LES AIRES COMME OUTIL DE DÉMONSTRATION AU COLLÈGE

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN[1]
Laboratoire de Didactique André Revuz et IREM de Paris

Anne PINVIDIC[2]
Collège Joliot Curie à Fontenay-sous-Bois et IREM de Paris

Résumé. L'article rend compte de l'utilisation des aires comme outil de démonstration au collège, notamment de la démonstration du théorème de Thalès en classe de troisième. Cette utilisation suppose un travail préalable permettant de développer la notion d'aire comme grandeur géométrique sans passer par des valeurs numériques, évoqué dans les deux premières parties de l'article. Ce travail est aussi très utile pour donner du sens à la multiplication des nombres à travers la mesure des aires qui met en jeu de manière essentielle la notion d'unité. Ce point est évoqué dans la quatrième partie.

Mots-clés. Aire, grandeur, démonstration, théorème de Thalès, mesure, unité.

Abstract. This paper reports on the use of areas as a demonstration tool in middle school, including the demonstration of the triangle proportionality theorem in the 9th grade. This use presupposes a preliminary work allowing to develop the notion of area as geometric magnitude without passing through numerical values, evoked in the first two parts of the article. This work is also very useful to give meaning to the multiplication of numbers through the measurement of areas which essentially involves the notion of unity. This issue is mentioned in the fourth part.

Keywords. Area, magnitude, proof, triangle proportionality theorem, measure, unit.

Introduction

Les différents articles de ce numéro de *Petit x* ont en commun un questionnement sur l'organisation de l'enseignement de la géométrie au collège qui permette de redonner sa place à la démonstration dans le cours et fournisse suffisamment d'exercices et de problèmes pour s'y exercer. Dans cet article, nous nous intéressons aux aires, qui constituent un outil de démonstration performant des propriétés de nature affine fournissant une démonstration du théorème de Thalès, accessible pour les élèves à condition que l'enseignement préalable des aires ne se limite pas à leur mesure. Dans un article ancien de *Petit x*, Capponi (1988) rend compte d'une expérimentation qui montre que, dans une activité de comparaison d'aires qu'ils tentent de traiter d'abord à partir de mesures, des élèves de début de quatrième ont du mal à remettre en question leurs mesures et leurs calculs pour s'engager dans une démarche de démonstration qui permettrait de prouver l'égalité de ces aires indépendamment de leur mesure. Si l'aire est seulement un nombre qu'on calcule à partir de mesures de longueurs, elle ne peut pas servir d'outil de démonstration. Dans sa thèse consacrée à la comparaison de l'enseignement de la géométrie dans les années 90 en France, où il est alors appuyé uniquement sur les transformations, et en Italie, où la tradition euclidienne est encore forte, Celi (2002) constate que les résultats des élèves italiens sont bien meilleurs que ceux des élèves français dans le domaine des aires (*ibid.*, p. 528). En examinant leurs productions, elle conclut qu'il *« paraît évident que,*

[1] marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

[2] anne.pinvidic@ac-creteil.fr

pour eux, l'aire ne se conçoit qu'à travers des formules » (*ibid.*, p. 522). Elle dit aussi :

> *Les élèves italiens disposent des* critères de congruence et de similitude des triangles *et les utilisent d'une manière souvent efficace pour résoudre des problèmes d'aires. Les élèves français disposent de l'outil* transformations géométriques *(et en particulier de la* symétrie centrale *mais ne l'utilisent pas et tentent même d'adopter des critères de congruence […]. Aucun élève n'utilise de manière claire l'invariance de l'aire d'un triangle quand un sommet se déplace sur une parallèle au côté opposé même si quelques élèves italiens semblent y avoir recours, car ils montrent alors une confusion entre équivalence et congruence, malgré l'importance attribuée à la distinction de ces notions dans les manuels (ibid., p. 528).*

Le présent article reprend ces questions à partir de deux sources d'inspiration : d'une part, des travaux anciens visant à travailler avec les élèves de l'école élémentaire et du collège la notion d'aire comme grandeur sans passer par les nombres, ce qui nous paraît un préalable à son utilisation comme outil de démonstration et, d'autre part, les travaux réalisés dans le groupe de l'IREM de Paris dont nous faisons partie (Brochure, 2021)[3], plus particulièrement la démonstration du théorème de Thalès par les aires. Après quelques réflexions sur la notion d'aire dans la première partie, nous présentons les résultats préalables à établir sur les aires dans la deuxième partie avant de rendre compte dans la troisième partie de leur utilisation pour démontrer le théorème de la droite des milieux en quatrième et le théorème de Thalès dans le triangle en troisième. Dans un dernier paragraphe, nous évoquerons la mesure des aires et les rapports entre aires et nombres.

1. Quelques réflexions sur la notion d'aire

1.1. L'aire, une grandeur géométrique

L'apprentissage de la notion d'aire présente quelques difficultés pour les élèves et son enseignement quelques soucis pour les professeurs. En effet, trois objets différents sont en relation à travers la notion d'aire : une surface géométrique c'est-à-dire une partie quarrable et bornée du plan, qui a une certaine forme et occupe une certaine place, la grandeur aire elle-même qui rend compte de la place occupée indépendamment de la forme de la surface, et le nombre qui mesure cette surface une fois qu'on a choisi une unité. Suivant les époques et les situations, il peut y avoir identification implicite de deux de ces objets. Ainsi, avant 1969, on utilise le plus souvent le même mot « surface » pour désigner à la fois l'objet géométrique et la grandeur et on désigne parfois par le mot « aire » la mesure de cette « surface ». Le mot « superficie » utilisé aussi à cette époque plus ou moins comme synonyme de « surface » n'est plus guère utilisé ensuite. À l'époque des « mathématiques modernes » et jusqu'au milieu des années 80, on distingue l'objet, désigné par le mot « surface », et sa mesure, désignée par le mot « aire », mais la grandeur disparaît. Dans les programmes de l'école primaire, l'aire est ainsi définie comme un nombre et il est précisé sur un exemple, dans les instructions officielles qui accompagnent ces programmes, que si on change d'unité, l'aire change (Perrin-Glorian, 1989-1990). Depuis 1980 pour les programmes de l'école élémentaire et 1985 pour les programmes du collège, on continue à réserver le mot « surface » à l'objet géométrique mais le mot « aire » désigne la grandeur, mesurée ou non, et la mesure est un nombre. Ainsi $3\,cm^2$ est une aire mais 3 est une mesure. Il est délicat de définir l'aire en tant que grandeur sans passer par la mesure. Dans la pratique, on se contente de montrer que l'aire est conservée par diverses opérations sur les surfaces en supposant l'existence d'une fonction mesure de l'aire μ définie sur un sous-ensemble

[3] Nous utiliserons (Brochure, 2021) pour la référence bibliographique (Groupe Géométrie - IREM Paris, 2021).

de l'ensemble des parties du plan, à valeurs réelles positives et vérifiant les propriétés fondamentales suivantes :

- $\mu(c)=1$ où c est un carré de côté l'unité de longueur (choix de l'unité),
- si A et B sont deux parties disjointes, alors $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$ (additivité de l'aire),
- si B est l'image de A par une isométrie, alors $\mu(B)=\mu(A)$ (invariance par isométrie).

Concernant les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des aires, nous renvoyons aux travaux de recherche en didactique des mathématiques qui les ont étudiées à travers des ingénieries didactiques dans les années 80 et 90 et qui ont souligné des points importants de l'apprentissage, notamment Douady & Perrin-Glorian (1984, 1985, 1989), Moreira Baltar et Comiti (1993-1994), Moreira Baltar (1996-1997), Rogalski (1982). Nous retenons les points suivants :

- Il est important de travailler la comparaison des aires sans passer par leur mesure, en particulier la conservation de l'aire par découpage et recollement sans perte ni chevauchement, pour conceptualiser la grandeur aire et intégrer de façon solide le fait que des surfaces de formes très différentes peuvent avoir la même aire.
- Il n'y a pas d'instrument pour mesurer les aires, à part le pavage avec une surface-étalon ou des quadrillages que l'on peut placer sur la surface et qui peuvent être raffinés. Le pavage n'est pas toujours possible et le quadrillage donne des encadrements en général assez grossiers mais il est essentiel pour mesurer l'aire de surfaces quelconques et débouche sur l'intégrale en fin de lycée. L'additivité de l'aire permet de calculer par additions ou soustractions la mesure de l'aire d'une surface qu'on a pu découper en réunion de surfaces dont on sait calculer la mesure de l'aire (par exemple un polygone se décompose en réunion disjointe de triangles, son aire est donc somme des aires de ces triangles). Pour les surfaces usuelles, on mesure des longueurs et on calcule la mesure des aires à partir de ces longueurs à l'aide de formules. Les unités d'aire doivent être en relation avec les unités de longueur. La relation entre unités d'aire et de longueur est donc un point essentiel de l'apprentissage.
- L'aire est une grandeur bidimensionnelle : si on multiplie les longueurs par un coefficient k, les aires sont multipliées par k^2.
- Le passage trop rapide à la mesure des aires et à l'utilisation de formules pour le calcul des aires usuelles amène des confusions entre les formules des différentes grandeurs attachées à la surface, notamment l'aire et le périmètre. Même sans confondre les deux, une conception erronée résistante consiste à penser qu'aire et périmètre varient dans le même sens, notamment dans le cas des rectangles (Moreira Baltar & Comiti, 1993-1994). De plus, les élèves ne relient pas nécessairement l'application d'une formule au calcul du nombre d'unités d'aires que contient la surface, comme le montre une évaluation APMEP de 1989 citée par Moreira Baltar (1996-1997) : à l'époque, un peu plus de la moitié des élèves de fin de sixième peuvent calculer l'aire d'un trapèze quand on leur donne la formule, les mesures des bases et de la hauteur sur un dessin mais 80 % d'entre eux sont en échec pour donner la mesure de l'aire du même trapèze dessiné sur quadrillage avec des bases qui ont chacune un nombre entier de carreaux et alors que l'unité d'aire est le carré du quadrillage.

