
GÉOMÉTRIES DU COMPAS AU COLLÈGE, AVEC OU SANS RÈGLE¹

Bernard PARZYSZ²

Université d'Orléans
Laboratoire de Didactique André Revuz et IREM de Paris

Résumé. Cet article a sa source dans une partie du stage organisé en 2021-2022 par le groupe Géométrie de l'IREM de Paris en direction des professeurs de collège. En réponse à une demande de stagiaire, il commence par poser la question de l'origine des constructions « à la règle et au compas » et situe celles-ci par rapport aux deux paradigmes géométriques en jeu au niveau du collège. L'un d'eux (G1) peut être rattaché à une « géométrie pratique », correspondant à une problématique de la précision, tandis que l'autre (G2) réfère à une géométrie de type euclidien, correspondant à une problématique de la conformité à une théorie et distinguant construction exacte et construction approchée. La seconde partie de l'article est centrée sur le théorème de Mohr-Mascheroni et les constructions « au compas seul ». Les exemples étudiés, tirés de l'ouvrage de Mascheroni (1797) permettent de cerner les difficultés créées par l'abandon de la règle et de réinvestir divers points du programme du cycle 4.

Mots-clés. Constructions géométriques, paradigmes, règle, compas, théorème de Mohr-Mascheroni.

Abstract. The source of this article is part of a geometry training course organized in 2021-2022 by the Geometry group of the IREM of Paris for in-service lower secondary teachers. As an answer to a trainee's question, it begins with dealing with the origin of the so-called "ruler and compass" constructions and refers it to the two geometrical paradigms which are in play at lower secondary level. One of them (G1) can be linked with a "practical" geometry corresponding to an issue of accuracy, since the other one (G2) refers to a Euclidian type geometry, corresponding to an issue of compliance with a theory and distinguishing between exact and approximate constructions. The second part of the article is centered on Mohr-Mascheroni theorem and constructions "with compass only". The studied examples, taken from Mascheroni's book (1797) allow to discern the difficulties created by giving up the ruler and reinvest several points of the lower secondary course.

Keywords. Geometrical constructions, paradigms, ruler, compass, Mohr-Mascheroni theorem.

Introduction

Cette année, à la fin de la deuxième journée du stage de formation continue organisé à l'intention des professeurs de collège par le groupe Géométrie de l'IREM de Paris, nous avons annoncé que la troisième et dernière journée du stage comporterait une séquence sur la géométrie du compas seul et le théorème de Mohr-Mascheroni, selon lequel toute construction géométrique à la règle (non graduée) et au compas est réalisable au compas seul. En effet, tout comme l'étude des propriétés des figures géométriques, les problèmes de construction constituent un élément important de l'apprentissage de la géométrie du cycle 4 ; le programme indique d'ailleurs comme compétence attendue en fin de cycle : « *mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique* » (Eduscol, 2020, p. 136). Il nous semblait que ce thème pouvait répondre à un triple objectif :

- procurer aux stagiaires une ouverture sur un aspect moins connu de la géométrie débouchant sur un résultat non trivial ;
- mettre en œuvre des exemples d'application de résultats du cours de géométrie ;

¹ Une partie de cet article reprend et développe une partie du chapitre 9 de la brochure 100 de l'IREM de Paris.

² parzysz.bernard@wanadoo.fr

- montrer que, même si le stage était centré sur les cas d'égalité et de similitude (voir l'article de Perrin-Glorian et Didier dans ce numéro), ceux-ci ne s'opposaient pas aux autres outils, notamment les symétries, et que tous pouvaient avoir leur intérêt dans l'élaboration d'une démonstration.

À l'issue de cette présentation, un stagiaire posa la question : « Pourquoi la règle et le compas ? ». Il expliqua que son interrogation portait sur la raison du choix de ces deux instruments particuliers, de préférence à d'autres, comme par exemple l'équerre ou le rapporteur. Cette question inattendue fut plus tard reprise au sein de l'équipe de formateurs, et elle déboucha sur l'élaboration d'un petit aperçu sur les constructions « à la règle et au compas », en préambule à la présentation de la géométrie du compas seul.

1. Pourquoi la règle et le compas ?

La géométrie exposée dans les *Éléments* d'Euclide est habituellement qualifiée de géométrie « de la règle et du compas ». Mais il s'agit en réalité plus exactement d'une géométrie « de la droite et du cercle », car les objets dont il s'agit ne sont pas matériels mais théoriques. Certes, pour les philosophes antiques la droite était la figure la plus simple et le cercle la figure la plus parfaite, ou encore, comme l'écrit Mascheroni lui-même : « *la ligne droite, la plus simple des lignes, et [le] cercle, la plus simple des courbes* » (Mascheroni, 1797, p. 5). Mais, plus prosaïquement, on peut sans doute en situer l'origine dans les tracés matériels réalisés à l'aide d'une règle non graduée et/ou d'un compas, instruments usuels de nombreux artisans depuis la plus haute antiquité : architecte, tailleur de pierre, charpentier, menuisier, etc.

Pourquoi la droite ? Les questions d'alignement n'y sont sans doute pas étrangères. C'est ainsi que l'Égypte ancienne connaissait la profession de « tendeur de corde », arpenteur chargé de matérialiser au sol les fondations des bâtiments et les limites des terrains.

Pourquoi le cercle ? Ici, c'est plutôt la question du report de longueur qu'il faudrait évoquer. Pour le faire, on peut utiliser un simple bâton ou un cordeau tendu, comme on le fait aujourd'hui à la pétanque en cas de litige. Lorsqu'on fixe au sol l'une des deux extrémités d'un cordeau tendu, l'autre décrit un cercle. C'est ainsi qu'Euclide utilise les cercles dans la proposition première des *Éléments*, pour obtenir un triangle équilatéral ABC à partir du segment $[AB]$ (figure 1) : il écrit ainsi : « *Du point A et avec un intervalle AB , décrivez une circonférence BCD* » (Peyrard, 1804, p. 6). Il ne précise pas par quel moyen, et en fait la « circonférence » ne lui sert qu'à reporter la longueur AB dans toutes les directions à partir du point A .

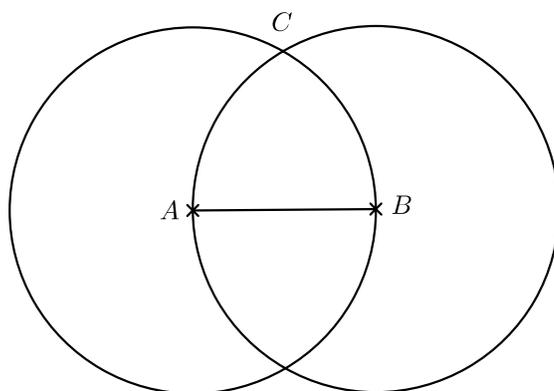


Figure 1 : Construction du triangle équilatéral par Euclide.

