
ACTIVITÉ DU N° 116

POIGNÉES DE MAIN EN COUPLE
SOLUTION ET DÉVELOPPEMENTS

Clément DUPONT¹

Simon MODESTE²

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier, CNRS

Rappel de l'énoncé

Le problème des « poignées de main » est un classique parmi les *problèmes pour chercher* à l'école, au collège, ou en formation des professeurs des écoles :

15 personnes se rencontrent, et se serrent la main.

Combien de poignées de main sont échangées ?³

Nous proposons une variante de ce problème :

Lors d'une soirée où 10 couples sont présents, chaque personne serre la main à tout le monde sauf à son conjoint ou sa conjointe.

Combien de poignées de main sont échangées en tout ?

Plusieurs stratégies sont envisageables pour résoudre le problème... essayez d'en trouver quelques-unes.

Généralisation :

Si n couples sont présents, combien de poignées de main sont échangées en tout ?

Introduction

Nous allons profiter de la résolution de ce problème pour expliciter quelques principes généraux de dénombrement, très courants, qui sont souvent utilisés de façon implicite. Dénombrer, c'est déterminer le cardinal (nombre d'éléments) d'un ensemble fini. Le cardinal d'un ensemble fini E est noté $|E|$. Dans notre problème, l'ensemble E que l'on veut dénombrer est l'ensemble des poignées de main.

Avant d'attaquer ce problème, nous proposons d'étudier le problème classique des poignées de mains, qui est plus simple.

¹ clement.dupont@umontpellier.fr

² simon.modeste@umontpellier.fr

³ On rencontre le problème avec un nombre de personnes varié, fixé à l'avance ou égal au nombre d'élèves dans la classe, et parfois énoncé dans le cas général.

1. Le problème classique des poignées de main (sans les couples)

Le problème classique des poignées de main, formulé dans le cas général, est le suivant : p personnes se rencontrent, et se serrent la main. Combien de poignées de main sont échangées ?

Nous verrons que la réponse est :

$$\frac{p(p-1)}{2} \text{ poignées de main.}$$

Nous proposons d'explorer plusieurs stratégies de résolution de ce problème. Nous verrons que ces stratégies peuvent s'adapter au problème des couples, et nous verrons aussi quels liens peuvent être faits entre le problème classique et celui des couples.

1.1. Énumération

Pour dénombrer un ensemble fini, la première stratégie que l'on peut utiliser est celle qui consiste à énumérer tous les éléments de l'ensemble.

Énumérer : lister les objets de la collection, sans répétition. C'est ce qu'on fait quand on compte successivement (une et une seule fois) les objets d'une collection en récitant la comptine : 1, 2, 3, 4, 5, etc. Le dernier nombre énoncé est le cardinal de la collection.

En termes mathématiques, énumérer l'ensemble E revient à indexer ses éléments par les entiers de 1 à c , et donc à écrire $E = \{x_1, x_2, \dots, x_c\}$ où les x_i sont deux à deux distincts. L'entier c est alors le cardinal de E . (C'est la définition rigoureuse de la notion de cardinal).

De manière encore plus formelle, cela revient à construire une bijection de l'ensemble $\{1, 2, \dots, c\}$ vers l'ensemble E .

Essayons d'énumérer les poignées de main qui sont échangées durant la soirée entre les p invités. Pour cela, il peut être utile de choisir une « mise en scène » du problème : les invités arrivent un par un à la soirée, et chaque nouvel arrivant serre la main à toutes les personnes déjà présentes :

- en arrivant, la 1^{re} personne ne serre aucune main ;
- en arrivant, la 2^e personne serre la main de la 1^{re} personne, soit 1 poignée de main ;
- en arrivant, la 3^e personne serre la main de la 1^{re} personne, puis de la 2^e personne, soit 2 poignées de main ;
- \vdots
- en arrivant, la p -ième personne serre la main de la 1^{re} personne, puis de la 2^e personne, puis ..., puis enfin de la $(p-1)$ -ième personne, soit $p-1$ poignées de main.