Ces travaux donnent aussi des pistes pour travailler les aires au cycle 3 et au début du cycle 4. On trouve aussi beaucoup d'exercices intéressants dans les activités de *Petit x*, notamment celles qui ont été regroupées dans les hors-série Clapponi (1992-1993) et Celi (2011), et aussi dans les fiches Galion (1996).

1.2. L'aire, une notion affine

Ce point est développé dans l'article de Perrin, dans ce numéro ; nous le reprenons ici de façon plus élémentaire. Dans un espace affine général, il n'y a ni angle ni longueur mais il y a des parallèles. Une figure essentielle est donc le parallélogramme. Si l'on prend pour unité d'aire l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ d'une base de l'espace vectoriel associé et si l'on considère un parallélogramme *OADC* tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ aient pour coordonnées respectives $(a\,,b)$ et $(c\,,d)$, la mesure de son aire est $|ad-bc|$, c'est-à-dire la valeur absolue du déterminant de la matrice formée par les coordonnées des deux vecteurs. Pour s'en convaincre de façon élémentaire, on peut faire un dessin. Il faudrait distinguer plusieurs cas de figure, nous nous contentons ici (figure 1) du cas où a, b, c, d sont tous positifs et $ad>bc$.

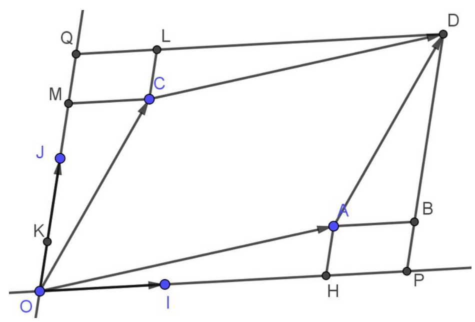


Figure 1

L'unité étant fixée, on écrira aire pour mesure de l'aire. Le point D a pour coordonnées $(a+c\,,b+d)$. L'aire du parallélogramme *OPDQ* vaut donc $(a+c)(b+d)$. Les parallélogrammes *MCLQ* et *ABPH* ont pour aire cb. En rassemblant les triangles *LCD* et *OHA*, on obtient un parallélogramme d'aire ab ; en rassemblant les triangles *ABD* et *OCM*, on obtient un parallélogramme d'aire cd. Finalement l'aire de *OADC* est : $(a+c)(b+d)-2bc-ab-cd$, donc $ad-bc$.

Dans le plan affine, une application affine f permet de définir une application linéaire $\vec{f}$ dans l'espace vectoriel sous-jacent telle que $\vec{f}(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}$. Pour montrer que les rapports d'aire sont conservés par les applications affines, il suffit donc de montrer qu'ils le sont par les applications linéaires. Or l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{f}(\overrightarrow{OA})$ et $\vec{f}(\overrightarrow{OB})$ est la valeur absolue du déterminant de ces deux vecteurs, c'est-à-dire le produit de l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ par la valeur absolue du déterminant de la matrice de $\vec{f}$. Par une application affine, les aires des parallélogrammes sont donc multipliées par une constante et les rapports d'aires sont conservés.

Cette propriété explique que les aires soient un bon outil pour démontrer des propriétés qui ne dépendent que de notions affines comme nous le verrons dans la suite. Le théorème de Thalès ne fait intervenir que des parallèles et des rapports. Nous verrons dans la troisième partie qu'on peut le démontrer en se servant des aires à condition d'avoir établi auparavant quelques résultats sur les aires de parallélogrammes et de triangles que nous allons examiner dans la partie 2.

2. Aire des triangles et des parallélogrammes

Nous rassemblons dans ce paragraphe quelques résultats sur les aires qu'il nous paraît indispensable que tous les élèves rencontrent au cours de leurs années de collège. Nous donnons des démonstrations utilisant les cas d'égalité ou la symétrie centrale mais, si on traite la question avant, on peut aussi utiliser le fait que :

• *Des triangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales ont la même aire*.

2.1. Quelques résultats essentiels

Triangle et parallélogramme (en sixième ou cinquième)

• *Si on coupe un parallélogramme par une diagonale, on obtient deux triangles superposables.*

Ce résultat est immédiat avec la symétrie centrale ou n'importe lequel des cas d'égalité des triangles : l'aire de chacun de ces triangles est moitié de celle du parallélogramme.

• *Si on prend un point sur un côté d'un parallélogramme, le triangle formé par ce point et les extrémités du côté opposé a une aire moitié de celle du parallélogramme.*

On applique le résultat précédent aux deux parallélogrammes *AFED* et *FBCE* (figure 2) pour montrer que l'aire du triangle *ABE* est la moitié de celle du parallélogramme *ABCD*.

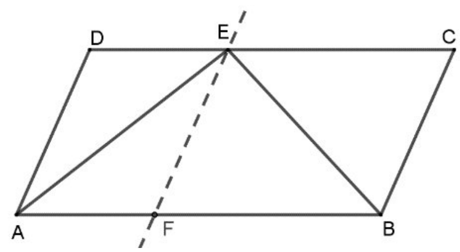


Figure 2

Théorème de la parallèle (en cinquième ou quatrième)

• *Si deux parallélogrammes ont un côté commun et les côtés opposés à ce côté commun alignés, ils ont la même aire.*

Conséquence pour les triangles

• *Si deux triangles ont une base commune (un côté commun) et si les sommets opposés respectifs sont sur une parallèle à cette base (ce côté), les triangles ont la même aire.*

Pour le démontrer, on complète les triangles en parallélogrammes et on applique le résultat pour le parallélogramme.

Nous avons choisi de faire ici la démonstration dans le cas des parallélogrammes car cela constitue un exercice utilisant les cas d'égalité des triangles. On peut aussi s'intéresser directement au cas des triangles qui seul nous servira dans la suite. On trouvera la démonstration directe en utilisant la formule de calcul de l'aire d'un triangle dans la classe d'Anne Pinvidic (Anne par la suite) dans la partie 2.3. et la démonstration sans calcul en se servant seulement de l'additivité des aires et du fait qu'un triangle est un demi-parallélogramme dans Brochure (2021, p. 124).

Démonstration

Appelons [*AB*] le côté commun, [*CD*] et [*EF*] les côtés opposés (figure 3). Il y a deux cas de figure suivant que [*CD*] et [*EF*] sont disjoints.

S'ils sont disjoints, en supposant *E* et *F* du même côté que *C* par rapport à *D* (ce serait pareil *mutatis mutandis* dans le cas contraire), on peut considérer le trapèze *ABED*. Son aire est d'une part somme des aires de *ABCD* et *BCE* et d'autre part des aires de *ABEF* et *ADF*. Il est facile de montrer, par translation ou par le cas ACA, que les deux triangles sont isométriques et d'en déduire que les aires des parallélogrammes sont égales.

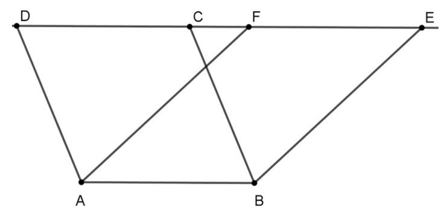


Figure 3

Si [*CD*] et [*EF*] ne sont pas disjoints, les deux parallélogrammes ont une partie commune complétée par des triangles dont on montre aisément qu'ils sont isométriques.

Réciproque

- *Si des parallélogrammes ont un côté commun, sont du même côté de ce côté commun et si leurs aires sont égales, les côtés opposés au côté commun sont alignés.*

Sinon, grâce au théorème direct, on fabriquerait un parallélogramme de même aire et strictement inclus dans l'un des deux.

Le théorème traduit le fait qu'on passe d'un parallélogramme à l'autre par une transvection qui est une application affine de déterminant 1.

Théorème de la médiane (en sixième ou cinquième)

- *Une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.*

Soit *ABC* un triangle, *M* le milieu de [*AB*] (figure 4). On construit le parallélogramme *AMCD*.

L'aire du triangle *ACM* est égale à celle du triangle *MCD* puisqu'elles sont toutes deux la moitié de l'aire du parallélogramme *AMCD* puisque [*AC*] et [*DM*] en sont les diagonales.

L'aire du triangle *MCB* est égale à celle du triangle *MCD* comme moitié de celle du parallélogramme *MBCD* puisque [*MC*] en est une diagonale.

On en déduit que les triangles *ACM* et *MCB* ont la même aire.

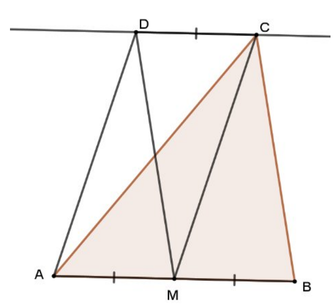


Figure 4

Ce théorème traduit le fait qu'on passe d'un triangle à l'autre par symétrie oblique.

Théorème des proportions (en quatrième ou troisième)

- *Si deux triangles ont un sommet commun et si les côtés opposés à ce sommet sont alignés, le rapport des aires des triangles est égal au rapport des longueurs de ces côtés.*

Ce résultat se déduit de la formule et du fait que les triangles ont la même hauteur relative à ces bases. On en verra des démonstrations et des formulations par les élèves de la classe d'Anne dans la partie 3. Remarquons que, notamment si les triangles ne se chevauchent pas, la hauteur sera extérieure à l'un au moins des triangles, ce qui est une difficulté pour la plupart des élèves.

Ce théorème traduit le fait qu'on passe d'un triangle à l'autre par affinité.

2.2. Des problèmes qui montrent l'intérêt de ces résultats

Des conséquences immédiates

Nous proposons ici quelques applications directes de ces théorèmes, en utilisant l'additivité des aires. Il nous paraît intéressant de les proposer aux élèves d'une part pour bien comprendre les théorèmes précédents d'autre part parce que ce sont des configurations que l'on rencontre souvent dans des problèmes plus complexes où il sera utile de les reconnaître.

