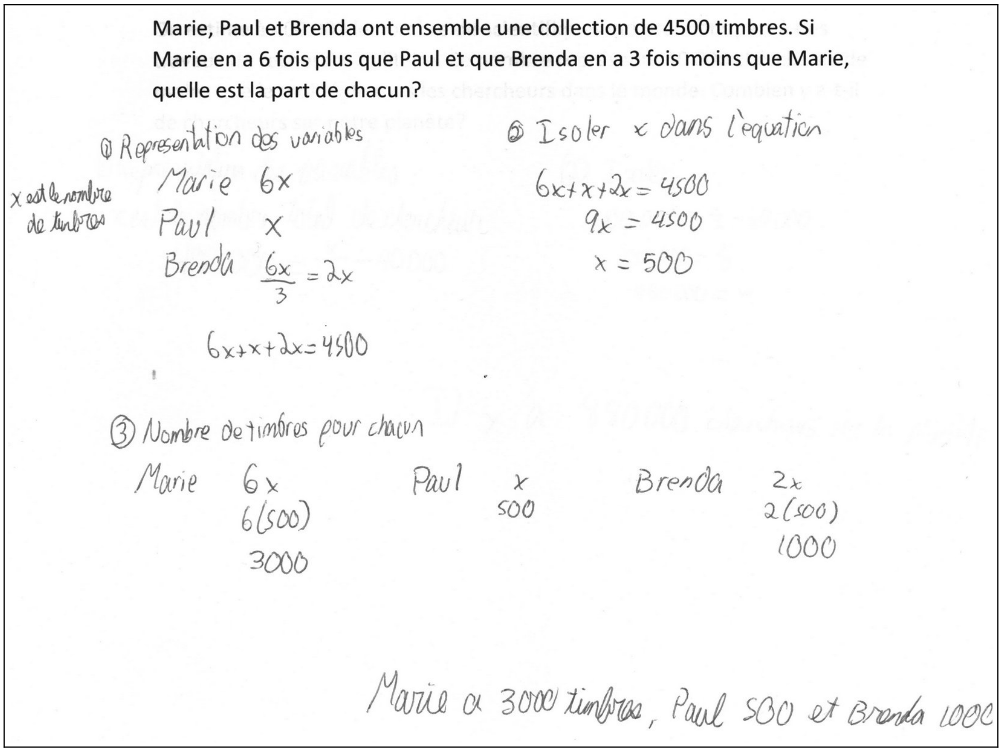
Type MSms

Cet élève a utilisé une démarche algébrique pour résoudre le problème (figure 1). Il a su représenter clairement chacune des relations en les interprétant correctement et a fait appel au contexte pour expliciter le choix de l'inconnue. Le titre de l'étape 3 montre qu'il ne perd pas de vue le contexte et pourrait indiquer un certain contrôle par le sens. Il est également en mesure de relier entre elles les différentes relations locales, ce qui lui permet d'arriver à l'équation que l'on voit à la fin de l'étape 1. Cet élève semble avoir construit un modèle de situation lui permettant d'articuler toutes les relations pertinentes pour la résolution du problème.

Dans son rappel, cet élève écrit : « Marie, Paul et Brenda ont au total 4 500 timbres. Marie a 6 fois plus de timbres que Paul et Brenda en a deux fois moins que Marie. Combien chacun a-t-il de pommes ? » Ce texte est très similaire à l'énoncé initial, mais on remarque néanmoins que l'élève a remplacé « Brenda en a 3 fois moins que Marie » par « Brenda en a 2 fois moins que Marie ». Bien que cette relation soit objectivement fausse, on pourrait croire que l'élève s'est souvenu que Brenda avait moins de timbres que Marie et qu'il y avait un facteur « 2 » impliqué

[4] Les pourcentages ayant été arrondis à l'unité, il est possible que le total n'arrive pas à 100 %.

dans cette relation, ce qui correspond à la démarche de l'élève qui a déterminé que l'expression algébrique associée au nombre de timbres de Brenda était $2x$. C'est pourquoi ce rappel est jugé compatible avec la construction d'un modèle de situation local. Il ne nous donne en outre aucun indice supplémentaire sur le type de représentation mentale utilisée au niveau global.


Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de 4500 timbres. Si Marie en a 6 fois plus que Paul et que Brenda en a 3 fois moins que Marie, quelle est la part de chacun?

