
GÉOMÉTRIE, PROGRAMME D'ERLANGEN, GROUPES, TRANSITIVITÉ ET INVARIANTS DE LA THÉORIE À LA PRATIQUE

Daniel PERRIN¹

Professeur honoraire
Université Paris-Sud Orsay

Résumé. Cet article présente les fondements théoriques du travail du groupe Géométrie de l'IREM de Paris et de la brochure numéro 100 : *Enseigner la géométrie au cycle 4*, produite par ce groupe. Nous tenterons de montrer comment des notions théoriques issues du programme d'Erlangen de Felix Klein (les groupes, la notion de niche écologique d'un théorème, la transitivité) sont pertinentes pour les professeurs car elles leur permettent :

- d'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves pour trouver un résultat ;
- de choisir les invariants pertinents pour les démonstrations selon la niche en jeu, par exemple l'aire dans le cas de la géométrie affine ;
- de comprendre l'intérêt des critères de transitivité, et notamment des cas d'isométrie et de similitude.

Mots-clés. Groupes, transitivité, invariants, cas d'isométrie.

Abstract. This paper presents the theoretical foundations of the work of groupe Géométrie de l'IREM de Paris and of the brochure number 100 : *Enseigner la géométrie au cycle 4*. We try to explain how theoretic notions from Felix Klein's Erlangen program (groups, ecological niche of a theorem, transitivity) are relevant for teachers because they allow them :

- to be one step ahead of the students ;
- to choose relevant invariants for proofs, for example area in affine geometry ;
- to understand utility of transitivity criteria, namely congruence criteria.

Keywords. Groups, transitivity, invariants, criteria for congruence.

Introduction - les objectifs

L'objectif principal du groupe Géométrie de l'IREM de Paris est de promouvoir l'enseignement de la géométrie et de former les professeurs sur ce thème, dans la ligne du rapport de la commission Kahane (2002) ou de Perrin (2014b).

Plus précisément, le but de cet article est de montrer comment des notions théoriques issues du programme d'Erlangen de Felix Klein (les groupes, la notion de niche écologique d'un théorème, la transitivité, les invariants) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :

- d'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves pour trouver un résultat ;
- de choisir les invariants pertinents pour les démonstrations selon la niche en jeu, par exemple l'aire dans le cas de la géométrie affine ;
- de comprendre l'intérêt des critères de transitivité, et notamment des cas d'isométrie et de similitude.

¹ daniel.perrin@universite-paris-saclay.fr

1. Le programme d'Erlangen

1.1. Retour à Euclide

Avant de parler du programme d'Erlangen, revenons à Euclide et précisément à la preuve du premier cas d'égalité des triangles (Livre 1, proposition 4) :

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

Voici, recopiée intégralement, la preuve d'Euclide (cf. figure 1) :

Soient $AB\Gamma$ et ΔEZ deux triangles tels que l'on ait : $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ et $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$. Je dis qu'il est aussi $B\Gamma = EZ$ et que ces triangles ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ et $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta Z E}$.

En effet, si l'on appliquait le triangle $AB\Gamma$ sur le triangle ΔEZ de manière à faire coïncider d'abord les points A et Δ , puis les côtés AB et ΔE , le point B coïnciderait avec E , car $AB = \Delta E$. Les côtés $A\Gamma$ et ΔZ coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, de sorte que le point Γ à son tour coïnciderait avec Z , car $A\Gamma = \Delta Z$. D'autre part, les points B et E ayant déjà coïncidé, les côtés $B\Gamma$ et EZ coïncideront aussi.

Par conséquent, le triangle $AB\Gamma$ tout entier coïncidera avec le triangle ΔEZ tout entier et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux, à savoir : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ et $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta Z E}$.

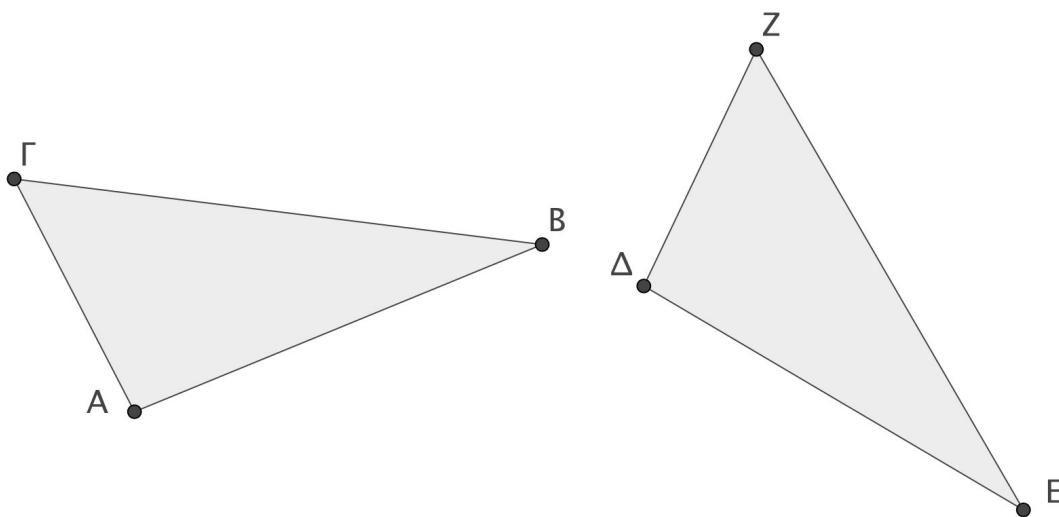


Figure 1 : Le premier cas d'égalité.