Le nombre total de poignées de main est donc la somme :

$$1+2+3+\dots+(p-2)+(p-1) = \sum_{i=1}^{p-1} i$$

Cette formule est une première solution au problème : on a exprimé le nombre de poignées de

main en fonction de p , ce qui permet de le calculer pour n'importe quel nombre p donné. Cette formule est peu pratique pour p grand (il faut réaliser un nombre d'opérations de l'ordre de p) : on peut espérer une formule plus explicite pour cette somme. Cette formule existe et nous allons la redécouvrir dans un instant, mais avant cela remarquons qu'on peut représenter la situation par un graphe où les sommets sont les personnes et une arête entre deux sommets représente une poignée de main entre les deux personnes. La figure 1 représente le graphe des poignées de mains (ce graphe, qui contient toutes les arêtes possibles entre deux sommets, est appelé le graphe complet à p sommets). On cherche donc à dénombrer les arêtes du graphe complet en fonction de son nombre de sommets.

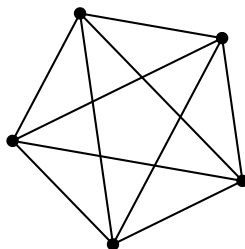


Figure 1 : Le graphe des poignées de main pour $p=5$ invités (graphe complet à 5 sommets).
Chaque sommet représente un invité, chaque arête une poignée de main entre deux invités.

La figure 2 montre une façon d'énumérer les arêtes du graphe complet selon le principe énoncé ci-dessus.

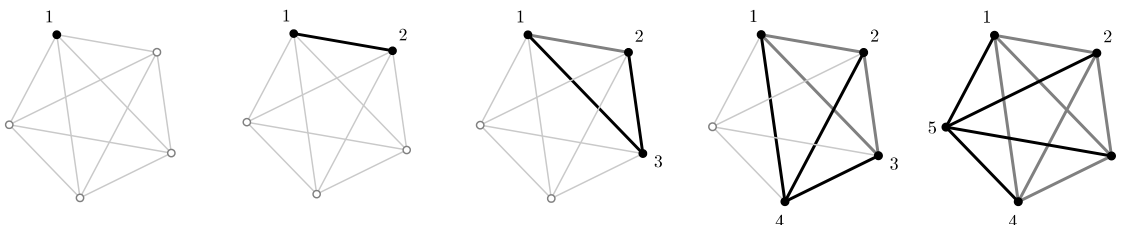


Figure 2 : Les étapes de comptage des 10 poignées de main, dans la « mise en scène » où les invités, numérotés de 1 à 5, arrivent un par un.

Une autre stratégie d'énumération serait d'imaginer que tous les invités sont présents, et que, dans un ordre prédéfini, chaque personne serre la main à toutes celles à qui elle n'a pas encore serré la main : la 1^{re} personne serre la main aux personnes numérotées 2 à p , la 2^e personne serre la main aux personnes numérotées 3 à p , etc. jusqu'à la dernière personne qui n'a aucune main à serrer puisque tout le monde lui a serré la main (on peut lire les étapes de la figure 2 de droite à gauche pour visualiser cette énumération, si on commence par la personne 5, puis la 4, etc.).

On obtient alors la même somme, écrite dans le sens inverse :

$$(p-1)+(p-2)+\dots+3+2+1.$$

1.2. Calcul de la somme

Revenons maintenant au calcul de la somme. On a la formule classique suivante :

$$(*) 1+2+3+\dots+(p-2)+(p-1) = \frac{p(p-1)}{2}$$

Voici la preuve que, selon la légende, C. F. Gauss aurait redécouverte enfant.

Notons S la somme que nous voulons calculer. On écrit les termes de cette somme deux fois, sur deux lignes, dans un sens puis dans l'autre :

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (p-2) + (p-1) \\ S &= (p-1) + (p-2) + (p-3) + \dots + 2 + 1 \end{aligned}$$

On effectue la somme membre à membre des deux égalités. Si l'on somme les termes du membre de droite deux par deux en colonne, on constate qu'on obtient à chaque fois p . Comme $p-1$ termes sont sommés dans chaque ligne, on obtient donc

$$S+S = (p-1)p,$$

ou encore $2S = p(p-1)$, ce qui donne la formule (*).

