UNE ORGANISATION DE LA GÉOMÉTRIE DU COLLÈGE. LES CAS D'ISOMÉTRIE ET DE SIMILITUDE DES TRIANGLES COMME OUTILS DE DÉMONSTRATION

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN[1]
Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et IREM de Paris

Guillaume DIDIER[2]
INSPÉ de Paris et IREM de Paris

Résumé. Dans une première partie, nous reprenons l'argumentation, développée dans la brochure 100 de l'IREM de Paris, qui nous fait choisir une organisation de la géométrie du collège appuyée sur les cas d'isométrie des triangles, que nous présentons dans la deuxième partie. La troisième partie rend compte du déroulement de l'enseignement des cas d'isométrie des triangles dans une classe de quatrième, de l'introduction jusqu'à l'évaluation analysée en détail. La quatrième partie s'intéresse à la manière dont les élèves s'emparent des cas d'isométrie et de similitude des triangles comme outils de démonstration en mettant en regard l'enseignement de ces deux notions dans les classes de quatrième et de troisième du même professeur, notamment à partir d'une analyse détaillée des résultats d'une évaluation sur les cas de similitude dans la classe de troisième présentant la même structure que celle sur les cas d'isométrie dans la classe de quatrième.

Mots-clés. Organisation de l'enseignement de la géométrie, collège, cas d'isométrie des triangles, cas de similitude des triangles, évaluation.

Abstract. In the first part, we take up the argument, developed in brochure 100 of the Institute of Research on Mathematics Teaching of Paris, which makes us choose an organization of the geometry in middle school teaching based on criteria for congruence of triangles, organization we present in the second part. The third part reports on the teaching of the criteria for congruence of triangles in 8th grade, from the introduction to the evaluation analysed in detail. The fourth part is concerned with the way in which pupils grasp the criteria for congruence and similarity of triangles as a demonstration tool by comparing the teaching of these two concepts in the 8th and 9th grades classes of the same teacher, including a detailed analysis of the results of an assessment concerning criteria for similarity in the 9th grade class with the same structure as the one concerning criteria for congruence in the 8th grade class.

Keywords. Organization of the teaching of geometry, middle school, criteria for congruence of triangles, criteria for similarity of triangles, evaluation.

Introduction

Cet article s'appuie sur le travail du groupe Géométrie de l'IREM de Paris, qui a donné lieu à la publication d'une brochure accessible en ligne (Groupe Géométrie - IREM Paris, 2021[3]). Nous reprenons ici l'argumentation qui nous fait choisir une organisation de la géométrie du collège appuyée sur les cas d'isométrie (ou d'égalité, nous utiliserons les deux termes de manière indifférenciée) des triangles. D'autres aspects de ce travail, en particulier l'importance de la notion d'aire comme outil de démonstration des propriétés affines sont abordés dans un autre article de ce numéro.

[1] marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

[2] guillaume.didier@inspe-paris.fr

[3] Référée dans la suite simplement par « Brochure ».

L'enseignement de la géométrie au collège répond à plusieurs objectifs parmi lesquels celui d'entrer dans la démarche mathématique et la démonstration (Kahane, 2002) auquel nous nous intéressons plus particulièrement ici. Notre constat de départ est un effritement de la démonstration dans le cours au collège. Il nous semble qu'au cours des dernières décennies, l'enseignement de la géométrie s'est de plus en plus organisé autour de quelques thèmes relativement isolés les uns des autres sans référence à une théorie fondant cette organisation. Notre projet est de retrouver une organisation cohérente de la géométrie qui permettrait en théorie de faire la plupart des démonstrations du cours, même si on ne les fait pas toutes avec les élèves, et de donner à ceux-ci des outils de démonstration à leur portée et fondés par cette organisation mathématique.

1. Deux fondements possibles (classiques) pour la géométrie du collège

Nous nous intéressons ici à la géométrie plane enseignée au collège. Le fondement classique de cette géométrie est l'axiomatique d'Euclide précisée et complétée par Hilbert. Il existe d'autres axiomatiques permettant de décrire la même théorie (comme ensemble d'énoncés vrais), par exemple celle que choisit Cousin-Fauconnet (1995). Pour décrire une organisation mathématique vivant dans l'enseignement, on peut se référer à la notion de praxéologie telle que la définit Chevallard (1997). L'ensemble des types de tâches liés à la démonstration que l'on peut proposer aux élèves dépend des théorèmes et définitions qu'on met à leur disposition dans le cours, c'est-à-dire de l'équipement technologique qu'on leur fournit. Mais si l'on veut que l'ordre choisi pour le cours permette aux professeurs de démontrer les théorèmes qu'on y inscrit, il faut faire des choix au niveau de la théorie : choisir les énoncés qui sont admis, qu'ils soient ou non désignés comme axiomes, et à partir desquels on démontrera les autres. Les professeurs ne feront pas toutes les démonstrations à leurs élèves mais il est important qu'ils sachent que la géométrie élémentaire peut être fondée rigoureusement autrement que dans la théorie savante des espaces affines ou euclidiens, telle qu'ils ont pu la voir à l'université et qu'ils puissent faire le lien entre ces différentes manières d'appréhender la géométrie : la théorie savante, et notamment la vision apportée par le programme d'Erlangen, leur donne de l'avance sur leurs élèves mais la théorie élémentaire les rassure sur le bien-fondé de ce qu'ils enseignent (*cf.* l'article de Perrin, dans ce numéro).

Nous nous intéressons ici à deux grandes manières de fonder la géométrie qui ont marqué les programmes français du collège au XX^{e} siècle, en faisant l'impasse sur l'époque dite des mathématiques modernes (1969-1985) : l'organisation traditionnelle plus ou moins en phase avec les éléments d'Euclide, en vigueur avant 1969, et l'organisation appuyée sur la symétrie orthogonale et les isométries qui était l'arrière-plan des programmes des années 1990 (ceux enseignés en sixième à partir de 1986 et un an plus tard en cinquième, etc.). L'organisation traditionnelle d'Euclide met les cas d'égalité des triangles à la base de la progression et les utilise comme outil fondamental de démonstration. L'époque des mathématiques modernes les a bannis de l'enseignement. Les programmes qui paraissent en 1985 mettent les isométries au cœur de l'enseignement avec l'introduction d'une transformation par an (symétrie orthogonale en sixième, symétrie centrale en cinquième, translation en quatrième, rotation en troisième) comme outils de démonstration. Le livre de Cousin-Fauconnet (1995) présente une axiomatique de la géométrie qui permet de fonder cette organisation des programmes en démontrant les principaux théorèmes. Cependant, dans la plupart des cas, le coût cognitif des démonstrations utilisant les transformations est plus élevé que celui utilisant les cas d'isométrie des triangles, comme nous allons le voir à travers deux exemples. Une des raisons en est que les cas d'égalité fournissent des critères de transitivité du groupe des isométries sur l'ensemble des triangles : on peut savoir si deux triangles sont isométriques sans avoir à exhiber la transformation qui permet de passer de l'un à l'autre (Brochure, p. 18 ; Perrin, dans ce numéro). C'est une grosse économie dans bon nombre de démonstrations. Considérons par exemple l'exercice suivant :

> *Soit ABC un triangle isocèle avec* $AB = AC > BC$.
>
> *On porte un point D sur la demi-droite [BC) au-delà de C et un point E sur la demi-droite [AB) au-delà de B, de telle sorte qu'on ait* $BE = CD = AB - BC$.
>
> *Que peut-on dire du triangle ADE ?*

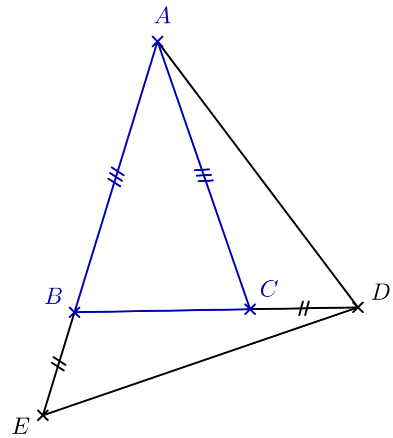


Figure 1

Après expérimentation sur une figure, à réaliser si elle n'est pas fournie, on peut conjecturer que le triangle *ADE* est isocèle en *D*. Il ne peut pas être équilatéral puisque $AD < AC + CD$ par l'inégalité triangulaire et $AE = AC + CD$ d'après les hypothèses.

Pour démontrer des égalités de longueurs ou d'angles avec les cas d'égalité des triangles, la méthode standard consiste à incorporer ces longueurs ou ces angles dans des triangles dont on peut montrer qu'ils sont isométriques. Ici, *AD* et *DE* sont des longueurs de côtés respectivement des triangles *ACD* et *DBE*, qui visuellement semblent isométriques. Il n'est pas difficile d'établir les égalités de longueur de leurs autres côtés : par hypothèse, $BE = CD$, et un petit calcul à partir des hypothèses donne $AC = AB = BC + CD = BD$. Reste à montrer l'égalité des angles en *B* et en *C* pour appliquer le cas d'égalité « CAC » (angle entre deux côtés) et conclure que les triangles *ACD* et *DBE* sont isométriques. Or ces angles sont chacun supplémentaires des angles égaux du triangle isocèle *ABC*. On en déduit l'égalité des éléments homologues, notamment $AD = DE$.

Si l'on ne dispose pas des cas d'égalité des triangles, il faut exhiber une isométrie qui permette d'envoyer [*DE*] sur [*AD*]. Il est clair que c'est une rotation. En effet, c'est une isométrie positive et ce n'est pas une translation. Mais *D*, qui appartient aux deux segments, n'est pas fixe et, pour le comprendre, il vaut mieux incorporer les segments dans les triangles *BDE* et *CAD*. L'angle est alors facile à trouver : une rotation autour de *B* amène *E* sur [*BD*] et semble bien envoyer [*ED*] sur une parallèle à (*AD*), mais le centre n'est pas évident. On peut utiliser la composée de deux isométries, par exemple la rotation dont nous venons de parler et la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ (voir plusieurs démonstrations détaillées dans Brochure, pp. 46-52).

Dans les années 90, cet exercice était traité au collège par composition de deux symétries : on considère (figure 2) le point F, symétrique de D par rapport à la médiatrice (AH) de $[AB]$ et on montre que le triangle ABF est symétrique du triangle DBE par rapport à la bissectrice[4] de l'angle $\widehat{ABD}$. Attention, il faut bien parler de bissectrice et non de médiatrice (qui peut être la première idée) car il n'est pas évident que les médiatrices de $[AD]$ et $[EF]$, axes de symétrie respectifs des triangles isocèles ADB et EFB, soient confondues alors que c'est clair pour les bissectrices des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{EBF}$: ces angles sont opposés par le sommet puisqu'on a pris E sur (AB) et que F est sur (BC), invariante dans la symétrie par rapport à (AH).

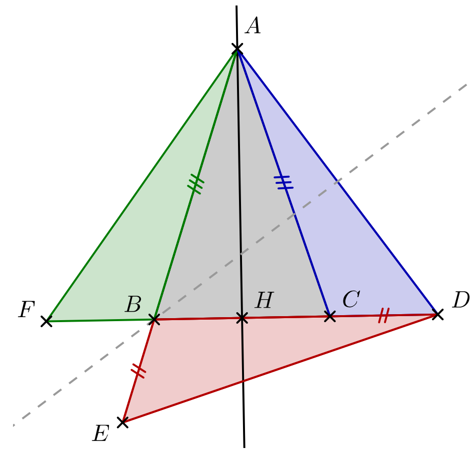


Figure 2

Outre le fait qu'il faut ajouter des éléments à la figure, ce qui est difficile pour les élèves si on ne les leur indique pas dans une question intermédiaire, les démonstrations utilisant les isométries demandent des raisonnements plus délicats. Par exemple si l'on considère la démonstration par les deux symétries, il faudra voir que B est à la fois sur la médiatrice de $[AD]$ et sur celle de $[FE]$ mais aussi qu'il n'est pas évident que ces médiatrices soient confondues, difficulté qui risque d'échapper à la plupart des élèves. Il faudra alors se dire qu'on a affaire à des triangles isocèles et donc que les médiatrices des bases sont aussi bissectrices des angles au sommet des triangles. La démonstration du fait que les triangles AFB et DEB sont symétriques par rapport à cette bissectrice commune *(d)* demande de plus de voir les droites comme définies par des points et les points comme éléments de droites : (BC) est invariante dans la symétrie par rapport à (AH) parce que perpendiculaire à l'axe, D est sur (BC) donc son image F est aussi sur (BC) ; dans la symétrie d'axe *(d)*, la demi-droite $[BF)$ a pour image la demi-droite $[BE)$ et F a pour image le point F' de $[BE)$ tel que $BF=BF'$ donc $F'=E$ car $BF=CD=BE$. Au passage, on a montré tous les éléments nécessaires à la démonstration par les cas d'isométrie.

Cette difficulté liée à la déconstruction dimensionnelle des figures que demande la démonstration en géométrie (Duval, 2005) subsiste même quand l'isométrie qui permet de passer d'une figure à une autre est évidente comme l'atteste l'exemple qui suit, déjà cité dans Perrin-Glorian (2004, pp. 71-72) et emprunté à un mémoire de stagiaires de l'IUFM Nord - Pas-de-Calais en 2000 (*cf.* Brochure, pp. 45-46). À cette époque, les cas d'égalité et de similitude ont fait une brève réapparition dans les programmes de la classe de seconde. Les stagiaires avaient proposé aux élèves de leurs trois classes en devoir à la maison l'exercice qui suit, après avoir traité le chapitre sur les triangles isométriques et traité quelques exercices de réinvestissement sur la symétrie centrale.

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

Soit M un point du segment [AB] distinct de A et B.

La droite (OM) coupe [CD] en N.

Faire une figure.

Le but du problème est de montrer que O est le milieu de [MN] de deux manières différentes.

Partie A

1. Montrer que $\widehat{MAO}=\widehat{OCN}$ *et que* $\widehat{AOM}=\widehat{NOC}$.

[4] Remarquons que la notion de bissectrice ne figure plus dans les programmes de collège actuels.