Cette preuve, qui utilise la méthode dite de superposition, est celle que l'on donnait en classe de cinquième avant 1970 et elle convainquait la plupart des élèves. Cependant, le mathématicien attentif y décèle évidemment un point faible² : que signifie le fait d'appliquer le triangle $AB\Gamma$ sur ΔEZ ?

Cette faille dans Euclide a été notée depuis longtemps et, en tous cas, David Hilbert, quand il a

² Il y a beaucoup d'autres zones d'ombre dans cette démonstration. Par exemple, lorsqu'Euclide parle de faire coïncider les côtés, il pense sans doute aux demi-droites qui les portent, mais il faut aussi faire attention aux demi-plans. En particulier, Euclide n'envisage pas le cas où les triangles sont échangés par une isométrie négative.

entrepris la refonte de l'œuvre d'Euclide (*cf.* Hilbert, 1899), en était parfaitement conscient. La solution qu'il a adoptée est de prendre ce premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus. C'est une solution correcte, mais sans doute trop brutale. Nous serions plutôt en faveur d'une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition, si naturelle. Ce qui est nécessaire pour cela est de donner un sens à l'opération consistant à appliquer ou transporter une demi-droite sur une autre, propriété qui manifeste l'homogénéité du plan. Avec nos connaissances actuelles, on sent bien que derrière cela il y a la nécessité de la présence d'un **groupe** de transformations. Précisément, on propose de postuler qu'il existe un tel groupe qui opère **transitivement** sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par la droite support de cette demi-droite ; on rappelle qu'un groupe G opère transitivement sur un ensemble X si, étant donnés $x, y \in X$, il existe toujours $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$). Sur ce point, voir Perrin (2050), un jour peut-être, et, en attendant, l'annexe 1 de Brochure (2021). Un groupe qui opère transitivement sur un ensemble : on est au cœur du programme d'Erlangen, comme on va le voir.

1.2. Le programme d'Erlangen

Le principe

Le programme d'Erlangen est la thèse de Felix Klein (Klein, 1974), soutenue en 1872 dans cette ville. Le travail de Klein arrive après l'explosion des géométries, survenue dans la première moitié du XIX^e siècle avec la création, à côté de la géométrie euclidienne classique, de la géométrie projective, des géométries non euclidiennes, etc. et il se veut une tentative d'**unification** de ces géométries. Le principe unificateur, adopté par Klein, est qu'une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X , autrement dit d'un groupe G opérant sur X . Les éléments de G sont les transformations permises dans la géométrie en question et elles caractérisent cette géométrie. Il s'agit, par exemple, des isométries (affines) pour la géométrie euclidienne plane, ou des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou encore des homographies pour la géométrie projective. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés euclidiennes, affines, projectives) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe, ainsi que le dit Klein :

Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.

Exemples.

- 1) Les homographies conservent concours et alignement.
- 2) Les transformations affines conservent en outre le parallélisme, les rapports de mesures algébriques sur une même droite (tout ce qui se formule avec des vecteurs mais sans produit scalaire) et les rapports d'aires.
- 3) Les isométries conservent en outre longueurs et angles.

La niche écologique d'un théorème

Le programme d'Erlangen, c'est d'abord cela : une méthode de classification des résultats de géométrie. Ainsi, pour citer trois résultats célèbres, le théorème de Pappus : (*si l'on a A, B, C alignés sur Δ et A', B', C' sur Δ' , si (BC') et $(B'C)$ (resp. (CA') et $(C'A)$, resp. (AB') et $(A'B)$) se coupent en D (resp. E , resp. F) (cf. figure 2), alors les points D, E, F sont alignés*) qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement, est un théorème projectif, tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien.

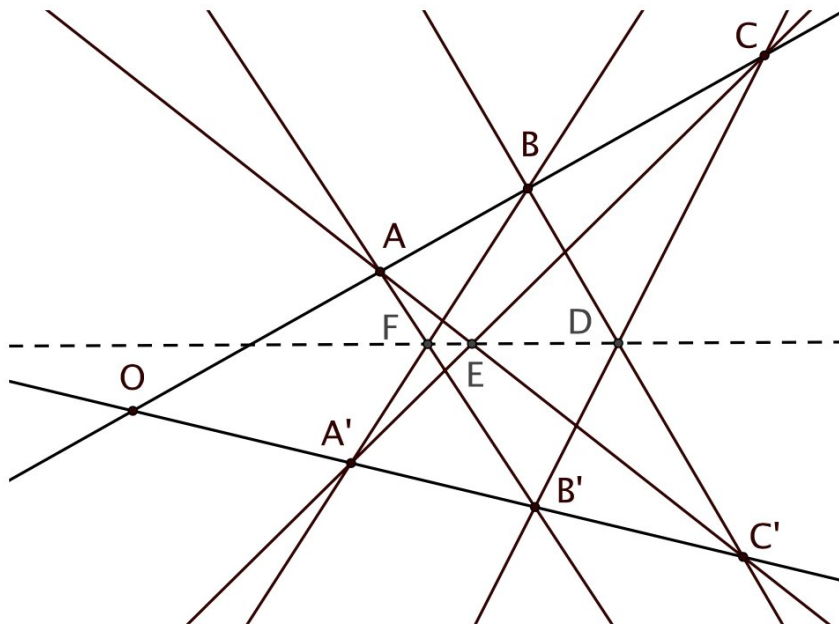


Figure 2 : *Théorème de Pappus : D, E, F sont alignés.*

On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une **niche écologique privilégiée**, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et, souvent, où il se démontre avec le plus de facilité.