Voici une interprétation « visuelle » de cette preuve de la formule (*). La somme S est le nombre de carreaux dans un escalier (l'escalier noir de la figure 3) où les colonnes sont formées d'1 carreau, puis de 2 carreaux, puis ..., puis de $p-1$ carreaux. On « voit » la preuve de la formule (*) en emboîtant deux escaliers de même forme pour former un rectangle de dimensions $(p-1) \times p$, qui contient $S+S$ carreaux.

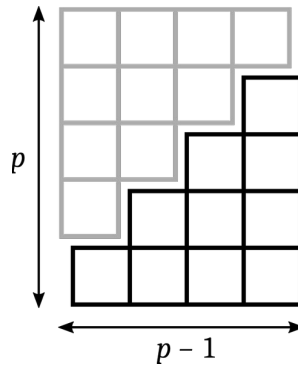


Figure 3 : Une preuve « visuelle » de la formule (*),
ici pour $p=5$.

Une autre façon de prouver la formule (*) pour tout entier $p \geq 2$ est la récurrence :

- initialisation : pour $p=2$, la formule est vraie : $1 = \frac{2(2-1)}{2}$
- hérédité : supposons la formule vraie au rang p , c'est-à-dire :

$$1+2+3+\dots+(p-1) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Alors

$$[1+2+3+\dots+(p-1)]+p = \frac{p(p-1)}{2}+p$$

par application de l'hypothèse de récurrence à l'expression entre crochets.

Comme par ailleurs on a

$$\frac{p(p-1)}{2} + p = \frac{p(p-1+2)}{2} = \frac{(p+1)p}{2},$$

la formule est vraie au rang $(p+1)$.

- **conclusion** : pour tout entier $p \geq 2$, la formule (*) est vraie

Nous présentons maintenant des méthodes pour obtenir directement la formule $\frac{p(p-1)}{2}$ sans effectuer ce calcul de somme.

1.3. En comptant les poignées de main serrées par chaque personne

Concentrons-nous sur le nombre de poignées de main échangées par une personne. Chaque personne échange $p-1$ poignées de main en tout, une pour chacune des autres invités. En multipliant ceci par le nombre de personnes, on obtiendrait $p(p-1)$ poignées de main.

Cela semble correct, mais en réalité on a compté chaque poignée de main deux fois (une pour chacun des deux protagonistes de la poignée de main). On a donc compté trop de poignées de main : précisément 2 fois trop. Donc on peut trouver le nombre total de poignées de mains en divisant par 2, c'est donc bien $\frac{p(p-1)}{2}$.

La figure 4 illustre pour $p=5$ cette stratégie de dénombrement des poignées de mains sur le graphe complet (figure 1), où l'on fait la somme des nombres d'arêtes adjacentes à chaque sommet (appelés degrés des sommets). Chaque arête est alors comptée deux fois, une fois pour chacune de ses extrémités. Chacune des 5 personnes serre la main aux 4 autres personnes, mais chaque poignée de main aura été comptée deux fois. On retrouve bien 10 poignées de main au total.

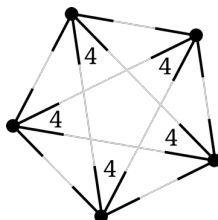


Figure 4 : Représentation de la stratégie de comptage des poignées de mains échangées par chacune des personnes, pour $p=5$.

Implicite, en faisant le produit $p(p-1)$, et en divisant par 2, nous avons utilisé (à deux reprises) un principe fondamental de dénombrement appelé *lemme des bergers*.

Lemme des bergers : le lemme des bergers se présente souvent sous la forme suivante (dont il tire son nom) : si l'on a m moutons et que chaque mouton a 4 pattes, alors il y a $4m$ pattes dans le troupeau. À l'inverse, un berger qui aurait compté toutes les pattes du troupeau peut déterminer le nombre de moutons en divisant par 4.