① Représentation des variables

x est le nombre de timbres

Marie $6x$

Paul x

Brenda $\frac{6x}{3} = 2x$

$6x+x+2x=4500$

② Isoler x dans l'équation

$6x+x+2x = 4500$

$9x = 4500$

$x = 500$

③ Nombre de timbres pour chacun

Marie $6x$ $6(500)$ 3000

Paul x 500

Brenda $2x$ $2(500)$ 1000

Marie a 3000 timbres, Paul 500 et Brenda 1000

Figure 1 *: Production de l'élève 28, associée au type MSms.*

Type MStd

Les traces laissées par cette élève (figure 2) montrent d'abord une première prise en considération de l'ensemble des données, mais puisqu'elles ne sont pas mises en relation les unes avec les autres, il ne nous est pas possible, à ce stade, de parler de construction d'un MS. L'élève utilise l'expression « $6x$ » pour le nombre de timbres de Marie, ce qui peut relever autant de la traduction directe (l'expression « 6 fois plus » était présente dans l'énoncé) que de la construction d'un modèle de situation. Cependant, lorsque l'élève traduit de façon algébrique le nombre de timbres de Brenda, elle inscrit « $(6x)-3$ » au lieu de « $(6x)\div 3$ », ce qui pourrait s'expliquer par la présence du mot « moins » dans l'énoncé. Cette expression algébrique constituerait alors un indice d'une traduction directe, mais au niveau local, puisqu'elle concerne une relation entre deux données. La suite de la démarche, si l'on tient compte des éléments raturés, semble montrer un cheminement de type « essai-erreur ». On remarque que chaque bloc commence par un nombre (500, puis 200, 400 et 300) multiplié par 6 (ce qui pourrait correspondre à la quantité de Marie) auquel l'élève soustrait ensuite 3 (ce qui représenterait la quantité de Brenda). Les quantités obtenues sont ensuite additionnées pour se rapprocher le plus possible de 4 500 (on observe les ajustements successifs dans le choix des nombres de départ). Cela montre une tentative non menée à terme, de la part de l'élève, de combiner les différentes relations de l'énoncé et de s'assurer que le total de 4 500 est atteint, ce qui est un indice de la construction d'un modèle de situation global. Tous ces éléments nous amènent à attribuer une cote MStd à cette démarche.