L'exemple du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, frère jumeau de Pappus, illustre bien cette idée. Ce théorème s'énonce d'abord avec A, B, C, A', B', C' sur un cercle (cf. figure 3), la suite du théorème est identique à celle de Pappus.

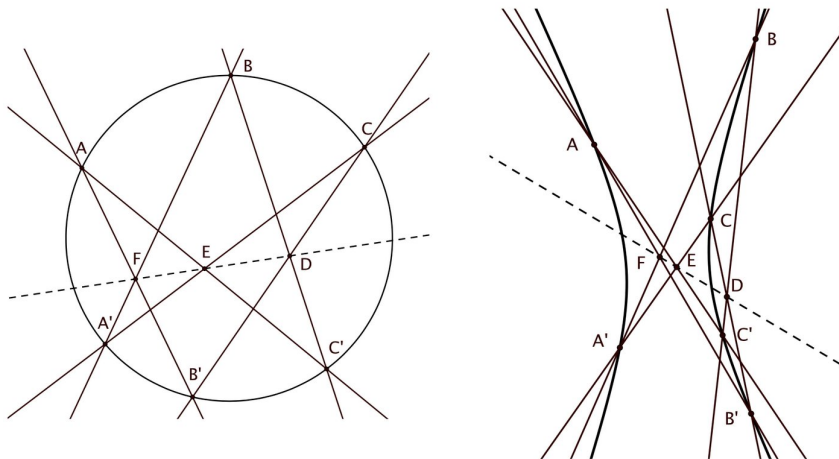


Figure 3 : *Théorème de Pascal : D, E, F sont alignés.*

On peut prouver ce théorème dans ce cadre en utilisant le théorème de l'angle inscrit, il apparaît alors comme un théorème euclidien.

Il est clair cependant que ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité puisqu'il vaut aussi pour une ellipse. C'est alors devenu un théorème affine. On peut enfin l'énoncer pour une parabole ou une hyperbole et il devient un théorème projectif. C'est d'ailleurs

dans ce cadre qu'il est le plus facile à prouver ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est ici débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles. Deux preuves me semblent particulièrement pertinentes :

- celle qui utilise l'**invariant** fondamental associé à une conique : le birapport ;
- celle qui consiste à prouver le résultat dans le cas euclidien en utilisant les outils de ce cadre (ici le théorème de l'angle inscrit, mais la preuve n'est pas encore évidente) et à utiliser un argument de **transitivité** pour passer au cas général : il existe une homographie qui transforme un cercle en une conique quelconque (c'est essentiellement la méthode de Pascal, qui utilise une projection).

Quel intérêt pour les professeurs ?

Pour un enseignant, repérer la niche écologique d'un problème a deux avantages :

- Cela lui permet de trouver rapidement le résultat cherché, souvent en se ramenant à un cas particulier. Ce mode de démonstration n'est pas en général au niveau des élèves, mais il procure un **temps d'avance** sur eux.
- De plus, lorsqu'il s'agit de proposer une preuve abordable par les élèves, le programme d'Erlangen permet d'avoir une **claire conscience des outils à utiliser**.

Nous allons illustrer cela sur l'exemple de la géométrie affine du plan.

2. Programme d'Erlangen et temps d'avance

2.1. La géométrie affine

La géométrie affine est essentiellement la géométrie des points et des vecteurs (sans distance ni produit scalaire)³. Les transformations associées sont les applications affines f (disons bijectives) qui agissent sur les points, mais aussi sur les vecteurs par la formule :

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$$

où \vec{f} est l'application linéaire associée à f . Elles forment le groupe affine qui comprend les translations et les applications linéaires bijectives et leurs composées.

Dans le cas réel euclidien, le groupe affine contient les isométries, les homothéties, mais aussi d'autres transformations, qui l'engendrent : les **affinités** (ou dilatations) et les **transvections**.

Une affinité est une application qui a un point fixe et dont l'application linéaire associée a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 0, 1$ tandis qu'une transvection a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 0$. Le lecteur fera les figures nécessaires pour comprendre le sens géométrique de ces applications et il trouvera des détails à ce sujet dans Perrin (1996) par exemple.

Toutes ces transformations conservent les propriétés qui s'expriment en termes de vecteurs (sans produit scalaire) : alignement, concours, parallélisme, milieux, rapports de mesures algébriques (attention, seulement sur une même droite ou des droites parallèles), rapports d'aires, mais ni angles, ni longueurs.

³ Pour des précisions sur la géométrie affine, on pourra consulter par exemple le polycopié David, Haglund & Perrin (2008).