Plus formellement, pour une application $f: E \rightarrow F$ telle que tous les éléments y de F ont k antécédents par f , on a $|E|=k|F|$, aussi utile sous la forme $|F|=\frac{|E|}{k}$

(Dans le cas du berger, E est l'ensemble des pattes, F l'ensemble des moutons, et f associe à chaque patte le mouton auquel elle est attachée).

1.4. Une soustraction

Une autre façon d'aborder le problème peut être d'utiliser une représentation des poignées de main échangées sous forme d'un tableau à double entrée. On y représente les personnes en lignes et en colonnes, et chaque case de coordonnées (i, j) représente une poignée de main entre les personnes i et j , comme dans la figure 5. Les cases grisées, sur la diagonale, représentent les poignées de main à soi-même, qu'on ne compte pas. Il s'agit de compter le nombre de cases blanches et de le diviser par 2, les cases de coordonnées (i, j) et (j, i) correspondant à la même poignée de main.

Il y a p^2 cases dans le tableau, et p cases grisées sur la diagonale. Il y a donc $p^2 - p = p(p-1)$ cases blanches dans le tableau, et on retrouve donc $\frac{p(p-1)}{2}$ poignées de main.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Figure 5 : Représentation en tableau des poignées de mains pour $p=5$. On dénombre $5^2 - 5 = 20$ cases blanches, et l'on divise par 2 pour trouver 10 poignées de mains.

Comme précédemment, on a compté trop d'éléments pour dénombrer l'ensemble étudié. Cette fois-ci, on a utilisé les propriétés d'additivité du cardinal.

Propriété d'additivité : Soit E un ensemble fini qu'on a partitionné en deux sous-ensembles A et B . Cela signifie que tout élément de E est soit dans A , soit dans B , et ne peut pas être dans les deux à la fois. Alors le nombre d'éléments de E est la somme du nombre d'éléments de A et du nombre d'éléments de B .

Plus formellement :

$$\text{si } E = A \cup B \text{ avec } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } |E| = |A| + |B|.$$

Cette propriété permet de dénombrer un ensemble E en le décomposant en sous-ensembles disjoints que l'on peut dénombrer séparément.

C'est cette propriété qui permet de prouver le *lemme des bergers*, qui peut s'interpréter comme le cas où l'on partitionne un ensemble fini E en m parties toutes de même cardinal k .

$$\text{Ainsi, } |E| = k + k + \dots + k = m \times k.$$

Il découle aussi de la propriété d'additivité que :

$$\text{si } A \subset E, \text{ alors } |E \setminus A| = |E| - |A|.$$

C'est cette propriété qui nous permet de dénombrer un ensemble plus « gros » puis soustraire le cardinal de l'ensemble des éléments comptés en trop.

De manière générale, pour A et B deux ensembles, on a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Remarque : la stratégie qui consiste à « surcompter » les éléments de l'ensemble s'avère souvent efficace pour dénombrer un ensemble. Pour trouver ensuite le nombre d'éléments cherché : soit on soustrait le nombre d'éléments comptés en trop (additivité), soit on sait qu'on a compté chaque élément un même nombre de fois k , et il faut diviser par k pour obtenir le résultat (*lemme des bergers*). Dans le cas du dénombrement avec le tableau, il a même fallu utiliser les deux méthodes (dans le bon ordre) : d'abord soustraire le nombre de cases de la diagonale, puis diviser par 2 car chaque élément avait été compté en double.

1.5. Double dénombrement

Dans la partie 1.1. nous avons vu que l'ensemble des poignées de mains échangées entre p personnes est $1+2+3+\dots+(p-2)+(p-1)$. Dans les parties 1.3. et 1.4., de façon indépendante, nous avons vu que ce même nombre de poignées de main peut s'exprimer par la formule $\frac{p(p-1)}{2}$. On obtient donc l'égalité entre ces deux expressions, ce qui donne une preuve alternative de la formule (*) :

$$1+2+3+\dots+(p-2)+(p-1) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Ce type de raisonnement, qui s'avère efficace pour établir des égalités, s'appelle le double dénombrement (aussi appelé double décompte).

