ACTIVITÉ DU N° 115

COURTOISIE DE CAMBRIOLEURS
ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

Rémi MOLINIER[1]
Institut Fourier, IREM de Grenoble, Université Grenoble Alpes

Rappel de l'énoncé

Deux cambrioleurs courtois s'introduisent indépendamment dans une bijouterie pour dérober un collier de rubis et saphirs, enfilés les uns après les autres le long d'un unique fil d'or blanc, d'une très grande valeur. L'un passe par la porte, le deuxième par le toit et ils se retrouvent en même temps devant la vitrine du collier. Comme ils sont courtois, ils décident de se partager le collier pour que chacun ait autant de rubis et autant de saphirs. Cependant, pour limiter le bruit et ne pas perdre trop de temps (il faut découper le collier avec minutie), ils souhaitent effectuer le minimum de coupes. Si le collier était bien symétrique, une seule coupe suffirait ! Cependant celui-ci est complexe (d'où sa valeur) et il n'est plus très clair qu'une coupe suffira...

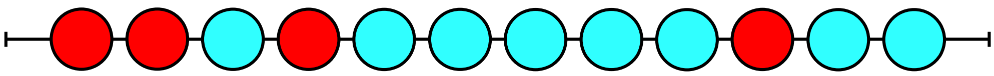

Figure 1 *: Un exemple de collier avec $N = 12$ perles, $R = 4$ rubis (en rouge) et $S = 8$ saphirs (en bleu).*

Le problème est alors le suivant :

> *Étant donné un collier de rubis et de saphirs, quel est le plus petit nombre de coupes qui permettent de répartir équitablement les rubis et les saphirs entre deux individus ?*

Résoudre ce problème pour l'exemple donné ci-dessus, puis pour n'importe quel collier.

Quelques informations

Ce problème, introduit par Noga Alon et Douglas B. West en 1986 (sous une forme plus générale), a fait l'objet d'une activité de deux heures du club de mathématiques de Grenoble[2] en direction de jeunes du CE2 à la terminale. Il a été motivé par une vidéo[3] de la (très bonne) chaîne youtube *Numberphile*[4]. Ce problème demande très peu de bagage mathématiques et se prête très bien aux manipulations.

Lors de la séance, les participant·e·s étaient réparti·e·s en petits groupes. Elles ou Ils avaient à leur disposition une fiche « activité » (en libre accès sur le site du club[2]) ainsi que des petits cubes de deux couleurs différentes (tout autre type de matériel permettant de modéliser les perles peut faire l'affaire). Les plus jeunes (CE2 et CM1) ont rencontré quelques difficultés mais ont pu

[1] remi.molinier@univ-grenoble-alpes.fr

[2] http://clubmaths-irem.univ-grenoble-alpes.fr

[3] https://www.youtube.com/watch?v=rwiEiGqgetU

[4] https://www.youtube.com/channel/UCoxcjq-8xIDTYp3uz647V5A

aboutir à une conjecture en fin de la séance. Les autres groupes (donc dès le CM2) ont réussi de plus à démontrer cette conjecture et les plus grands ont même pu s'aventurer sur le problème général en augmentant le nombre de cambrioleurs.

Éléments de solution

Premières conditions

Tout d'abord, pour qu'un partage soit possible, il faut (et il suffit) que le nombre de rubis et le nombre de saphirs soient tous les deux pairs. En fait, si on s'autorise à couper en deux les perles, cela marche aussi pour les nombres impairs et les arguments sont les mêmes (en travaillant alors avec des demi-perles). Dans la suite, on supposera tout de même que ces nombres sont pairs et on notera $R=2r$ le nombre de rubis, $S=2s$ le nombre de saphirs et $N=R+S$ le nombre total de perles (qui est donc pair lui aussi).

En étudiant des exemples, vous avez sûrement dû noter que parfois une coupe suffisait et que, pour d'autres, deux semblaient nécessaires. Vous avez peut être aussi trouvé un exemple pour chaque valeur de $N>3$ qui exige nécessairement deux coupes. C'est le cas, par exemple, du collier particulier où les R premières perles sont des rubis puis les S restantes des saphirs (voir figure 2).