2.2. Application du programme d'Erlangen en géométrie affine

On a vu que la notion de transitivité était déjà en filigrane dans Euclide et qu'elle menait aussi à une preuve du théorème de Pascal. En vérité, la question de la transitivité est centrale dans la perspective du programme d'Erlangen : le groupe G est-il transitif sur les points de X , sur les droites, sur les drapeaux (couples formés d'une droite et d'un point situé sur cette droite) ? L'est-il sur les couples de points ou de droites ? Voici quelques exemples de son utilisation, dans la perspective de la classification des théorèmes proposée par le programme d'Erlangen. Le cadre est ici celui de la géométrie affine.

Le principe

1) On repère que le problème est un problème affine. Cela signifie qu'il met exclusivement en jeu, dans ses hypothèses et sa conclusion, des propriétés affines.

2) On effectue une transformation affine f de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Le plus souvent, cela revient à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (on transforme un triangle quelconque en un triangle équilatéral, un parallélogramme en un carré, etc.). Dans cette phase on utilise des résultats de **transitivité**.

3) On résout le problème ainsi simplifié (y compris, éventuellement, avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse.

Voici un exemple, élémentaire mais révélateur, d'application de cette technique. On veut montrer que les **médianes** d'un triangle sont concourantes. Comme la notion de médiane est affine, on aura gagné si l'on montre qu'on peut transformer le triangle en un triangle équilatéral par une application affine. En effet, les médianes seront alors aussi les médiatrices et il est bien plus facile de montrer que celles-ci sont concourantes.

Le point crucial est donc le lemme suivant :

Lemme. *Le groupe affine est transitif sur les triangles.*

Démonstration. Il s'agit d'envoyer trois points A, B, C sur A', B', C' (non alignés). On commence par envoyer A sur A' par translation. Ensuite, il y a au moins deux façons de faire.

1) Les points B et C sont transformés en B'' et C'' . Il ne reste plus qu'à effectuer la transformation linéaire (avec A' comme origine) qui envoie la base $(\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'C''})$ sur $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ et on a gagné.

2) On détaille le processus en utilisant successivement une rotation pour amener (AB) sur $(A'B')$, une homothétie pour envoyer B en B' , une transvection pour déplacer C sur la parallèle à (AB) afin de rendre le triangle isocèle, enfin une affinité pour finir le travail.

Une application élémentaire

On considère un parallélogramme $ABCD$ et un point intérieur E . La question est de trouver l'ensemble des points E tels que les aires de EAB et EBC soient égales.

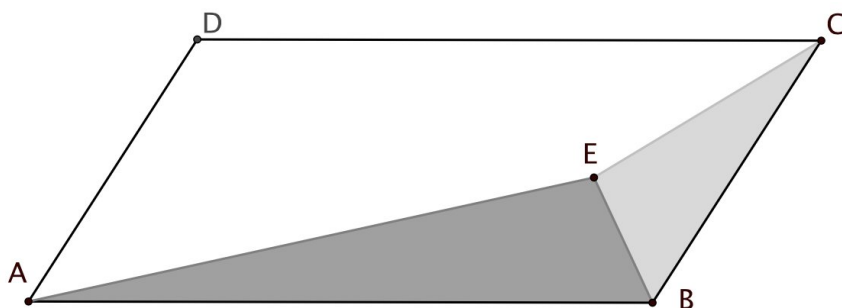


Figure 4 : Le parallélogramme $ABCD$ et le point E .

Le problème est affine car son hypothèse (parallélogramme) et sa conclusion (aires égales) le sont. On peut donc, pour le résoudre, appliquer une transformation affine. Comme le groupe affine est transitif sur les triangles, on peut imposer que ABC soit rectangle isocèle, de sorte que $ABCD$ devient un carré.

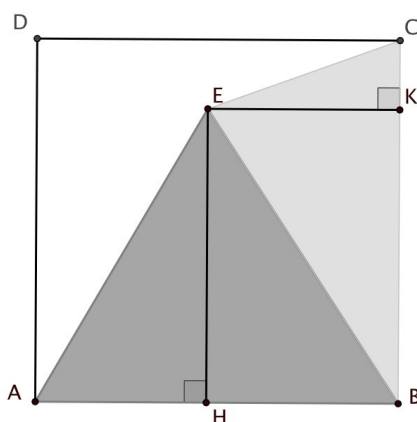


Figure 5 : Le carré $ABCD$ obtenu avec ABC rectangle isocèle.

Là, le problème est facile. Avec la formule $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$, on voit que la condition pour que les aires soient égales est que les hauteurs EH et EK issues de E soient égales, de sorte que E est sur la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} . Ah, attention, la notion de bissectrice n'est pas affine. Mais ici, cette bissectrice est la diagonale du carré et par la transformation affine inverse elle reste diagonale du parallélogramme. Le professeur a donc aussitôt le résultat (la diagonale). De plus, nous verrons plus bas que le fait d'avoir identifié le problème comme affine indique quels outils employer pour une preuve élémentaire : ce sont les lemmes du collègue au sens de Perrin (2011).

Le problème des tiers

Les problèmes d'aires sont sans doute, dans le cas affine, ceux qui se prêtent le mieux à l'utilisation des principes d'Erlangen. Voici un autre exemple de ce type.

Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur les côtés $[BC], [CA], [AB]$ au tiers le plus proche de B, C, A . Les droites (BJ) et (CK) , (CK) et (AI) , (AI) et (BJ) se coupent respectivement en P, Q, R . Déterminer l'aire du triangle PQR en fonction de celle de ABC .

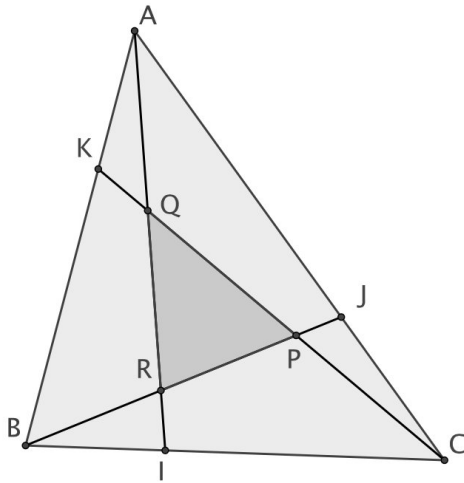


Figure 6 : ABC quelconque.

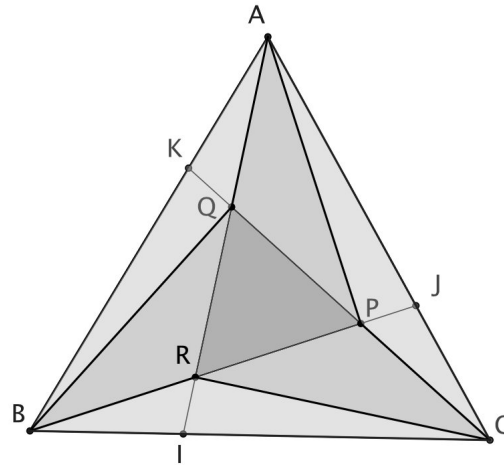


Figure 7 : ABC équilatéral.

Le problème est clairement affine (les seules notions mises en jeu sont les rapports $\frac{1}{3}$ sur une même droite et les rapports d'aires). On peut donc, pour le résoudre, le transformer par une application affine bijective. On peut supposer que l'on est dans le plan euclidien et on transforme ABC en un triangle **équilatéral** $A'B'C'$ de centre O comme on l'a vu ci-dessus. On dispose alors d'un outil supplémentaire : les rotations de centre O et d'angles $\pm \frac{2\pi}{3}$ qui permutent A, B, C ; I, J, K et P, Q, R . On en déduit nombre d'égalités d'aires, dont celles des triangles APQ, BQR et CRP et des triangles ABQ, BCR et CAP et on commence à subodorer le résultat : le triangle central est un septième du triangle initial (cf. **3.2. Le problème des tiers**).

L'ellipse de Steiner

Il s'agit de montrer le résultat suivant : si ABC est un triangle et si D, E et F sont les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement, alors il existe une ellipse (dite de Steiner) tangente aux côtés des triangles en les points D, E et F .

Là encore, le problème est affine car milieux et ellipse sont des notions affines. On peut donc, pour le résoudre, transformer ABC en un triangle équilatéral et, dans ce cas, l'ellipse de Steiner est évidente, c'est le cercle inscrit !⁵

3. Invariants et transitivité

3.1. Orbites et invariants

Ce qui précède montre l'importance de la transitivité dans l'application du programme d'Erlangen. Mais, bien entendu, l'action d'un groupe G sur un ensemble X n'est pas toujours transitive. Ainsi, l'opération du groupe des isométries du plan euclidien sur l'ensemble des

⁴ En vérité, de telles transformations existent aussi dans le cas général : il existe une application affine qui permute (encore la transitivité) les points A, B, C et donc aussi les points I, J, K et P, Q, R , mais elle est moins évidente, au sens propre du terme.

⁵ Pour des détails sur ce thème, voir Perrin (2021).

points est transitive, mais elle ne l'est pas sur l'ensemble des couples de points du plan. Cependant, ce défaut de transitivité n'est pas moins intéressant, car il conduit à la notion d'**orbite** : l'orbite de x est l'ensemble des $y \in X$ que l'on peut atteindre à partir de x via G . La plupart du temps, les orbites sont repérées par des **invariants**. Dans le cas de la géométrie élémentaire, il s'agit de notions bien connues. Si l'on ne peut pas toujours envoyer par une isométrie un couple de points (A, B) sur un autre, c'est qu'il y a une obstruction qui empêche cela, un invariant du couple de points qui ne change pas par isométrie. Pas besoin d'être grand clerc pour deviner que c'est la longueur AB . De la même manière, on ne peut envoyer un couple de demi-droites de même origine sur un autre que si leur angle est le même. La notion d'invariant est donc inhérente à la géométrie.

Nous verrons plus loin que cette notion d'orbite permet de mieux comprendre certains des outils légués par les Grecs comme les cas d'égalité ou de similitude des triangles.