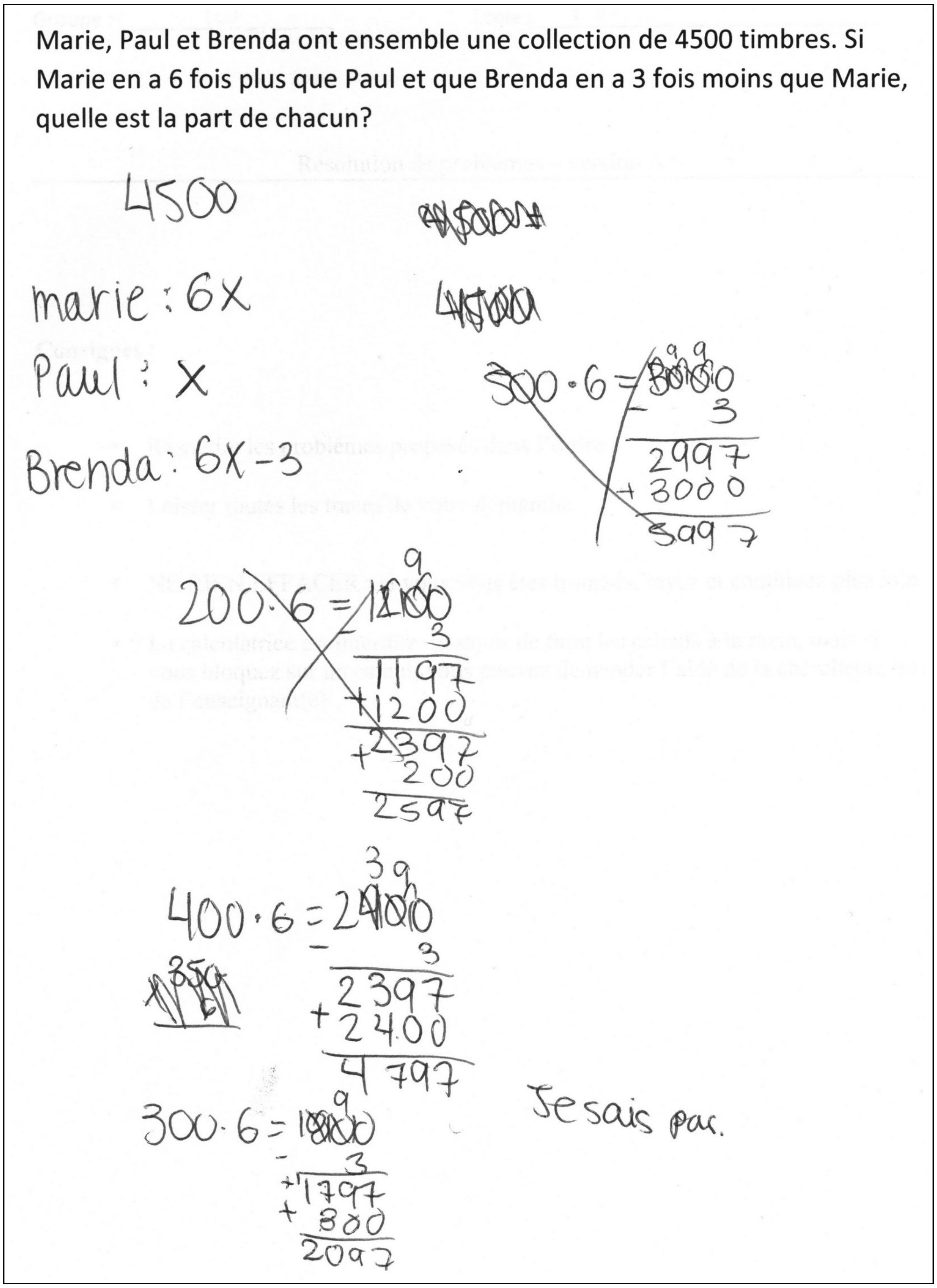


Figure 2 *: Production de l'élève 118, associée au type MStd.*

Dans son rappel, cette élève écrit : « Marie, Brenda et Paul on ensemble 4 500 timbre, Marie a 6 fois plus de timbre que Paul et Brenda a 3 timbre de moin que Marie. Combien ont-il de timbre chacun ? [sic] » On remarque ici la transformation de la relation « trois fois moins » en « 3 de moins », ce qui est cohérent avec la démarche de l'élève et qui constitue, comme nous l'avons vu ci-dessus, un indice de traduction directe au niveau local.

Type TDms

En observant la production de cette élève (figure 3), on remarque immédiatement que les expressions algébriques correspondant au nombre de timbres de chaque ami sont toutes adéquates ; l'élève semble donc avoir réussi à construire un modèle de situation local lui permettant d'interpréter correctement les relations entre ces quantités. Malgré cela, la mise en équation algébrique s'avère problématique. On voit que plusieurs tentatives ont été effectuées, l'une ayant été rayée, et le nombre total de timbres (4 500) n'a pas été pris en considération. L'élève a écrit que les quantités de Marie et de Brenda étaient égales, ce qui montre une perte du sens de ces expressions algébriques. De plus, le fait que Paul aurait un nombre de timbres inférieur à 1 montre que le lien entre le calcul et le contexte du problème n'a pas été fait. Ces différents facteurs nous font croire qu'au niveau global, l'élève n'a pas réussi à construire de modèle de situation satisfaisant, contrairement à ce que l'on observe au niveau local, d'où la cote TDms attribuée à cette démarche.

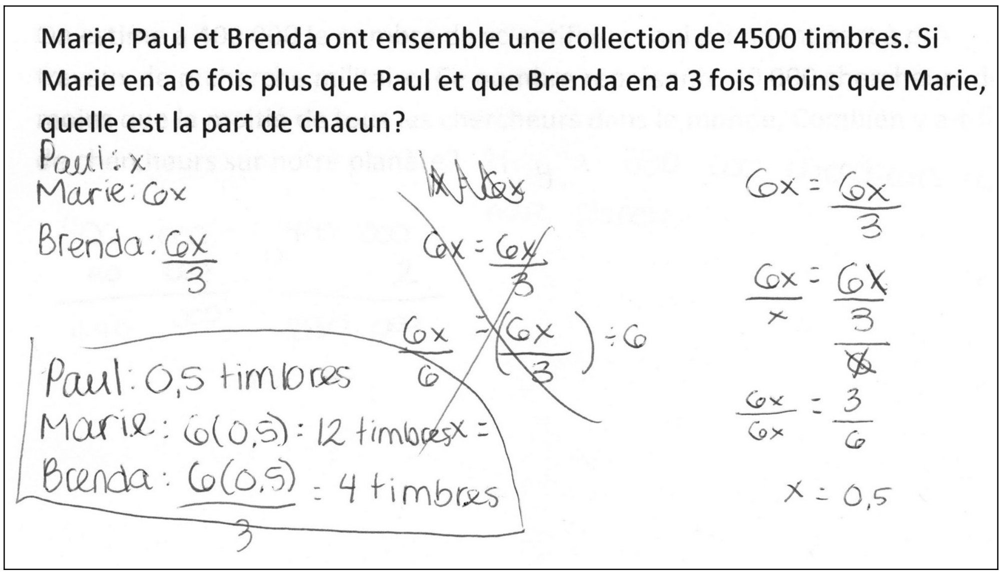
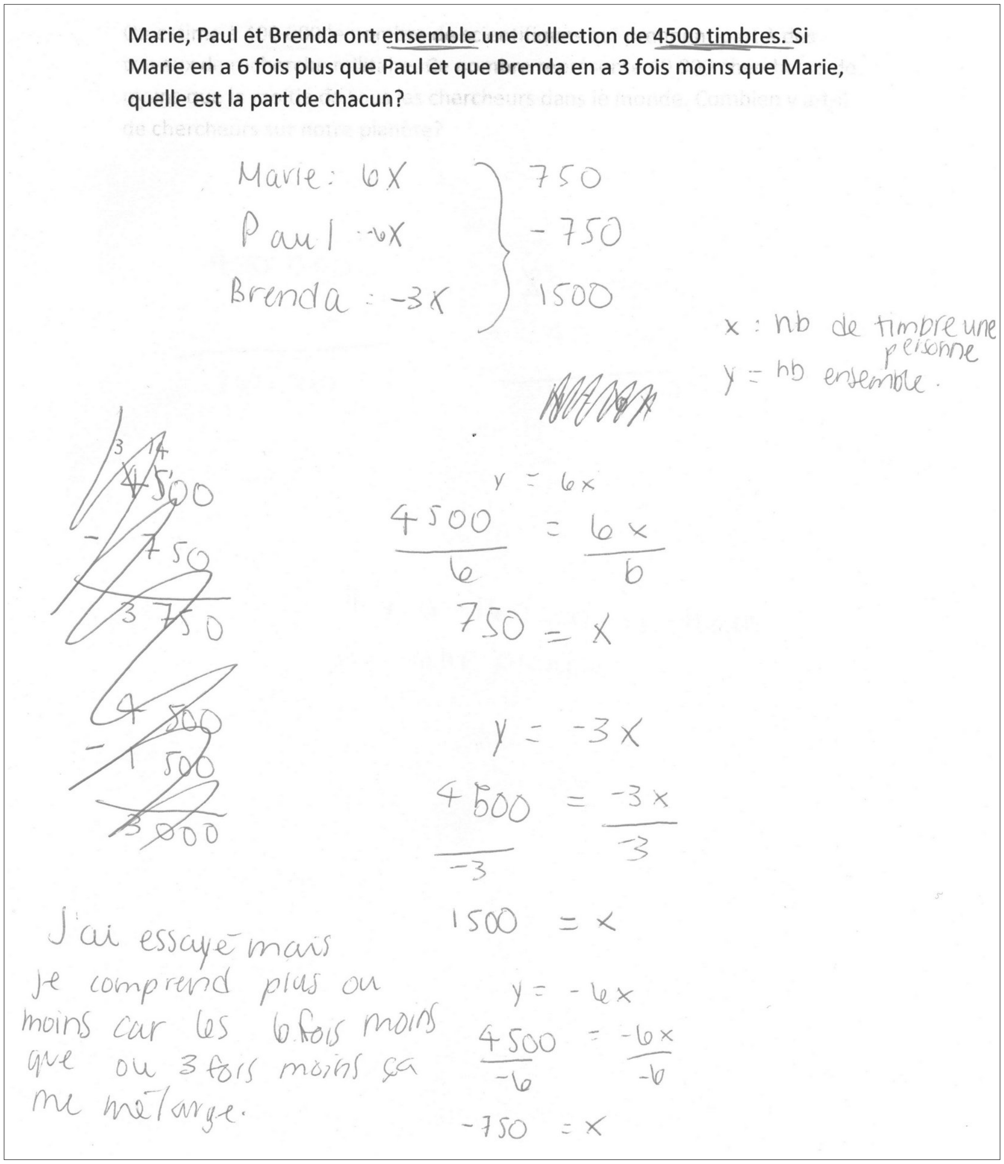