Quelques siècles plus tard, le *Carnet* de l'architecte médiéval Villard de Honnecourt (vers 1230) montre diverses utilisations du compas, tantôt pour le report de longueurs et tantôt pour le tracé de cercles (Villard de Honnecourt, 1986). Ainsi :

- le tracé de plusieurs sortes d'ogives, réalisées à base d'arcs de cercle (figure 2A) ;
- la recherche du diamètre d'une colonne semi-encastrée, qui utilise le report de longueurs : avec un compas sur lequel a été « greffée » une troisième branche (figure 2B), on détermine les positions relatives de trois points d'une circonférence horizontale, ces trois points permettant ensuite de déterminer le centre de la section circulaire qui les contient.

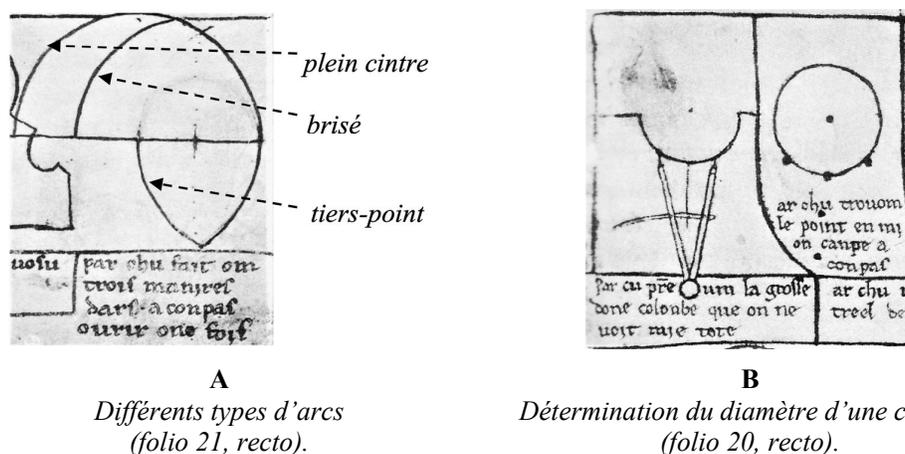


Figure 2 : Extraits du *Carnet* de Villard de Honnecourt.

Mieux encore, le cordeau apparaît comme une espèce de *couteau suisse* permettant à lui seul de déterminer des verticales, de reporter des longueurs et de tracer droites et cercles sur des surfaces variées. Ce seul instrument, simple d'emploi et facile à transporter, suffisait donc, en principe, pour réaliser tous les tracés dont l'artisan avait besoin.

2. Construction exacte, construction approchée

2.1. Que peut-on construire à la règle et au compas ?

Étant donné deux points A et B dont la distance est prise comme unité, on peut obtenir, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, des segments de longueur $\frac{p}{q}$ en mettant bout à bout p segments de longueur AB et en divisant le résultat obtenu par q (application du théorème de Thalès) ; on peut aussi obtenir des racines carrées, grâce au théorème de Pythagore (figure 3).

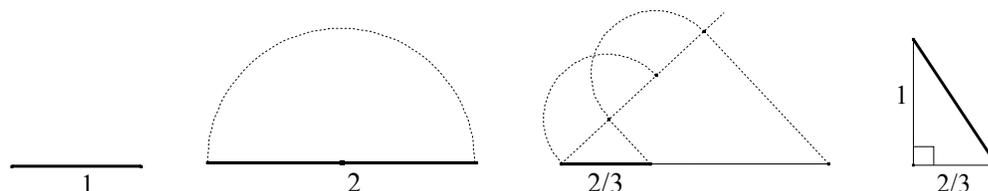


Figure 3 : Exemple : construction d'un segment de longueur $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

Il sera néanmoins impossible théoriquement d'obtenir des longueurs faisant intervenir, par exemple, des racines cubiques ou des nombres transcendants. D'où, en particulier, l'impossibilité des problèmes classiques que sont la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle (Carrega, 2001 ; Perrin, 2011). Cependant, comme les nombres réels peuvent être approximés aussi près qu'on veut par des rationnels, on pourra obtenir des constructions approchées très précises. La question sera alors de négocier entre précision et simplicité (celle-ci prenant notamment en compte le nombre de pas de la construction). Ainsi, on sait que $\frac{355}{113}$ est une excellente approximation de π (à 8×10^{-8} près), mais du point de vue pratique construire un segment de longueur $\frac{355}{113}$ n'est assurément pas une mince affaire !

2.2. Deux paradigmes géométriques

La distinction faite plus haut entre les couples droite-cercle, d'une part, et règle-compas, d'autre part, pose la question non seulement des objets qui font l'objet du travail géométrique, mais aussi des instruments mis en œuvre et des validations associées. On retrouve en effet ici les deux paradigmes usuels de la géométrie plane qui sont en jeu au niveau de l'école primaire et du collège (Houdement & Kuzniak, 2006).

Un premier paradigme, G1, dans lequel les objets sur lesquels porte l'étude sont des tracés (sur une feuille de papier, un écran d'ordinateur, un mur ou le sol d'une pièce...), les instruments (artefacts) étant les instruments de dessin et de mesure usuels et la validation de nature perceptive (instrumentée ou non). La géométrie de Villard de Honnecourt appartient à cette catégorie.

Un second paradigme, G2, dans lequel les objets sont de nature abstraite (droite sans épaisseur et infinie, etc.), les instruments étant les définitions et théorèmes, et la validation de nature hypothético-déductive (« démonstration »). C'est le paradigme des *Éléments* d'Euclide.

Les problématiques — donc les critères de validité — ne sont pas les mêmes pour les deux paradigmes : dans G1, il s'agit de la précision du résultat obtenu, et un faible écart par rapport à l'attendu pourra être accepté. Au contraire, dans G2, il s'agit de la conformité à la théorie et aux règles de la logique déductive, et on se positionne selon le « vrai ou faux ».

2.3. Un exemple

Un exemple tiré de la mosaïque gallo-romaine va permettre d'éclairer cette distinction. Un grand pavement de mosaïque (9,56 m sur 4,25 m) provenant de Vienne (Isère), du III^e siècle de notre ère, appelé *L'Ivresse d'Hercule*, est exposé au musée Lugdunum de Lyon. Il se présente comme la juxtaposition de 24 panneaux, dont 23 sont à décor géométrique, le dernier représentant Hercule ivre, soutenu par un satyre et une bacchante.



Figure 4 : Mosaïque de L'Ivresse d'Hercule (© Milène Jallais/Lugdunum-Musée & Théâtres romains).

L'un des décors (figure 4 et figure 5A) peut être modélisé dans G1 comme une juxtaposition, à l'intérieur d'un carré, d'hexagones et d'« étoiles » composées d'un assemblage de six quadrilatères, que les symétries de l'ensemble conduisent à considérer comme des losanges. Ce décor est manifestement construit sur un réseau régulier, et l'idée la plus naturelle est celle d'un réseau « triaxial », c'est-à-dire un pavage de triangles équilatéraux isométriques. Chaque quadrilatère correspond alors à deux triangles, et chaque hexagone à 6 triangles. Le réseau est ainsi constitué de 10 côtés de triangles dans la largeur et de 12 hauteurs de triangles dans la hauteur (fig. 5 B). Le décor s'y place sans aucune difficulté (figure 5C).