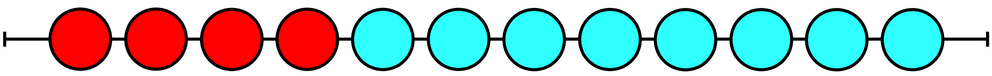

Figure 2 *: Un exemple de collier où il faut nécessairement deux coupes.*

Pour partager ce collier équitablement, il faut forcément couper une fois au milieu des rubis et une fois au milieu des saphirs. Ainsi, 2 est un minorant du nombre recherché. Il faut ensuite démontrer qu'on s'en sort toujours avec une ou deux coupes. Notez tout d'abord qu'à la fin du découpage équitable, chaque individu recevra $r+s$ perles au total. On peut alors procéder comme suit.

Glissement de fenêtre

On va « scanner » le collier avec une fenêtre de $r+s$ perles. On commence par la fenêtre la plus à gauche et on va se décaler progressivement vers la droite, d'une perle à la fois, jusqu'à arriver à la fenêtre la plus à droite (voir figure 3).

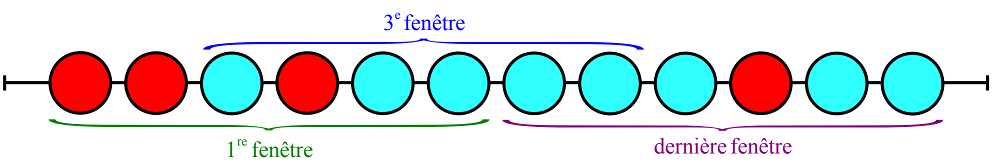

Figure 3 *: Fenêtres de $r+s$ perles (ici $r+s=\frac{N}{2}=6$).*

Comme la taille d'une fenêtre est $r+s$, pour que la fenêtre corresponde exactement à une part équitable, il suffit qu'il y ait bien r rubis dans celle-ci. On a alors les deux propriétés suivantes :

1. la première fenêtre et la dernière fenêtre forment une partition du collier car on a $N=R+S=2r+2s=2(r+s)$;
2. quand on décale la fenêtre d'une perle vers la droite (ou vers la gauche), le nombre de rubis dans celle-ci évolue de seulement trois manières possibles : rester constant,

augmenter de un ou diminuer de un.

Si le nombre de rubis est *r* dans la première fenêtre, il suffira alors de découper (en une coupe) au milieu du collier pour le partager équitablement. Dans la suite, on suppose que la première fenêtre ne contient pas exactement *r* rubis. D'après la propriété 1, si dans la première fenêtre le nombre de rubis est plus grand que *r*, il sera plus petit que *r* dans la dernière fenêtre. De même, si le nombre de rubis est plus petit que *r* dans la première fenêtre, il sera plus grand que *r* dans la dernière fenêtre. D'après la propriété 2, chaque décalage de la fenêtre ne peut changer que d'au plus un le nombre de rubis dans la fenêtre. Ainsi, entre la fenêtre tout à gauche et la fenêtre tout à droite, il y a au moins une fenêtre qui contient exactement le bon nombre de rubis.

Un problème plus général

On pourrait avoir envie de généraliser la question et deux choix s'offrent naturellement :

- augmenter le nombre de cambrioleurs,
- augmenter le nombre de type de perles.

Le problème général est donc :

Étant donné un collier contenant P types de perles (émeraude, diamant, rubis, saphir, topaze, etc.), quel est le plus petit nombre de coupes qui permet de répartir chaque type de perles équitablement entre C individus ?

Solution générale

Tout d'abord, pour permettre un tel découpage, il faut que le nombre de perles de chaque type soit un multiple de *C* (là encore, si on s'autorise à partager les perles en morceaux, on peut contourner ce problème). Ensuite, en considérant un collier où les perles de chaque type sont disposées à la suite comme dans la figure 2, on voit que le nombre recherché est supérieur à $P(C-1)$. On peut alors démontrer qu'on peut toujours s'en sortir en au plus $P(C-1)$ coupes mais la preuve n'est pas élémentaire. La solution du cas général a été démontrée par Noga Alon en 1987 et ses arguments utilisent un théorème classique (mais non trivial !) de topologie : le théorème de Borsuk-Ulam.

Cependant, certains cas particuliers (autre qu'avec $P=2$ et $C=2$) sont encore abordables avec des outils élémentaires.