La proposition 43 du Livre I des Éléments d'Euclide (Brochure, 2021, p. 205, Exercice 4.13)

- *Soit ABCD un parallélogramme et I un point de la diagonale [AC] (figure 5). La parallèle à (BC) passant par I coupe [AB] en E et [CD] en F, la parallèle à (AB) passant par I coupe [BC] en G et [AD] en H. Montrer que les parallélogrammes HIFD et EIGB ont même aire.*

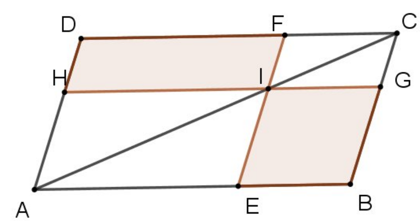


Figure 5

Le résultat découle directement du fait que la diagonale d'un parallélogramme le partage en deux triangles de même aire : il faut l'appliquer trois fois et faire une différence d'aire. La principale difficulté est d'identifier la décomposition de la figure, ce que Duval (2005) appelle une *« décomposition méréologique »*.

Le papillon dans le trapèze

- *Soit ABCD un trapèze et I le point d'intersection de ses diagonales. Les triangles AID et BIC ont la même aire (figure 6).*

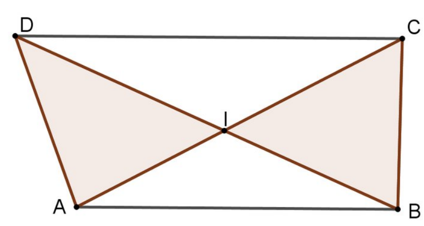


Figure 6

Le résultat découle du théorème de la parallèle, par exemple, en retranchant l'aire de *ABI* des aires respectives de *ABC* et *ABD*. Là encore la principale difficulté réside dans la vision de la décomposition de la figure. On verra dans le paragraphe suivant une mise en œuvre de cet exercice dans la classe d'Anne.

Le chevron[4]

• *Soit ABC un triangle, E un point intérieur au triangle et D l'intersection de [AB] et (CE). On a alors* $\frac{\mathscr{A}(ACE)}{\mathscr{A}(BCE)}=\frac{DA}{DB}$ *(figure 7).*

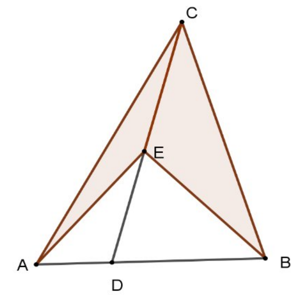


Figure 7

À la difficulté de décomposition des figures s'ajoute cette fois celle du calcul sur des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont exprimés avec des notations géométriques. On peut raisonner de deux manières :

- une double application du théorème des proportions sur [AB] combinée avec une différence d'aires et un calcul : $\mathscr{A}(ACD)=\frac{DA}{DB}\mathscr{A}(BCD)$ et $\mathscr{A}(AED)=\frac{DA}{DB}\mathscr{A}(BED)$ donc, par différence, $\mathscr{A}(ACE)=\frac{DA}{DB}\mathscr{A}(BCE)$ d'où le résultat cherché.
- une double application du théorème des proportions sur [CD] puis un échange des extrêmes et des moyens (ou l'utilisation des produits en croix) dans l'égalité des rapports d'aires pour retrouver le théorème des proportions sur [AB] : $\frac{\mathscr{A}(ACE)}{\mathscr{A}(ACD)}=\frac{CE}{CD}=\frac{\mathscr{A}(BCE)}{\mathscr{A}(BCD)}$, donc $\frac{\mathscr{A}(ACE)}{\mathscr{A}(BCE)}=\frac{\mathscr{A}(ACD)}{\mathscr{A}(BCD)}=\frac{DA}{DB}$.

Dans le cas où D est le milieu de [AB], on a égalité des aires de ACE et BCE et réciproquement.

Il est intéressant de traiter le cas où D est le milieu de [AB] dès la cinquième comme application du théorème de la médiane parce que c'est une occasion de travailler la décomposition des figures qui est la principale difficulté dans ce cas.

Des problèmes pour chercher

Ces théorèmes apportent aussi une solution simple à des problèmes moins évidents, des problèmes pour chercher, y compris pour le professeur. En voici deux exemples.

Partage d'un triangle en deux parties de même aire

On veut partager un triangle en deux parties de même aire par un segment (on peut imaginer le partage d'un terrain sur un plan) à partir d'un point quelconque (que l'on appellera P) d'un côté (ici [AC]). On cherche donc un point Q sur un autre côté tel que le segment [PQ] réalise ce partage. On sait que n'importe quelle médiane partage le triangle en deux parties de même aire donc les médianes fournissent une solution quand P est en A, C ou I, milieu de [AC]. Si P est ailleurs, le partage se fera entre un triangle et un quadrilatère. On va se servir d'une médiane et du théorème de la parallèle ou du papillon pour transformer un partage inégal en partage égal.

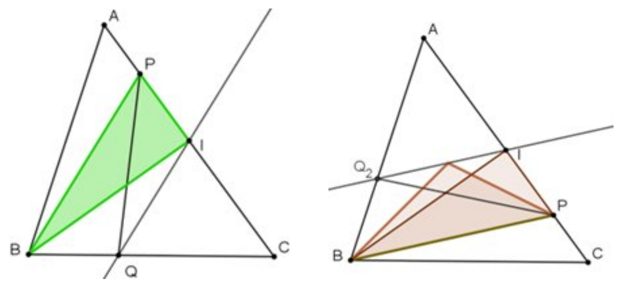
[4] On trouvera dans Brochure (2021, p. 234) un énoncé plus général du lemme du chevron que l'on laisse au lecteur le soin de démontrer avec les mêmes outils (théorème des proportions et additivité des aires).

On a plusieurs solutions suivant la médiane que l'on considère et suivant le mode d'égalisation que l'on choisit.

Solution 1 : la médiane (BI) relative à [AC] et la parallèle à (BP)

Si P est plus près de A que de C, le triangle APB est trop petit, il lui manque l'aire de BPI (figure 8A). On l'ajoute en faisant glisser I sur une parallèle à (BP) jusqu'à rencontrer [BC]. Le segment [PQ] convient. Le triangle CPQ et le quadrilatère $BAPQ$ ont la même aire.

Si P est plus près de C que de A, (figure 8A), on fait le même raisonnement mais la parallèle à [BP] passant par I rencontre cette fois [AB] en Q_2. Le segment PQ_2 convient : le triangle APQ_2 et le quadrilatère $BCPQ_2$ ont la même aire.



A **B**

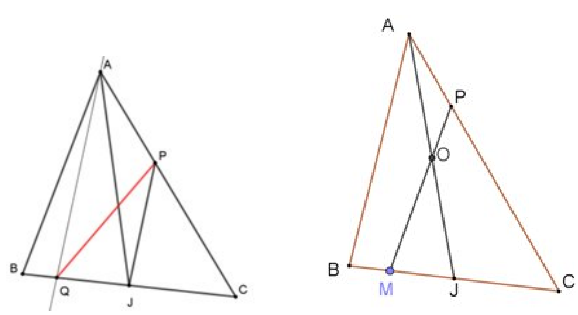
Figure 8

Solution 2 : prévoir de quel côté sera Q et utiliser la médiane relative à ce côté

Si P est plus près de A que de C, le point Q sera sur [BC] et on utilise la médiane [AJ] ; si P est plus près de C que de A, le point Q sera sur [AB] et on utilise la médiane [CK]. Prenons le cas où P est du côté de A (figure 9A). C'est une parallèle à (PJ) passant par A qu'il faudra considérer avec le même raisonnement que ci-dessus.

On peut aussi raisonner à partir d'un point M sur [BC] (segment où devrait se trouver Q), entre B et J (figure 9B). Pour réaliser le partage en deux il faudrait que les aires des triangles APO et OMJ soient égales. Le lemme du papillon dans le trapèze nous dit que si (AM) est parallèle à (PJ), on aura bien l'égalité de ces aires. C'est le point Q cherché.

On aurait pu faire ce raisonnement avec le même théorème dans la solution 1 en prenant un point M sur [BC] ou [AB] selon le cas.



A **B**

Figure 9

Concours des médianes

- *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes et se coupent au tiers de chacune d'elles en partant de la base.*

Si l'on a démontré auparavant le lemme du chevron, on peut donner une démonstration très simple du concours des médianes :

On considère le triangle ABC, les deux médianes (BB') et (CC') qui se coupent en I. La droite (AI) coupe $[BC]$ en D (figure 10).

Par le chevron d'axe (BB'), on a $\mathscr{A}(BIC)=\mathscr{A}(BIA)$; par le chevron d'axe (CC'), on a $\mathscr{A}(BIC)=\mathscr{A}(CIA)$; on en déduit que les triangles BIA et CIA ont la même aire.

Par le chevron d'axe (AD), on a $\frac{\mathscr{A}(ACI)}{\mathscr{A}(ABI)}=\frac{DC}{DB}$. Or $\mathscr{A}(ACI)=\mathscr{A}(ABI)$, donc $BD=DC$. Donc D est le milieu de $[BC]$.

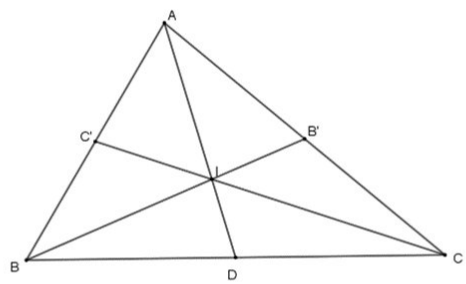


Figure 10

Si l'on ne connaît pas le lemme du chevron, on peut faire une démonstration du concours des médianes qui ne repose que sur le théorème de la médiane et des égalités d'aires. La principale difficulté est de ne pas supposer implicitement que A, I, A' sont alignés. On a intérêt à faire une figure fausse.