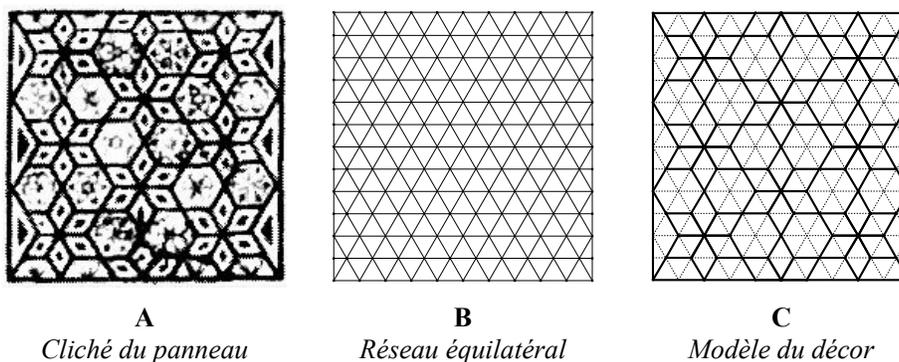


Figure 5 : Modèle à réseau équilatéral.

Un détail chiffonne cependant le géomètre qui se situe dans G2 : un tel réseau ne s'inscrit pas dans un carré ! En effet, en prenant comme unité le côté des triangles, la largeur du réseau est de 10 et la hauteur de $\frac{12\sqrt{3}}{2}$, soit environ 10,4. Que faut-il en conclure ? Que le panneau n'est pas carré ? Cela semble peu probable eu égard à l'ensemble de la mosaïque. Que le mosaïste a triché ? C'est l'hypothèse la plus vraisemblable, car pour ramener le réseau dans un carré il suffit de partager *a priori* la largeur du carré en 10 et sa hauteur en 12 (figure 6A), puis de joindre les points de subdivision adéquats (figures 6B et 6C), le reste sans changement.

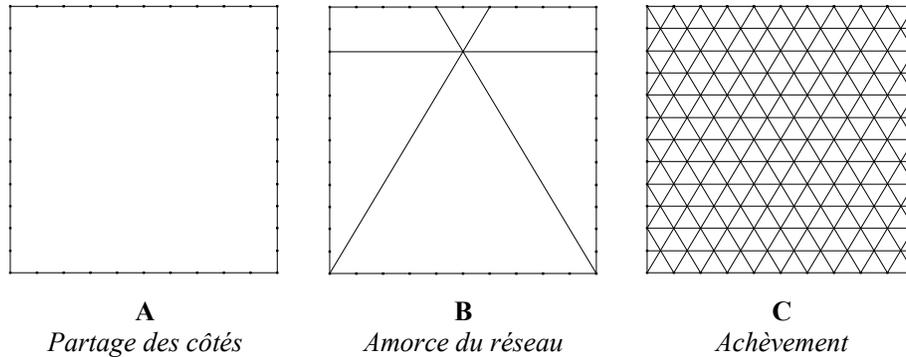


Figure 6 : Mise en place du réseau pseudo-équilatéral dans un carré.

Le mosaïste n’a vraisemblablement pas eu conscience de tricher, et il est même probable qu’on lui avait appris, au cours de sa formation, que dans un carré on pouvait faire rentrer un réseau triaxial de 5 sur 6, ou de 10 sur 12, ou de 15 sur 18... Autrement dit, que la hauteur d’un triangle équilatéral valait les $\frac{5}{6}$ de son côté³. Dans son G1, les hexagones étaient donc réguliers, tandis que dans notre G2 ils ne le sont pas car leurs angles ne sont pas tous égaux (ils mesurent 118° ou 122° environ, selon le cas).

2.4. L’approximation

Le recours à des constructions qui sont inexactes du point de vue de G2 est relativement fréquent dans les géométries « pratiques » de type G1. La problématique y est en effet, comme indiqué plus haut, celle de l’efficacité, c’est-à-dire du rapport précision/simplicité, ce qui permet de réaliser des constructions à la règle et au compas « impossibles » du point de vue de G2⁴. Ainsi, dans son *Instruction sur la manière de mesurer*, parue à Nuremberg en 1525, le peintre et graveur Albrecht Dürer (1471-1528) présente un certain nombre de constructions à la règle et au compas, et annonce notamment : « *Maintenant, je vais montrer comment réaliser sur une surface des polygones réguliers avec un nombre de côtés pair ou impair* » (Dürer, 1525, p. 77). Il commence bien entendu par l’hexagone, construit selon le principe bien connu de la « rosace des écoliers » (voir partie 5.3) :

Prends un compas, pose un pied dans le centre A et trace avec l’autre un cercle, grand ou petit, comme tu veux. Si maintenant tu poses un pied de compas sur le cercle et tu tournes autour du cercle en déplaçant alternativement les deux pieds, tu obtiendras six points (ibid.).

Dürer poursuit avec le triangle équilatéral (en prenant un sommet sur deux de l’hexagone), puis l’heptagone (figure 7), de la façon suivante, qu’il qualifie de « *méthode commune dont on a besoin dans le travail par souci de rapidité* » (Dürer, 1525, p. 78). Un cercle de centre *O* étant donné, il y inscrit un triangle équilatéral *ABC* comme indiqué ci-dessus. Le point *M* étant le milieu du côté [*AB*], le cercle de centre *A* passant par *M* coupe le cercle donné en *D* et *E*. Les points *D, A, E* sont des sommets consécutifs d’un heptagone « *régulier en tout point* » (ibid.). Or

³ 0,833 environ, au lieu de 0,866 environ pour la valeur exacte $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soit un écart relatif inférieur à 4 %, précision tout à fait courante et acceptable en mosaïque, d’autant plus qu’un pavement n’est pratiquement jamais vu frontalement.

⁴ « *They did not know it was impossible, so they did it* » (Mark Twain).

on a appris depuis (voir partie 6) que l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas. Et pourtant la construction de Dürer fonctionne excellemment : il suffit d'essayer ! Voici pourquoi : en prenant comme unité le rayon du cercle donné, le côté de l'heptagone construit par Dürer vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit environ 0,8660 (à 10^{-4} près), tandis que le côté de l'heptagone régulier inscrit est égal à $2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, soit environ 0,8678. On a donc un écart relatif de 0,2 %, bien entendu tout à fait négligeable devant les aléas des constructions aux instruments.

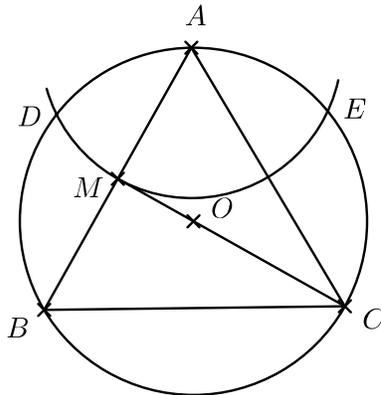


Figure 7 : Heptagone inscrit dans un cercle selon Dürer.

3. Et au collège ?

3.1. Figure et paradigmes

L'un des objectifs de l'apprentissage de la géométrie au cycle 4 est clairement d'amener les élèves à travailler dans le paradigme G2, c'est-à-dire à dépasser la perception pour s'appuyer sur un enchaînement de propositions assurées. Une compétence qui doit être développée à ce sujet est « démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion » (MEN, 2020, p. 130).