Double dénombrement : Il y a unicité du cardinal d'un ensemble. Ainsi, si l'on réussit à exprimer le cardinal d'un ensemble E de deux manières, par une formule \mathcal{F} et par une autre formule \mathcal{F}' , on en déduit l'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

2. Retour au problème initial

Revenons au problème posé des poignées de main en couple. On se place dans le cas général avec n couples, quitte à remplacer partout le symbole n par un nombre fixé (dans le cas de l'énoncé initial, le nombre 10).

Comme dans le paragraphe précédent, nous donnons plusieurs stratégies de résolution en explicitant les principes utilisés et les représentations mises en jeu.

2.1. Énumération

Comme pour le problème précédent, on peut compter les poignées de main échangées en les

énumérant. En adaptant la « mise en scène » du problème de la première partie, on imagine donc que les couples arrivent un par un à la soirée, et qu'en arrivant chaque personne serre la main à toutes les personnes déjà présentes.

- en arrivant, les membres du 1^{er} couple ne serrent aucune main ;
- le 2^e couple arrive ; chaque membre de ce couple serre la main des 2 personnes déjà présentes, ce qui fait $2+2$ poignées de main ;
- le 3^e couple arrive ; chaque membre de ce couple serre la main des 4 personnes déjà présentes, ce qui fait $4+4$ poignées de main ;
- le 4^e couple arrive ; chaque membre de ce couple serre la main des 6 personnes déjà présentes, ce qui fait $6+6$ poignées de main ;
- \vdots
- le n -ième couple arrive. Chaque membre de ce couple serre la main des $2(n-1)$ personnes déjà présentes, ce qui fait $2(n-1)+2(n-1)$ poignées de main.

Le nombre total de poignées de main est donc la somme

$$(2+2)+(4+4)+(6+6)+\dots+(2(n-1)+2(n-1)),$$

qui s'écrit aussi

$$4+8+12+\dots+4(n-1) = 4(1+2+3+\dots+(n-1)),$$

c'est-à-dire la somme des multiples de 4 jusqu'à $4(n-1)$. La somme entre parenthèses dans cette dernière expression est la somme (*) calculée dans la partie 1.2., pour $p=n$. Cette somme vaut $\frac{n(n-1)}{2}$, et donc en multipliant par 4 on arrive à

$2n(n-1)$ poignées de main.

Pour $n=10$, cela fait donc 180 poignées de main.

Remarquons qu'on peut aussi calculer la somme directement par la méthode « à la Gauss », ou visuellement avec un escalier (de forme un peu différente de celui de la figure 3), ou encore par récurrence comme dans la partie 1.2.

2.2. En comptant les poignées de main serrées par chaque personne

Comme dans la partie 1.3., on peut procéder en comptant le nombre de mains que serre chaque invité. Comme n couples sont présents, cela fait $2n$ invités en tout, et chacun de ces invités serre la main à $2n-2$ personnes : tout le monde sauf lui-même et son conjoint.

Si l'on considère le produit $(2n) \times (2n-2)$, on a compté deux fois trop de poignées de main, comme dans la partie 1.3. Il faut donc diviser par 2 et on obtient la bonne solution :

$$\frac{(2n) \times (2n-2)}{2} = n(2n-2) = 2n(n-1).$$

2.3. En comptant les rencontres entre couples

À chaque fois que deux couples se rencontrent, 4 poignées de main sont échangées. Or, on peut appliquer directement le résultat de la partie 1. pour compter le nombre de rencontres entre les n

couples : il y en a $\frac{n(n-1)}{2}$. Cela nécessite un petit exercice mental, où les couples sont assimilés aux invités du problème de la partie 1. On obtient donc le nombre total de poignées de main en faisant le produit (*lemme des bergers*) :

$$\frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 2n(n-1).$$

2.4. Une soustraction

Une autre stratégie est de commencer par ignorer la contrainte « personne ne serre la main à son conjoint ou sa conjointe », ce qui donne une surévaluation du nombre de poignées de main, qu'on corrige ensuite en soustrayant le nombre de poignées de main comptées en trop.