Soient un triangle ABC, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ et I le point d'intersection de $[BB']$ et $[CC']$ (figure 11). Nous allons montrer que I est sur $[AA']$.

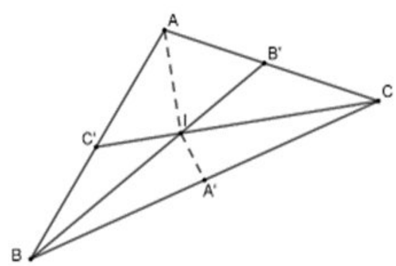


Figure 11

Comme $[BB']$ et $[CC']$ sont des médianes, les aires des triangles BCC' et BCB' sont égales à la moitié de l'aire t du triangle ABC. On en déduit que les aires de BIC' et CIB' sont égales.

Or $[IB']$ et $[IC']$ sont des médianes respectivement des triangles AIC et AIB. On a donc égalité des aires des triangles AIB', $B'IC$, AIC', $C'IB$. Nommons a cette aire commune. Par ailleurs,

$[IA']$ est médiane de BIC donc les aires de BIA' et de CIA' sont égales ; nommons b cette aire commune.

L'aire de BCC' vaut donc $a+2b$, mais elle est égale à l'aire de CAC', qui vaut $3a$. On en déduit que $a=b$ et $t=6a$. Les quadrilatères $BAIA'$ et $CAIA'$ ont donc chacun une aire égale à $3a$, moitié de celle de ABC. On en déduit que I est sur $[AA']$. En effet, comme les médianes sont intérieures au triangle, I l'est aussi. S'il n'était pas sur $[AA']$, il serait à l'intérieur d'un des triangles BAA' ou CAA'. Supposons par exemple que I est à l'intérieur de BAA'. Le quadrilatère $ABA'I$ serait alors intérieur au triangle ABA'. Or ils ont la même aire : cela entraîne que le triangle AIA' a une aire nulle, ce qui contredit l'hypothèse I intérieur à BAA'. On en déduit que A, I, A' sont alignés et que I est le point d'intersection des trois médianes.

Le fait que le point d'intersection se trouve au tiers de chaque médiane en partant de la base repose sur le théorème des proportions. On a vu que l'aire de BIC est double de celle de BIC' ; par le théorème des proportions appliqué sur $[CC']$, on en déduit $IC=2IC'$. Le raisonnement peut se faire sur chaque médiane, ce qui permet de dire que I est au tiers de chacune d'elles.

On trouvera dans Brochure (2021, pp. 203-206) d'autres exercices pour travailler les aires.

2.3. Des démonstrations avec des élèves de quatrième et de troisième

Les théorèmes de la parallèle, de la médiane et des proportions ont été démontrés avec les élèves dans les classes de quatrième et troisième d'Anne, en 2019-2020, ainsi que certains des corollaires et d'autres résultats utilisant ces théorèmes. En voici quelques exemples.

Le théorème de la parallèle en quatrième et en troisième

En quatrième, l'activité s'est déroulée en classe avec la consigne suivante :

> *On considère un triangle ABC.*
>
> *Où peut-on placer le point M pour que le triangle MBC ait la même aire que le triangle ABC ?*
>
> *Trouver toutes les positions possibles pour le point M.*

La démonstration se fait avec la formule.

En troisième, l'objectif était de faire formuler un énoncé du théorème aux élèves à partir d'une conjecture avec le logiciel GeoGebra en s'appuyant sur la formule pour la démontrer.

> *1. Ouvrir GeoGebra. Cacher les axes et la grille s'ils sont visibles.*
>
> *Créer un triangle EFG. Créer la parallèle à (EF) passant par G. Placer un point H sur cette parallèle. Créer le triangle EHF. Afficher les aires des triangles EFG et EFH.*
>
> *2. Que peut-on constater ? Déplacer le point H. Cette constatation semble-t-elle toujours vraie ? Quelle conjecture peut-on faire ?*
>
> *3. Démontrer la conjecture.*
>
> *4. Bilan. Enoncer le résultat que l'on vient de découvrir et de prouver.*

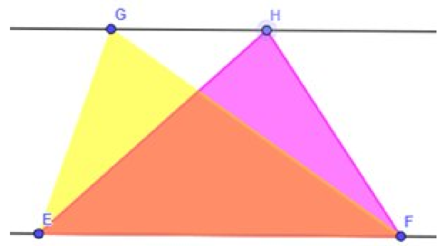


Figure 12

Voici quelques productions d'élèves (figure 13) qui montrent qu'ils ont relié leur conjecture au calcul de l'aire du triangle.

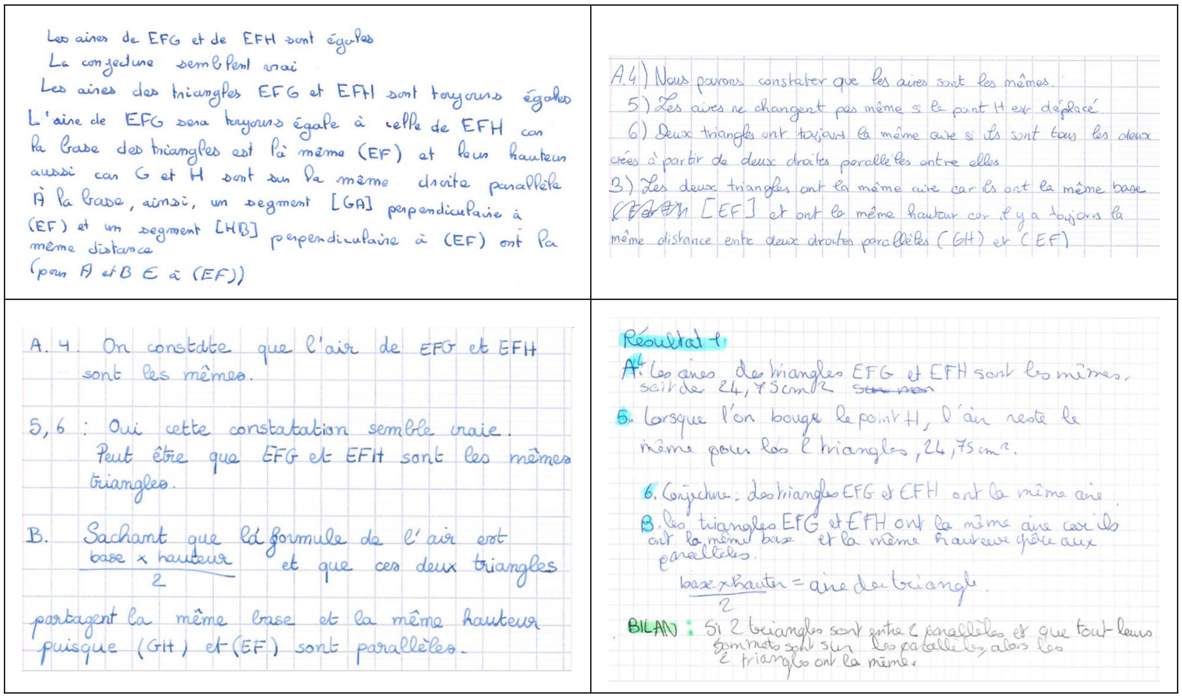


Figure 13 *: Solutions d'élèves au problème précédent.*

Dans le bilan de l'activité, l'énoncé du résultat s'est révélé une étape difficile pour les élèves (figure 14).

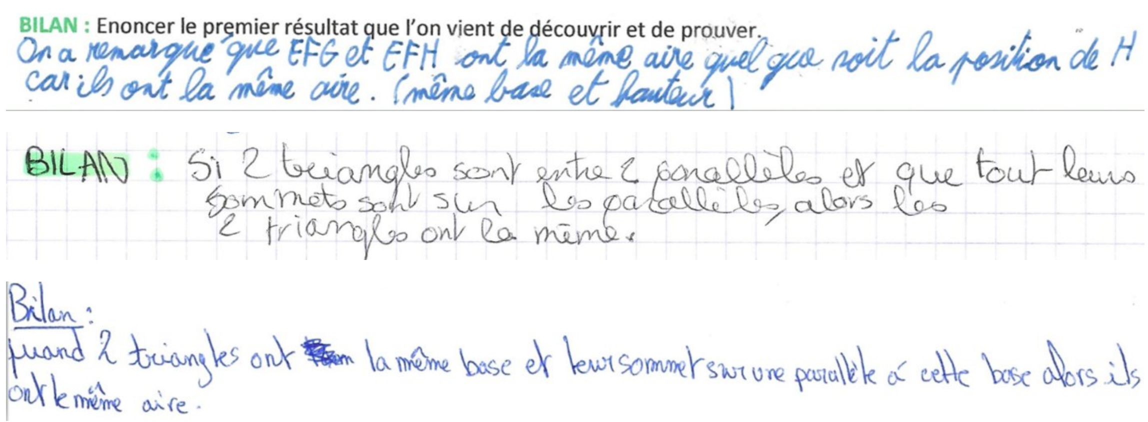


Figure 14 : Bilan de l'exercice énoncé par les élèves.

Une application donnée dans la classe d'Anne : le papillon dans le trapèze

ABCD est un trapèze. Ses diagonales se coupent en O.

a) Comparer les aires des triangles ADC et BCD. Justifier la réponse.

b) Exprimer les aires des triangles AOD et BOC sous forme d'une différence d'aires.

c) Déduire de cette expression que les triangles AOD et BOC ont même aire.

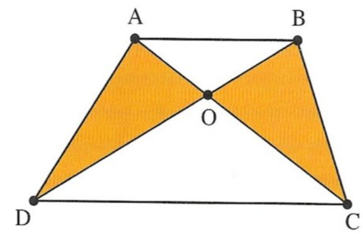


Figure 15

L'exercice (extrait de *Aventure Math 5*[e], édition Pôle, 2006) a été bien réussi comme le montrent ces quelques productions d'élèves. On aurait sans doute pu donner un énoncé un peu plus ouvert en supprimant la question *b*.