2. Démontrer alors que AOM et OCN sont isométriques.

3. Quelles égalités de longueur peut-on déduire ?

4. En déduire que O est le milieu de [MN].

Partie B

Soit s la symétrie centrale de centre O.

1.a. Déterminer l'image des points A et B par s. Justifier votre réponse.

1.b. Déterminer l'image des droites (AB) et (OM) par s. Justifier votre réponse.

2. En déduire que N est l'image de M par s.

3. Montrer que O est le milieu de [MN].

À leur étonnement, les stagiaires constatent que les élèves réussissent nettement mieux la partie A que la partie B : beaucoup d'élèves ont utilisé le fait que *M* a pour image *N* à la question 1.b. et se sont retrouvés coincés à la question 2 qu'ils n'ont pas traitée. De plus, après résolution, ils demandaient aux élèves quelle méthode ils avaient préférée, s'attendant à ce que la symétrie centrale, étudiée depuis la cinquième, ait leur faveur. Or ce ne fut pas le cas. Une élève a expliqué : « Avec la symétrie, j'ai du mal avec les images des points ».

Si l'on compare la déconstruction dimensionnelle nécessitée par chacune des démonstrations, on s'aperçoit en effet qu'elle est beaucoup plus légère dans la première démonstration que dans la deuxième : dans la première, les éléments à considérer sont des triangles, des segments qui constituent leurs côtés et des angles dont les sommets sont des sommets de ces triangles. Une vision de la figure comme assemblage de surfaces juxtaposées ou superposées suffit (deux triangles sur un parallélogramme, *cf.* figure 3). En revanche, pour déterminer l'image de la droite (*AB*) à la question 1.b., il faut voir la droite comme définie par les points *A* et *B* et son image comme définie par les points images *C* et *D* ; il faut voir la droite (*OM*) comme une droite passant par le centre de symétrie donc transformée en elle-même sans être invariante point par point. Il faut ensuite, pour trouver l'image de *M*, le voir comme intersection des droites (*AB*) et (*OM*) et donc son image comme intersection des droites (*CD*) et (*OM*). Il faut donc porter son regard alternativement sur des droites et des points, voir la figure comme un réseau de lignes et de points et utiliser les relations d'incidence qui les lient (figure 4).

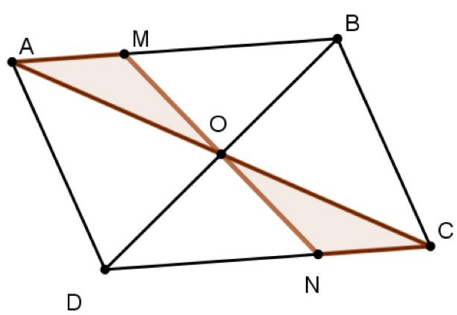


Figure 3

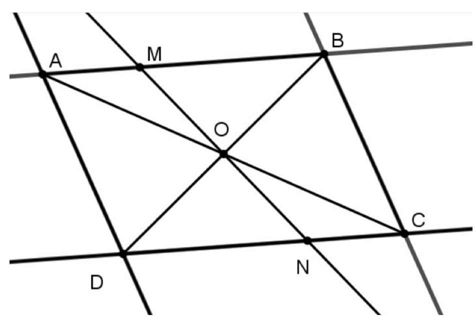


Figure 4

Pour soutenir notre analyse, citons aussi la thèse de Celi (2002) qui fait une comparaison entre l'enseignement français alors basé exclusivement sur les transformations et l'enseignement italien où la tradition euclidienne était toujours bien vivante, malgré une introduction récente et limitée des transformations. Elle appuie cette comparaison sur un ensemble de problèmes mettant en jeu le théorème de Thalès, la droite des milieux et les aires et constate que, si les élèves français produisent plus de démonstrations écrites que les élèves italiens, *« au moins par petits bouts »*, deux d'entre eux seulement utilisent les transformations comme outil de démonstration. Dans l'analyse des manuels, elle constate aussi que l'outil « transformations » a du mal à s'intégrer dans l'organisation des contenus géométriques en Italie et que, en France, les auteurs de manuels *« sont réticents à y recourir et que finalement son introduction demeure naïve et, par conséquent, son utilisation est limitée »* (Celi, 2002, p. 529).

2. Un choix d'organisation de l'enseignement de la géométrie plane au collège

Compte tenu des analyses précédentes, nous avons envisagé une progression de la géométrie au cycle 4 (de la cinquième à la troisième) compatible avec les programmes actuels[5] mais sans tenir compte des repères de progression parus en 2019 sur le site Eduscol. Les professeurs du groupe qui ont mis au point des séances dans leur classe ont respecté les progressions communes élaborées dans leur collège, ce qui fait que certaines séances ont eu lieu en cinquième et d'autres en quatrième.

Les principes de la progression proposée sont les suivants :

- introduction précoce des cas d'égalité des triangles (en cinquième si possible) et leur utilisation pour montrer de nombreuses propriétés géométriques (voir annexe 1 de la brochure) ;
- utilisation des invariants (longueur, angle et aire) en mettant l'accent sur les aires utilisées pour démontrer les théorèmes de Thalès et de Pythagore.

Nous n'abordons pas ici l'enseignement au cycle 3 mais nous supposons qu'en sortant de sixième, les élèves ont rencontré les notions de base (droite, point, segment, angle, longueur, aire, parallèle, perpendiculaire), le cercle, les triangles et quadrilatères particuliers, la médiatrice et la symétrie axiale. On peut rencontrer la bissectrice comme axe de symétrie d'un angle ou médiatrice de la base d'un triangle isocèle mais pas nécessairement sa construction. À ce niveau, on ne peut qu'admettre l'équivalence des deux définitions de la médiatrice et les propriétés de la symétrie (conservation des longueurs et des angles) à partir des manipulations, notamment du pliage. On pourra les démontrer en cinquième à l'aide des cas d'égalité des triangles.

En *cinquième*, on commence par énoncer l'inégalité triangulaire : c'est la formalisation de la propriété du plus court chemin, vue en sixième. Il semble raisonnable de l'admettre (pour une démonstration, *cf.* Brochure, p. 228). On passe ensuite aux triangles égaux (ou une autre appellation). On les définit comme superposables par déplacement éventuellement avec retournement et on note que *tous leurs éléments* (longueurs et angles) sont égaux ce qui fournit une autre définition. On travaille sur les constructions de triangles à partir de leurs éléments, on fait remarquer que trois d'entre eux bien choisis suffisent. On énonce les cas d'égalité, justifiés par la méthode de superposition à la manière d'Euclide (*cf.* l'article de Perrin, dans ce numéro).

On remarque que trois angles ne suffisent pas mais que, dans ce cas, les triangles ont même forme. On peut introduire l'expression « triangles semblables », mais sans parler de la proportionnalité des longueurs des côtés, en disant qu'on les étudiera en troisième.

On revient sur la médiatrice (voire la bissectrice) comme application de ces outils, ainsi que sur les propriétés des triangles isocèles (hauteur-médiane, etc.). On propose quelques exercices d'utilisation des triangles égaux pour prouver des propriétés géométriques qu'on a admises en sixième, par exemple sur la symétrie orthogonale. On peut ajouter le concours des médiatrices et le cercle circonscrit.

---

[5] En vigueur depuis 2016, revus en 2018 : BO n° 30 du 26/07/2018.

On introduit les propriétés des angles vis-à-vis des parallèles : angles alternes-internes et la somme des angles du triangle (la justification demande le postulat des parallèles) et on démontre les propriétés des parallélogrammes à l'aide des cas d'égalité.

On introduit la symétrie centrale (en pensant à l'usage des logiciels) et ses propriétés, justifiées avec les cas d'isométrie ou avec les propriétés de la symétrie orthogonale.

En *quatrième*, on utilise les cas d'isométrie pour prouver des propriétés géométriques. *Il existe beaucoup d'exercices sur ce thème et ils sont très formateurs*. On démontre (avec les aires ou les parallélogrammes) le théorème de la droite des milieux et sa réciproque. Ils ne sont pas explicitement dans les programmes mais ce sont des résultats utiles, une source d'exercices et un moyen de préparer la démonstration du théorème de Thalès en troisième.

On démontre le théorème de Pythagore et sa réciproque, par exemple en utilisant les aires et un cas d'égalité. On peut proposer une première approche de la translation et de la rotation (en lien avec l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique). Construction de frises, lien entre parallélisme et translation. *Il semble difficile d'aller bien loin du côté des transformations, vu l'absence de définitions ponctuelles et le manque de notions essentielles : vecteurs, orientation, composition, etc*. On énonce le théorème de Thalès et sa réciproque, dans le cas du triangle. On le démontre, par exemple en utilisant les aires.

En *troisième*, on étend le théorème de Thalès et sa réciproque au cas du « papillon ». On introduit la notion d'*homothétie* (en lien avec Thalès). On revient sur le comportement des grandeurs par agrandissement-réduction.

On définit les triangles semblables. Grâce à Thalès et aux triangles égaux, on peut démontrer (ou justifier) le premier cas de similitude (les angles égaux donnent les côtés proportionnels).

On introduit les *rapports trigonométriques* dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). *On prouve le fait que les rapports ne dépendent que de l'angle et pas du triangle dans lequel on opère, en utilisant les cas de similitude*.

Une belle application de la similitude ou de la trigonométrie est de prouver les relations métriques dans le triangle rectangle : *si ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A on a* $AH^2 = BH \times CH$ *et* $AB^2 = BH \times BC$*, avec application à la construction d'une moyenne géométrique*.

On utilise les cas d'isométrie et de similitude pour faire des démonstrations dans les exercices.

Notre choix d'entrer dans la géométrie, et en particulier dans la démonstration, par les cas d'égalité et de similitude plutôt que par les transformations n'est en aucune manière une négation de l'importance des transformations : il s'agit seulement du choix du moment où elles sont introduites et de ses conséquences didactiques. Les cas d'égalité et de similitude fournissent des outils de démonstration souvent plus accessibles aux élèves que le recours systématique aux transformations. On ne se privera pas d'utiliser les transformations quand elles sont plus efficaces, par exemple dans des problèmes de construction ou de pavage. Ainsi, la symétrie centrale est bien adaptée pour prouver qu'on peut paver le plan par un quadrilatère quelconque.

Nous allons maintenant regarder plus précisément comment les triangles isométriques peuvent devenir un outil de démonstration pour les élèves à partir de l'étude de la réalisation dans une classe.

3. Progression sur les cas d'isométrie dans une classe de quatrième

Dans la Brochure (2021), on trouve des exemples de réalisations de l'enseignement des triangles isométriques dans trois classes, entre 2017 et 2020. Nous présentons ici la réalisation qui a eu lieu dans la classe de quatrième de Guillaume Didier durant l'année 2021-2022. La séquence s'est déroulée sur 9 séances de 55 *min* et s'est terminée par une évaluation. Comme pour chaque thème, Guillaume utilise l'organisation didactique suivante : évaluation diagnostique des connaissances préalables des élèves, situation d'introduction de la notion nouvelle, cours, exercices d'appropriation des techniques nouvelles et des conditions de leur mise en œuvre, questions flash pour développer des automatismes et exercices d'approfondissement qui visent à les utiliser dans des problèmes complexes où les notions nouvelles sont à mettre en relation avec d'autres notions.

L'évaluation diagnostique a porté sur la somme des angles d'un triangle, le vocabulaire concernant les angles entre deux droites et une sécante, la construction de triangles et la construction de parallélogrammes. En cette année particulière où les élèves ont eu une bonne partie de leurs cours de sixième et cinquième à distance et où certains ont manqué la classe à plusieurs reprises, on part d'un niveau assez bas : les notions testées sont loin d'être disponibles pour la majorité des élèves. Nous y reviendrons.

3.1. Situation d'introduction et cours (2 séances)

Le but de la situation d'introduction est que les élèves se rendent compte que trois éléments bien choisis déterminent un triangle, de donner une définition de triangles isométriques ou égaux et d'énoncer les cas d'égalité. L'introduction se fait par la situation des triangles téléphonés. Plusieurs réalisations de cette situation avec des choix différents des variables didactiques sont décrites dans la brochure (Brochure, chapitre 6, pp. 71-122). Ici, le choix est fait de faire travailler les élèves par binômes sur un triangle imposé parmi quatre.

Chaque binôme reçoit le dessin à main levée d'un triangle avec les mesures approchées des trois côtés et des trois angles. La consigne est la suivante :

> *Écrire un texte contenant le moins de données possibles.*
> *En lisant ton texte, une personne doit pouvoir construire ce triangle.*

Le tableau suivant donne les mesures des quatre triangles retenus :

AB	***BC***	***AC***	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
6,8	8	7,1	70°	57°	53°
5,6	7,4	6,1	78°	54°	48°
6,8	10,7	10,1	76°	66°	38°
5	7,1	5,8	82°	54°	44°

Tableau 1 *: Les données des quatre triangles (valeurs approchées).*

Quatre triangles différents ont été choisis, pour qu'il y ait une diversité de triangles et que chaque cas soit traité par plusieurs binômes. Les angles sont tous aigus pour accroître la probabilité d'obtenir deux triangles différents dans le cas d'un message qui donne les mesures de deux côtés et d'un angle qui n'est pas compris entre les côtés. En effet dans le cas où l'angle fourni est obtus, on n'obtient qu'un seul triangle à isométrie près (*cf.* Brochure, annexe 2, p. 246). Pour gérer l'échange des productions, le professeur (P) a préparé une grille (*cf.* Brochure, p. 119) qui permet de noter, pour chaque binôme, les données reçues, les données utilisées, et si le triangle construit est conforme ou non.