Le cas $P=2$, *C* étant une puissance de 2

Connaissant la solution pour deux cambrioleurs, on peut facilement obtenir une solution lorsque *C* est une puissance de 2. Par exemple pour quatre cambrioleurs, on partage d'abord le collier en deux puis chaque part doit être partagée en deux à nouveau. Pour huit, on fera de même en répétant trois fois le processus. Pour développer proprement un argumentaire, on pourra faire une récurrence sur l'entier *m* tels que $C=2m$.

En fait, le cas où *C* est quelconque, tout en gardant $P=2$ est aussi abordable.

Le cas $P=2$ et $C>1$

Ici, on démontre par récurrence sur *C* que la propriété suivante est vraie pour tout $C>1$.

$Pr(C)$: Tout collier de R rubis et S saphirs avec R et S multiples de C peut être partagé équitablement entre C individus en au plus $2(C-1)$ coupes.

La propriété $Pr(2)$ à été démontrée au début de l'article.

Pour l'hérédité, nous allons là encore utiliser un argument de fenêtre glissante. Supposons donc que pour un $C>1$ donné, $Pr(C)$ est vraie et démontrons qu'alors $Pr(C+1)$ est aussi vraie. Pour cela, considérons un collier avec R rubis et S saphir et supposons que R et S sont multiple de $C+1$; on note $R=(C+1)r$ et $S=(C+1)s$. On considère alors une fenêtre glissante de taille $r+s$ qui commence tout à gauche et termine tout à droite. Comme précédemment, quand on décale d'une perle vers la droite, le nombre du rubis reste constant, augmente de 1 ou diminue de 1. Examinons les différents cas possibles.

- **Au départ, quand la fenêtre est tout à gauche, le nombre de rubis dans celle-ci est *r*.** Cette fenêtre correspond alors à une part équitable du collier et on peut effectuer une coupe pour séparer celle-ci du reste du collier. Le reste est alors un collier formé de $C \cdot r$ rubis et $C \cdot s$ saphirs. Par hypothèse de récurrence, on peut alors le partager équitablement entre C individus en au plus $2(C-1)$ coupes. On a ainsi effectué au total au plus $2(C-1)+1$ coupes, or $2(C-1)+1=2C-1<2C$.
- **Au départ, quand la fenêtre est tout à gauche, le nombre de rubis est en excès (*i.e.* plus grand que *r*)**. Il faut voir qu'en décalant vers la droite, à un moment on arrive sur une fenêtre contenant exactement r rubis. Pour cela, on peut remarquer que si on partitionne le collier en $C+1$ fenêtres, les nombres de rubis dans chacune d'elles ne peut être en excès à chaque fois. Ainsi il existe donc une fenêtre ayant strictement moins de r rubis et notre fenêtre glissante arrivera nécessairement sur une fenêtre ayant exactement r rubis entre temps. Ainsi, en deux coupes, on détache cette fenêtre du collier. Celle-ci correspond bien à une part équitable et, en « recollant » les deux bouts restants, on obtient un collier avec $C \cdot r$ rubis et $C \cdot s$ saphirs à partager entre les C individus restants. Par hypothèse de récurrence, cela peut s'effectuer en au plus $2(C-1)$ coupes. On aura ainsi réalisé un partage équitable entre les C individus en $2(C-1)+2$, soit $2C$ coupes.
- **Au départ, quand la fenêtre est tout à gauche, le nombre de rubis est en défaut (*i.e.* plus petit que *r*).** Ce cas se traite de façon similaire au cas précédent et est laissé au lecteur.

Ainsi, $Pr(C+1)$ est vraie dans tous les cas. En conclusion, on a bien démontré que, si $Pr(C)$ est vraie, alors $Pr(C+1)$ est vraie et, comme $Pr(2)$ est vraie, on obtient par récurrence que pour tout $C>1$ $Pr(C)$ est vraie.

Un petit dernier ?

Pour finir, le lecteur est invité à regarder le cas où $C=2$ et P est quelconque mais où chaque type de perle apparaît exactement q fois. Pouvez vous démontrer qu'au plus $P(C-1)$ découpes suffisent toujours ?[5]

Références bibliographiques

Alon, N. & West, D. B. (1986). The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces. *Proceedings of the American Mathematical Society, 98*(4), 623-628.

Alon, N. (1987). Splitting necklaces. *Advances in Mathematics, 63*(3), 247-253.

[5] On pourra commencer avec $q=2$.