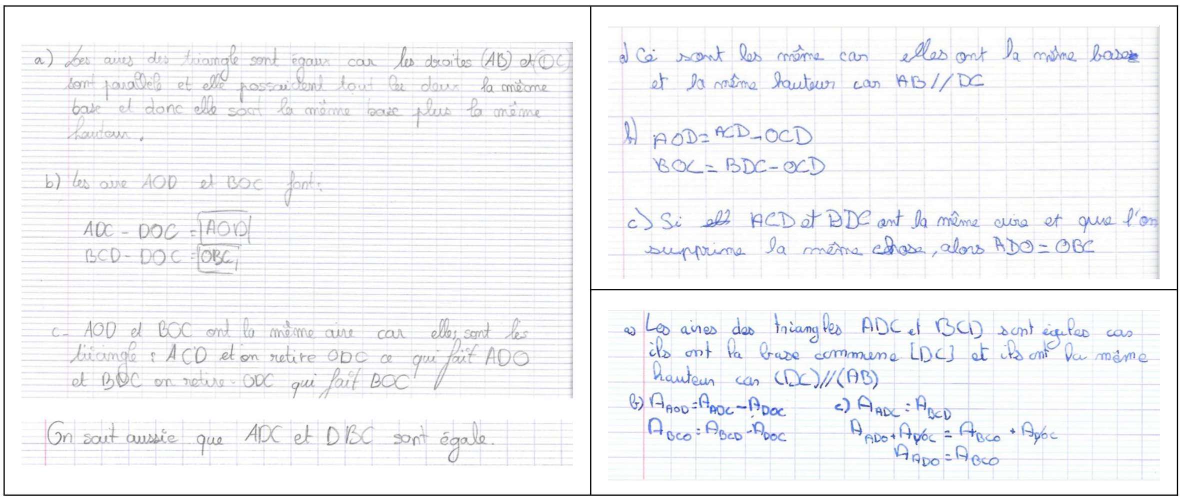


***Figure 16** : Solutions d'élèves.*

Un autre exercice donné dans la classe d'Anne

L'objectif est de réinvestir le théorème de la médiane.

L'exercice est extrait du manuel *Des maths ensemble et pour chacun*, 4[e], CRDP Pays de la Loire.

Sur la figure, on a :

$KI = 13\,cm$, $SI = 10\,cm$, $OI = 5\,cm$ et $BS = 8\,cm$.

Calculer l'aire du triangle KOI.

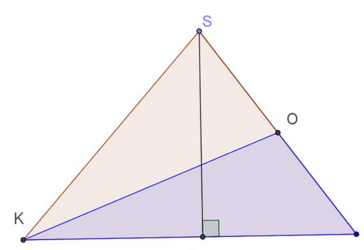
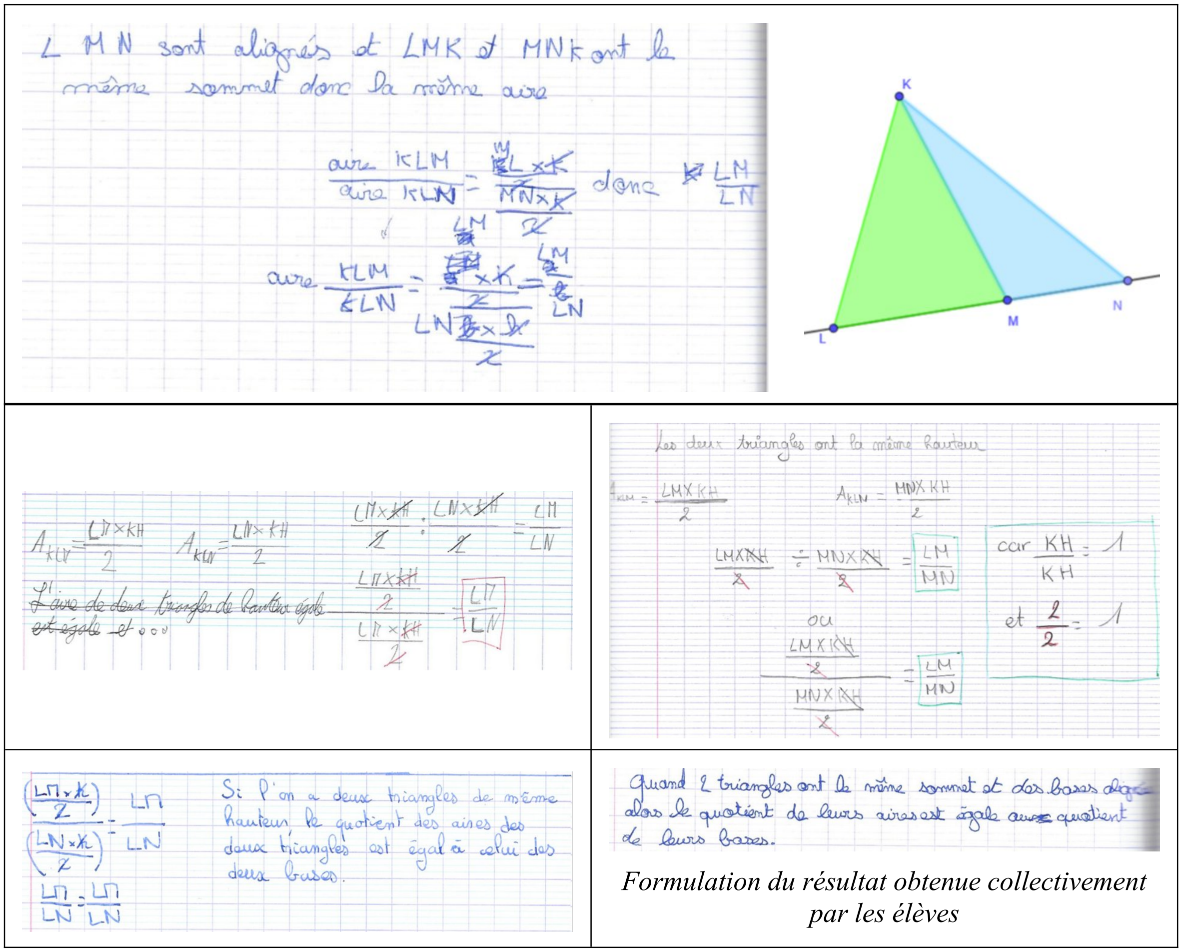


Figure 17

Cet exercice présente une difficulté pour les élèves : le terme « calculer » renvoie pour les élèves à l'utilisation d'une formule. Or, pour le triangle *KOI*, ils disposent des longueurs de deux côtés mais n’ont pas facilement les hauteurs : ils n’ont pas encore vu le théorème de Thalès ni celui de la droite des milieux qui leur permettraient de calculer la hauteur issue de O. Il leur faut donc changer de point de vue et calculer l’aire du triangle SKI pour en déduire celle du triangle KOI.

Le théorème des proportions dans la classe d’Anne

Voici quelques preuves rédigées par les élèves et des formulations du résultat.



Formulation du résultat obtenue collectivement par les élèves

Figure 18 *: Preuves rédigées par les élèves.*

3. Démonstration du théorème de Thalès en classe

Ce qu’on appelle depuis 1925 dans l’enseignement secondaire français le théorème de Thalès et qui continue à s’appeler dans beaucoup de pays le théorème des segments (ou lignes) proportionnel(le)s, a connu différents énoncés et différentes démonstrations selon les époques. Cela dépasserait le cadre de notre article d’en parler. On peut trouver une discussion très riche à ce sujet dans une brochure de la Commission Inter-IREM 1er cycle (1995) qui garde tout son intérêt. En particulier, Rudolf Bkouche replace le théorème et ses diverses démonstrations dans l’analyse épistémologique des liens entre géométrique et numérique ; Henry Plane résume l’histoire du théorème et de son enseignement ; Guy Brousseau fait une « promenade » didactique autour du théorème de Thalès en partant des trois points de vue qu’on trouve dans l’enseignement : conservation des abscisses, rapport de projection, homothétie et en identifiant des connaissances et situations en relation avec le théorème de Thalès selon le point de vue. Jean-Claude Duperret compare la « dynamique » de l'aspect projection à celle de l'aspect homothétie et identifie le problème des « petits bouts » sur lequel nous reviendrons. On y trouve aussi des comptes-rendus d'activités de classe et des exercices. On peut trouver aussi une analyse de la place du théorème de Thalès et de l'évolution de ses relations avec les autres notions enseignées en géométrie dans les programmes du collège de 1964 à 1989 dans Matheron (1993-1994) et une réflexion plus récente sur le théorème de Thalès et son enseignement dans Perrin (2006).

L'objectif de notre article est de témoigner de la façon dont des élèves ont pu s'emparer de la notion d'aire comme outil de démonstration, notamment pour démontrer le théorème de Thalès. Dans ce paragraphe, nous rendons compte du déroulement de la démonstration du théorème de Thalès dans le triangle dans les classes d'Anne, en 2019-2020 : le cas particulier du rapport 2 (droite des milieux) en quatrième, le cas général en troisième.

3.1. La droite des milieux en quatrième

Le théorème de la droite des milieux n'est pas cité explicitement dans les programmes actuels, en particulier il ne figure pas dans les repères de progression parus en 2018. Le document d'accompagnement sur la géométrie précise :

> *Les deux points de vue « commencer par le théorème de la droite des milieux puis généraliser » ou « présenter le premier comme une conséquence du deuxième » sont acceptables, et relèvent de la liberté pédagogique. La démonstration du théorème de la droite des milieux n'est pas un objectif* (MEN, 2016).