Malgré leurs différences fondamentales, les deux paradigmes ne sont pas incompatibles, au contraire, et, dans la pratique, G1 se révèle un auxiliaire précieux pour la résolution de problèmes dans G2. On y a en effet ordinairement recours à une représentation (dessin ou image d'écran d'ordinateur) appartenant à G1 (la « figure »), qui offre en premier lieu une vue synthétique de la situation géométrique. On pourra ensuite utiliser cette représentation, le cas échéant, pour conjecturer des propriétés de la configuration représentée, ainsi que pour envisager des pistes de démonstration de la propriété qu'il s'agit de prouver. Il restera ensuite à élaborer la démonstration sur la base des observations faites et de références à la théorie, avec des retours à la figure pour des prises d'indices ou des contrôles. Ainsi, en pratique, la résolution d'un problème de G2 consiste le plus souvent en une succession d'allers-retours entre G2 et G1, l'articulation entre les deux paradigmes étant assurée par le double statut de la figure, considérée tantôt comme objet (G1) et tantôt comme outil (G2). Et dans ce cas, étonnement, incertitude et contradiction sont susceptibles de jalonner un chemin permettant d'accéder à G2 en mettant en évidence les insuffisances de G1.

3.2. Un exemple

En s'inspirant du mosaïste antique de Vienne évoqué plus haut — mais en améliorant son procédé en approximant $\sqrt{3}$ par la valeur $\frac{7}{4}$, plus proche que $\frac{5}{3}$ —, on peut par exemple demander aux élèves de tracer, sur une feuille de papier quadrillé⁵, un triangle isocèle ABC de sommet principal A ayant une base de 8 carreaux et une hauteur associée de 7 carreaux (figure 8A). On peut ensuite leur demander de dire si ce triangle est équilatéral, en utilisant tout moyen à leur convenance.

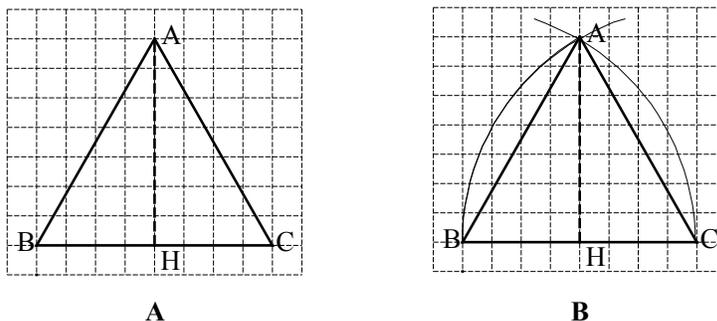


Figure 8 : Le triangle ABC est-il équilatéral ?

Certains élèves, sinon tous, se situeront dans G1 et, par exemple, mesureront les côtés obliques à la règle graduée ou traceront au compas le cercle de centre B passant par C et le cercle de centre C passant par A (figure 8B). Le doute risque fort de s'installer parmi la classe, puisqu'avec les « grands carreaux » habituels de 8 mm de côté, la différence entre AB et BC n'est que d'un demi-millimètre, c'est-à-dire guère plus que l'épaisseur d'un trait de crayon.

Pour lever l'incertitude, certains penseront peut-être alors à utiliser un résultat du cours. Ils pourront utiliser le théorème de Pythagore : $AB = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8,06$, ou encore calculer les angles : $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{7}{4}$, d'où $\widehat{ABC} \approx 60,25^\circ$. Et on pourra cette fois affirmer avec certitude que le triangle ABC est presque équilatéral, mais qu'il ne l'est pas. Notons au passage qu'on a ici un moyen d'obtenir à très peu de frais, sur papier quadrillé, un triangle « pratiquement » équilatéral.

On peut bien sûr également avoir recours à un logiciel de géométrie dynamique, mais les spécificités de cette démarche ne peuvent être développées dans le cadre de cet article. Nous invitons le lecteur à consulter, par exemple, Laborde et Capponi (1994), Laborde (2000), Dahan (2005), Mithalal (2010), Soury-Lavergne et Maschietto (2015), Mariotti (2019).

4. Le théorème de Mohr-Mascheroni

L'enseignement de géométrie du collège conduit en principe à aborder un certain nombre de constructions de base réalisables à la règle non graduée et au compas, telles que :

- droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné ;
- droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné ;

⁵ Bien sûr, l'incertitude serait encore plus grande sur du papier non quadrillé, mais le recours au quadrillage, outre qu'il ne nécessite que l'usage de la règle non graduée, rend les tracés plus faciles et plus rapides.

- médiatrice d'un segment ;
- bissectrice d'un angle ;
- triangle dont 3 des 6 éléments sont donnés, etc.

Ces constructions peuvent conduire à d'autres, par exemple :

- milieu d'un segment ;
- cercles inscrit et circonscrit à un triangle ;
- partage d'un segment en n segments de même longueur ;
- quadrilatères particuliers (parallélogramme, losange, rectangle, carré), etc.

L'exactitude de toutes ces constructions, du point de vue de la théorie, fait en principe l'objet de démonstrations dans les classes.

Venons-en au théorème de Mohr-Mascheroni qui stipule que toute construction réalisable à la règle non graduée et au compas est réalisable au compas seul. Cette formulation lapidaire traduit en réalité un théorème de G2, où « règle » signifie en fait « alignement », tandis que « compas » signifie « à égale distance ».

Les constructions énumérées ci-dessus relèvent bien de cette catégorie. Mais les constructions au compas seul ne sont pas toujours aussi simples qu'avec la règle, comme nous le verrons ci-après. Commençons par un peu d'histoire.

En 1797 paraît à Pavie un ouvrage intitulé *Geometria del Compasso*, dû à l'abbé Lorenzo Mascheroni (1750-1800). Dans la préface, l'auteur assigne une double origine à son travail (Moussard, 2016) : l'une, théorique, est de rechercher si toutes les constructions à la règle et au compas sont, ou non, réalisables avec le seul compas ; l'autre, pratique, en rapport avec le développement de l'astronomie et de la géodésie au XVIII^e siècle, est d'améliorer la précision de la graduation des instruments scientifiques :

L'importance des instruments astronomiques m'engagea à considérer mon projet de la Géométrie du compas sous un point de vue plus favorable. Je commençai à croire que j'aurais beaucoup fait, si je réussissais à diviser la circonférence en plus de six parties par le secours du compas seul ; j'aurais rendu aux artistes qui travaillent aux instruments astronomiques un service d'autant plus important, que mes subdivisions de la circonférence auraient été plus étendues et plus conformes à la division du quart de cercle en 90°. Je fournissais à cette classe de mécaniciens un moyen de précision géométrique dans leurs divisions (Mascheroni, 1797, pp. 13-14).