3.2. Utilisation des invariants : l'exemple affine

Le principe

C'est un fait d'expérience que les invariants jouent un rôle essentiel en géométrie. Le principe qui va nous guider est encore dans l'esprit d'Erlangen : lorsqu'on travaille dans une géométrie donnée, les problèmes peuvent être résolus avec les invariants de cette géométrie. C'est plus qu'un principe car il y a un résultat théorique qui le justifie : *tous les théorèmes d'une géométrie correspondent à des relations (polynomiales) entre les invariants (polynomiaux) de cette géométrie*. Il ne peut être question de prouver ce métathéorème ici, on renvoie pour cela le lecteur à Perrin (2014a), mais connaître ce résultat est d'un grand secours pratique. Ainsi, dans le cas de la géométrie affine, on montre (*cf. loc. cit.*) qu'il n'y a qu'un invariant qui est l'aire (ou plutôt les rapports d'aires) et le principe ci-dessus affirme donc que l'on peut résoudre tous les problèmes de nature affine en utilisant cet invariant. De plus, les résultats à utiliser sont ceux qui décrivent l'invariance de l'aire par les transformations affines : ce sont exactement les **lemmes du collège** de Perrin (2011), c'est-à-dire les résultats suivants⁶, qui traduisent l'invariance de l'aire par symétrie centrale, symétrie oblique, transvection et dilatation :

Lemme. (*Lemme du demi-parallélogramme*).

Les diagonales d'un parallélogramme le partagent en deux triangles de même aire.

Lemme. (*Lemme de la médiane*).

La médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

Lemme. (*Lemme de la parallèle*).

Deux triangles de même base et dont les sommets sont situés sur une même parallèle à la base ont même aire.

Lemme. (*Lemme des proportions*).

Le rapport des aires de deux triangles qui ont un même sommet et des bases alignées est égal au rapport des bases.

Lemme. (*Lemme du chevron*).

Soit ABC un triangle, M un point du plan. On suppose que (AM) coupe (BC) en $A' \neq B, C$.

⁶ Le lecteur les établira sans peine, par exemple avec la formule $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$, voir aussi l'article de Perrin-Glorian et Pinvidic dans ce même numéro.

Alors on a $\frac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ACM)} = \frac{A'B}{A'C}$.

L'application la plus immédiate de ces principes est la preuve du théorème de Thalès via les aires (cf. l'article de Perrin-Glorian et Pinvidic dans ce même numéro). Voici quelques autres exemples.

Les médianes

Soit ABC un triangle, A' , B' , C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Les droites (BB') et (CC') se coupent (et pourquoi, au fait ?) en G . Alors G est sur (AA') . En effet, le lemme du chevron appliqué deux fois donne l'égalité $\mathcal{A}(GAB) = \mathcal{A}(GBC) = \mathcal{A}(GAC)$ et on en déduit que (AG) coupe (BC) en A' par le même lemme appliqué dans l'autre sens.

Le problème des tiers

On traite le cas équilatéral⁷. Dans ce cas, on sait que les triangles de même couleur ont même aire. Avec $IC = 2IB$, on voit que le triangle QRC est d'aire double de QRB (c'est le lemme du chevron) et on en déduit que le triangle central PQR a même aire que CRP . Mais le même lemme du chevron donne aussi $\mathcal{A}(AQC) = 2\mathcal{A}(AQB)$, donc $\mathcal{A}(APQ) = \mathcal{A}(APC)$, de sorte que les aires des sept petits triangles sont égales. En définitive, l'aire de PQR est bien le septième de celle de ABC .

Ménélaüs

On montre $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$ (cf. figure 8).

On écrit $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}(A'BC')}{\mathcal{A}(A'CC')}$ et $\frac{C'A}{C'B} = \frac{\mathcal{A}(C'AA')}{\mathcal{A}(C'BA')}$ par le lemme des proportions.

Il reste à montrer que l'on a $\frac{B'A}{B'C} = \frac{\mathcal{A}(A'C'A)}{\mathcal{A}(A'C'C)}$: c'est le lemme du chevron.

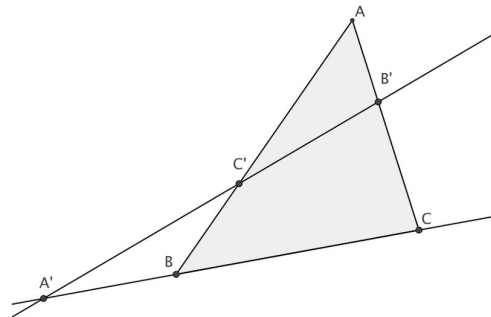


Figure 8

4. Critères de transitivité : les cas d'isométrie

Lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble X de manière non transitive, on est amené à déterminer ses orbites, donc à prouver un théorème du type suivant : *Soient $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$ si et seulement si x et y ont mêmes invariants.*

Nous allons étudier cette situation dans le cas où X est l'espace des triangles du plan et G le groupe des isométries.

4.1. Quels invariants ?

On connaît de nombreux caractères des triangles invariants par isométrie : les longueurs des côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, les trois angles α , β , γ , mais aussi bien d'autres (aire, périmètre,

⁷ Voir figure 7 ; pour une preuve élémentaire directe du cas général, voir Perrin (2011), exercice 225.

longueurs des médianes, des hauteurs, etc.). La question est de savoir lesquels caractérisent les triangles modulo isométrie.