***Figure 3** : Production de l'élève 23, associée au type TDms.*

Le contenu du rappel de cette élève est presque identique à l'énoncé de départ, à l'exception de l'inversion de noms de Marie et de Brenda dans les dernières relations, qui sont toutefois préservées : « Paul, Brenda et Marie ont 4 500 timbres ensemble. Brenda a 6 fois plus de timbres que Paul et Marie en a 3 fois moins que Brenda. Combien chacune a de timbres ? » Cette inversion, ne reflétant pas la démarche de l'élève, nous a semblé relever davantage du simple oubli que d'une transformation des relations ; c'est pourquoi nous avons choisi de conserver la cote attribuée initialement à la démarche.

Type TDtd

La dernière production présentée ici (figure 4) s'est vu attribuer la cote TDtd. Non seulement il ne nous a pas été possible de déceler des traces d'un modèle de situation ni au niveau local, ni au niveau global, mais on y retrouve également plusieurs indices de traduction directe aux deux niveaux. En particulier, on remarque, dès le départ, une transformation de la relation entre le nombre de timbres de Marie et celui de Paul : si x semble représenter, dans un premier temps, le nombre de timbres de Paul et donc, $6x$, celui de Marie, on voit en arrivant à Paul que le sens de l'inconnue semble avoir été perdu. En effet, on pourrait croire que l'élève a transformé la relation en se disant que, si Marie a 6 fois plus de timbres que Paul, alors Paul en aurait 6 fois moins que Marie, ce qui a été traduit par « $-6x$ » (x représenterait alors le nombre de timbres de Marie, et le -6, la relation « 6 fois moins »). Cela est un premier indice d'une traduction directe au niveau local. On retrouve un autre de ces indices dans l'expression utilisée pour représenter le nombre de timbres de Brenda (« $-3x$ ») : ici aussi, le signe « $-$ » semble traduire le « fois moins ».


Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de 4500 timbres. Si Marie en a 6 fois plus que Paul et que Brenda en a 3 fois moins que Marie, quelle est la part de chacun?

Marie : 6x
Paul : -6x
Brenda : -3x

750
-750
1500

x : nb de timbre une personne
y = nb ensemble.

y = 6x
$\frac{4500}{6} = \frac{6x}{6}$
750 = x

y = -3x
$\frac{4500}{-3} = \frac{-3x}{-3}$
1500 = x

y = -6x
$\frac{4500}{-6} = \frac{-6x}{-6}$
-750 = x

J'ai essayé mais je comprend plus ou moins car les 6 fois moins que ou 3 fois moins ça me mélange.