La plupart des professeurs que nous avons rencontrés dans les stages de formation continue le considèrent comme un cas particulier du théorème de Thalès qui est traité en quatrième dans le cas des triangles emboités. Anne a fait le choix, avec d'autres professeurs de son collège, de faire la démonstration du théorème de la droite des milieux par les aires en quatrième pour préparer la démonstration du théorème de Thalès général en troisième. La démonstration est plus facile parce qu'on traite d'égalités d'aires au lieu de rapports d'aires. De plus, le cas du rapport 2 nous semble mériter d'être formulé car il est source de nombreux exercices.

Le travail sur les aires décrit ci-dessus avait été mené précédemment. Cela évite de réintroduire la formule de calcul de l'aire dans les démonstrations. La découverte des théorèmes liés à la droite des milieux s'est faite en utilisant le logiciel *GeoGebra* comme outil de conjecture.

La démonstration a fait l'objet d'une recherche individuelle suivie d'une discussion collective. Un bilan de la preuve a ensuite été complété par chaque élève. Il montre une bonne compréhension des différentes étapes. Cependant, la majorité des élèves reviennent presque systématiquement à l'utilisation de la formule d'aire comme on peut le voir sur cette copie représentative (figure 19). Les connaissances sur les aires en tant que grandeurs ne semblent donc pas encore suffisamment disponibles car trop récentes. Pour plus d'efficacité, il aurait sans doute fallu travailler les aires et institutionnaliser les théorèmes de la parallèle et de la médiane bien plus en amont c'est-à-dire dans les classes précédentes.

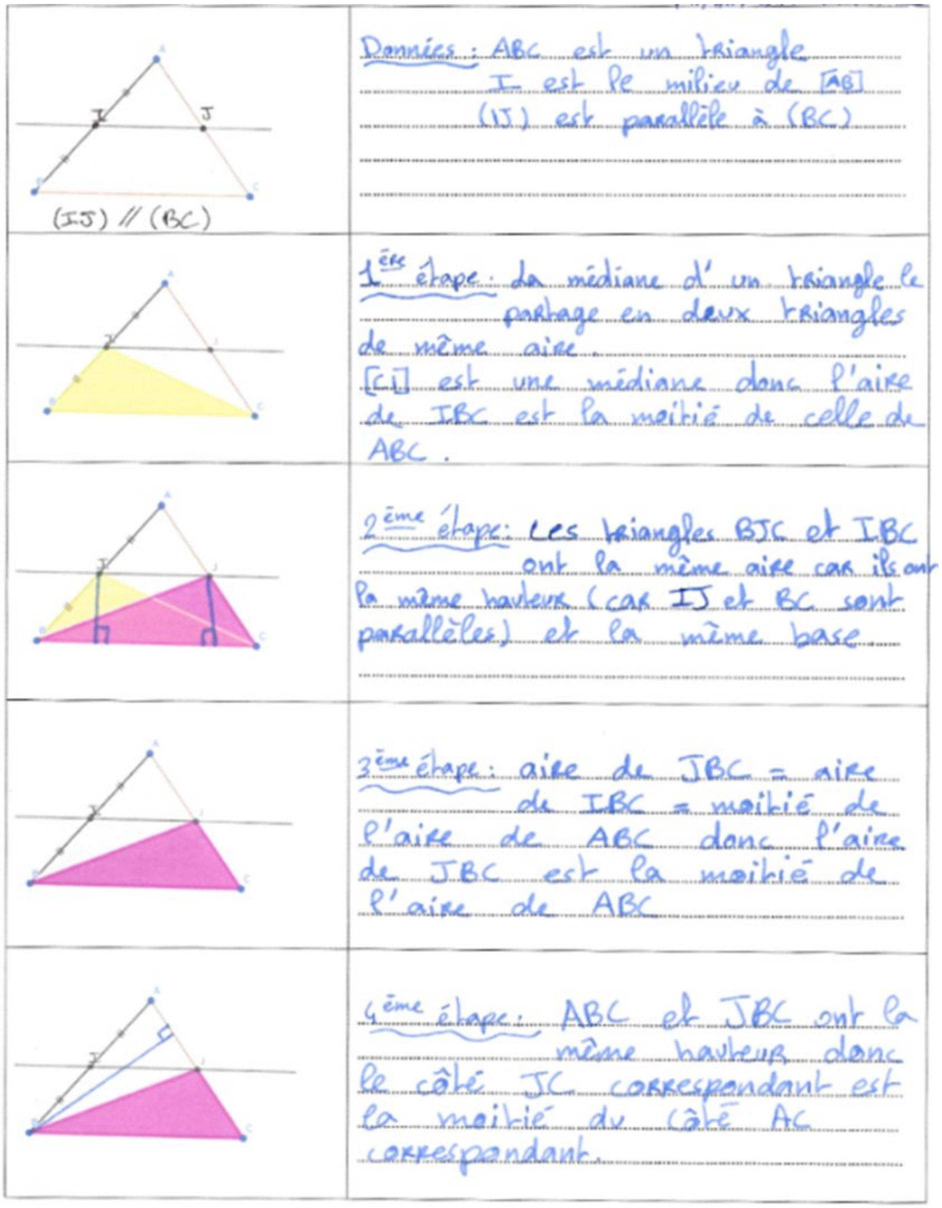


Figure 19 *: Démonstration du théorème de la droite des milieux par un élève.*

Néanmoins, la preuve semble tout à fait accessible à des élèves de quatrième, y compris aux élèves les plus en difficulté qui ont encore une vision surface des figures. L'année précédente, cette démonstration s'était passée plus difficilement : la preuve avait été menée de façon collective et les élèves n'avaient pas rencontré au préalable les théorèmes des médianes et de la parallèle. Il fallait donc recourir à la formule de calcul de l'aire du triangle au cours de la preuve avec la difficulté d'une hauteur extérieure pour l'un des triangles.

3.2. Démonstration du théorème de Thalès par les aires dans une classe de troisième

Dans la classe de troisième d'Anne, en 2019-2020, certains élèves avaient déjà rencontré le théorème de Thalès dans le cas emboîté en quatrième, d'autres non. Elle a donc introduit le théorème par une exploration sur le logiciel *GeoGebra* permettant d'obtenir en même temps la configuration des triangles emboîtés et celle du papillon : les longueurs et les rapports sont inscrits dans le tableur de GeoGebra et le point M est mobile sur la droite (AB). Il est demandé aux élèves de schématiser les différentes configurations observées et de faire une conjecture. L'écriture de cette conjecture est difficile pour nombre d'élèves. Cependant, l'activité a permis de conjecturer le résultat et de le formuler dans le cas général. La démonstration du cas emboîté par les aires a été traitée comme un exercice cherché par les élèves. La démonstration du cas « papillon » s'est faite en se ramenant au cas emboîté par une symétrie centrale.

L'exercice proposé s'appuie sur un travail préalable sur les aires, désigné dans le texte par « la première partie ». Le résultat 1 est le théorème de la parallèle, le résultat 2 celui des proportions. La stratégie d'utilisation des aires pour démontrer ce résultat a été présentée ainsi : Pour prouver que $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, on a des rapports de longueurs à comparer, on va les transformer en rapports d'aires grâce au lemme des proportions.

M est un point du segment [AB], N est un point du segment [AC] et la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).

1. En utilisant le résultat 1 de la première partie, quelles aires de triangles sont égales ? En déduire que les triangles AMC et ANB ont la même aire.

2. En utilisant le résultat 2 de la première partie :

- *exprimer* $\frac{\mathscr{A}(AMC)}{\mathscr{A}(ABC)}$ *comme un rapport de longueurs ;*
- *exprimer* $\frac{\mathscr{A}(ANB)}{\mathscr{A}(ABC)}$ *comme un rapport de longueurs ;*
- *en déduire que* $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$.

3. Tracer la parallèle à (AC) passant par M. Elle coupe [BC] en P.

- *Comparer les aires des triangles APC et AMC. Justifier.*
- *Exprimer* $\frac{\mathscr{A}(AMC)}{\mathscr{A}(ABC)}$ *et* $\frac{\mathscr{A}(APC)}{\mathscr{A}(ABC)}$ *comme des rapports de longueurs.*
- *En déduire que* $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$.

4. Conclure.

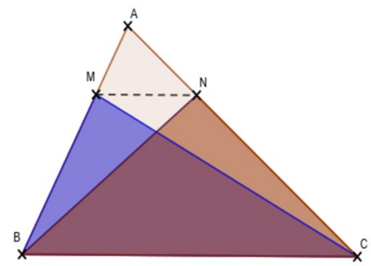


Figure 20

La démonstration s'est déroulée de façon satisfaisante et semble comprise. Voici quelques productions d'élèves :

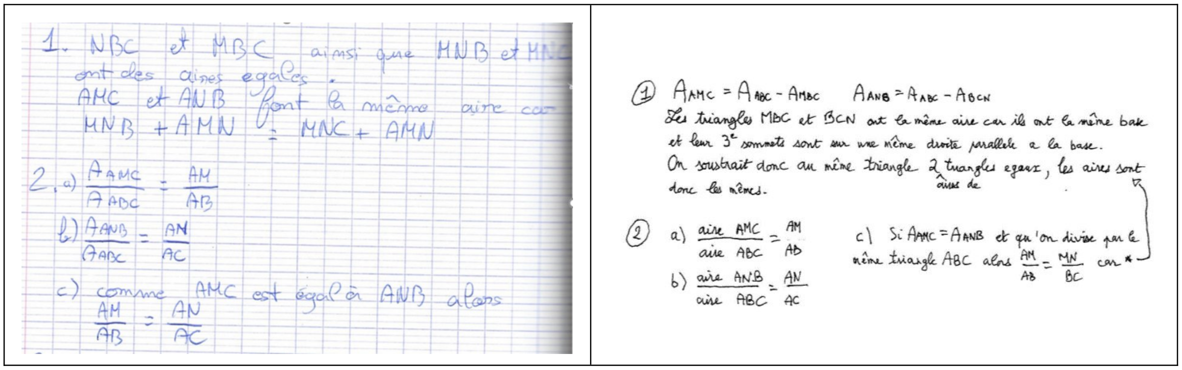


Figure 21 *: Solutions d'élèves.*

Pour la troisième question, certains élèves éprouvent le besoin de refaire la figure pour retrouver la disposition du théorème de la parallèle, plus difficile à reconnaître en position oblique :

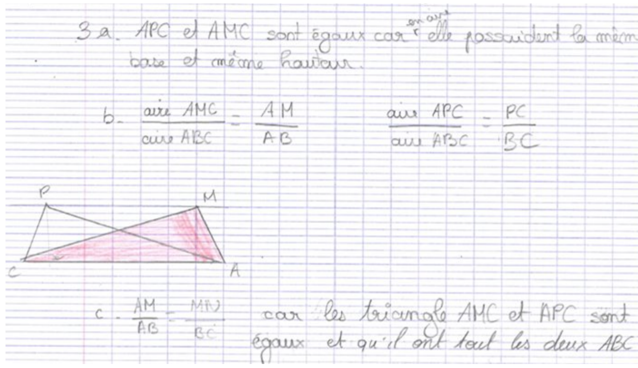


Figure 22 *: Solution d'un élève qui refait la figure.*

Certains élèves utilisent encore la formule pour calculer les rapports d'aire comme cet élève qui, de plus, conclut en arguant du théorème de Thalès alors qu'il est en train de le démontrer.