À l'époque, les graduations des instruments étaient en effet gravées à la main et obtenues à partir de la division du cercle en arcs égaux. Comme l'indique Mascheroni, la précision des tracés est bien meilleure avec le compas qu'avec la règle :

Pour démontrer en général la supériorité de l'usage du compas sur celui de la règle, quand il s'agit de décrire avec précision des lignes à l'épreuve du microscope, il suffit de dire qu'avec une règle tant soit peu longue, il est presque impossible de garantir la précision de tous les points qu'on trace, tant il est difficile qu'elle soit rigoureusement droite dans toute sa longueur. Fût-elle-même très droite, les praticiens savent que la trace d'une ligne menée le long de la règle porte avec elle une incertitude de parallélisme dans le mouvement de l'axe de la pointe qui marque, ou de parfaite application de cette pointe à l'arête de la règle. Le compas n'est point sujet à ces deux inconvénients, il suffit que son ouverture soit fixe et les pointes très fines ; en plaçant l'une d'elles en un point pris pour centre, l'autre décrit un arc aussi exact qu'il est possible (op. cit., pp. 9-10).

Sur le plan théorique, ce que ne savait pas l'abbé italien, c'est que quelqu'un avait déjà montré, 125 ans plus tôt, l'inutilité théorique de la règle. Il s'agissait d'un Danois, Jørg Mohr (1640-

1697), qui fit paraître à Amsterdam, simultanément en danois et en néerlandais, l'ouvrage intitulé *Euclides Danicus* (1672), dont le sous-titre indique : « *Construire avec le seul compas (sans nécessiter ni ligne ni règle) par l'intersection de cercles* ». Dans cet ouvrage, Mohr indique les constructions, mais — à une exception près — sans donner de preuve de leur exactitude ; il signale d'ailleurs dans la postface qu'« *on peut aisément se la procurer soi-même* » (Bianconi, 2020, p. 4). Malheureusement, cet ouvrage — dont Leibniz avait eu connaissance — était tombé dans l'oubli.

Comme l'écrit Mascheroni, la seule division classique du cercle en parties égales réalisable au compas seul est la division par 6, c'est-à-dire la construction de l'hexagone régulier inscrit.

Si l'on s'interdit d'utiliser la règle, le problème est de déterminer, comme intersection de cercles, l'intersection d'un cercle et d'une droite, ainsi que l'intersection de deux droites. Ces questions sont résolues par Mascheroni dans son Chapitre 7 : *De l'intersection des lignes droites avec les arcs de cercle et entre elles* (problèmes 110 à 112).

Lors du stage, les participants ont été invités à chercher, soit des constructions au compas seul, soit une preuve de leur validité.

5. Le compas seul : quelques constructions en guise de mise en jambes⁶

5.1. Symétrique par rapport à une droite

La construction du symétrique d'un point M par rapport à une droite (AB) — déterminée par ces deux seuls points — ne pose bien sûr aucun problème aux stagiaires : on ne peut en effet que tracer des cercles, et ceux de centres A et B passant par M fournissent immédiatement le point M' cherché (figure 9).

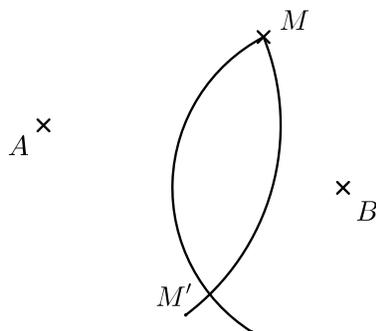


Figure 9 : Symétrique du point M par rapport à la droite (AB) .

5.2. Parallélogramme

Une autre construction (figure 10) rapidement proposée par les stagiaires est celle du parallélogramme $ABCD$ à partir de la donnée des points A, B, C (problème 80) : on trace le cercle de centre A et de rayon BC , et le cercle de centre C et de rayon AB .

⁶ Dans ce qui suit, seules les notations de Mascheroni ont été adaptées, les constructions et les démonstrations restant les mêmes.

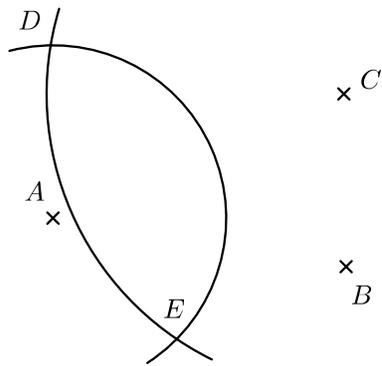
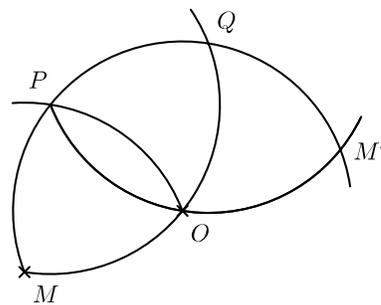


Figure 10 : Construction du parallélogramme.

Une difficulté se présente cependant : les deux cercles ont deux points d'intersection, dont un seul convient. Sur le dessin on voit bien lequel, mais il est difficile de le justifier aux élèves, qui ne connaissent pas la notion de convexité. À un niveau plus élevé, ces questions de position se résolvent dans G2 en considérant des demi-plans.

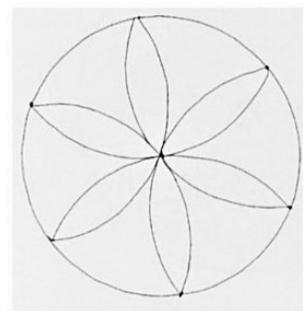
5.3. Symétrique par rapport à un point

Pour d'autres constructions, au contraire, certains stagiaires éprouvent quelque peine à « oublier » d'utiliser la règle dans les constructions qu'ils envisagent. Ainsi, pour obtenir le symétrique d'un point M par rapport à un point O (problème 64), ils proposent bien de tracer le cercle de centre O passant par M , mais ils sont ensuite bloqués lorsqu'il s'agit de déterminer le symétrique de M sur ce cercle : la droite (OM) leur fait apparemment défaut. La solution se trouve pourtant dans Euclide, puisqu'il suffit de construire le « demi-hexagone régulier » de sommet M inscrit dans le cercle (figure 11A) : le cercle de centre M passant par O coupe le premier cercle en P , le cercle de centre P passant par O le recoupe en Q , et le cercle de centre Q passant par O le recoupe en M' , qui est le symétrique cherché. Ce n'est rien d'autre que le début de la construction de la fameuse « rosace des écoliers », qu'on trouve d'ailleurs déjà parmi les graffitis d'époque romaine (figure 11B).



A

Construction.



B

Graffiti de Pompéi
(Langner, 2001, n° 80)

Figure 11 : Symétrique du point M par rapport au point O .

5.4. Carré

La construction du carré $ABCD$ à partir des sommets A et B (Problème 136), très différente d'une

construction classique à la règle et au compas (voire à l'équerre), a ensuite été fournie aux stagiaires. Toutes les constructions s'effectuent dans le même demi-plan de frontière (AB) (figure 12).

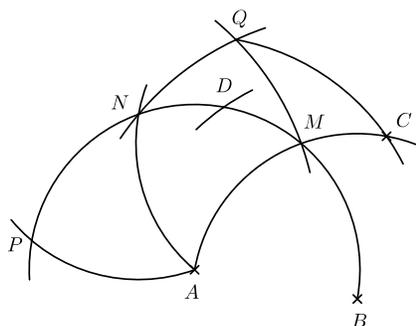


Figure 12 : Carré $ABCD$ construit à partir des sommets A et B .

