ACTIVITÉ

TOUS POUR UN, UN POUR SEPT

Valentina CELI[1]
Université de Bordeaux, INSPÉ de l'académie de Bordeaux

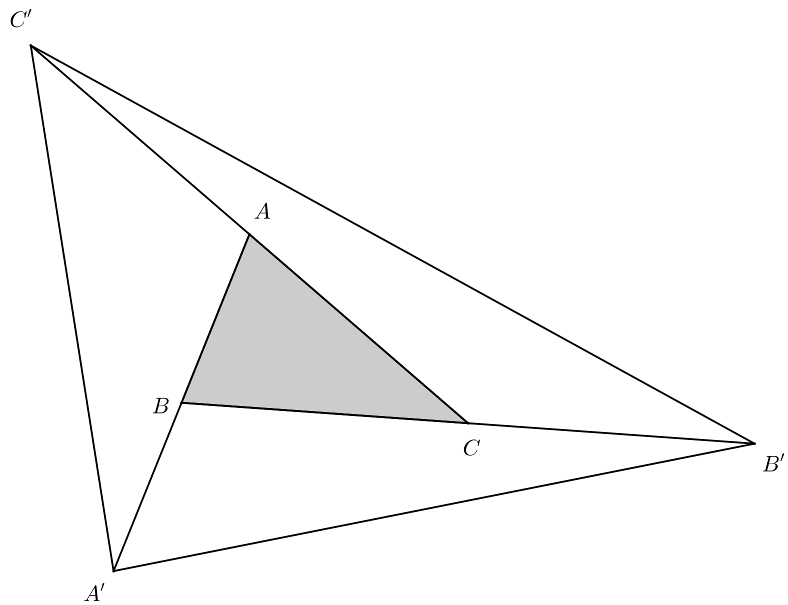
Énoncé

Soit un triangle ABC.

A' est le symétrique de A par rapport à B ;

B' est le symétrique de B par rapport à C ;

C' est le symétrique de C par rapport à A.



• Démontrer que **l'aire du triangle $A'B'C'$ est sept fois plus grande que l'aire du triangle ABC**.

La demi-droite $[C'C)$ coupe le segment $[A'B']$ au point D.

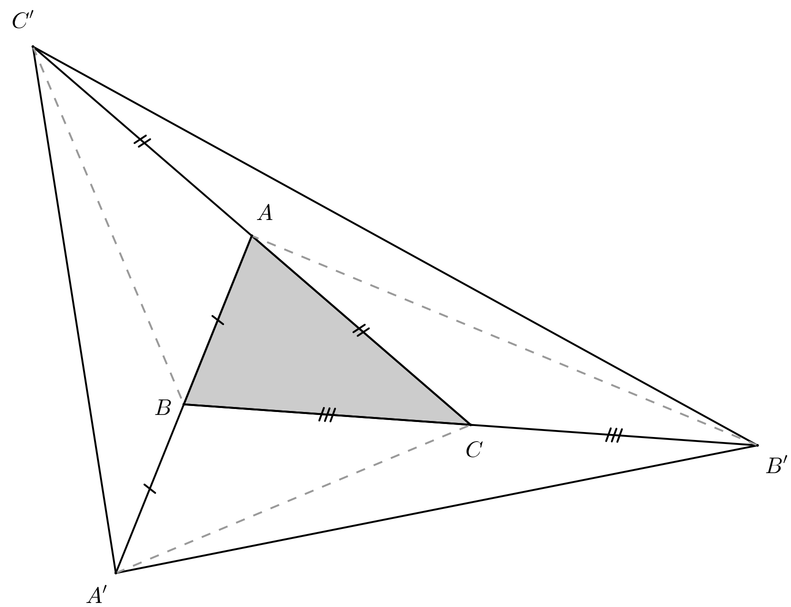
• Démontrer que $\boldsymbol{DB' = \frac{1}{3} \times A'B'}$.

[1] valentina.celi@u-bordeaux.fr

Solution

• Première question

On trace sur la figure les segments $[A'C]$, $[B'A]$ et $[C'B]$. On obtient ainsi un partage du triangle $A'B'C'$ en sept triangles dont ABC.



Si l'on prouve que ces triangles ont tous même aire, on pourra conclure que l'aire du triangle est $A'B'C'$ sept fois plus grande que l'aire du triangle ABC.

Pour cela, on s'appuie sur le théorème suivant : *« Une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire »*[2].

Par construction, A' est le symétrique de A par rapport à B, donc B est le milieu de $[AA']$. On en déduit que $[CB]$ est une médiane du triangle $AC'A'$ et que, par conséquent, $\mathscr{A}(AC'B)=\mathscr{A}(BC'A')$.

De manière analogue, on démontre que $\mathscr{A}(BA'C)=\mathscr{A}(CA'B')$ et $\mathscr{A}(CB'A)=\mathscr{A}(AB'C')$.