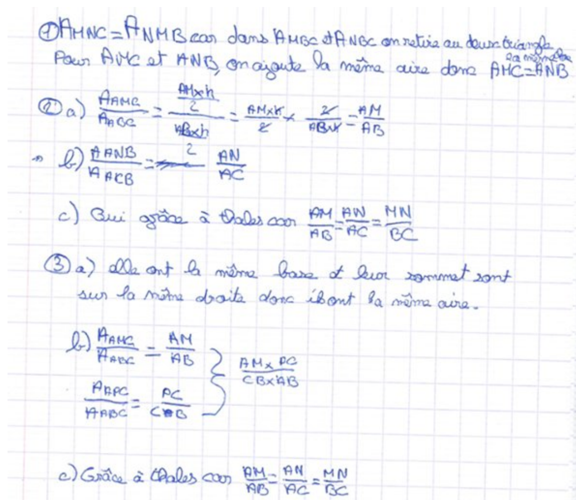


Figure 23 *: Erreur de raisonnement.*

Notons que cet élève est un bon élève ; son erreur est peut-être due au fait que, pour des contraintes dues à un contrôle commun, la démonstration du théorème n'avait pas pu se faire juste après l'introduction, ce qui fait que les élèves avaient eu l'occasion de traiter des exercices utilisant le théorème de Thalès avant sa démonstration. Bien sûr le même problème risque de se poser si on fait la démonstration en troisième à des élèves qui ont déjà utilisé le théorème dans des exercices en quatrième.

3.3. Discussion

Le choix a été fait ici de faire la démonstration du théorème en incluant les trois rapports. Dans la question 3, on passe par le rapport des « petits bouts » aux côtés : $\frac{AM}{AB}=\frac{PC}{BC}$ et l'égalité $MN=PC$ dans le parallélogramme *MNCP*. On aurait pu établir le théorème avec deux rapports (questions 1 et 2), puis l'utiliser pour la question 3. Cela aurait nécessité de couper l'exercice en deux, de conclure un premier exercice après la question 2 en formulant le théorème démontré pour que les élèves puissent l'utiliser ensuite. Remarquons que la forme actuelle du théorème qui privilégie certains rapports demande de nommer les points car on ne peut plus parler de segments proportionnels, par exemple : « Quel que soit le triangle ABC, si M est un point du côté $[AB]$, la parallèle à (BC) passant par M coupe le côté $[AC]$ en un point N tel que $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ». L'utilisation du théorème pour la question 3 donne l'égalité $\frac{BM}{BA}=\frac{BP}{BC}$ et il faut un calcul pour se ramener au rapport $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$.

Le travail préalable sur les aires a sans doute joué un rôle essentiel dans la réussite de cette démonstration. En effet, en 2018-2019, la démonstration du théorème de Thalès par les aires avait été exposée oralement au tableau sur un exemple numérique générique. Les théorèmes sur les aires n'avaient pas été introduits au préalable. Les égalités d'aires et les proportions avaient été établies au fur et à mesure en utilisant la formule de l'aire du triangle. Alors que les élèves connaissent cette formule depuis la sixième, ils avaient eu beaucoup de mal à suivre la démonstration. Trop d'informations à gérer en même temps leur ont fait perdre de vue ce que l'on voulait montrer. De plus, ils ont l'habitude d'utiliser la formule de l'aire du triangle pour calculer et non pour démontrer. Toutes ces difficultés nous ont convaincus que le travail sur les aires était un préalable et que les lemmes sur les aires devaient être disponibles en tant que tels au moment de les utiliser dans une démonstration. De plus, le fait de prendre des valeurs numériques n'aide pas car il maintient les élèves sur le plan du calcul.

On peut démontrer le théorème de Thalès par d'autres méthodes, notamment avec des parallèles équidistantes, comme on le faisait dans les années 60, mais on ne peut le faire avec des élèves que dans le cas d'un rapport rationnel et il faut alors admettre le passage à la limite pour un rapport réel. Dans le cas de la démonstration par les aires, le passage à la limite est caché dans le fait qu'on admet l'existence de l'aire et la formule de calcul de la mesure de l'aire d'un rectangle. Nous y revenons dans le paragraphe suivant.

4. Mesure des aires et nombres

Dans la première partie, nous avons dit que l'aire est une grandeur géométrique et qu'elle est bidimensionnelle. Dans ce dernier paragraphe, nous voudrions revenir sur la mesure des aires, c'est-dire les moyens d'attribuer des nombres à des surfaces du plan[5]. Nous supposerons l'existence d'une mesure sur les parties qui nous intéressent, l'additivité sur les parties disjointes et l'invariance par isométrie de l'application qui, à une surface, associe sa mesure ainsi que l'indépendance de la décomposition d'une mesure obtenue par somme sur des sous-parties disjointes. Nous reviendrons en revanche sur deux points qui nous semblent importants pour l'enseignement parce qu'ils peuvent entraîner des difficultés d'apprentissage : la notion d'unité d'aire à travers laquelle se manifeste la bidimensionnalité, et la mesure de l'aire d'un rectangle, à la source de l'établissement de la plupart des formules de calcul des mesures d'aire et du sens de la multiplication, notamment pour les rationnels et les décimaux.

[5] Pour la question de l'existence et de la définition d'une fonction mesure sur les parties quarrables du plan, nous renvoyons à Perrin-Glorian (1989-1990).

4.1. Notion d'unité

L'unité d'aire est une aire mais cette aire peut être représentée par une infinité de surfaces différentes. La première approche, fondamentale, de la notion d'unité d'aire et de mesure d'aire est le pavage : c'est une mesure unidimensionnelle de l'aire par report de l'unité. Mais la possibilité de paver dépend de la forme de la surface et de celle du pavé. Par exemple, on ne peut pas paver exactement un triangle avec des pavés rectangulaires. Le pavage avec un même pavé permet la comparaison de certaines surfaces. Le pavage de deux surfaces avec des pavés différents permet aussi la comparaison par exemple si l'un d'eux permet de paver l'autre ou si l'on a une relation entre les aires des deux pavés[6], par exemple un triangle rectangle isocèle, moitié d'un carré ou un triangle qui a même aire qu'un rectangle comme dans l'exemple suivant (figure 24) : $1u=2v$ donc $19u=38v$; l'aire de la première figure est supérieure à celle de la seconde.

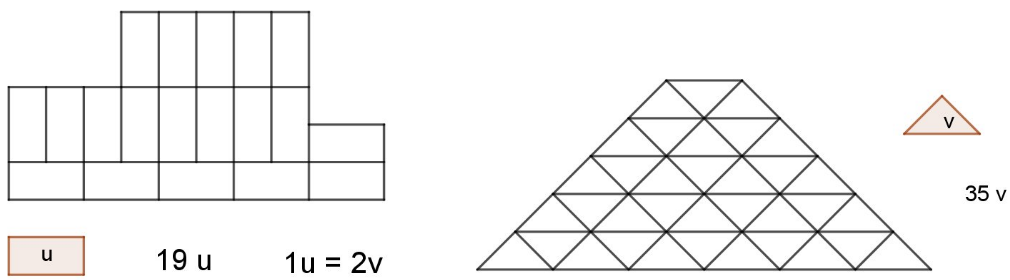


Figure 24 *: Pavages et comparaison d'aires.*

Cependant, les unités usuelles d'aire sont construites sur les unités de longueur et définies comme l'aire d'un carré dont le côté a pour longueur l'unité de longueur. Il est important de considérer dans l'apprentissage la dissociation de l'unité d'aire de sa forme, par exemple en demandant aux élèves de fabriquer sur du papier quadrillé en *cm* ou sur le papier ordinaire à petits carreaux beaucoup de surfaces différentes, notamment des triangles et des parallélogrammes d'aire $1\,cm^2$ ou comprenant un nombre entier de cm^2 (*cf.* Douady & Perrin-Glorian, 1985). Le langage induit une difficulté : un centimètre carré est l'aire d'un carré de côté un centimètre et beaucoup d'élèves en déduisent qu'un demi-centimètre carré est l'aire d'un carré de côté un demi-centimètre. L'utilisation du papier à petits carreaux est l'occasion d'aborder ce problème. C'est aussi un moyen d'encadrer les aires de surfaces avec des bords courbes. Si la surface est dessinée sur papier calque, on peut la placer sur le quadrillage de manière à avoir le meilleur encadrement possible puisque l'aire est invariante par déplacement. C'est une occasion de mettre cette propriété en pratique.