Si tout le monde serre la main à tout le monde, on est revenu au problème de la partie 1., avec cette fois $p=2n$. On obtient donc, par la solution de ce problème, un nombre de poignées de main qui est

$$\frac{(2n) \times (2n-1)}{2} = n(2n-1).$$

Il faut alors soustraire le nombre de poignées de main qu'on a comptées en trop, c'est-à-dire celles où deux conjoints se serrent la main. Comme il y a n couples, cela fait n poignées de main entre conjoints qu'il faut soustraire. On arrive donc à la solution :

$$n(2n-1) - n = n(2n-1-1) = n(2n-2) = 2n(n-1).$$

Remarque : Le fait d'avoir résolu le problème plus simple de la partie 1. nous a aidé de différentes manières. Dans les parties 2.1. et 2.2., on a adapté les *stratégies* vues dans la partie 1. : énumération avec « mise en scène », et comptage de poignées de main serrées par chaque invité. Dans les parties 2.3. et 2.4., on a utilisé le résultat du problème de la partie 1. avec $p=n$ et $p=2n$ respectivement.

2.5. Avec un tableau

Étudions maintenant une représentation en tableau du problème. Comme dans la partie 1.4., on présente les poignées de main sous la forme d'un tableau à double entrée, qui a cette fois $2n$ lignes et $2n$ colonnes. Numérotons les couples de 1 à n , et notons a_1, b_1 les membres du 1^{er} couple, a_2, b_2 les membres du 2^e couple, etc. (il importe peu de savoir qui est a_i et qui est b_i dans chaque couple ; si l'on est vieux jeu, on peut considérer que les couples sont formés d'un homme a_i et d'une femme b_i .)

Ordonnons les lignes et les colonnes du tableau un couple après l'autre sous la forme :

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n$$

(Si l'on est vieux jeu, cela revient à alterner homme, femme, homme, femme, etc. en regroupant les deux membres d'un couple).

On obtient alors un tableau formé de blocs de taille 2×2 comme dans la figure 6, où les cases grisées correspondent aux poignées de main interdites :

- en gris foncé, les cases de la diagonale, puisque personne ne serre sa propre main ;

- en gris clair, les cases correspondant à des poignées de main entre conjoints.

	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4	a_5	b_5
a_1										
b_1										
a_2										
b_2										
a_3										
b_3										
a_4										
b_4										
a_5										
b_5										

Figure 6 : Représentation en tableau du problème des poignées de main en couple, pour $n=5$.
Les cases grisées correspondent aux poignées de main interdites.

Comme dans la partie 1.4., le nombre de poignées de main est le nombre de cases blanches divisé par 2. Or le nombre total de cases dans le tableau est $(2n)^2 = 4n^2$, et le nombre total de cases grisées, qui consistent en n carrés de 4 cases, est $n \times 4 = 4n$. Le nombre total de cases blanches est donc

$$4n^2 - 4n = 4n(n-1),$$

et le nombre de poignées de main est la moitié :

$$\frac{4n(n-1)}{2} = 2n(n-1).$$

On peut aussi remarquer directement que le tableau de la figure 6 s'obtient à partir du tableau de la figure 5 (avec $p=n$) en remplaçant chaque case par un bloc de 4 cases : le nombre de cases est donc 4 fois le nombre de cases du tableau de la figure 5 avec $p=n$. Cette remarque est une représentation « en tableau » du raisonnement de la partie 2.3.