Figure 4 *: Production de l'élève 320, associée au type TDtd.*

La suite de la démarche montre que le nombre 4 500 a été utilisé comme point de départ pour le calcul des quantités de timbres de chacun des amis ; c'était l'un des signes d'une stratégie de traduction directe au niveau global que nous avions identifié. Le nombre négatif de timbres de Paul milite aussi pour une stratégie de traduction directe.

Finalement, comme cet élève n'a rien écrit pour le rappel de ce problème, il nous a été impossible de confronter ce rappel aux traces de sa démarche, mais cette dernière nous a paru suffisamment claire pour nous permettre de lui attribuer la cote TDtd.

4. Discussion

Les résultats présentés ci-dessus peuvent être expliqués de différentes façons ; notre étude n'étant qu'exploratoire, de plus amples recherches seraient nécessaires pour mieux déterminer les causes possibles des phénomènes observés.

On remarque avant tout que la combinaison la plus répandue est celle d'un modèle de situation à la fois au niveau local et au niveau global, avec un peu plus de 43 % des démarches analysées. Si on la jumelle aux combinaisons MStd, MSnd, NDms et TDms, pour lesquelles les élèves ont malgré tout montré certains éléments de construction d'un modèle de situation, local ou global, on s'aperçoit que, dans une bonne majorité des démarches (81 %), on retrouve des traces de construction d'un modèle de situation, ce qui suggère que la grande majorité des élèves arrive à construire un tel modèle, au moins en partie. Il semble par ailleurs que plus d'élèves sont en mesure de se forger un modèle de situation au niveau local qu'au niveau global.

Une analyse plus qualitative des démarches et des rappels des élèves permet par ailleurs d'avoir un aperçu de la façon dont peuvent s'articuler entre eux les niveaux local et global de représentation. Cette analyse, présentée ci-dessus, montre bien que, comme nous l'avions anticipé, une distinction trop rigide entre modèle de situation et stratégie de traduction directe pourrait mal s'adapter à la réalité. Nous croyions que cette dichotomie ne saurait s'appliquer clairement à des problèmes complexes, comportant plusieurs étapes de résolution. Nous avions soulevé la possibilité que des élèves construisent des modèles de situation partiels, plus ou moins développés, coexistant possiblement avec des traductions directes. L'existence de telles combinaisons a été confirmée par l'analyse des démarches des élèves présentées ici. Cette analyse nous a conduite à distinguer deux niveaux de construction d'un modèle de situation : un niveau plus local, servant à comprendre une relation du problème, et un niveau global, qui intègre l'ensemble des données et des relations du problème en un tout cohérent et articulé. En effet, nous avons observé que, dans un même problème, il pouvait y avoir une approche globale qui relève plutôt de la traduction directe ou de la construction d'un modèle de situation, mais nous avons également vu que cette approche globale pouvait coexister avec plusieurs petits modèles de situation et/ou traductions directes au niveau local. Si nous nous étions limitées aux deux grandes catégories que sont la traduction directe et le modèle de situation, de nombreuses démarches auraient été impossibles à catégoriser sans ambiguïté.

Ces résultats nous amènent à tirer quelques conclusions de notre étude, soient la pertinence de la classification des représentations mentales en niveaux (local et global) et l'impact de la formulation de l'énoncé. Ils nous conduisent également à formuler quelques pistes à explorer pour l'intervention en classe.

En ce qui concerne la pertinence de la classification des représentations mentales en niveaux (global et local), nous avons vu que cette distinction permettait une analyse beaucoup plus fine des démarches des élèves par rapport à une classification binaire qui ne tiendrait pas compte de ces niveaux. Nous reviendrons ci-dessous aux pistes ouvertes par notre recherche pour l'enseignement, mais soulignons déjà que ces résultats laissent croire que l'intervention visant à aider les élèves à construire un modèle de situation pourrait être différente selon le niveau de construction, global ou local, visé ; de plus amples études seront nécessaires pour le confirmer ou l'infirmer.

Pour ce qui est de l'impact de la formulation de l'énoncé, dans le cadre de cette recherche, nous avions volontairement ciblé des problèmes pour lesquels l'utilisation de la traduction directe menait à un échec de la résolution. Cela s'est fait principalement par le choix des termes et des structures relationnelles utilisées dans l'énoncé.