4.2. Aire du rectangle et nombres non entiers

Le calcul de l'aire du rectangle est essentiel pour établir les autres formules d'aire des surfaces usuelles. Au vu des résultats de l'évaluation de l'APMEP cités plus haut, il nous paraît très important de faire démontrer par les élèves eux-mêmes les formules de calcul d'aire des surfaces usuelles (parallélogramme, triangle, losange, trapèze) en les ramenant à celle du rectangle. Il est très important aussi de leur faire travailler l'additivité des aires comme le montre cet autre

[6] Voir Douady et Perrin-Glorian (1984) pour un exemple de mise en œuvre en classe avec plusieurs pavés.

résultat de l'évaluation de l'APMEP en fin de cinquième en 1990 (cité par Moreira Baltar, 1996-1997) :

ABCD est un rectangle.

Les mesures sont faites en cm.

En n'utilisant que les mesures portées sur la figure

1) Calcule l'aire du triangle DAI.

2) Calcule l'aire du triangle DIJ.

3) Toujours sans mesurer, compare la hauteur issue de A dans le triangle DAI et la hauteur issue de J dans le triangle DJI.

Réussite :

1) 53%

2) 17%. Moins de 20% mettent en œuvre une procédure soustractive.

3) 3%

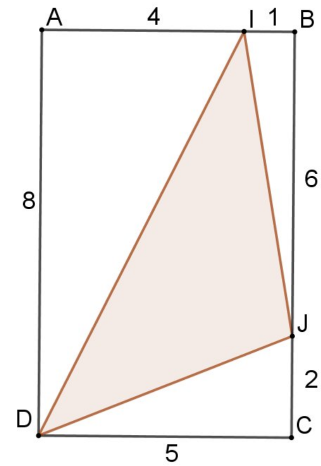


Figure 25

Ces résultats sont anciens mais ils montrent que si on n'enseigne que la formule, les élèves ne voient pas d'autre procédure pour traiter des problèmes simples qu'ils pourraient traiter sans elle.

Le calcul de l'aire du rectangle sert aussi pour donner du sens à la multiplication des nombres rationnels et décimaux.

Si l'on prend pour unité d'aire l'aire *a* d'un carré qui a pour côté l'unité de longueur, *u*, le pavage donne le résultat pour les rectangles dont les côtés sont à mesure entière. C'est un des sens de la multiplication en primaire, qui permet de se convaincre de la commutativité de l'opération alors que ce n'est pas du tout évident quand la multiplication est définie comme une addition répétée : il faut ranger les objets dans cette disposition pour le voir.

Dans le cas des nombres rationnels, on peut aborder l'aire du rectangle avec un exemple générique, par exemple un rectangle dont les dimensions sont $\left(7+\frac{4}{5}\right)u$ et $\left(4+\frac{1}{2}\right)u$. Le rectangle peut se décomposer en quatre rectangles : R1, R2, R3, R4 (figure 26A). Le rectangle R1 a ses deux dimensions entières. La mesure de son aire en *a* se déduit du pavage : $7u \times 4u = 28a$. Les rectangles R2 et R3 ont une dimension entière. Ils sont composés d'un nombre entier de rectangles dont une dimension est $1u$ et l'autre une fraction inférieure à $1u$. Prenons les composants de R2 : ce sont des rectangles de dimensions $1u$ et $\frac{4}{5}u$, eux-mêmes composés de quatre rectangles de dimensions $1u$ et $\frac{1}{5}u$ (figure 26B). Le rectangle de dimensions 1u et $\frac{1}{5}u$ pave le pavé unité : il s'y reporte 5 fois donc son aire est $\frac{1}{5}a$. L'aire de R2 est donc $4\times4\times\frac{1}{5}a$. De même l'aire de R3 est $7\times\frac{1}{2}a$. Reste à trouver l'aire de R4. Mais R4 peut se paver avec 4 pavés de dimensions $\frac{1}{5}u$ et $\frac{1}{2}u$ (figure 26C). Un tel pavé peut se reporter 10 fois dans le carré unité. Son aire est donc $\frac{1}{10}a$ et l'aire de R4 est $\frac{4}{10}a$. Cette décomposition correspond à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $\left(7+\frac{4}{5}\right)\times\left(4+\frac{1}{2}\right)=(7\times4)+\left(7\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{5}\times4\right)+\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\right)$ qui permet d'étendre aux nombres fractionnaires et décimaux la multiplication définie sur les entiers.

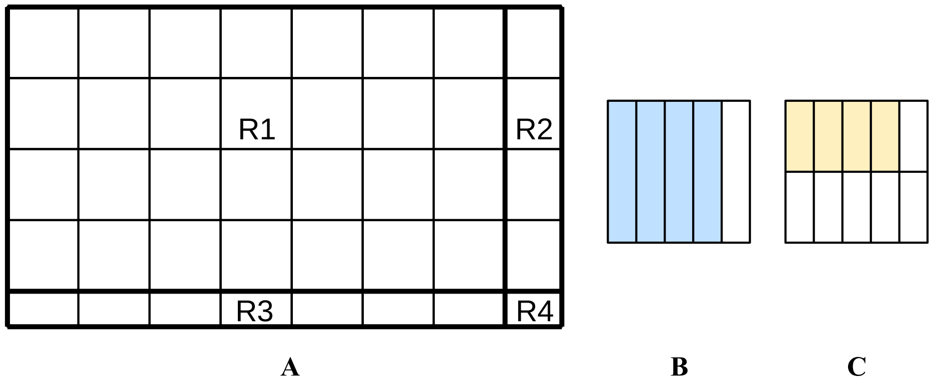


Figure 26 *: Aire du rectangle.*

Le cas où le rectangle a des dimensions réelles demande de voir les réels comme approchés d'aussi près qu'on veut par des rationnels ou des décimaux et d'admettre le passage à la limite.

Conclusion

La mise en œuvre dans la classe d'Anne montre que la démonstration du théorème de Thalès par les aires est accessible pour les élèves de quatrième et troisième à condition d'avoir au préalable rendu les aires disponibles comme outil de démonstration en établissant des résultats faciles à établir mais qui nécessitent d'être institutionnalisés et utilisés pour traiter des exercices. C'est un investissement car le travail sur les aires généralement réalisé au cycle 3 ne suffit pas mais il présente un intérêt qui dépasse la démonstration du théorème de Thalès. En effet, il permet également de travailler différentes démarches de pensée : changer de point de vue, créer des liens entre différentes connaissances, utiliser une situation intermédiaire. Ces acquisitions contribuent à outiller les élèves pour faciliter leur recherche dans d'autres problèmes de géométrie et au-delà et mériteraient de figurer explicitement dans les programmes du cycle 4.

Ce travail a aussi permis de montrer l'importance de la formulation des énoncés par les élèves pour qu'ils puissent ensuite les utiliser dans les démonstrations. Après une phase de découverte, la formulation de conjectures par les élèves eux-mêmes reste difficile mais la recherche de cette formulation est indispensable pour que les élèves puissent s'approprier l'énoncé du théorème et le réinvestir pour traiter un problème autre que celui qui a permis sa découverte.

S'agissant des différents énoncés du théorème de Thalès, concernant un triangle *ABC* et une parallèle à (*BC*) passant par un point *M* de (*AB*) et coupant (*AC*) en *N*, tous les rapports de segments de cette configuration sur (*AB*) sont égaux aux rapports correspondants sur (*AC*), en particulier les rapports « petits bouts » ($\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ et $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}$ qui sont perdus dans l'énoncé actuel du collège. Cependant, le rapport $\frac{MN}{BC}$ est égal à $\frac{AM}{AB}$ et à $\frac{AN}{AC}$ mais pas aux rapports avec « petits bouts ». Il est donc difficile de réunir tous les rapports utiles dans un énoncé suffisamment clair et utilisable par des élèves de collège. Quelle que soit la forme du théorème de Thalès adoptée, un point essentiel subsiste : son utilisation dans les problèmes est l'occasion de mettre en œuvre le lien entre numérique et géométrique par le biais du calcul algébrique qui est facilité si on nomme les longueurs par une lettre plutôt que par la notation géométrique des distances.

Références bibliographiques

Capponi, B. (1988). Mesure et démonstration. Un exemple d'activité en classe de quatrième. *Petit x, 17*, 29-48.

Celi, V. (2002). *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation*. Thèse de l'université Paris 7 - Denis Diderot.
https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01255392

Celi, V. (2011). Activité... Des aires sans calculs. Hors série n° 3, *Petit x Spécial Activités 1999-2010*, 20-27. IREM de Grenoble.

Clapponi, P. (1992-1993). Activités 7 à 14. *Petit x, Hors-série*.

Commission inter-IREM 1er cycle, (1995). *Autour de Thalès*.
https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWU95002.htm

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1984). Aires de surfaces planes 1ère partie. *Petit x, 6*, 5-33.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1985). Aires de surfaces planes 2ème partie. *Petit x, 8*, 5-30.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*/4, 387-424.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Galion (1996). *Démontrer avec des aires*. APMEP.
https://www.apmep.fr/GALION-Themes

Groupe Géométrie - IREM de Paris (2021). *Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer*. IREM de Paris, brochure n°100 (268 pages).
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf

Matheron, Y. (1993-1994). Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès. *Petit x, 34*, 59-87.

Moreira Baltar, P. (1996-1997). À propos de l'apprentissage du concept d'aire. *Petit x, 43*, 43-68.

Moreira Baltar, P. & Comiti, C. (1993-1994). Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/ périmètre pour des rectangles. *Petit x, 34*, 5-29.

Perrin, D. (2006). *Autour du théorème de Thalès*. Texte de la conférence de clôture de la journée Euromaths de l'IREM de Paris de juin 2006.
https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/ThalesDP.pdf

Perrin-Glorian, M.-J. (1989-1990). L'aire et la mesure, *Petit x, 24*, 5-36.

Rogalski, J. (1982). L'acquisition de notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en didactique des mathématiques, 3/3*, 343-396.

MEN (2016). *Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4)*. chapitre « Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer »
https://eduscol.education.fr/280/mathematiques-cycle-4