Après avoir tracé le cercle de centre A passant par B , on construit le « demi hexagone régulier » $BMNP$ inscrit dans ce cercle (voir ci-dessus), puis on trace le cercle de centre B passant par N et le cercle de centre P passant par M , qui se coupent en Q . Le cercle de centre A passant par Q et le cercle de centre B passant par A (et par M) se coupent en C , qui est un sommet du carré cherché. Enfin, le dernier sommet, D , s'obtient classiquement en traçant par exemple le cercle de centre B et de rayon AC .

Démonstration. Elle consiste en l'application du théorème de Pythagore et de sa réciproque. Prenons AB comme unité de longueur. Le triangle BPN est rectangle, avec $BP=2$ et $NP=1$; donc $BN (=BQ) = \sqrt{3}$. Le point Q est intersection de deux cercles symétriques par rapport à la médiatrice de $[BP]$, donc (AQ) est perpendiculaire à (AB) et le triangle ABQ est rectangle. Dans ce triangle on a $AB=1$ et $BQ=\sqrt{3}$, donc $AQ (=AC) = \sqrt{2}$. Enfin, dans le triangle ABC , on a $AB=BC=1$ et $AC=\sqrt{2}$, donc ce triangle est rectangle. Même chose pour le point D .

N.B. On aura remarqué au passage qu'on a ici un moyen d'obtenir la perpendiculaire (AQ) à (AB) . De plus, le point D est le milieu de l'arc \widehat{BP} , c'est-à-dire qu'avec son symétrique D' par rapport à (AB) , et les points P et B , ils divisent le cercle selon 4 arcs isométriques.

5.5. Milieu de deux points

Un autre problème, celui de la détermination du milieu de deux points A et B (problème 66), présente l'avantage d'être une jolie application des triangles semblables. Ce problème est bien sûr immédiat avec la règle, puisqu'il ne s'agit que de tracer la médiatrice de (A, B) . Mais avec le seul compas la question est moins évidente.

On commence par tracer le symétrique C du point A par rapport à B (figure 13A). Puis on trace le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre C passant par A , qui se coupent en D et E . Les cercles centrés en D et E passant par A se coupent au point I , qui est le milieu de (A, B) .

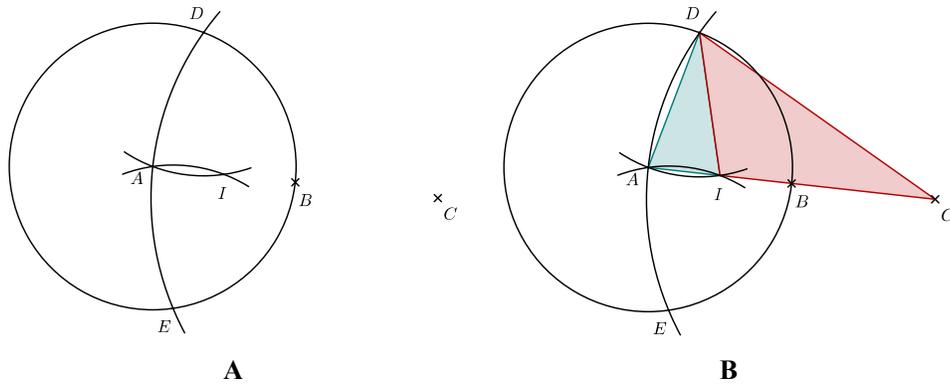


Figure 13 : Milieu de deux points.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, toutes les constructions effectuées étant symétriques par rapport à (AB) , le point I appartient à cette droite.

De plus, les triangles isocèles CAD et DAI sont semblables puisque leurs angles à la base sont égaux (l'angle \widehat{CAD} est commun). Et comme, par construction, on a $CA=2AD$, leur rapport de similitude est égal à 2. On en déduit que $AD=2AI$, soit encore $AB=2AI$. C'est-à-dire que I est bien le milieu de (A, B) .

5.6. Deux définitions du cercle

On aura peut-être remarqué que, dans les constructions qui précèdent, un cercle est tantôt défini par son centre et l'un de ses points, et tantôt par son centre et son rayon. En fait, le second cas se ramène au premier de la façon suivante :

Trois points O, A, B étant donnés, il s'agit de trouver un point C du cercle de centre O et de rayon AB . Pour ce faire, la configuration de la droite des milieux nous fournit une solution. Il suffit en effet de construire le symétrique M de O par rapport à A , puis le symétrique N de M par rapport à B , et enfin le milieu C de (O, N) (figure 14).

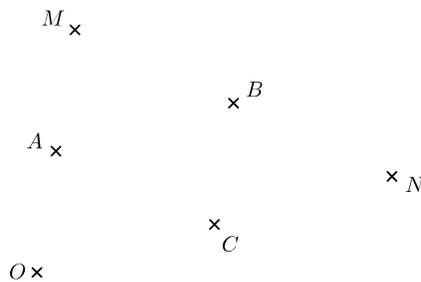


Figure 14 : Deux définitions du cercle.

6. Partage du cercle en arcs égaux

L'un des objectifs avoués du travail de Mascheroni était, on l'a vu, la division du cercle en parties égales à l'aide du seul compas. Il s'agissait donc de savoir si un polygone régulier à n côtés, inscrit dans un cercle, est théoriquement constructible à la règle et au compas (et donc aussi au compas seul). Cette question n'a finalement été résolue qu'en 1837, grâce aux travaux

de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) puis de Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) :

Théorème. Un polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$) est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, n est de la forme $2^\alpha p_1 \dots p_r$ ($\alpha \geq 0, r > 0$), où les p_i sont des nombres premiers de Fermat⁷ distincts.

Corollaire. Pour $n \leq 30$, les divisions du cercle en parties égales sont réalisables pour les valeurs $n=2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30$.

Au cours du stage, nous avons étudié plusieurs divisions égales du cercle, à commencer par le partage en 6, bien connu, qui a déjà été signalé plus haut (partie 5.3).

6.1. Partage en 8

Le partage du cercle en 8 arcs égaux (problème 30, dans Mascheroni, 1797) s'appuie sur la construction du carré illustrée par la figure 12. Le cercle de centre Q et de rayon AB coupe le cercle initial en X et Y (figure 15). Dans le triangle AXQ , on a $AX = QX = 1$ et $AQ = \sqrt{2}$, donc ce triangle est rectangle isocèle et $\widehat{QAX} (= \widehat{DAX}) = 45^\circ$. Il suffit ensuite de reporter l'arc \widehat{DX} pour obtenir les autres sommets de l'octogone régulier $BYDXPTD'Z$ inscrit.