En ce qui concerne les pratiques enseignantes, la littérature scientifique ayant plusieurs fois souligné le fait que les élèves sont plus portés à utiliser la traduction directe parce qu'elle conduit le plus souvent à la réponse attendue (voir section 1.2.), il nous semble important de proposer bon nombre de problèmes où ce n'est pas le cas, de façon à remettre en question ces croyances chez les élèves. En effet, si la construction d'une représentation mentale adéquate est un apprentissage important pour être en mesure de résoudre correctement les problèmes proposés, cet apprentissage se fera d'autant mieux que les élèves en percevront la pertinence. Afin de favoriser la construction d'un modèle de situation, il sera également intéressant de choisir, du moins dans un premier temps, des problèmes où les éléments de contexte sont suffisamment développés, réalistes et familiers pour agir comme un levier pour la construction d'une telle représentation, tels que ceux proposés par Demonty *et al.* (2007). L'enseignant pourra également adopter l'une des démarches, issues de la recherche, conçues pour outiller les élèves à mieux construire une représentation mentale adéquate lors de la résolution d'un problème (Auquière *et al.*, 2018 ; Demonty *et al.*, 2007 ; Fagnant *et al.*, 2016 ; Polotskaia & Savard, 2018, par exemple). Les démarches proposées par ces auteures, proposant par exemple d'enseigner aux élèves à représenter graphiquement un problème, à reformuler un énoncé ou à utiliser un schéma pour illustrer les relations entre les données, ont toutes montré un potentiel intéressant. Bien que la majorité de ces propositions s'adressent aux élèves du primaire, il nous semble important de ne pas les rejeter trop rapidement dans les classes d'élèves plus âgés ou à tout le moins de s'en servir pour bâtir des propositions plus adaptées à ces élèves qui, comme le montrent nos résultats, ont tout autant besoin de soutien et d'accompagnement pour apprendre à construire des représentations mentales adéquates des problèmes à résoudre. En effet, l'importance des représentations mentales n'est pas à négliger, même chez des élèves plus âgés et donc plus « expérimentés » en résolution de problèmes.

Cette étude présente certaines limites dont il convient de tenir compte, notamment pour comprendre la portée des résultats obtenus. Les élèves retenus pour l'étude, s'ils sont représentatifs de l'élève « moyen », ne représentent pas l'ensemble des élèves présents dans les classes. En effet, ont été exclus les élèves présentant un diagnostic de trouble d'apprentissage, ceux n'ayant pas été scolarisés entièrement en français de même que ceux présentant des lacunes trop importantes sur le plan de certaines habiletés cognitives, ce qui, à tout le moins dans certains milieux, représente une part importante des élèves que l'on retrouve en classe régulière. La généralisation des résultats doit donc se faire avec retenue et prudence.

En outre, le faible nombre de problèmes mathématiques utilisés, tout en étant justifié par un souci de ne pas dépasser les capacités de concentration des participants, pourrait également conduire à une identification du type de représentation mentale différent de celui qui aurait été obtenu avec un plus grand nombre de problèmes à résoudre. Il importe également de préciser que les seuls éléments auxquels nous avons eu accès sont les traces laissées par les élèves, qui peuvent constituer des indices du type de représentation mentale construite par les élèves mais n'en sont pas une image exacte. Il faut donc nuancer les résultats en conséquence.

Conclusion

Dans le présent article, notre objectif était d'analyser les traces laissées par les élèves lors de la résolution de problèmes mathématiques pour en inférer les types de représentations mentales construites par ces élèves. Les résultats nous ont amenée à raffiner la typologie utilisée, qui partage les représentations mentales entre modèles de situation et stratégies de traduction directe, pour introduire la notion de niveaux qui permet de mieux rendre compte de la démarche des élèves lorsque confrontés à des problèmes nécessitant plusieurs étapes de résolution. Nous avons ainsi fait ressortir la coexistence de modèles de situations locaux et globaux et de stratégies de traduction directe elles aussi globales ou locales, ces différentes représentations pouvant être combinées de plusieurs façons par les élèves. Cette distinction pourra permettre une plus grande précision dans les recherches à venir. Elle pourra également donner aux enseignants une grille d'analyse pour mieux repérer les difficultés de leurs élèves en résolution de problèmes et, ainsi, mieux les accompagner dans la construction d'une représentation mentale appropriée du problème, représentation mentale qui est la définition même d'un problème compris.

Références bibliographiques

Adams, T. L. & Lowery, R. M. (2007). An Analysis of Children's Strategies for Reading Mathematics. *Reading & Writing Quarterly, 23*(2), 161-171. https://doi.org/10.1080/10573560601158479

Audet, M. (2017). La notion de problème dans l'intervention orthopédagogique en mathématiques. Université du Québec à Montréal. http://archipel.uqam.ca/11196/1/M15020.pdf

Auquière, A., Demonty, I. & Fagnant, A. (2018). Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 23*, 41.

Baruk, S. (1985). L'âge du capitaine : de l'erreur en mathématiques. Éditions du Seuil.

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. & Lepage, A. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. *Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre*.

Blais, M. & Martineau, S. (2006). L'analyse inductive générale : description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches qualitatives, 26*(2), 1-18.

Brousseau, G. (1987). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de Bordeaux.

Charnay, R. & Mante, M. (1992). De l'analyse d'erreur en mathématiques aux dispositifs de re-médiation. *Grand N, 7*, 5-32. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/48n5_1562937289243-pdf

Coquin-Viennot, D. & Moreau, S. (2007). Arithmetic problems at school: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model. *British Journal of Educational Psychology, 77*(1), 69-80. https://doi.org/10.1348/000709905x79121

Crahay, M. & Detheux, M. (2005). L'évaluation des compétences, une entreprise impossible ? Résolution de problèmes complexes et maîtrise de procédures mathématiques. *Mesure et évaluation en éducation, 28*(1), 57-58.