4.2. Combien d'invariants ?

En général, un seul invariant ne suffit pas à déterminer les orbites de l'action de G sur X et une question essentielle est de trouver le nombre minimum d'invariants nécessaires. Pour cela, on raisonne sur la **dimension** (au sens des variétés). Ainsi, l'espace des triangles modulo isométrie est de dimension 3 c'est-à-dire qu'un triangle, à isométrie près, dépend de trois paramètres. En effet, un triangle est formé de trois points de \mathbb{R}^2 avec chacun deux coordonnées. L'espace des triangles dépend donc de six paramètres. Mais les isométries du plan sont de dimension trois. En effet, si l'on fixe A , et si une isométrie (directe) envoie A sur B , elle est composée de la translation de vecteur \overline{AB} suivie d'une rotation de centre B . Comme les translations sont de dimension 2 et les rotations de centre fixé de dimension 1 on a bien le compte. L'espace des triangles modulo isométrie est donc de dimension $6-3=3$, car chaque isométrie identifie les triangles qu'elle échange.

Cela impose que le nombre minimal d'invariants nécessaires pour caractériser un triangle modulo isométrie est trois. On peut ainsi répondre immédiatement à la question, posée dans le numéro 152 des *Chantiers de pédagogie mathématique* de l'APMEP : *Deux triangles qui ont même aire et même périmètre sont-ils isométriques ?* La réponse est évidemment non : il faut au moins trois invariants (cf. Perrin, 2013).

4.3. Quels invariants (bis) ?

Il faut donc trois invariants, mais pas n'importe lesquels, par exemple les trois angles ne conviennent pas car ils sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Dans cette optique, une question autrefois très classique est celle des résolutions de triangles. Il s'agit de déterminer un triangle (à isométrie près) connaissant trois de ses invariants, par exemple son aire et deux des longueurs de ses côtés, ou ses trois hauteurs. Il y a évidemment une profusion de tels exemples (pour les professeurs, c'était une mine inépuisable d'exercices). Si les invariants sont bien choisis, on va trouver seulement un nombre fini de solutions possibles.

4.4. Les cas d'isométrie

Cependant, le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un unique triangle à isométrie près, c'est ce que font les cas d'isométrie (avec comme invariants deux côtés et un angle, deux angles et un côté ou les trois côtés), donnant ainsi des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.

Deux points essentiels permettent d'en comprendre l'intérêt pratique :

- Quand, avec trois invariants, on a montré que deux triangles sont isométriques, on en déduit l'égalité des invariants autres que ceux utilisés.
- On peut montrer que deux triangles sont isométriques sans être obligé d'exhiber l'isométrie qui fait le travail. Comme auraient dit Pierre Dac et Francis Blanche : envoyer ce triangle sur cet autre ? Il peut le faire !⁸

⁸ https://www.youtube.com/watch?v=Vp_NrF9zfEw

4.5. Les cas d'isométrie dans l'enseignement

Les cas d'isométrie (ou égalité) des triangles étaient un des outils essentiels des collégiens d'autrefois pour faire de la géométrie. Bannis par la réforme des mathématiques modernes, ils ont fait leur réapparition en seconde en 2000, avant d'être balayés par les modifications de programmes de lycée de 2008, puis de réapparaître dans les programmes de collège de 2015 ! Ces tergiversations sont sans doute très préjudiciables à l'enseignement, notamment au regard de la formation des maîtres. Pourtant, il y a en faveur des cas d'isométrie de solides arguments, à la fois théoriques (nous les avons vus) et didactiques. La procédure d'utilisation des cas d'isométrie est très simple :

- l'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles de la figure ;
- on **incorpore** ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement « pareils » ;
- on montre que ces triangles sont isométriques en prouvant que trois de leurs éléments (autres que ceux convoités) sont égaux ;
- on conclut.

Voici deux exemples, simples mais révélateurs. On en trouvera d'autres dans l'article de Perrin-Glorian et Didier dans ce même numéro.

Exemple 1 : Soit ABC un triangle isocèle en A , la médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D . On porte E sur $[DA]$ (avec $E \notin [DA]$) tel que $AE = BD$ (cf. figure 9). Montrer que DCE est isocèle en C .

Exemple 2 : Soit ABC un triangle. On suppose que les hauteurs BB' et CC' sont égales. Montrer que ABC est isocèle. (cf. figure 10).

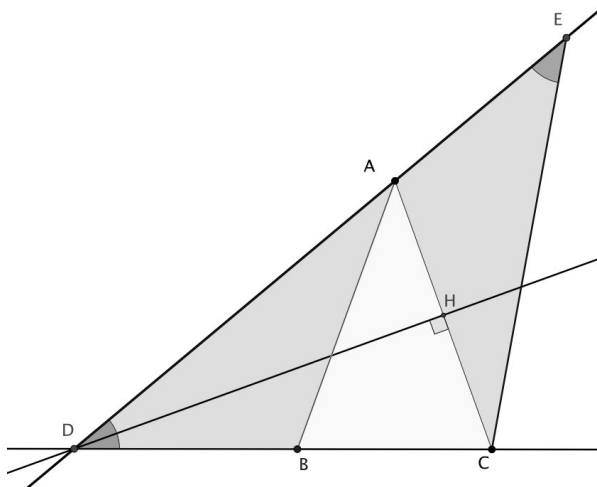


Figure 9 : Exemple 1.