Les binômes disposent de dix minutes de réflexion puis de cinq minutes pour écrire leur message sur une feuille que le professeur ramassera. Durant cette phase de recherche, P adopte une posture de retrait, évalue le travail des binômes en les observant et note sur sa grille les données que contiennent les messages. Cette première phase se déroule lors d'une fin de séance de mathématiques pour que le professeur ait le temps de regarder les messages et de compléter sa grille avant de les répartir. A la séance suivante, il procède à l'échange des messages en veillant à ne pas donner à un binôme un message demandant de construire le triangle qu'il avait à décrire précédemment. La consigne est :

> *Les données que tu as reçues permettent-elles de construire un triangle ? Justifier (on pourra utiliser les instruments de géométrie).*

Les binômes disposent de 10 *min* pour réaliser la construction demandée dans le message reçu. Afin de préparer la mise en commun, P demande aux binômes de noter les données qu'ils ont utilisées pour construire le triangle. Durant cette nouvelle phase de recherche, P adopte à nouveau une posture de retrait, évalue le travail des binômes en les observant et note (sur la grille) les données utilisées par les différents binômes.

Texte : le triangle ABC dont BC fait 7,1 cm, $\widehat{BCA}$ = 44° et $\widehat{CBA}$ = 54°	tracer un segment [BC] tel que [BC] = 8cm. tracer avec le compas un segment [BA] de longueur 6,8cm et tracer un autre segment [CA] de longueur 7,1cm
Texte : Construire le triangle ABC, sachant que l'angle $\widehat{ACB}$ fait 53°, le segment BC doit faire 8 cm, $\widehat{ABC}$ = 57°, le segment BA = 6,8 cm et le segment AC = 7,1 cm.	**Texte :** construire un triangle ABC dont l'angle ABC fait 66° et segment [AC] fait 10,1 cm
Texte : AB = 5cm BC = 7,1 cm $\widehat{ACB}$ = 44°	message reçu un triangle dont AB = 5cm BC = ~~7,1~~ cm, puis un $\widehat{BAC}$ = 82° ~~CAB = 54°~~ et ~~BCA = 44°~~ AC = 5.8

Tableau 2 *: Exemples de messages.*

La confrontation des productions se fait au cours de la mise en commun pour chacun des quatre triangles. Pour un même triangle, des binômes ont utilisé des informations différentes, le triangle du récepteur n'est pas toujours superposable à celui de l'émetteur, les récepteurs ont pointé des informations inutiles. La mise en commun est l'occasion de discussions qui conduisent à l'élaboration avec les élèves de la trace écrite suivante :

> *Tout triangle est défini à partir de ses trois angles et des longueurs de ses trois côtés. La construction d'un triangle est possible lorsque l'on connaît :*

• soit les longueurs de deux côtés et l'angle formé par ces deux côtés (CAC),

• soit deux angles et la longueur du segment joignant les sommets de ces deux angles (ACA),

• soit les longueurs des trois côtés (CCC).

Définition :

On dit que deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont leurs angles deux à deux égaux et leurs côtés deux à deux de même longueur.

Beaucoup de manuels définissent les triangles isométriques par l'égalité des longueurs des côtés seulement. Nous choisissons au contraire cette définition non minimale pour plusieurs raisons :

- Elle correspond à l'expression de la superposabilité des triangles : si on peut superposer les triangles, des sommets qu'on appellera homologues se superposent et les éléments homologues ont même grandeur : les longueurs des côtés homologues sont égales, les angles homologues sont égaux (voir la « démonstration » d'Euclide dans Perrin, dans ce numéro).
- Il y a trois théorèmes (les trois cas) qui donnent des conditions suffisantes : l'égalité de trois des grandeurs bien choisies suffisent pour entraîner aussi l'égalité des trois autres. Si on prend comme définition l'égalité des longueurs des côtés, il n'y a que deux cas d'égalité mais, quand on a démontré que deux triangles sont isométriques, il reste un pas à faire pour en déduire que tous les angles sont égaux.
- La définition se généralise pour les quadrilatères et même pour les polygones. Pour des quadrilatères, il ne suffit pas que les côtés homologues soient de même longueur pour que les quadrilatères soient superposables (penser au parallélogramme articulé).

Le cours reprend la définition de l'égalité de deux triangles, celle des éléments homologues et la formulation des cas d'égalité avec l'adjonction de figures clés et des conditions d'utilisation du théorème, par exemple pour le cas CAC :

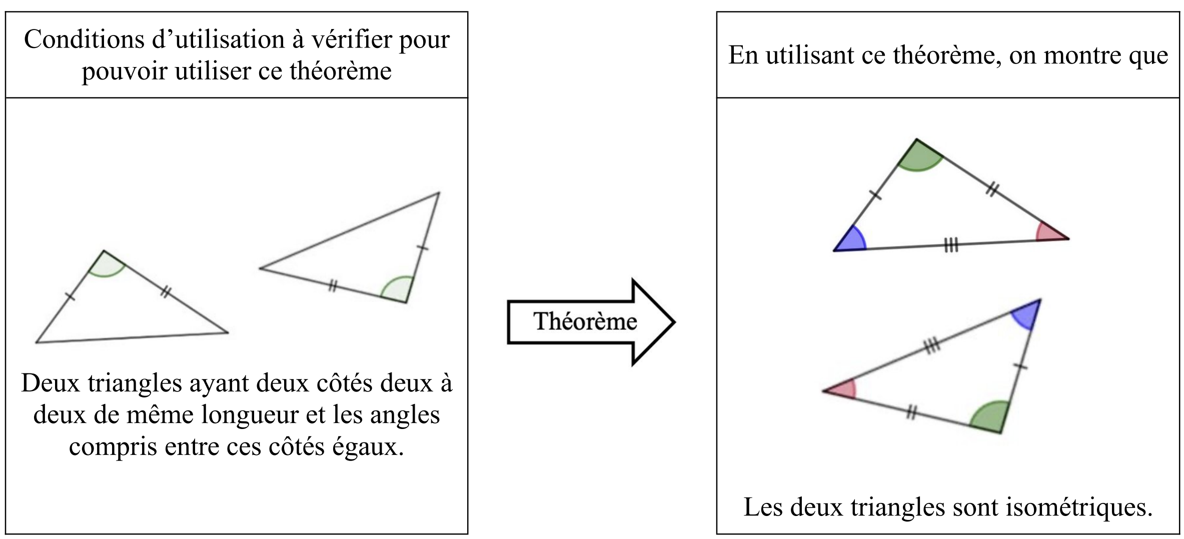


Schéma 1 *: Illustration du raisonnement dans le cas CAC.*

3.2. Exercices (6 séances)

Les séances d'exercices visent à ce que les élèves développent progressivement une technique d'utilisation des cas d'égalité des triangles dans les démonstrations et les mettent en relation avec leurs connaissances anciennes.

En début de séquence, des *exercices techniques* ont pour objectif que les élèves identifient les sommets homologues de deux triangles isométriques et utilisent dans des situations extrêmement simples les cas d'égalité des triangles pour montrer que deux triangles sont isométriques ou calculer un angle ou/et une longueur. Ce travail est soutenu par des questions flash au début de ces séances pour créer des automatismes.

Voici deux triangles.

Quel est le cas d'égalité que l'on peut utiliser ?

CCC	CAC	aucun	ACA

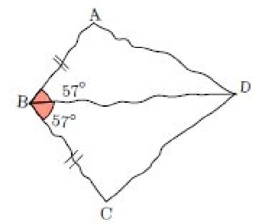


Figure 5 *: Exemple de question flash.*

Soient EUR et OPA deux triangles tels que :

$EU = OP = 6\,cm,\ RU = PA = 4{,}5\,cm,$

$ER = OA = 3\,cm$ *et* $\widehat{EUR} = 29\,°.$

Calculer l'angle $\widehat{OPA}$.

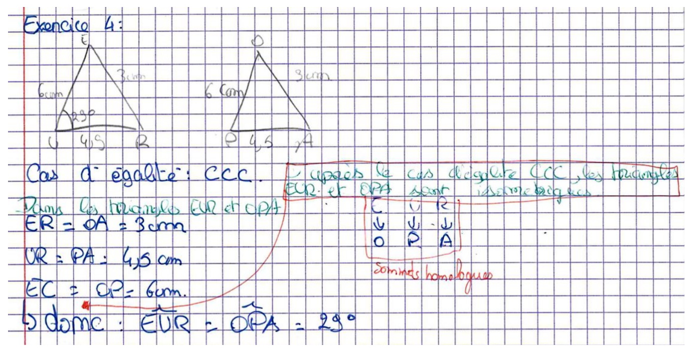


Figure 6 *: Exemple d'exercice de travail de la technique.*

L'objectif est ici principalement de reconnaître les conditions d'emploi des cas d'égalité et d'identifier les éléments homologues.

À l'issue de ce premier entraînement, un tableau résumant les raisonnements rencontrés pour utiliser et reconnaître les cas d'égalité des triangles a été fourni aux élèves :

<table>
<tr><td colspan="2">Raisonnement à mettre en œuvre avec les cas d'égalité des triangles :
Les cas d'égalité des triangles servent à montrer une égalité de longueurs ou d'angles en montrant que deux triangles sont isométriques.
• Incorporer ce que l'on cherche à montrer dans deux triangles qui semblent isométriques.
• Identifier le cas d'égalité à utiliser pour montrer que ces triangles sont bien isométriques.
• Conclure en écrivant une égalité d'angles ou une égalité de longueurs.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Identifier le cas d'égalité à utiliser</td></tr>
<tr><td>Questions à se poser</td><td>Combien ai-je de longueurs ? Combien ai-je d'angles ? Peut-on utiliser directement un cas d'égalité ? Faut-il calculer un angle pour pouvoir utiliser un cas d'égalité ? Faut-il calculer une longueur pour pouvoir utiliser un cas d'égalité ?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aide pour choisir le cas d'égalité</td><td>Si l'on a trois égalités de longueurs avec deux triangles, on utilise le cas d'égalité CCC.</td></tr>
<tr><td>Si l'on a deux égalités de longueurs et une égalité d'angles avec deux triangles, on peut peut-être utiliser le cas d'égalité CAC.</td></tr>
<tr><td>Si l'on a une égalité de longueurs et deux égalités d'angles avec deux triangles, on peut utiliser le cas d'égalité ACA.</td></tr>
</table>

Cette première phase d'exercices se poursuit avec des exercices un peu plus complexes qui visent la maîtrise des trois théorèmes, notamment le cas ACA, par exemple :

On considère la figure suivante.

Calculer le périmètre du quadrilatère ABCD.

Justifier.

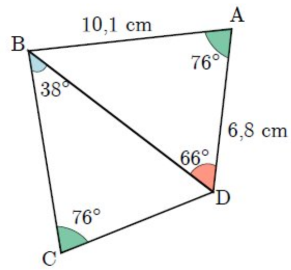


***Figure** 7 : Exemple d'exercice plus complexe.*

On a besoin de calculer des longueurs. Pour cela, il faut montrer l'égalité de deux triangles et, pour y parvenir, utiliser la somme des angles du triangle. La figure est fournie car sa construction demande de calculer à l'avance au moins un angle et donc de voir les éléments homologues et pratiquement l'égalité des triangles. Cet exercice fournit encore un exemple de démonstration par les cas d'isométrie beaucoup plus facile que celle par la symétrie d'axe (*BD*).

Ensuite, des exercices d'application et/ou d'approfondissement demandant d'utiliser aussi d'autres connaissances, sans que des mesures de longueur ou d'angles n'interviennent nécessairement, ont occupé quatre des six séances d'exercices. En voici deux exemples avec une production d'élève dans chaque cas.

Le premier exercice est guidé. Il faut utiliser des théorèmes sur les angles. L'emploi du cas d'égalité ACA est à la charge des élèves. Une égalité de longueurs découle des hypothèses, une égalité d'angles à établir est indiquée, l'autre est laissée à la charge des élèves.

Soient (d_1) et (d_2) deux droites parallèles, M et A deux points de (d_1) et T un point de (d_2). On note S le milieu du segment [MT] et H le point d'intersection des droites (AS) et (d_2).

1) Montrer que $\widehat{HTM} = \widehat{AMT}$.

2) Montrer que les triangles AMS et HST sont isométriques.

3) En déduire que S est le milieu du segment [AH].

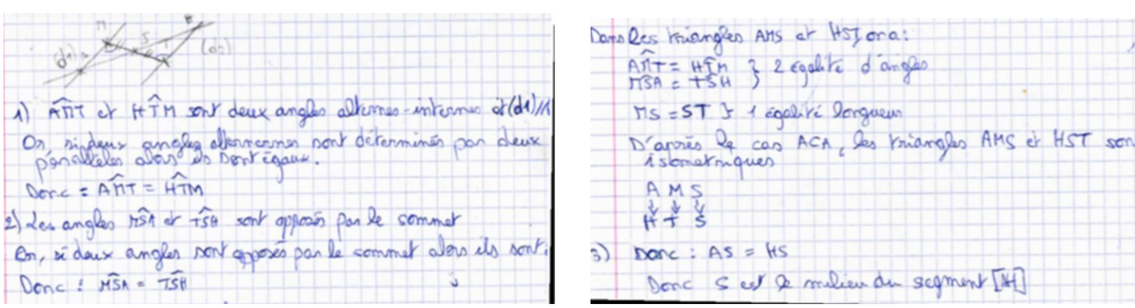


***Figure 8** : Exemple de résolution de l'exercice par un élève.*

Le deuxième exemple est un exercice plus ouvert pour apprendre à chercher.

Soient ABC un triangle et ABD et ACE deux triangles équilatéraux extérieurs à ce triangle.

1) Conjecturer une relation entre les longueurs DC et BE.

2) Démontrer votre conjecture.

On peut conjecturer que les longueurs sont égales. Pour le démontrer, les élèves doivent incorporer ces longueurs dans des triangles qui semblent isométriques. Le choix de ces triangles est entièrement à leur charge ainsi que la reconnaissance des éléments homologues égaux et du choix du cas d'isométrie pertinent.

Dans une première phase heuristique, les élèves sont invités à soumettre leurs idées à la classe. Le professeur gère le débat et fait écrire la synthèse des débats au tableau et sur les cahiers.

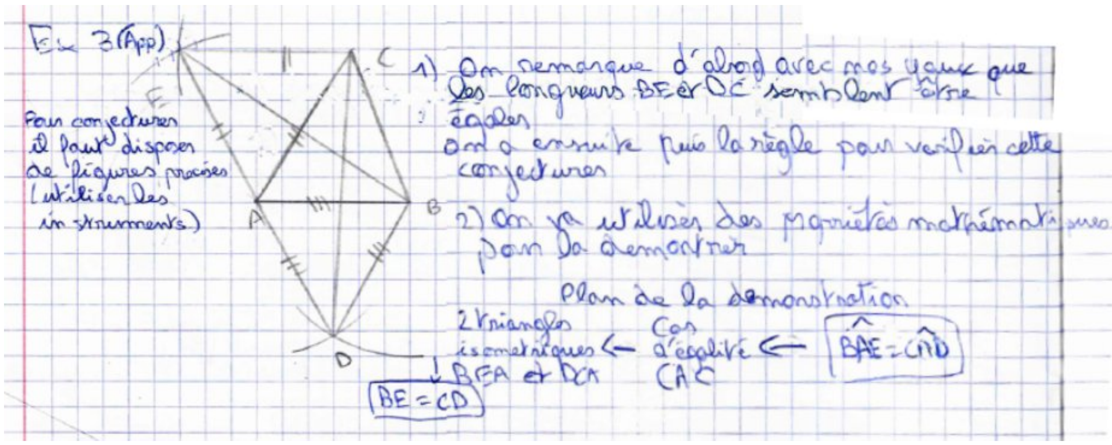


Figure 9 : *Synthèse des débats dans un cahier d'élève.*

La rédaction de la démonstration a été réalisée à la maison.

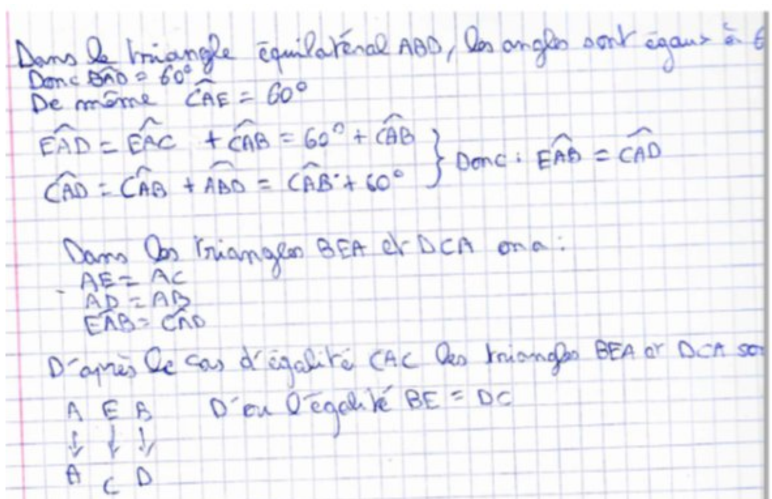


Figure 10 : *Exemple de rédaction de la démonstration par un élève.*

3.3. Évaluation (1 séance)

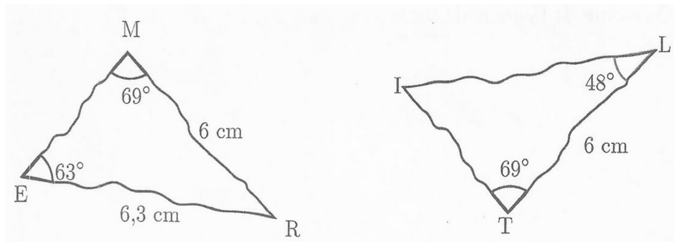
L'évaluation a été annoncée aux élèves environ une semaine à l'avance pour qu'ils puissent organiser leurs révisions. Des critères d'évaluation (voir annexe) leur ont été présentés juste après l'exposition des savoirs, avant même de commencer les exercices pour que les élèves puissent s'autoévaluer au cours de la progression. Deux versions du test avec des données numériques et des noms différents ont été utilisées pour que des élèves voisins n'aient pas le même exercice. Dans chaque exercice, il y a un cas d'égalité différent à utiliser, combiné avec d'autres connaissances. Une figure à main levée est fournie dans le premier exercice, elle est à construire dans les deux autres.

Toutes les copies (28 élèves) ont été scannées. Notons d'abord que sept élèves, soit le quart de la classe, ont des réponses justes et correctement justifiées à tous les exercices. Regardons maintenant plus précisément les résultats pour chaque exercice. Nous les illustrons par quelques productions d'élèves représentatives.

Exercice 1[6]

L'affirmation suivante est-elle vraie ?

La longueur LI est égale à 6,3 cm.



Il s'agissait dans cet exercice d'utiliser la somme des angles d'un triangle puis le cas ACA pour conclure à l'égalité des triangles et donc de leurs éléments homologues. La réponse n'est pas fournie.

Presque tous les élèves (25 sur 28) utilisent correctement la somme des angles d'un triangle et la plupart d'entre eux (23 sur 28) concluent en utilisant le cas pertinent. Plus précisément :

- 18 élèves ont une réponse correcte justifiée avec somme des angles du triangle, cas d'égalité pertinent et rédaction correcte ou presque. En voici un exemple :

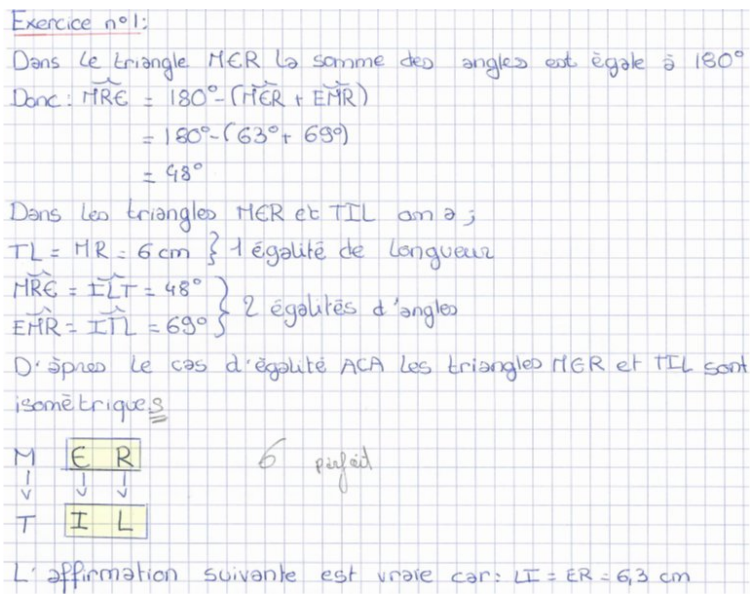
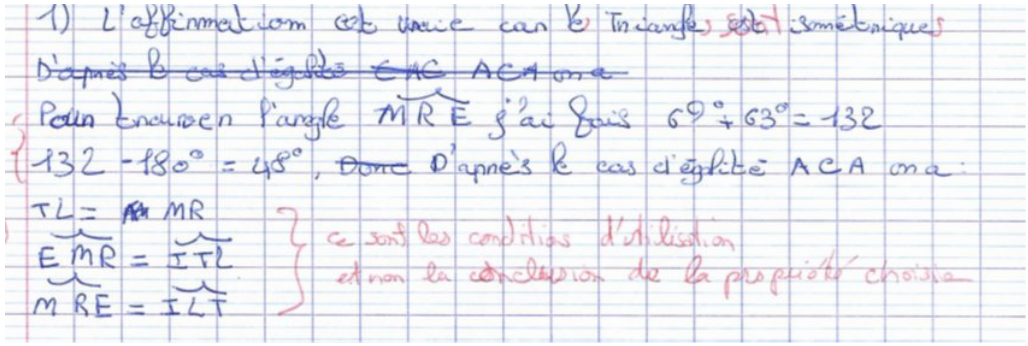

Exercice n°1 :
Dans le triangle MER la somme des angles est égale à 180°
Donc : $\widehat{MRE} = 180° - (\widehat{MER} + \widehat{EMR})$
$= 180° - (63° + 69°)$
$= 48°$
Dans les triangles MER et TIL on a ;
TL = MR = 6 cm } 1 égalité de longueur
$\widehat{MRE} = \widehat{ILT} = 48°$
$\widehat{EMR} = \widehat{ITL} = 69°$ } 2 égalités d'angles
D'après le cas d'égalité ACA les triangles MER et TIL sont isométriques
M E R
T I L
6 parfait
L'affirmation suivante est vraie car : LI = ER = 6,3 cm

Figure 11 *: Réponse correcte justifiée, correctement rédigée.*

- 5 élèves utilisent la somme des angles d'un triangle et le bon cas d'égalité mais ne

[6] Nous ne donnons que les énoncés de la version 1 de ce contrôle ; la version 2 ne diffère que par les noms des points et les valeurs numériques. Nous joignons la figure correspondante si nécessaire pour les exemples.

rédigent pas correctement la démonstration. En voici un exemple :


1) L'affirmation est vraie car le~~s~~ triangles ~~est~~ sont isométriques

~~D'après le cas d'égalité CAC ACA on a~~

Pour trouver l'angle $\widehat{MRE}$ j'ai fais 69° + 63° = 132

132 - 180° = 48°, ~~Donc~~ D'après le cas d'égalité ACA on a :

TL = ~~AA~~ MR

$\widehat{EMR} = \widehat{ITL}$

$\widehat{MRE} = \widehat{ILT}$

ce sont les conditions d'utilisation et non la conclusion de la propriété choisie

Figure 12 : *Réponse correcte, mal rédigée.*

- 2 élèves calculent les angles en utilisant la somme des angles du triangle mais citent le cas CAC ou n'en citent aucun.
- 3 élèves font d'autres erreurs ou affirment le résultat.

Exercice 2

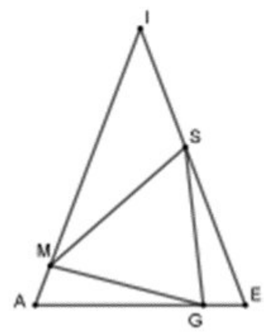
Soit AEI un triangle isocèle en I tel que $IA=7\,cm$ et $AE=5\,cm$.

On note G le point appartenant au côté [AE] tel que $GE=1\,cm$.

On note M le point appartenant au côté [AI] tel que $AM=1\,cm$.

On note S le point appartenant au côté [EI] tel que $ES=4\,cm$.

1. *Construire la figure.*
2. *Montrer que $\widehat{IAE}=\widehat{IEA}$.*
3. *Montrer que les triangles GAM et GES sont isométriques.*
4. *En déduire la nature du triangle MSG.*



Dans cet exercice, il faut d'abord construire la figure. Comme dans l'exemple analysé dans la première partie, le cas CAC est à combiner avec les propriétés des triangles isocèles (angles à la base égaux). De l'isométrie des triangles *GAM* et *SEG*, on déduit que le triangle *MSG* est isocèle. Il n'est pas équilatéral, contrairement aux apparences. En effet, s'il l'était, comme les triangles *GAM* et *SEG* sont isométriques, on aurait $\widehat{AMG}+\widehat{MGA}=120\,°$ et donc $\widehat{MAG}=60\,°$, ce qui n'est pas possible puisque $AI>AE$. On ne demande pas aux élèves de le démontrer.

Notons d'abord que tous les élèves ont construit une figure correcte et que 16 élèves ont des réponses justes aux trois premières questions avec des argumentations presque correctes, parmi lesquels 10 concluent correctement à la question 4.

Plus des trois quarts des élèves (23 sur 28) citent la propriété des angles à la base d'un triangle isocèle et utilisent (22 sur 28) le cas pertinent (CAC) pour démontrer que les triangles sont isométriques. La rédaction est correcte pour la moitié d'entre eux (14). D'autres (8) reconnaissent le cas CAC mais ont encore des difficultés pour rédiger une démonstration (voir copie de E12). Parmi eux, 16 concluent à l'égalité de *MG* et *SG* (ou *MI* et *EI* selon la version) même si l'un d'eux oublie de conclure sur la nature du triangle. Cinq élèves sont en échec à partir de la question 3, soit avec des erreurs soit par un abandon. Neuf élèves ne traitent pas la question 4, deux disent que le triangle est équilatéral et un que le triangle est isométrique.

Voici quelques exemples de copies représentatives : E8 (figure 13) avec la rédaction attendue, E2 (figure 14) où il manque de préciser que le triangle est isocèle **en *I*** pour justifier qu'il s'agit des angles à la base, E12 (figure 15) qui a reconnu le cas d'égalité mais a encore des difficultés avec la démonstration et se trompe dans l'association des points homologues.

2) Dans le triangle AIE isocèle en I, les angles relatifs à la base sont égaux

Donc : $\widehat{IAE} = \widehat{IEA}$

3) AG = AE - GE
AG = 5 cm - 1 cm
AG = 4 cm

Dans les triangles GAM et GES, on a :
AG = ES
AM = EG
$\widehat{IAE} = \widehat{IEA}$

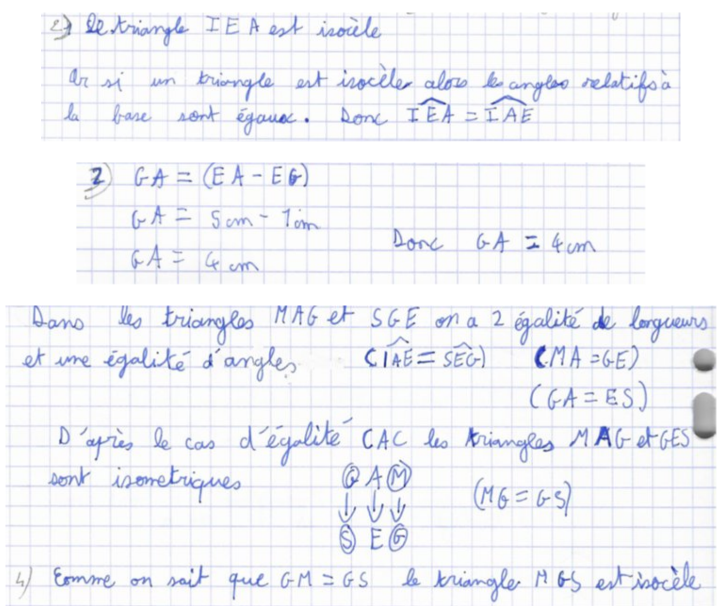
D'après le cas d'égalité CAC, les triangles GAM et GES sont isométriques.

G A M
↓ ↓ ↓
S E G

Donc : MG = GS

Comme MG est égale à GS, le triangle MSG est un triangle isocèle en G

Figure 13 : *Copie de E8.*



2) Le triangle IEA est isocèle
Or si un triangle est isocèle alors les angles relatifs à la base sont égaux. Donc $\widehat{IEA} = \widehat{IAE}$

3) GA = (EA - EG)
GA = 5 cm - 1 cm
GA = 4 cm
Donc GA = 4 cm

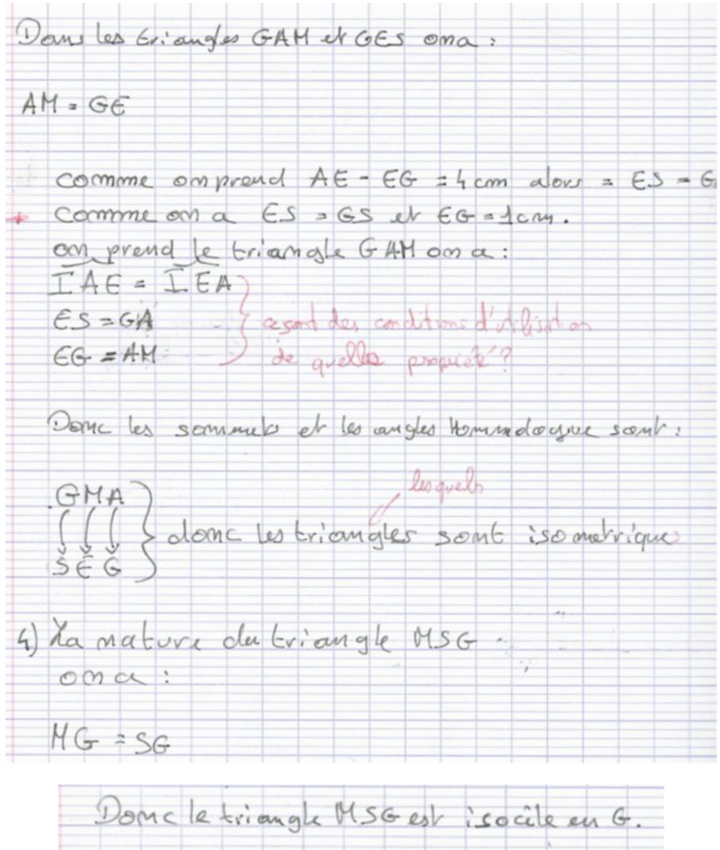
Dans les triangles MAG et SGE on a 2 égalité de longueurs et une égalité d'angles ($\widehat{IAE} = \widehat{SEG}$) (MA = GE) (GA = ES)
D'après le cas d'égalité CAC les triangles MAG et GES sont isometriques

G A M
↓ ↓ ↓
S E G

(MG = GS)

4) Comme on sait que GM = GS le triangle MGS est isocèle

Figure 14 : *Copie de E2.*


1) Dans les triangles GAM et GES on a :

AM = GE

comme on prend AE - EG = 4 cm alors = ES = G

comme on a ES = GS et EG = 1cm.

on prend le triangle GAM on a :

ÎAE = ÎEA

ES = GA

EG = AM

ce sont des conditions d'isométrie de quelle propriété ?

Donc les sommets et les angles homologue sont :

GMA

SEG

donc les triangles sont isometrique

lesquels

4) La nature du triangle MSG :

on a :

MG = SG

Donc le triangle MSG est isocèle en G.

Figure 15 *: Copie de E12.*

Exercice 3

Soit SAM un triangle tel que $MS=5\,cm$, $MA=3\,cm$ et $\widehat{AMS}=70°$ et un point I tel que $SI=3\,cm$, $AI=5\,cm$ et M et I sont de part et d'autre de la droite (AS).

1. Construire la figure ci-dessous.

2. Montrer que les triangles SAM et ASI sont isométriques.

3. En déduire que $\widehat{ISA}=\widehat{SAM}$.

4. Montrer que les droites (SI) et (AM) sont parallèles.

Dans le troisième exercice, il s'agit du cas CCC avec la difficulté d'un côté commun aux deux triangles. Cette fois, ce sont les notions de sécantes et parallèles qui interviennent avec la difficulté de la prégnance de la figure du parallélogramme alors qu'on ne sait pas encore que c'en est un.

Ci-contre (figure 16) la figure réalisée par E1.

L'isométrie des triangles permet de conclure à l'égalité d'angles en position d'alternes-internes et de là au parallélisme des droites. On peut attendre la reconnaissance perceptive du parallélogramme et l'utilisation inappropriée de la propriété réciproque de la relation entre parallèles et sécantes.

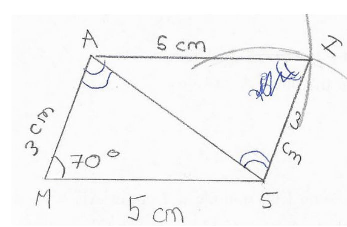


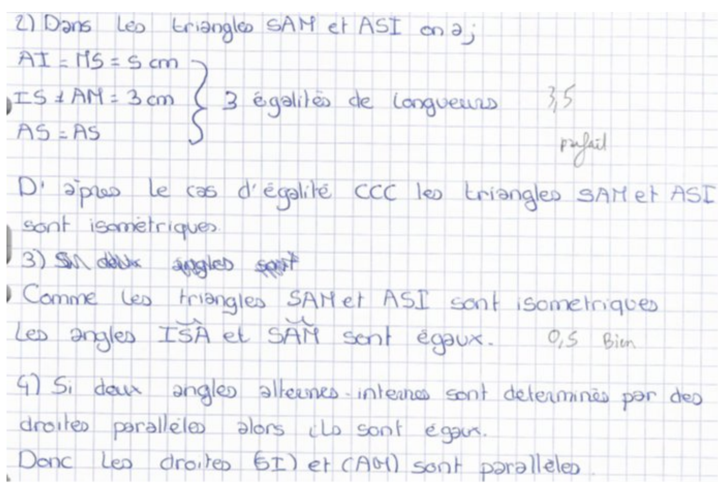
Figure 16

Un élève n'a pas du tout traité l'exercice 3, et deux élèves n'ont pas réussi à faire la figure et n'ont pas traité la suite. Les 25 autres figures sont justes sauf une qui ne respecte pas les mesures. À noter : plusieurs élèves font une figure d'étude à main levée avant de construire la figure à la règle et au compas. C'est un point sur lequel le professeur insiste.

Un élève n'a fait que la figure. Parmi les 24 élèves qui restent, 17 montrent correctement que les triangles sont isométriques en utilisant le cas CCC. On peut penser que les 7 autres ne voient pas que le côté commun peut servir comme deux côtés égaux : 3 élèves font référence à CAC ; 1 élève réfère au parallélogramme ; 1 élève donne les deux côtés égaux et s'arrête ; 1 élève hésite manifestement entre CAC et CCC et ne répond pas ; 1 élève se contente d'affirmer.

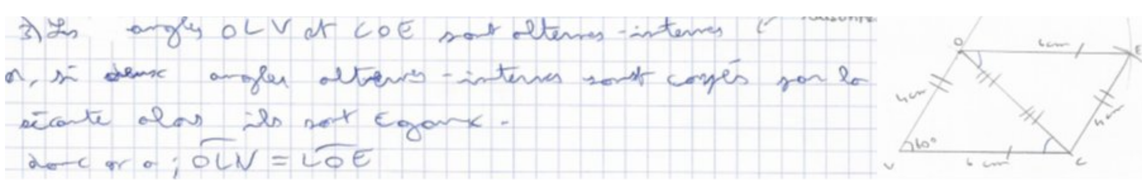
Douze élèves déduisent l'égalité d'angles de celle des triangles puis déduisent correctement le parallélisme des angles alternes-internes égaux. Comme prévu, même quand ils ont traité correctement l'égalité des triangles, pour les questions suivantes, beaucoup d'élèves ne peuvent pas s'abstraire du parallélisme qui est prégnant sur la figure : à la question 3, dix élèves parlent d'angles alternes-internes ou de parallélogramme et deux élèves ne répondent pas ; à la question 4, quatre élèves citent le théorème réciproque, deux parlent de parallélogramme, deux affirment le parallélisme sans justifier, trois ne répondent pas. À noter : deux élèves qui utilisent le théorème sur parallèles et sécante dans un sens pour montrer l'égalité des angles à la question 3 et dans l'autre sens pour montrer le parallélisme à la question 4.

À titre d'exemples, la copie de E1 (figure 17) qui est entièrement correcte sur les trois premières questions mais énonce la propriété des angles alternes-internes à l'envers pour la question 4, celle de E14 (figure 18) qui, bien qu'ayant répondu correctement à la question 2, utilise les angles alternes-internes à la question 3 et celle de E16 (figure 19), qui ne traite pas la question 3 et utilise le parallélogramme à la question 4. Tous deux travaillent sur la version 2 (figure de E14 jointe).



2) Dans les triangles SAM et ASI on a ;
AI = MS = 5 cm
IS = AM = 3 cm } 3 égalités de longueurs 3,5
AS = AS
parfait
D' après le cas d'égalité CCC les triangles SAM et ASI sont isométriques
3) ~~Si deux angles sont~~
Comme les triangles SAM et ASI sont isometriques les angles ISA et SAM sont égaux. 0,5 Bien
4) Si deux angles alternes-internes sont determinés par des droites parallèles alors ils sont égaux.
Donc les droites (SI) et (AM) sont parallèles

Figure 17 *: Copie de E1.*



3) Les angles OLV et LOE sont alternes-internes
or, si deux angles alternes-internes sont coupés par la sécante alors ils sont égaux.
donc on a ; OLV = LOE

Figure 18 *: Extrait de la copie de E14.*

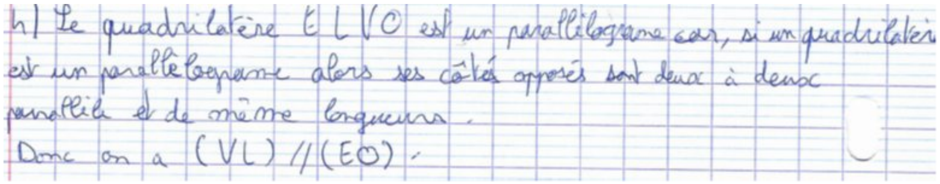

h) Le quadrilatère ELVO est un parallélogramme car, si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont deux à deux parallèle et de même longueurs.
Donc on a (VL) // (EO).

Figure 19 *: Extrait de la copie de E16.*

Bilan de l'évaluation concernant les cas d'égalité

Les trois quarts de la classe reconnaissent et utilisent correctement les cas d'égalité dans au moins deux exercices. La moitié des élèves reconnaissent et utilisent les trois cas d'égalité mais beaucoup d'entre eux ont encore des difficultés pour rédiger une démonstration, ce qui est normal en début de quatrième. Sept élèves, soit le quart de la classe, réussissent les trois exercices avec une rédaction satisfaisante, voire très satisfaisante. Les autres ne tirent pas toutes les conclusions ou font d'autres erreurs sans lien avec les cas d'isométrie ou ne justifient pas suffisamment.

Parmi les sept élèves qui réussissent deux exercices, cinq n'ont pas réussi l'exercice 3 (quatre ne l'ont pas traité et un a utilisé le parallélogramme qu'il voyait) ; un a référé à CAC pour l'exercice 1 et un ne repère pas les bons éléments pour utiliser CAC dans l'exercice 2.

Cinq élèves reconnaissent et utilisent un seul des cas (le cas ACA de l'exercice 1 pour trois d'entre eux, le cas CAC de l'exercice 2 pour l'un d'entre eux et le cas CCC pour le dernier (E20, qui réussit bien l'exercice 3 mais essaie de recourir à CAC pour l'exercice 1 et ne traite que les deux premières questions de l'exercice 2). Deux élèves ne réussissent aucun des exercices et semblent vraiment en difficulté.

La notation introduite par le professeur pour repérer les points homologues est utilisée systématiquement par sept élèves (qui tous, sauf E24, utilisent correctement le cas d'égalité pertinent dans les trois exercices) plus trois élèves qui n'ont traité que les deux premiers exercices. Elle n'est pas du tout utilisée par six élèves, dont un seul traite correctement les cas d'égalité dans les trois exercices. Elle est utilisée dans deux exercices par huit élèves et seulement dans l'exercice 1 par sept élèves dont un traite correctement les trois exercices. E24 n'a pas reconnu le cas CCC dans l'exercice 3 ; il utilise le cas CAC en s'appuyant sur le parallélisme qu'il s'agit justement de démontrer. Il semble que le repérage des sommets homologues ne l'ait pas aidé pour repérer les côtés homologues et voir que [*SA*] dans un triangle correspondait à [*AS*] dans l'autre.

Comparaison avec l'évaluation diagnostique

Lors de l'évaluation diagnostique, dix-huit élèves sur les vingt-sept présents ont pu utiliser la somme des angles d'un triangle quand il s'agissait de calculer un angle mais seulement sept, dont un seul rédige correctement, ont pu l'utiliser pour montrer un non-alignement. Dans le contrôle, la somme des angles d'un triangle est utilisée correctement par presque tous les élèves (25 sur 28) quand c'est nécessaire pour utiliser un des cas d'égalité. Le vocabulaire sur les positions des angles n'était connu que par deux élèves dans l'évaluation diagnostique. Concernant les constructions, la construction d'un triangle connaissant les mesures d'un côté entre deux angles était réussie par dix-sept élèves mais celle connaissant les mesures de deux côtés et d'un angle qui n'est pas compris entre ces côtés n'était réussie que par dix élèves et la trace du compas n'apparaissait que sur une copie. Les élèves ne savaient pas construire de parallélogrammes : on leur demandait la construction de deux parallélogrammes ; pour l'un on donnait les longueurs de deux côtés consécutifs, pour l'autre les longueurs des diagonales. Dans le premier cas, on a 12 non-réponses, 6 rectangles, 5 tracés à l'œil, un seul élève semble employer le compas ; dans le second cas, 15 élèves ne répondent pas, les autres font des figures fausses. Les progrès sont nets sur les constructions puisque presque toutes les figures sont justes.

4. Les cas d'isométrie et de similitude comme outils de démonstration

Il y a une certaine parenté entre l'usage des cas d'isométrie et celui des cas de similitude dans les démonstrations du collège. Ils permettent de démontrer qu'il existe une isométrie (respectivement une similitude) qui permet de passer d'un triangle à un autre sans exhiber la transformation, en donnant des caractéristiques portant sur les grandeurs des côtés et des angles. Guillaume Didier avait cette année une classe de quatrième et une classe de troisième. Il nous a donc paru intéressant de comparer l'enseignement de ces deux outils et la manière dont les élèves des deux niveaux s'en emparaient.

Nous donnons un rapide aperçu de l'enseignement avant d'analyser les résultats du contrôle puis de discuter des parentés et différences dans l'usage des cas d'égalité et de similitude.

4.1. Un rapide aperçu de l'enseignement dans la classe de troisième du même professeur

L'organisation didactique est similaire à celle utilisée pour l'enseignement des cas d'isométrie en quatrième. La situation d'introduction consiste en la comparaison de huit triangles plastifiés sans mesure : un groupe de quatre triangles semblables dont un de manière indirecte ; un autre groupe de trois triangles semblables et un triangle isolé. Les élèves disposent du matériel de géométrie et travaillent en groupes ; ils doivent classer les triangles et expliquer leur démarche.

Les élèves de troisième n'avaient pas vu les cas d'égalité en quatrième. Le cas de similitude CAC a été démontré en utilisant le théorème de Thalès après avoir transporté un des triangles sur l'autre à la manière d'Euclide. Des exercices d'appropriation sont ensuite proposés ainsi qu'une fiche d'aide avant des exercices plus complexes et des exercices de réinvestissement qui combinent les triangles semblables à d'autres notions.

Les notations utilisées pour désigner les cas de similitude sont similaires à celles utilisées pour les cas d'isométrie, à une différence près sur laquelle nous reviendrons : AA pour le cas qui dit que si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun ils sont semblables, CCC pour le cas qui dit que si deux triangles ont les côtés proportionnels, ils sont semblables, CAC pour le cas qui dit que si deux triangles ont des côtés proportionnels encadrant des angles égaux, ils sont semblables.

Voici des extraits de la fiche d'aide.

Théorème	Cas de similitude CCC
Utilité	Montrer des égalités d'angles
Conditions d'utilisation à vérifier	• l'égalité de trois quotients (deux égalités). Dans chaque quotient, le numérateur est la mesure d'un côté d'un triangle et le dénominateur celle du côté homologue de l'autre triangle. Dans chaque triangle il faut connaître trois longueurs.
Rédaction	• Écrire les noms des deux triangles choisis. • Écrire les sommets homologues • Écrire les conditions d'utilisation : égalité de trois rapports de longueurs

	• Écrire le nom du théorème (cas de similitude CCC) • Écrire que ces triangles sont semblables • Écrire les nouvelles égalités d'angles.

Raisonnement à mettre en œuvre avec les cas de similitude des triangles
Les cas de similitude servent à calculer des longueurs ou des angles (ou à montrer que des rapports ou des angles sont égaux) en montrant que des triangles sont semblables.
• Incorporer les longueurs ou les angles qui nous intéressent dans deux triangles de même forme.
• Identifier les sommets, angles et côtés homologues de ces triangles.
• Identifier le cas de similitude à utiliser.
• Conclure en écrivant de nouvelles égalités d'angles ou de quotients de longueurs.

Identifier le cas de similitude à utiliser	
Questions à se poser	Est-ce qu'on connaît des égalités d'angles ? Est-ce qu'on connaît des rapports de longueurs entre des côtés homologues ? Y a-t-il des angles qu'on peut calculer ? Y a-t-il des rapports de longueurs qu'on peut calculer ?
Aide pour choisir le cas de similitude	Si l'on a trois quotients de mesures de longueurs égaux (6 mesures de longueur) dans deux triangles, on utilise le cas de similitude CCC.
	Si l'on a une égalité de deux quotients de longueurs qui encadrent des angles égaux dans deux triangles, on peut utiliser le cas de similitude CAC (4 longueurs, 2 angles).
	Si l'on a deux égalités d'angles entre les deux triangles, on peut utiliser le cas de similitude AA (4 angles).

4.2. Contrôle sur les cas de similitude dans la classe de troisième du même professeur

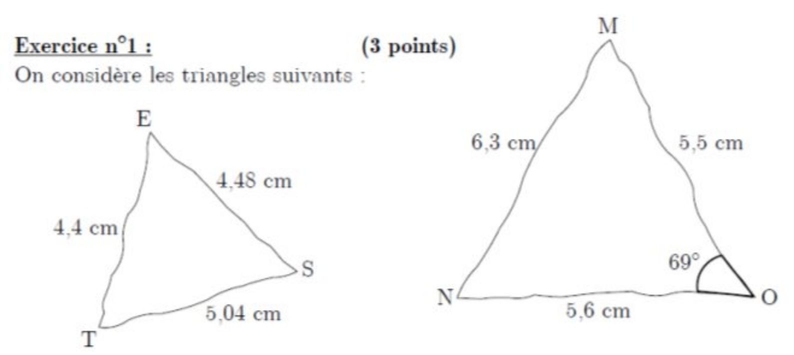
Le contrôle comprenait aussi un exercice d'algèbre mais nous ne considérons ici que les trois premiers exercices qui portaient sur les cas de similitude.

Les conditions sont les mêmes que dans la classe de quatrième : L'évaluation a été annoncée aux élèves environ une semaine à l'avance et des critères d'évaluation leur ont été présentés. Deux versions du test avec des noms et des données numériques différents ont été utilisées pour que des élèves voisins n'aient pas le même exercice. Dans chaque exercice, il y a un cas de similitude différent à utiliser, combiné avec d'autres connaissances. Dans le premier exercice, il fallait utiliser le cas CCC et en tirer une conséquence pour un angle. Dans le deuxième exercice, l'utilisation du cas CAC est conditionnée à l'utilisation préalable de la somme des angles d'un triangle et du théorème de Pythagore, il faut en déduire la valeur d'un autre angle. Dans le troisième exercice, le cas AA est combiné avec la somme des angles d'un triangle, les triangles semblables ont un côté commun et la longueur des côtés qu'on peut déduire doit servir à calculer le périmètre du quadrilatère réunion des deux triangles.

Notons d'abord que 11 élèves sur les 27 que compte la classe traitent correctement les trois exercices, parfois cependant avec une démonstration incomplète ; 2 de plus donnent aussi toutes les bonnes réponses mais ne donnent pas toujours la justification du cas de similitude utilisé ;

1 élève ne fait rien et 1 affirme sans le démontrer que les triangles des deux premiers exercices sont semblables et ne fait rien d'autre ; les 12 autres utilisent correctement un des cas, souvent deux, pour en déduire quelque chose, même si les justifications ne sont pas toujours suffisantes. Regardons plus précisément les résultats pour chaque exercice en excluant les 2 élèves qui n'ont pratiquement rien fait.

Exercice 1[7]

L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier *L'angle $\widehat{TES}$ est égal à 69°.*	

• 19 élèves utilisent correctement le cas CCC et donnent la valeur correcte de l'angle même si la rédaction n'est pas parfaite. Le plus souvent ils calculent les rapports sans conclure qu'ils sont égaux avant d'appliquer CCC, parfois sans dire dans quels triangles ils l'appliquent. Voici par exemple les copies de E12 (figure 20), qui se trompe dans l'ordre des sommets homologues, et de E18 (figure 21).

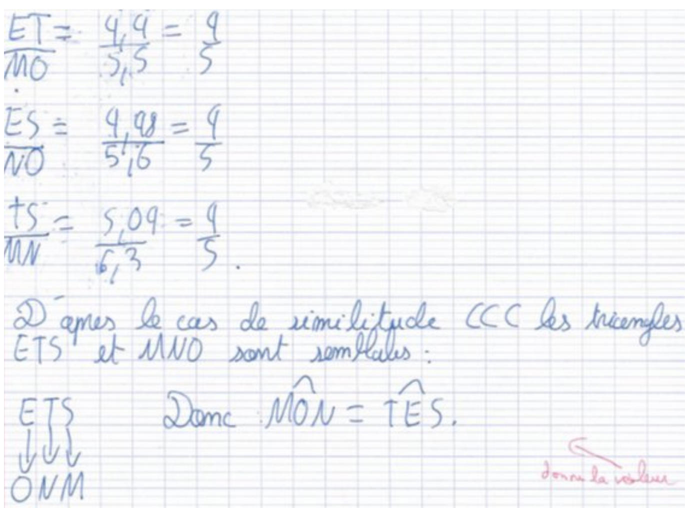
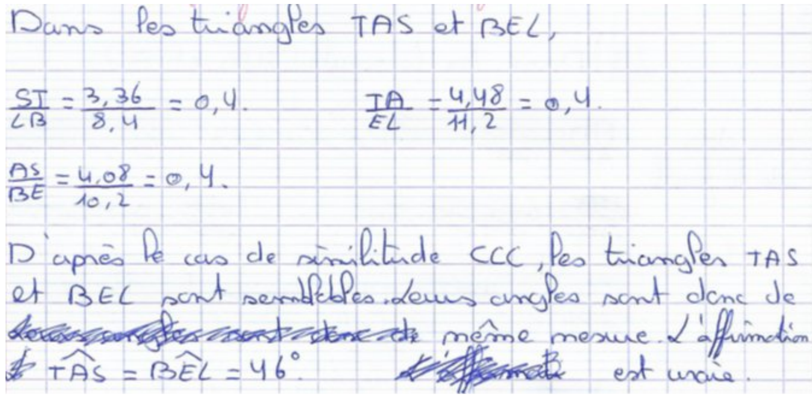


Figure 20 *: Copie de E12.*

[7] Pour l'exercice 1, nous ne donnons que les énoncés de la version 1 de ce contrôle ; la version 2 ne diffère que par les noms des points et les valeurs numériques. Nous joignons la figure correspondante si nécessaire pour les exemples.



Dans les triangles TAS et BEL,

$\frac{ST}{LB} = \frac{3,36}{8,4} = 0,4.$ $\frac{IA}{EL} = \frac{4,48}{11,2} = 0,4.$

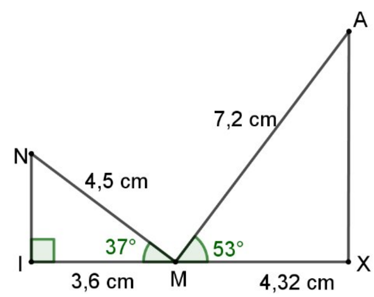
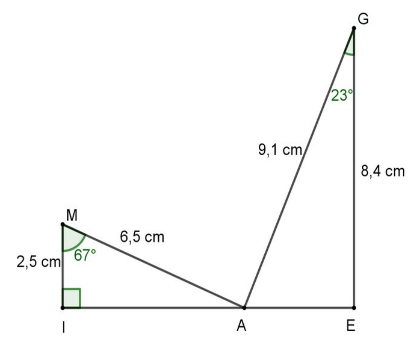
$\frac{AS}{BE} = \frac{4,08}{10,2} = 0,4.$

D'après le cas de similitude CCC, les triangles TAS et BEL sont semblables. leurs angles sont donc de même mesure. L'affirmation $\widehat{TAS} = \widehat{BEL} = 46°$. est vraie.

Figure 21 *: Copie de E18.*

• 2 élèves ne traitent pas l'exercice 1 ; 2 élèves tentent d'utiliser le cas CAC ; 1 élève dit qu'aucun cas ne marche et 1 élève dit que les deux triangles sont isocèles donc égaux.

Exercice 2

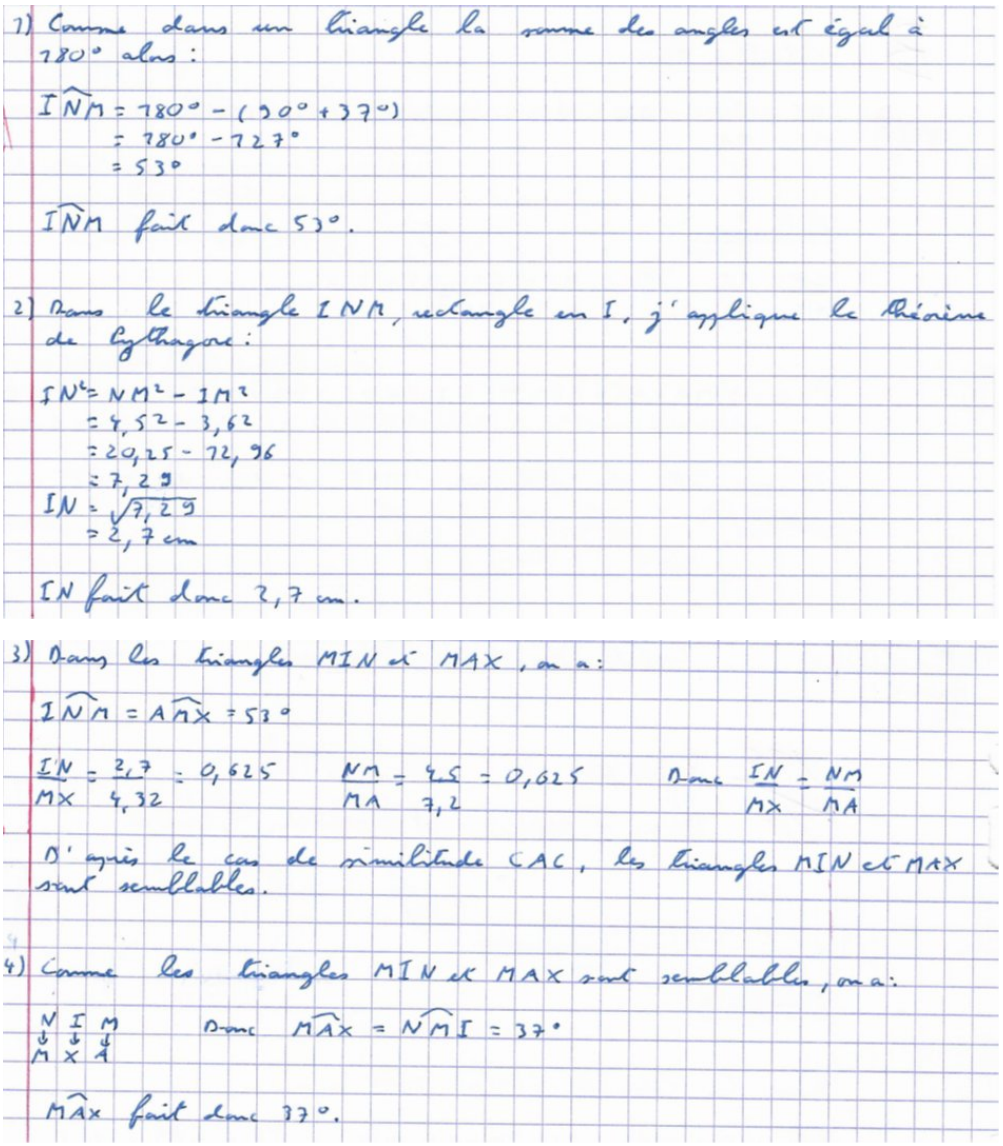
<table>
<tr>
<td>Version 1
On considère la figure suivante :
1. Calculer l'angle $\widehat{INM}$.
2. Montrer que $IN = 2,7\ cm$.
3. Montrer que les triangles MIN et MAX sont des triangles semblables.
4. En déduire l'angle .</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Version 2
On considère la figure suivante :
1. Montrer que $IA = 6\ cm$.
2. Calculer l'angle $\widehat{IAM}$.
3. Montrer que les triangles AMI et AGE sont des triangles semblables.
4. En déduire l'angle $\widehat{GAE}$.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Nous attendons que les positions horizontales et verticales puissent inciter à supposer des angles droits supplémentaires en X ou en E et ainsi inciter à utiliser le cas AA.

• L'exercice n'est pas traité du tout par E12. Pour les 24 autres élèves, la somme des angles d'un triangle est correctement utilisée.

• Pour le théorème de Pythagore, 21 élèves l'utilisent correctement. Les 3 autres font des erreurs : 1 élève (E6) oublie d'extraire la racine carrée, 1 élève (E14) l'utilise mal (il écrit $IA^2 = MI^2 + MA^2$ au lieu de $MA^2 = MI^2 + IA^2$), 1 élève (E8) semble ignorer le théorème de Pythagore puisqu'il dit « D'après le théorème de Pythagore, l'angle $\widehat{INM}$ est égal à 53° » et calcule IN par un rapport en prétendant les triangles semblables.

• Le cas CAC est reconnu par 17 élèves, bien justifié par 13 élèves (par exemple E3, figure 22).


1) Comme dans un triangle la somme des angles est égal à 180° alors :

$\widehat{INM} = 180° - (90° + 37°)$
$= 180° - 127°$
$= 53°$

$\widehat{INM}$ fait donc 53°.

2) Dans le triangle INM, rectangle en I, j'applique le théorème de Pythagore :

$IN^2 = NM^2 - IM^2$
$= 4,5^2 - 3,6^2$
$= 20,25 - 12,96$
$= 7,29$
$IN = \sqrt{7,29}$
$= 2,7$ cm

IN fait donc 2,7 cm.

3) Dans les triangles MIN et MAX, on a :

$\widehat{INM} = \widehat{AMX} = 53°$

$\frac{IN}{MX} = \frac{2,7}{4,32} = 0,625$ $\frac{NM}{MA} = \frac{4,5}{7,2} = 0,625$ Donc $\frac{IN}{MX} = \frac{NM}{MA}$

D'après le cas de similitude CAC, les triangles MIN et MAX sont semblables.

4) Comme les triangles MIN et MAX sont semblables, on a :

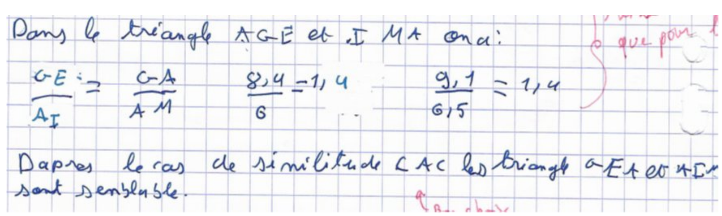
N I M
↓ ↓ ↓
M X A

Donc $\widehat{MAX} = \widehat{NMI} = 37°$

$\widehat{MAX}$ fait donc 37°.

Figure 22 : *Copie de E3.*

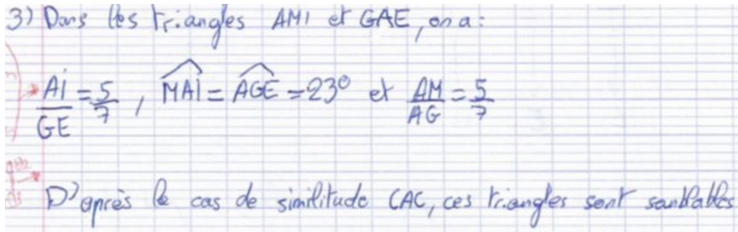
Les justifications sont parfois insuffisantes : par exemple, E9 (figure 23) ne mentionne pas l'égalité de l'angle, E24 (figure 24) n'explique pas comment il a trouvé les rapports égaux.


Dans le triangle AGE et IMA on a :

$\frac{GE}{AI} = \frac{GA}{AM}$ $\frac{8,4}{6} = 1,4$ $\frac{9,1}{6,5} = 1,4$

Dapres le cas de similitude CAC les triangle AEA et AIM sont semblable.

Figure 23 : *Extrait de la copie de E9.*


3) Dans les triangles AMI et GAE, on a :

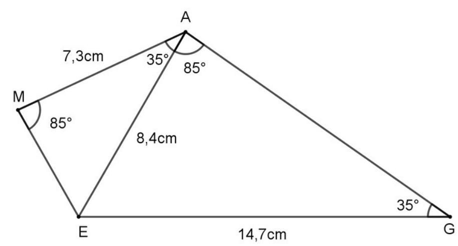
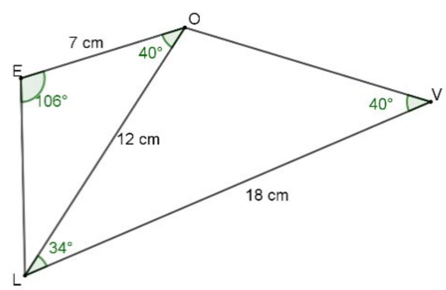
$\frac{AI}{GE} = \frac{5}{7}$, $\widehat{MAI} = \widehat{AGE} = 23°$ et $\frac{AM}{AG} = \frac{5}{7}$

D'après le cas de similitude CAC, ces triangles sont semblables

Figure 24 *: Extrait de la copie de E24.*

Quatre élèves ne traitent pas la question, trois élèves réfèrent au cas AA (l'angle en *X* qui a des côtés en position verticale et horizontale est considéré comme droit). E23 reconnaît CAC sans le justifier, se trompe dans les rapports et conclut « les triangles sont semblables mais pas leurs quotients ».

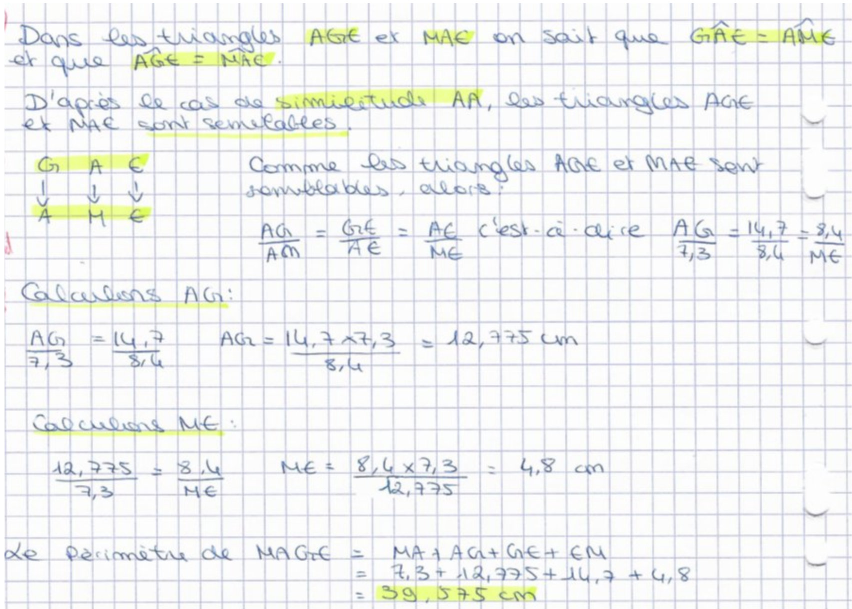
Exercice 3

Version 1 *On considère la figure suivante :* *1. Montrer que les triangles AGE et MAE sont des triangles semblables.* *2. Calculer le périmètre du polygone MAGE.*	
Version 2 *On considère la figure suivante :* *1. Montrer que les triangles VOL et LEO sont des triangles semblables.* *2. Calculer le périmètre du polygone VOEL.*	

Le cas de similitude pertinent est cette fois AA et les angles égaux apparaissent directement dans la version 1 ; dans la version 2, il faut de plus utiliser la somme des angles d'un triangle ; dans les deux cas, l'identification des côtés homologues pour écrire les rapports est rendue plus difficile du fait du côté commun [*AE*] (resp. [*OL*]) qui, considéré dans *AGE* (resp. *VOL*) est homologue de [*ME*] dans *AME* (resp. de [*LE*] dans *LEO*), et considéré dans *AME* (resp. *LEO*) est homologue de [*GE*] dans *AGE* (resp. de [*VL*] dans *VOL*). Pour le calcul du périmètre, il faut calculer *ME* et *AG* (resp. *LE* et *VO*) à partir de l'égalité des rapports.

Les 25 élèves reconnaissent le cas AA, 19 d'entre eux calculent correctement les rapports et le périmètre (sauf E14 qui fait la somme des périmètres des deux triangles). Parmi eux un élève parle de Thalès au lieu de cas de similitude pour écrire les rapports.

Voici par exemple la copie de E10 sur la version 1 (figure 25) :



Dans les triangles AGE et MAE on sait que $\widehat{GAE} = \widehat{AME}$ et que $\widehat{AGE} = \widehat{MAE}$.

D'après le cas de similitude AA, les triangles AGE et MAE sont semblables.

G A E
↓ ↓ ↓
A M E

Comme les triangles AGE et MAE sont semblables, alors :

$\frac{AG}{AM} = \frac{GE}{AE} = \frac{AE}{ME}$ c'est-à-dire $\frac{AG}{7,3} = \frac{14,7}{8,4} = \frac{8,4}{ME}$

Calculons AG :

$\frac{AG}{7,3} = \frac{14,7}{8,4}$ $AG = \frac{14,7 \times 7,3}{8,4} = 12,775$ cm

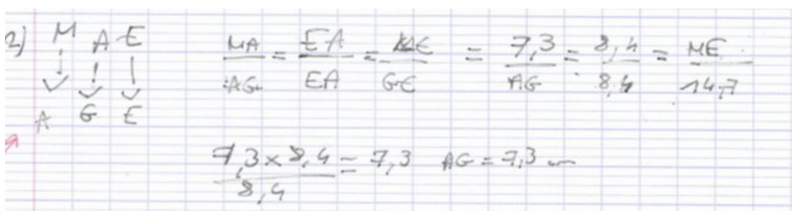
Calculons ME :

$\frac{12,775}{7,3} = \frac{8,4}{ME}$ $ME = \frac{8,4 \times 7,3}{12,775} = 4,8$ cm

Le périmètre de MAGE = MA + AG + GE + EM
= 7,3 + 12,775 + 14,7 + 4,8
= 39,575 cm

Figure 25 *: Copie de E10.*

• E2 (figure 26) reconnaît AA, indique les points homologues mais se trompe quand même dans les rapports (il semble que c'est le côté commun EA qui l'induit en erreur) :



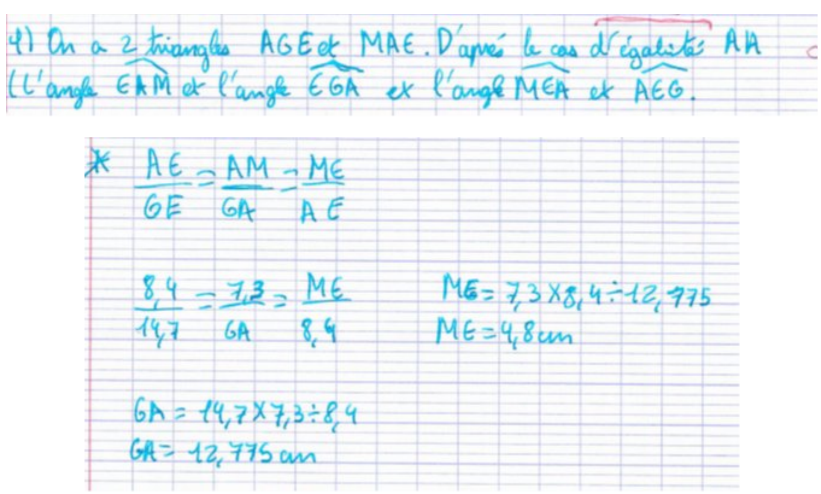
2) M A E
↓ ↓ ↓
A G E

$\frac{MA}{AG} = \frac{EA}{EA} = \frac{ME}{GE} = \frac{7,3}{AG} = \frac{8,4}{8,4} = \frac{ME}{14,7}$

$\frac{7,3 \times 8,4}{8,4} = 7,3$ AG = 7,3 cm

Figure 26 *: Copie de E2.*

• E23 (figure 27) semble reconnaître AA, calcule les rapports justes mais ne conclut à la similitude des triangles qu'après les avoir calculés. Est-ce seulement un problème de rédaction ? L'ensemble de la copie est assez confus.