Demonty, I. & Fagnant, A. (2014). Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe. *Éducation et francophonie, 42*(2), 173-189.

Demonty, I., Fagnant, A. & Lejong, M. (2007). *Résoudre des problèmes : pas de problème !* Bruxelles : De Boeck.

Dunn, L. M., Dunn, L. M. & Thériault-Whalen, C. M. (1993). Échelle de vocabulaire en images *Peabody : EVIP*. Psycan.

Fagnant, A., Demonty, I. & Lejong, M. (2016). *Résoudre des problèmes : pas de problème ! Guide méthodologique et documents reproductibles : cycle 10-12 ans*. De Boeck.

Fagnant, A., Marcoux, G. & Vlassis, J. (2014). Résolution de problèmes mathématiques et développement de compétences: sur quelles variables agir pour soutenir les élèves dans leur apprentissage. *Cahiers des Sciences de l'Éducation, 36*, 1-6.

Gamo, S., Nogry, S. & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. *Psychologie Française, 59*(3), 215-229. https://doi.org/10.1016/j.psfr.2014.02.002.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 293-307. https://doi.org/10.1016/s0959-4752(97)00006-6

Hanin, V. & Van Nieuwenhoven, C. (2018). Évaluation d'un dispositif d'enseignement-apprentissage en résolution de problèmes mathématiques : Évolution des comportements cognitifs, métacognitifs, motivationnels et émotionnels d'un résolveur novice et expert. *e-JIREF, 4*(1), 37-66.

Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*(1), 18-32. https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. FeniXX.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes. *Grand N, 69*(1), 31-52.

Kintsch, W. & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*(1), 109-129. https://doi.org/10.1037/0033-295x.92.1.109

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouverts : notion, catégories et difficultés. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 15*, 45-73.

Labrosse, P. (2005). *L'évaluation de la compétence à résoudre des problèmes en mathématiques : vers des problèmes favorisant le raisonnement*. Communication présentée au Colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec, Montréal. http://www.math.uqam.ca/~tanguay_d/Pdf%20des%20articles/Actes_GDM_2005.pdf

Lewis, A. B. & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 363-371. https://doi.org/10.1037/0022-0663.79.4.363

Malefoasi, A. (2010). *Exploring the role that language plays in solving mathematical word problems for the Solomon Islands secondary school students*. University of Waikato. http://researchcommons.waikato.ac.nz/handle/10289/4992

Marcoux, G. (2012). Différences entre élèves dans trois types de tâches en mathématiques : quelques variables à prendre en compte pour éviter d'engendrer des inégalités. In J Beckers, J Crinon & G Simons (dir.). *Approche par compétences et réduction des inégalités entre élèves : de l'analyse des situations scolaires à la formation des enseignants*. De Boeck Supérieur (pp. 33-55). https://www.cairn.info/load_pdf.php?ID_ARTICLE=DBU_BECKE_2012_01_0033&download=1

Mayer, R. E., Bovenmyer Lewis, A. & Hegarty, M. (1992). Mathematical misunderstandings: qualitative reasoning about quantitative problems. In JID Campbell (dir.). *The Nature and origins of mathematical skills*. Elsevier Science Publishers (pp. 137-154). http://books.google.ca/books?hl=fr&lr=&id=bdugtwphAfoC&oi=fnd&pg=PA137&dq=mathematics+authornbsp:mayer&ots=zm7LOEYjsY&sig=RaWnhljk4rfU-Bl-_E0aeEdOldo#v=onepage&q&f=false

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). The Process of understanding mathematical problems. In RJ Sternberg, Ben-Zeev, Talia (dir.). *The nature of mathematical thinking*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc (pp. 29-54).

Montague, M., Enders, C. & Dietz, S. (2011). Effects of cognitive strategy instruction on math problem solving of middle school students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 34*(4), 262-272. https://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/0731948711421762?casa_token=HcMg53WOKwcAAAAA%3AiQn0r3s4H5td6VNxqj0E4DTBmtAx2fMYQb_cTsj8OjSljZeqNJDBYsXdPg5n70a-Bso6FVa8z9uNLLo

Moreau, S. & Coquin-Viennot, D. (2003). Highlighting the role of the episodic situation model in the solving of arithmetical problems. *European Journal of Psychology of Education, 18*(3), 267-279. https://doi.org/10.1007/bf03173248

Orrantia, J., Tarín, J. & Vicente, S. (2011). The use of situational information in word problem solving. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 81-94.

Özsoy, G. & Ataman, A. (2009). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education, 1*(2), 67-82. https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/278/272

Pape, S. J. (2004). Middle School Children's Problem-Solving Behavior: A Cognitive Analysis from a Reading Comprehension Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education 35*(3), 187-219. http://www.jstor.org/stable/30034912

Polotskaia, E. & Savard, A. (2018). Using the relational paradigm: Effects on pupils' reasoning in solving additive word problems. *Research in mathematics education, 20*(1), 70-90.