2.6. Avec un tableau, bis

Amusons-nous à changer l'ordre des lignes et des colonnes par rapport à la représentation précédente et ordonnons maintenant les invités comme suit :

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$$

(si l'on est vieux jeu : les hommes d'abord, les femmes ensuite). Le tableau qu'on obtient (voir la figure 7) est alors formé de 4 blocs de taille $n \times n$, avec des cases grisées correspondant aux poignées de main interdites.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1										
a_2										
a_3										
a_4										
a_5										
b_1										
b_2										
b_3										
b_4										
b_5										

Figure 7 : Une seconde représentation en tableau du problème des poignées de main en couple, pour $n=5$. Les cases grisées correspondent aux poignées de main interdites.

On cherche toujours le nombre de cases blanches, qu'il faut ensuite diviser par 2. Les 4 blocs du tableau sont identiques, et chacun a

$$n^2 - n = n(n-1)$$

cases blanches, et on obtient donc un nombre de poignées de main égal à

$$\frac{4n(n-1)}{2} = 2n(n-1).$$

2.7. En partitionnant

Gardons la notation a, b pour les deux membres d'un couple. On peut partitionner les poignées de main en trois types :

- premier type : les poignées de main entre deux a ;
- deuxième type : les poignées de main entre deux b ;
- troisième type : les poignées de main entre un a et un b .

En utilisant le principe d'additivité, on compte alors le nombre de poignées de main de chaque type, et on fait la somme. Pour ce qui concerne les poignées de main entre deux a , on est une nouvelle fois revenu au problème de la partie 1., avec $p=n$. Il y a donc

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

poignées de main du premier type, et évidemment autant du deuxième type.

Pour dénombrer les poignées de main du troisième type (entre un a et un b), on choisit de prendre le point de vue des a . Chacun des n invités étiquetés a serre la main à $n-1$ invités étiquetés b (tout le monde sauf son conjoint), ce qui fait

$$n(n-1)$$

poignées de main entre un a et un b . Cette fois, on ne divise pas par 2 puisqu'aucune poignée de main n'a été comptée 2 fois : aucun invité n'est étiqueté à la fois a et b .

On a donc, en additionnant le nombre de poignées de main de chaque type, un total de

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) = 2n(n-1)$$

poignées de main.

2.8. Et si l'on ne souhaite pas diviser par 2 ?

Dans toutes les solutions qui précèdent apparaît à un moment du calcul une division par 2, qui disparaît dans la formule finale $2n(n-1)$. On peut se demander s'il existe un raisonnement qui aboutirait à la formule sans faire apparaître cette division par 2 à aucun moment. En voici un, qui consiste à trouver une bonne « mise en scène » du problème. Reprenons la notation a, b pour les deux membres d'un couple comme dans les paragraphes précédents. Supposons qu'au début de la soirée tous les a soient dans une pièce et tous les b dans une autre. Par étapes, en commençant par le couple 1, puis le couple 2, etc., les deux membres d'un même couple changent de pièce et serrent la main à tous les invités présents dans la pièce d'arrivée. On voit qu'à la fin, quand tous les a et tous les b ont changé de pièce, chaque invité a serré la main une et une seule fois à chaque autre invité, et pas à son conjoint ou sa conjointe.

Combien de poignées de main sont échangées en tout ? Il y a n étapes dans le processus où, dans chaque étape, deux membres d'un couple donné changent de pièce. Chacun de ces membres serre alors la main à $n-1$ personnes en arrivant dans la nouvelle pièce, ce qui fait $2(n-1)$ poignées de main à chaque étape. Le nombre total de poignées de main est donc

$$n \times 2(n-1) = 2n(n-1).$$

3. Un prolongement

Mentionnons pour finir une énigme à base de poignées de main en couple, dont la solution peut se trouver sur le site CultureMath⁴ :

Un couple reçoit $n-1$ autres couples pour une soirée. Chacun peut serrer la main d'autres personnes, mais pas la sienne ni celle de son conjoint. À un moment de la soirée, le maître de maison demande à chacun (y compris à sa femme) combien il a serré de mains et obtient des réponses toutes différentes.

Combien le maître de maison a-t-il serré de mains ?

⁴ <https://culturemath.ens.fr/thematiques/graphes/le-nombre-de-poignees-de-main>