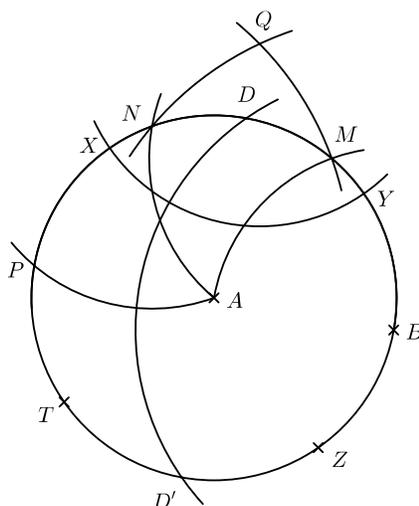


Figure 15 : Division du cercle en 8.

6.2. Partage en 24

À partir de la figure précédente, Mascheroni obtient très aisément une division du cercle en 24 arcs égaux (problème 32, *ibid.*), en traçant le cercle de centre X passant par A , qui coupe le cercle initial en F et G (figure 16). Les arcs \widehat{DF} et \widehat{PG} mesurent en effet 15° ($60^\circ - 45^\circ$). Des cercles analogues, passant par A et centrés en des points de subdivision déjà obtenus (tels que Y, Z, T , etc.) fournissent progressivement tous les points de la subdivision en 24.

⁷ Un nombre de Fermat est un entier de la forme $2^{2^t} + 1$.

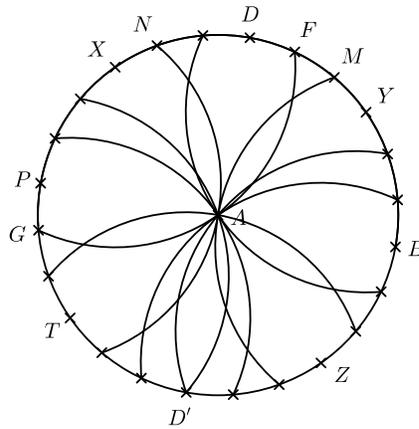


Figure 16 : Division du cercle en 24.

6.3. Partage en 5

Une autre division du cercle, cette fois en 5, fournit de nouveaux arcs. Mascheroni (problème 40, *ibid.*) s'appuie sur la subdivision précédente et entreprend de construire un bipoint de longueur $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, qui est le côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon unité (cf. Brochure⁸, 2021, pp. 169-173).

Soient A, B, C, \dots, J, K, L les 12 points de subdivision (figure 17A). Le cercle de centre B passant par E (et K) et le cercle de centre F passant par C (et I) se coupent, intérieurement au cercle donné, au point M . Le cercle de centre A passant par M coupe le cercle donné en P et Q . Les points P, A, Q sont trois sommets consécutifs du pentagone régulier convexe inscrit dans le cercle.

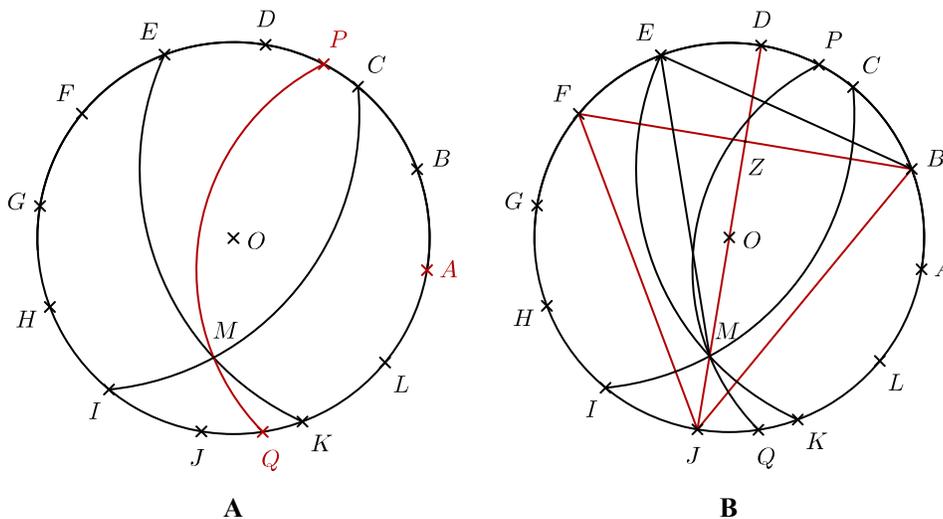


Figure 17 : Division du cercle en 5.

Démonstration. C'est à nouveau le théorème de Pythagore qui est mis à contribution

⁸ Nous utiliserons (Brochure, 2021) pour la référence bibliographique (Groupe Géométrie - IREM Paris, 2021).

(figure 17B).

En raison des symétries des constructions, le point M appartient au diamètre $[DJ]$, qui est axe de symétrie du triangle équilatéral BJF . En notant Z le milieu du bipoint (B, F) et en prenant comme unité de longueur le rayon du cercle donné, on a $BZ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On a aussi $BM = BE$, qui est le côté d'un carré inscrit dans le cercle, donc $BM = \sqrt{2}$. On en déduit, dans le triangle rectangle BZM : $ZM = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Et, comme on a aussi $OZ = \frac{1}{2}$, il vient $OM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Et enfin, par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AOM , on obtient $AM (= AP = AQ) = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})}{2}}$, qui est le côté du pentagone régulier inscrit.

Remarque. Puisque $\widehat{AOP} = 72^\circ$ et $\widehat{AOC} = 60^\circ$, on a $\widehat{COP} = 12^\circ$; l'arc \widehat{CP} nous permet donc de diviser la circonférence en 30.

6.4. Milieu d'un arc

Pour poursuivre plus finement les diverses subdivisions précédentes, il serait utile de disposer d'un moyen permettant de déterminer le milieu d'un arc de cercle quelconque. Mascheroni (1797) nous en fournit un dans le problème 60 (figure 18A) :

Un arc \widehat{AB} d'un cercle de centre O étant donné, il s'agit de placer son milieu. On commence par construire les (sommets des) parallélogrammes $ABOC$ et $BAOD$ comme indiqué plus haut. Puis on trace le cercle de centre C passant par B ainsi que le cercle de centre D passant par A , qui se coupent en E . Enfin, les cercles de rayon OE et de centres C et D se coupent en M , milieu de l'arc \widehat{AB} .

Démonstration. Plutôt laborieuse, elle fait également intervenir le théorème de Pythagore (figure 18B). Lançons-nous néanmoins, et montrons que le point M appartient à l'arc \widehat{AB} :

Il résulte des constructions faites que le point O est le milieu de $[CD]$ et que (OE) est la médiatrice de (A, B) et de (C, D) . Comme dans le triangle isocèle CAO la hauteur (AH) est aussi médiane, le point H est le milieu de (O, C) .

- Dans le triangle rectangle DOE , on a $OE^2 = DE^2 - OD^2$ et, comme $DE = AD$ et $OD = AB$, il vient $OE^2 = AD^2 - AB^2$ (1).
- Dans le triangle rectangle AHO , on a $OA^2 = AH^2 + OH^2$ (2).
- Dans le triangle rectangle AHD , on a $AD^2 = AH^2 + HD^2$, et comme $HD = 3OH$, il vient $AD^2 = AH^2 + 9OH^2$. Soit encore, d'après (2), $AD^2 = OA^2 + 8OH^2$. Et, comme $2OH = OC = AB$, on a $AD^2 = OA^2 + 2AB^2$ et donc $OA^2 = AD^2 - 2AB^2$ (3).
- Dans le triangle rectangle COM , on a $OM^2 = CM^2 - OC^2 = OE^2 - AB^2 = AD^2 - 2AB^2$ d'après (1). Et finalement $OM^2 = OA^2$ d'après (3).