4) On a 2 triangles AGE et MAE. D'après le cas d'égalité AA (l'angle $\widehat{EAM}$ et l'angle $\widehat{EGA}$ et l'angle $\widehat{MEA}$ et $\widehat{AEG}$.

* $\frac{AE}{GE} = \frac{AM}{GA} = \frac{ME}{AE}$

$\frac{8,4}{14,7} = \frac{7,3}{GA} = \frac{ME}{8,4}$ ME = 7,3 × 8,4 ÷ 12,775
ME = 4,8 cm

GA = 14,7 × 7,3 ÷ 8,4
GA = 12,775 cm

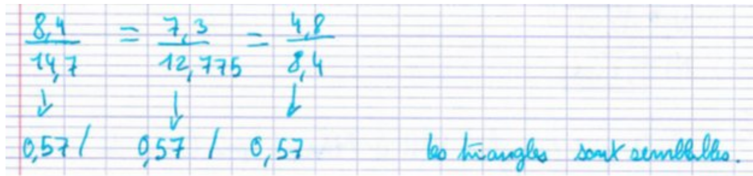


Figure 27 *: Copie de E23.*

Bilan

Dans l'ensemble, les résultats du contrôle sont bons. La somme des angles d'un triangle est disponible pour tous les élèves sauf peut-être les deux qui n'ont pratiquement rien fait. Ce n'est pas tout à fait le cas du théorème de Pythagore qui n'est correctement utilisé que par 21 élèves sur 27. Les trois cas de similitude sont reconnus par 18 élèves, même s'il reste pour certains d'autres erreurs ou des problèmes de rédaction d'une démonstration.

Le cas AA est plus facilement reconnu que les autres puisque 24 élèves l'utilisent même s'ils ne savent pas calculer les rapports. Dans tous les cas, la plus grande difficulté est le calcul des rapports : 3 élèves font des erreurs et 4 élèves ne calculent pas les rapports dans l'exercice 3 alors qu'ils ont reconnu que les triangles étaient semblables par le cas AA. À l'exception d'E12 qui ne traite pas la question ni l'exercice 2, ce sont tous des élèves qui n'utilisent pas la notation introduite par le professeur pour la correspondance des points homologues dont on peut penser que c'est une aide pour le calcul des rapports. Cette notation est utilisée dans les trois cas par 6 des élèves qui traitent correctement les trois exercices ; les 5 autres élèves qui ont réussi les trois exercices ne l'utilisent pas du tout (du moins elle n'est pas visible sur leur copie) pour trois d'entre eux, seulement dans l'exercice 1 pour l'un d'eux et dans les exercices 1 et 2 pour un autre. Évidemment, rien ne dit qu'ils ne l'utilisent pas au brouillon. Cette notation n'est pas du tout utilisée par 10 élèves, dont 4 n'ont pas pu écrire les rapports dans l'exercice 3, une seule fois par 4 élèves, deux fois par 6 élèves.

4.2. Parentés et différences dans l'usage des cas d'isométrie et de similitude

Le traitement des points homologues

Les élèves des deux classes ont été entraînés à repérer les éléments homologues des triangles en se servant de l'ordre des longueurs ou des angles qui doit être conservé. À ce propos, il est utile aussi de savoir que les angles sont dans le même ordre que les côtés opposés, en particulier quand ce sont les longueurs qui sont données. Beaucoup d'élèves des deux classes se servent de l'outil sémiotique que leur a donné le professeur : sommets homologues alignés l'un sous l'autre et reliés par une flèche. Cela permet de trouver les côtés homologues sans regarder la figure.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \mathrm{A} & \mathrm{E} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{E} \end{array}$$

La moitié environ des élèves (un peu plus en quatrième qu'en troisième) l'utilisent dans au moins deux exercices. Il semble cependant que, pour certains élèves, cela ne suffise à leur permettre de repérer les côtés homologues, notamment pour écrire les rapports pertinents dans le cas de triangles semblables. Horoks (2008) avait identifié cette difficulté de repérage des éléments homologues des triangles semblables, en particulier dans le cas où l'un des deux est emboîté dans l'autre avec des noms de sommets communs et non homologues, c'est-à-dire que l'un est à l'intérieur de l'autre avec un côté commun (figure 28). C'est notamment le cas d'un triangle rectangle partagé par sa hauteur.

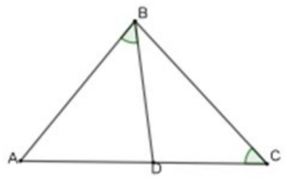


Figure 28 *: ABD et ACB, triangles semblables emboîtés.*

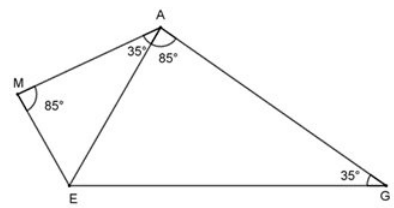


Figure 29 *: Triangles semblables extérieurs avec un côté commun.*

Ici, dans l'exercice 3, les triangles semblables ne sont pas emboîtés (figure 29) mais ils ont un côté commun [*AE*] qui n'est pas homologue de lui-même mais de [*ME*] ou [*GE*] suivant le triangle considéré. En ce qui concerne les sommets communs, dans la version 1, le sommet *E* est l'homologue de lui-même, *A* est l'homologue de *G* ou *M* suivant le triangle considéré ; dans la version 2, *L* est son propre homologue, *O* est l'homologue de *V* ou de *E* suivant le triangle considéré. Remarquons que cette difficulté ne se présente pas de la même manière pour les triangles isométriques qui ont un côté commun (figure 30) : ce côté peut toujours être considéré comme l'homologue de lui-même, éventuellement en échangeant les extrémités (cas d'une correspondance par symétrie axiale comme dans un des exercices étudiés en classe ou par symétrie centrale comme dans l'exercice 3 du contrôle sur les triangles isométriques).

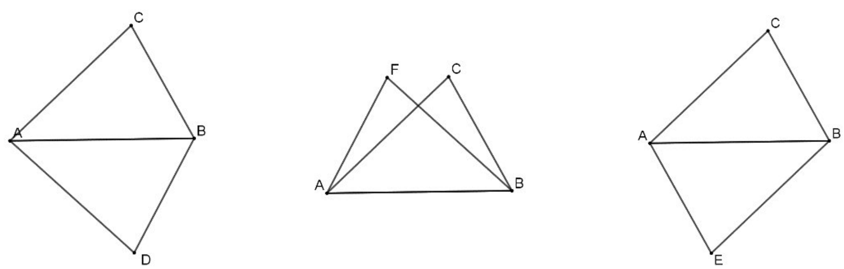


Figure 30 *: Triangles isométriques ayant un côté commun.*

Un repère sémiotique à discuter : Le parallélisme des notations pour les cas

Le professeur prend ici des notations similaires pour nommer les cas d'isométrie et de similitude : CCC quand les conditions portent sur les trois côtés, CAC quand les conditions portent sur deux côtés qui encadrent un angle. Pour le cas où on a l'égalité de deux angles, il n'y a pas d'autre condition pour le cas de similitude et il faut en plus l'égalité de deux côtés homologues pour le cas d'isométrie, le fait de situer le côté entre les angles (ACA) étant un moyen de s'assurer qu'ils sont homologues. Le cas emboîté donne des exemples de triangles semblables ayant leurs angles égaux et un côté égal et pourtant non isométriques.

La similarité des notations est un moyen de favoriser la mémorisation des théorèmes. Cependant, cette similarité cache une différence pour les CCC et CAC : pour fixer un triangle, il faut trois paramètres mais pour le fixer à similitude près, il ne faut que deux paramètres, par exemple deux angles. En effet deux triangles semblables ne diffèrent que par le rapport des côtés homologues qui est libre alors qu'il est fixé à 1 si les triangles sont isométriques. Dans le cas CCC, les rapports des trois côtés ne donnent que deux égalités et dans le cas CAC, les rapports de deux côtés ne donnent qu'une égalité.

Difficultés spécifiques des cas de similitude

L'utilisation des cas de similitude présente deux difficultés par rapport à celle des cas d'isométrie : d'une part, il faut travailler sur des rapports et donc mêler du calcul algébrique à la géométrie, calcul algébrique dans lequel les variables sont des longueurs de segments donc s'expriment usuellement avec deux lettres ; d'autre part le cas emboîté rend plus difficile la reconnaissance des éléments homologues. Ce cas ne peut pas se produire pour les triangles isométriques. En effet si deux triangles isométriques ont un côté commun, ici [AB], on est nécessairement dans un des trois cas de figure suivants (figure 30) : symétrie orthogonale par rapport à (AB) ou à la médiatrice de [AB] ou symétrie centrale par rapport au milieu de [AB].

Conclusion

Les deux premières parties de cet article visent à montrer que les cas d'isométrie et de similitude constituent un outil plus adapté que les transformations pour entrer dans la démarche de démonstration au collège. Ceci pour deux raisons : la cohérence du cours au long du collège et la facilité d'appropriation par les élèves. Pour que l'enseignement de géométrie soit cohérent au long du collège, il nous semble que le cours devrait être tel que toutes les démonstrations soient possibles au moins pour les professeurs à partir de ce qui a été admis explicitement ou démontré précédemment. Pour que les transformations soient vraiment efficaces, il faudrait les avoir toutes assez vite et avoir la composition des transformations. On pourrait alors prouver dans le cours les propriétés de conservation des autres isométries et les cas d'isométrie des triangles, après avoir admis celles de la symétrie axiale en sixième. Mais cela donne peu d'outils de démonstration aux élèves avant que le processus soit achevé. Les cas d'isométrie sont accessibles rapidement et permettent de démontrer les propriétés des transformations que l'on peut ensuite utiliser. La deuxième raison est que l'usage des transformations demande une déconstruction dimensionnelle des figures plus poussée que celui des cas d'isométrie. Bien sûr il est essentiel de travailler la déconstruction dimensionnelle mais l'exiger avec une grande complexité dès l'entrée dans la géométrie déductive risque de rendre l'apprentissage de la démonstration inaccessible pour beaucoup d'élèves.

La troisième partie montre l'organisation didactique d'un professeur pour enseigner les cas d'isométrie des triangles, de la situation d'introduction jusqu'à l'évaluation finale. Cette organisation prévoit une gradation dans les exercices traités par les élèves pour rendre cet outil mobilisable pour résoudre des problèmes et des ressources pour les élèves pour les aider à prendre en charge leur progression sur le thème. La disponibilité de cet outil, au sens de Robert (1998, pp. 165-168), ne peut être atteinte que dans un second temps. Au premier trimestre de la classe de quatrième, on est au début de l'apprentissage de la démonstration et la rédaction des élèves est encore souvent maladroite. Cependant, l'évaluation finale montre que la majorité d'entre eux se sont bien emparés de l'outil et l'utilisent à bon escient. Les difficultés sont des difficultés générales d'analyse des figures et d'appropriation du raisonnement déductif.

Dans la dernière partie, nous comparons l'appropriation par les élèves des cas d'isométrie à celle des cas de similitude par les élèves de troisième du même professeur. Il y a une certaine parenté dans l'usage des deux outils, avec cependant certaines spécificités qui rendent un peu plus délicat l'usage des cas de similitude, notamment par la mobilisation croisée des outils algébriques et géométriques et par la reconnaissance des points homologues pour écrire les rapports des côtés, comme l'avait déjà souligné Horoks (2008). La référence à ce travail nous montre aussi que, pour les triangles semblables, le champ d'application s'est appauvri depuis ses observations, notamment par la disparition des programmes d'outils essentiels qui permettaient de travailler avec les angles y compris la bissectrice. En effet, les cas de similitude, plus encore que les cas d'isométrie demandent de s'appuyer sur les angles. Ne restent que les angles complémentaires et supplémentaires, la somme des angles d'un triangle, les angles entre parallèles et sécantes. L'inscription du triangle rectangle dans un demi-cercle et le théorème de l'angle inscrit fournissaient beaucoup d'autres occasions d'exercices, notamment pour produire des triangles semblables.

Enfin, cet article donne un exemple de gestion de l'évaluation en lien avec l'enseignement dispensé : dans ses deux classes, au fur et à mesure de l'enseignement, le professeur fournit aux élèves des repères qui correspondent aux savoirs qui seront attendus dans l'évaluation finale et cette évaluation teste l'ensemble de ces savoirs avec des niveaux de mise en fonctionnement gradués (de la simple application à la combinaison avec d'autres savoirs supposés disponibles). À titre d'exemple, on trouvera en annexe la grille fournie aux élèves sur le chapitre des triangles isométriques.

Références bibliographiques

Celi, V. (2002). *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation*. Thèse de l'université Paris 7 - Denis Diderot.
https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01255392

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques, 17/3*, 17-54.

Cousin-Fauconnet, A. (1995). *Enseigner la géométrie au collège. Un chemin pour la découverte progressive par l'élève*. Paris : Armand Colin.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Groupe Géométrie - IREM de Paris (2021). *Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer*. IREM de Paris, brochure n°100 (268 pages).
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf

Horoks, J. (2008). Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en Didactique des Mathématiques 28/3*, 379-416.

Kahane, J.-P. (dir.) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*. Paris : Odile Jacob.

Perrin-Glorian, M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques : Cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 9*, 67-82.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 18/2*, 139-189.

MEN (2018). *Programmes du cycle 4. BOEN n° 30 du 26/07/2018*. Les programmes en vigueur en 2021-2022 sont disponibles à :
https://eduscol.education.fr/document/621/download (consulté le 18/06/2022).

Annexe