Radford, L. (1996). Sur la résolution de problèmes dans la classe de mathématiques. *Revue du Nouvel Ontario, 18*, 11-34. http://pdf.library.laurentian.ca/RNO/Radford1996.pdf

Raven, J. (2005). *Progressive matrices de Raven*. ECPA.

René de Cotret, S. (2007). *Un programme double : « Bouchons les trous » un environnement informatisé pour le travail de mise en équations algébriques et Esquisse d'une didactique du sens commun*. Séminaire national de didactique des mathématiques 2006.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science, 17*(4), 309-338. https://doi.org/10.1007/bf00056219

Reusser, K. (1990). From text to situation to equation: Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. In H Mandl, E De Corte, N Bennett, HF Friedrich (dir.). *Learning and instruction in an international context. Vol. II*. New York: Pergamon Press (pp. 477-498).

Thevenot, C. & Barrouillet, P. (2015). Arithmetic word problem solving and mental representations. *The Oxford handbook of numerical cognition*, 158-179.

Thevenot, C., Barrouillet, P. & Fayol, M. (2010). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M Crahay et M Dutrevis (dir.). *Psychologie des apprentissages scolaires*. De Boeck (pp. 137-166).

Thevenot, C. & Oakhill, J. (2005). The Strategic use of Alternative Representations in Arithmetic Word Problem Solving. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology Section A, 58*(7), 1311-1323. https://doi.org/10.1080/02724980443000593

Tijus, C., Legros, D., Brissiaud, R., Richard, J.-F., Sander, E. & Léger, L. (2002). Propriétés des objets et résolution de problèmes mathématiques. *Revue française de pédagogie, 139*, 97-105. http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rfp_0556-

7807_2002_num_139_1_2885

Verschaffel, L. & De Corte, E. (2008). Chapitre 6. La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In M Crahay (dir.). *Enseignement et apprentissage des mathématiques : Que disent les recherches psychopédagogiques*, 153-176. Louvain-la-Neuve : De Boeck Supérieur. https://doi.org/10.3917/dbu.craha.2008.01.0153

Verschaffel, L., Greer, B. & de Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education. Springer (pp. 257-276).

Voyer, D. (2006). *L'influence de facteurs liés à l'élève ou à l'énoncé sur la compréhension de problèmes écrits d'arithmétique*. Université Laval. https://dam-oclc.bac-lac.gc.ca/download?is_thesis=1&oclc_number=1032884185 &id=ed33a610-3c96-4452-acb6-86b3fd5a876a&fileName=23719.pdf

Voyer, D. (2011). Performance in Mathematical Problem Solving as a Function of Comprehension and Arithmetic Skills. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(5), 1073-1092. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9239-y

Voyer, D., & Goulet, M.-P. (2013). La compréhension de problèmes écrits d'arithmétique au regard de l'habileté en lecture d'élèves de sixième année (11 ans). *Revue des sciences de l'éducation, 39*(3), 491-513. https://www.erudit.org/en/journals/rse/1900-v1-n1-rse01495/1026310ar/abstract/

Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (2019). *Référentiel d'intervention en mathématiques*. Québec : Gouvernement du Québec. http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/ adaptation_serv_compl/Referentiel-mathematique.PDF

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2022). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen*. https://eduscol.education.fr/document/32206/download?attachment

Annexe
Problèmes présentés aux élèves

1. Les timbres[5]

Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de 4 500 timbres. Si Marie en a 6 fois plus que Paul et que Brenda en a 3 fois moins que Marie, quelle est la part de chacun ?

2. Les scientifiques

On estime à 400 000 le nombre de scientifiques qui prennent part à des travaux de recherche militaire. Ce nombre représente 40 000 chercheurs de moins que la moitié de tous les chercheurs dans le monde. Combien y a-t-il de chercheurs sur notre planète ?

3. Les feuilles

Un livre a 300 feuilles, chaque feuille a une épaisseur de 0,1 *mm* et chacune des couvertures a une épaisseur de 3 *mm*. Après combien de feuilles faut-il ouvrir le livre pour que la partie posée à gauche ait une épaisseur du double de celle posée à droite ?

4. Les pommes (Labrosse, 2005, p. 188)

Trois boîtes contenaient chacune le même nombre de pommes. Après avoir retiré 120 pommes, on s'aperçoit que dans chacune des boîtes, il reste respectivement 28, 25 et 16 pommes. Combien y en avait-il au début dans chacune des boîtes ?

5. L'argent de Luc et de Michel (Inspiré de Bednarz, Janvier, Mary & Lepage, 1992)

Luc a 3 \$ de moins que Michel. Luc double son avoir tandis que Michel augmente le sien de $\frac{1}{2}$. Maintenant, Luc a 1 \$ de moins que Michel. Combien ont-ils chacun maintenant ?

[5] L'origine des problèmes des timbres, des scientifiques et des feuilles est inconnue. Ils ont été fournis par René de Cotret.