Le point M se trouve donc sur le cercle de centre O passant par A et, en raison de la symétrie par rapport à (OE) , c'est le milieu de l'arc \widehat{AB} .

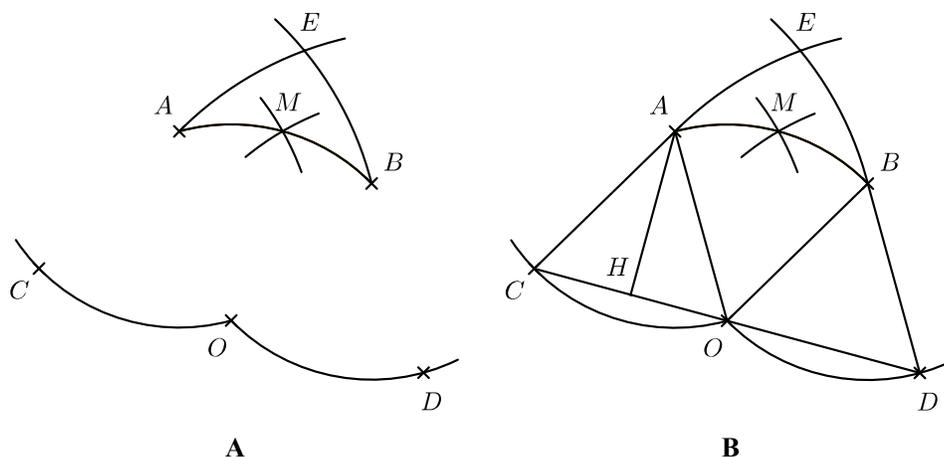


Figure 18 : Milieu d'un arc.

6.5. Partage en 240

La construction précédente permet, en particulier, de diviser la circonférence en 60, 120 et 240 arcs égaux, donc d'obtenir un arc d'un degré et demi. Mais peut-on obtenir pour autant un arc d'un degré ? Le corollaire du théorème de Wantzel nous dit que non, puisqu'il faudrait pour cela pouvoir partager le cercle en 9, ce qui n'est pas. Mascheroni le subodore peut-être, car c'est dans son douzième et dernier chapitre, consacré aux « *Problèmes résolus par approximation* », qu'il traite cette question. Revenant au côté pratique de sa démarche, il écrit :

il vaudra mieux dans beaucoup de cas, préférer à l'exactitude théorique de ces méthodes, l'approximation pratique suffisante d'une construction faite avec la règle et le compas. Alors je dis que le plus souvent une solution obtenue avec le seul compas sera encore préférable (Mascheroni, 1797, pp. 259-260).

C'est donc une méthode approchée qu'il utilise pour obtenir l'arc d'un degré (problème 232). Partant de l'arc de $55,5^\circ (=1,5^\circ \times 37)$, il indique une construction fournissant un arc de 53° , à une quantité négligeable près (« *il y manque vingt-cinq tierces* »). Et, comme il dispose aussi de l'arc de $54^\circ (=1,5^\circ \times 36)$, il obtient par différence l'arc d'un degré, ce qui permettra de graduer le cercle.

Conclusion

En définitive, cette séquence nous aura tout d'abord fourni l'occasion de remonter aux origines artisanales des constructions « à la règle et au compas », et en particulier de celles de la géométrie euclidienne. Elle aura également permis de conférer une certaine légitimité à des constructions aux instruments qui, bien qu'inexactes selon les critères de la géométrie théorique, n'en sont pas moins efficaces et utiles dans la pratique, en raison de leur simplicité par rapport aux constructions exactes correspondantes (sans même parler de celles qui sont théoriquement impossibles, mais qui sont pratiquement réalisables). En outre, la démonstration de l'exactitude d'une construction, comme celle de l'estimation de la « qualité » — c'est-à-dire de la précision — d'une construction approchée, permettront de répondre à l'interrogation légitime de certains élèves, et en conséquence être sources d'activités dans les classes de collège.

Cette partie du stage aura également permis de rencontrer le théorème de Mohr-Mascheroni,

dont le résultat a surpris et étonné un certain nombre de stagiaires. Ils et elles ont pu constater, à cette occasion, que certaines constructions, très faciles à la règle et au compas, le sont beaucoup moins lorsqu'on veut se passer de la règle.

Enfin, la démonstration de l'exactitude des constructions rencontrées a aussi permis de réinvestir des résultats importants de géométrie du collège, relatifs notamment au théorème de Pythagore, aux symétries et à la similitude des triangles⁹.

Références bibliographiques

- Bianconi, R. (2020). *Georg Mohr's "Euclides Danicus". Preliminary version.*
<https://arxiv.org/pdf/2003.11992.pdf>
- Carrega, J.-C. (2001). *Théorie des corps. La règle et le compas.* Paris : Hermann.
- Dahan, J.-J. (2005). *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques : un essai de formalisation à partir de l'analyse des démarches de résolution de problèmes de boîte noire.* Grenoble : Thèse de l'Université Joseph-Fourier.
- Dürer, A. (1525). *Instruction sur la manière de mesurer.* Traduit et présenté par Jeannine Bardy et Michel Van Peene. Paris, Flammarion, 1995.
- Groupe Géométrie - IREM de Paris (2021). *Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer.* IREM de Paris, brochure n°100 (268 pages).
<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf>
- Houdement, C., Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 175-193.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 151-161.
- Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1), 165-210.
- Langner, M. (2001). *Antike Graffitizeichnungen. Motive, Gestaltung und Bedeutung.* Wiesbaden.
- Mariotti, A. (2019). The Contribution of Information and Communication Technology to the Teaching of Proof. In G Hanna, D Reid & M de Villiers (éds.). *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching.* Springer.
- Mascheroni, L. (1797). *Géométrie du compas.* Traduit de l'italien par AM Carette, officier supérieur du génie, seconde édition 1828. Paris : Bachelier.
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle.* Thèse de l'Université Lyon 1.
- Moussard, G. (2016). La géométrie du compas de Lorenzo Mascheroni. *Repères-IREM 103*, 57-

⁹ Un grand merci à Daniel et Marie-Jeanne Perrin pour leurs remarques et suggestions.

63.

Perrin, D. (2011). *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*. Paris : Cassini.

Peyrard, F. (1804). *Les éléments de géométrie d'Euclide, traduits littéralement...* Paris : Louis.

Soury-Lavergne, S. & Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM - Mathematics Education*, 47(3), 435-449.

Villard de Honnecourt (1986). *Carnet*. Présenté et commenté par A Erlande-Brandenburg, R Pernoud, J Gimpel, R Bechmann. Paris : Stock.

MEN (2020). *Programme du cycle 4. En vigueur à la rentrée 2020*.
<https://eduscol.education.fr/document/621/download>