$[CB]$ est une médiane de $AC'A'$, par conséquent $\mathscr{A}(ABC)=\mathscr{A}(BA'C)$.

De manière analogue, on démontre que $\mathscr{A}(ABC)=\mathscr{A}(AC'B)$ et $\mathscr{A}(ABC)=\mathscr{A}(CB'A)$.

Si on reprend toutes les égalités, on obtient :

- $\mathscr{A}(ABC)=\mathscr{A}(AC'B)=\mathscr{A}(BC'A')$;
- $\mathscr{A}(ABC)=\mathscr{A}(BA'C)=\mathscr{A}(CA'B')$;
- $\mathscr{A}(ABC)=\mathscr{A}(CB'A)=\mathscr{A}(AB'C')$.

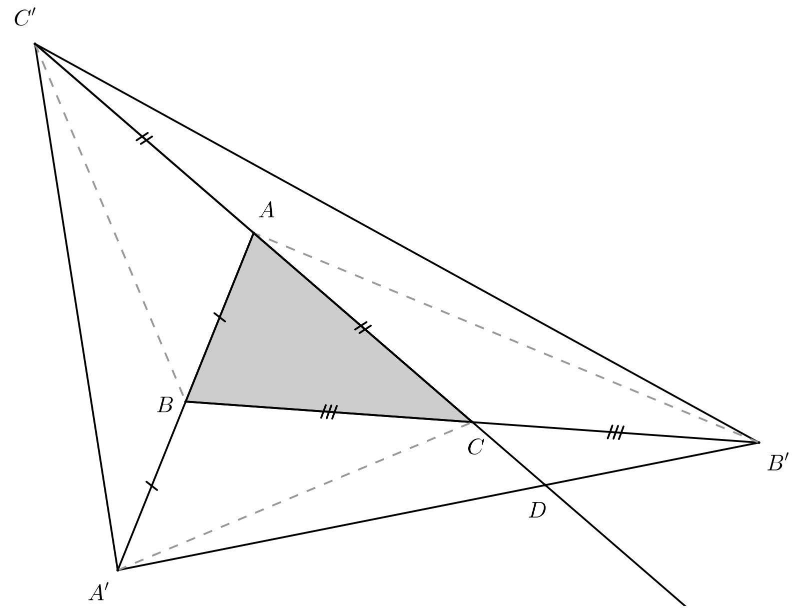
Les sept triangles qui composent $A'B'C'$ ont la même aire, donc **l'aire du triangle $A'B'C'$ est**

[2] Une démonstration de ce théorème est proposée dans le texte de Perrin-Glorian et Pinvidic, dans ce même numéro.

sept fois plus grande que l'aire du triangle *ABC*.

• Deuxième question

Sur la figure, on prolonge $[C'C)$, cette demi-droite coupe $[A'B']$ en D.



Pour démontrer que $DB' = \frac{1}{3} \times A'B'$, on s'appuie sur le *théorème du chevron*[3] appliqué au triangle $A'AB'$. Si l'on considère C comme étant le point pris à l'intérieur du triangle $A'AB'$, D étant le point d'intersection de $[C'C)$ et $[A'B']$, on aura :

$$(*)\ \frac{\mathscr{A}(A'AC)}{\mathscr{A}(AB'C)} = \frac{A'D}{DB'}.$$

Or, par construction, $\mathscr{A}(A'AC) = \mathscr{A}(A'BC) + \mathscr{A}(ABC)$ et, d'après ce qui a été précédemment démontré, $\mathscr{A}(A'BC) = \mathscr{A}(AB'C) = \mathscr{A}(ABC)$. L'égalité $(*)$ peut donc s'écrire ainsi :

$$\frac{2 \times \mathscr{A}(ABC)}{\mathscr{A}(ABC)} = \frac{A'D}{DB'},$$

d'où l'on déduit : $A'D = 2\,DB'$.

D appartient à $[A'B']$, donc $A'B' = A'D + DB'$, et donc $A'B' = 2\,DB' + DB' = 3\,DB'$.

On en conclut que $\boldsymbol{DB' = \frac{1}{3} \times A'B'}$.

> *Dans le texte de Perrin (dans ce même numéro), l'auteur propose une « autre » version de ce problème. On peut alors constater que la même figure, exploitée différemment, peut donner lieu à deux problèmes avec des approches et des difficultés très différentes : ici, la démonstration s'appuie sur des théorèmes qui sont à la portée d'élèves de collège (cf. Perrin-Glorian & Pinvidic, dans ce même numéro) alors que celle de Perrin est bien plus ardue.*

[3] Une démonstration de ce théorème est proposée dans le texte de Perrin-Glorian et Pinvidic, dans ce même numéro.