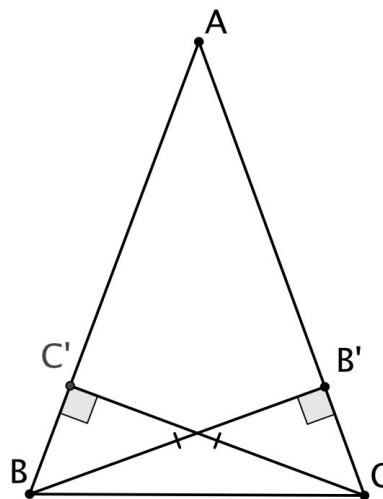


Figure 10 : Exemple 2.

Pour le premier, la preuve par les cas d'égalité est très simple. On note que le triangle ADC est isocèle (D est sur la médiatrice de $[AC]$, donc $DA = DC$). On en déduit l'égalité d'angles $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ et cet angle est aussi égal à \widehat{ABC} car ABC est isocèle en A . On considère les triangles ADB et CEA . Ils sont égaux. En effet, on a $AB = CA$ et $DB = EA$ par hypothèse. Il reste à voir l'égalité des angles \widehat{ABD} et \widehat{CAE} qui est claire car ce sont des supplémentaires respectifs de \widehat{ABC} et \widehat{DAC} . On conclut soit avec l'égalité des angles en D et E , soit avec $AD = CE = CD$.

Pour le second, on peut utiliser soit l'égalité des triangles BCC' et CBB' et conclure à l'égalité des angles en B et C , soit l'égalité de ABB' et ACC' et conclure avec $AB=AC$.

Bien entendu, on peut aussi donner des preuves de ces résultats en utilisant les transformations comme le lecteur ne manquera pas de le faire. Cependant, dans les deux cas ces preuves sont plus délicates.

- Dans le premier cas, l'isométrie pertinente n'est pas évidente. Une possibilité est d'introduire la médiatrice de $[BC]$ et de composer deux symétries, (cf. Perrin, 2021), avec deux difficultés importantes : introduire un objet supplémentaire et composer les transformations. On voit ici, avec éclat, tout l'intérêt des cas d'isométrie comme critères de transitivité : on n'a pas besoin de savoir quelle est la transformation qui passe d'un triangle à l'autre.
- Dans le deuxième cas, la transformation pertinente est évidente, il s'agit de la symétrie par rapport à la médiatrice de $[BC]$, mais ce qui ne l'est pas c'est de prouver qu'elle fait bien ce que l'on pense⁹.

Outre ces points fondamentaux, il y a beaucoup d'autres arguments en faveur de l'usage des cas d'isométrie par rapport à celui des transformations (cf. Kahane, 2002 ; Perrin, 2003 ; ou encore Duperret, Richeton & Perrin, 2001 ; et surtout Brochure, 2021) : les triangles peuvent se voir comme des surfaces, donc sont plus immédiatement perceptibles par les jeunes élèves que les points ou les lignes (cf. l'article de Perrin-Glorian et Didier dans ce même numéro), la rédaction d'une solution par les cas d'isométrie est souvent plus simple. Enfin, pour que l'usage des transformations soit efficace, il faut pratiquement les connaître toutes, ce qui n'est pas le cas au début du cursus.

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont été l'un des supports du groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de Brochure (2021).

De fait, cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse un usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les thèmes évoqués ci-dessus :

- utilisation des invariants (et notamment des aires et des angles) ;
- utilisation des cas d'isométrie et de similitude des triangles.

Références bibliographiques

Brochure (2021). *Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer*. IREM de Paris, brochure n°100 (268 pages).
<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf>

David, M.-C., Haglund, F. & Perrin, D. (2008). *Géométrie affine*. Polycopié, Orsay.
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/CAPES/geometrie/GeometrieAffine.pdf>

Duperret, J.-C., Perrin, D. & Richeton, J.-P. (2001). Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie. *Bulletin APMEP*,

⁹ L'analyse de cet exercice est détaillée dans Brochure (2021), p. 58.

435, 472-497.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Traduction française : *Les fondements de la géométrie*. Dunod, 1971.

Kahane, J.-P. (dir.) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Odile Jacob, Paris.

Klein, F. (1974). *Le programme d'Erlangen*. Jacques Gabay, Paris.

Perrin, D. (1996). *Cours d'algèbre*. Ellipses, Paris.

Perrin, D. (2003). Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations. *Repères IREM*, 53, 91-110.

Perrin, D. (2011). *Mathématiques d'école*. Cassini, Paris.

Perrin, D. (2013). *Triangle, aire, périmètre et isométries*.
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/aireperi/APM-aire-perimetre10.pdf>

Perrin, D. (2014a). *Géométrie projective et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes, Partie 2, Invariants*.
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie2.pdf>

Perrin, D. (2014b). *Géométrie projective et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes*. Postface.
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPostface.pdf>

Perrin, D. (2021). Transformations : groupes, transitivité, invariants. *Conférence à la journée Maths-Monde de l'IREM de Paris*.
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/MM21redaction.pdf>

Perrin, D. (2050). *Une axiomatique pour la géométrie du collège*. Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne).