LES DIVISIONS AU PRISME DE LA PROPORTIONNALITÉ

Arnaud SIMARD[1]
INSPÉ de l'Université de Franche-Comté
FR-Educ, LMB, COPIRELEM

Résumé. La distinction division-partition / division-quotition est bien connue et son impact en termes de réussite chez les élèves est largement documentée. Cet article a pour but de donner une interprétation mathématique de la difficulté liée aux divisions-quotition en se basant sur la catégorisation des problèmes multiplicatifs (et donc de division) comme sous-catégorie des problèmes de proportionnalité.

Mots-clés. Division, quotition, partition, proportionnalité.

Abstract. The partitive-division / quotitive-division distinction is well known and its impact in terms of student success is widely documented. The purpose of this article is to provide a mathematical interpretation of the difficulty associated with quotitive-divisions based on the categorization of multiplicative (and therefore divisive) problems as a subcategory of proportionality problems.

Keywords. Division, quotitive, partitive, proportionality.

Introduction

Les parutions consécutives des textes *La résolution de problèmes mathématiques au collège* (MENJS, 2021b) et *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* (MENJS, 2022) sont à l'origine de cet article. La proportionnalité est une notion mathématique dont l'apprentissage est largement centré sur les cycles 3 et 4 (bien qu'elle soit utilisée dès le cycle 1 et approfondie par le travail sur la linéarité après le cycle 4). Cette notion est fortement ancrée dans le concret par le travail sur les grandeurs et mesures (MENJS, 2012b, chap. VI). Il convient donc de donner une attention toute particulière à cette notion qui traverse les cycles et les disciplines.

Lors d'interventions sur la proportionnalité en direction des enseignant de cycle 3, j'ai été amené à discuter du problème suivant :

> *J'ai 45 jetons. Chaque joueur recevra 5 jetons. Combien de joueurs y aura-t-il ?*

La modélisation par la division et le calcul qui suit « $45 \div 5 = 9$ » (sans unité) ou « $45\,jetons \div 5\,jetons = 9$ » (avec unité) apporte la réponse « $9\,joueurs$ ». Cette résolution a souvent été suivie de la question « Pourquoi, lorsque l'on divise des jetons par des jetons, obtient-on des joueurs ? »… cette question, légitime, n'est pas traitée dans le document Eduscol *Grandeurs et mesures au cycle 3* (MENJS, 2016, pp. 5-6). L'énoncé proposé précédemment relève de la catégorie des divisions-quotition (recherche du nombre de parts), il est traité sous l'angle de la proportionnalité et le problème de compréhension de la résolution est lié aux unités en jeu. Ce problème n'est pas réglé ni dans MENJS (2021b) ni dans MENJS (2022).

Dans MENJS (2022) il est mentionné :

> *[…] il est important de travailler à la fois des problèmes de recherche de la valeur d'une part et des problèmes de recherche du nombre de parts, les seconds étant en général plus difficiles à*

[1] arnaud.simard@univ-fcomte.fr

résoudre que les premiers, car non conformes à la conception intuitive de la division, qui oriente vers la recherche de la valeur de la part dans un scénario de partage (MENJS, 2022, p. 26).

Mais le document n'entre pas dans le détail de la difficulté.

Dans MENJS (2021b), le problème « Coût carbone » donne lieu une remarque :

> *[...] le problème est essentiellement centré sur la proportionnalité et on veillera à un accompagnement de l'élève quant à sa compréhension des unités utilisées et la manipulation de ces dernières* (MENJS, 2021b, p. 169).

ce qui justifie un travail en amont, de la part de l'enseignant, sur les unités en jeu dans les problèmes de proportionnalité. Pour autant, le problème intitulé « Des robinets qui coulent » :

> *On dispose de deux robinets. Le premier est capable de remplir un réservoir d'eau de 24 L en 1 minute, le second peut remplir ce même réservoir en 2 minutes. En ouvrant les deux robinets au même moment, combien de temps faudrait-il pour remplir un jacuzzi avec 1 080 L d'eau ?* (MENJS, 2021b, p. 164).

est suivi de la démarche de résolution formulée comme suit :

> *[...] Par minute, R1 (le premier robinet) remplit 24 L et R2 remplit 12 L : à eux deux, ils remplissent 36 L en une minute. Il faut 30 ($=1080\div 36$) minutes pour remplir le jacuzzi* (*ibid.*, p. 166).

Nous reconnaissons ici une division-quotition (recherche du nombre de parts de 36 L dans 1080 L). Et, encore une fois, on pourrait penser que l'on divise des litres par des litres pour obtenir des minutes. Bien entendu, la difficulté de cet exercice réside également dans le raisonnement pour passer des données individuelles $24\,L/min$ et $24\,L/2\,min$ à une donnée collective $36\,L/min$ (ce qui, dans la solution, est considéré comme évident).

La difficulté des élèves face aux divisions-partition et divisions-quotition a déjà fait l'objet de nombreuses études (Vergnaud, 1983 ; Levain, 1992 ; Fishbein *et al.*, 1985 ; Bell *et al.*, 1984). Cet article a pour but de donner une interprétation mathématique de la difficulté liée aux divisions-quotition en se basant sur la catégorisation des problèmes multiplicatifs (et donc de division) comme sous-catégorie des problèmes de proportionnalité.

1. Division partition, division quotition

Les énoncés ci-dessous utilisent les mêmes données numériques et produisent le même résultat numérique :

> ***Exemple 1 :*** *J'ai 45 jetons que je dois répartir équitablement entre 5 joueurs. Combien de jetons aura chaque joueur ?*
>
> ***Exemple 2 :*** *J'ai 45 jetons. Chaque joueur recevra 5 jetons. Combien de joueurs y aura-t-il ?*

Remarque : Dans ces deux exercices se cache un implicite. Dans l'exemple 1, il est sous-entendu que l'on répartit tous les jetons. Dans l'exemple 2 il est sous-entendu que l'on cherche le nombre maximum de joueurs.

Ces deux problèmes ont pour solution numérique la valeur 9 qui est le résultat de la division de 45 par 5 (division euclidienne avec reste nul). Or, dans le premier problème, il s'agit de trouver la valeur de chaque part et dans le second problème il s'agit de trouver le nombre de parts.

Ces deux types de divisions sont bien connus dans la littérature didactique (Vergnaud, 1983 ; Levain, 1992 ; Fishbein *et al.*, 1985 ; Bell *et al.*, 1984). Selon MENJS (2022), *« les seconds* *(problème de divisions – quotition) sont en général plus difficiles à résoudre que les premiers, car non conformes à la conception intuitive de la division ».* Les recherches afférentes ne donnent pas toutes les mêmes résultats — Levain (1992) tempère cette difficulté, mais il semble que la version partition d'un problème de division (recherche de la valeur d'une part) est effectivement mieux réussie que la version quotition (recherche du nombre de parts) du problème avec les mêmes données numériques (Bell *et al.*, 1984).

Le vocabulaire utilisé pour désigner ces deux types de divisions n'est pas stabilisé mais on retiendra que :

- l'exemple 1 correspond à la division partition ou division partage ou recherche de la valeur d'une part ;
- l'exemple 2 correspond à la division quotition ou division groupement ou recherche du nombre de parts.

Ces résultats ont été intégrés dans la plupart des manuels scolaires pour différencier l'enseignement des problèmes de division-partage et de division-groupement. Les situations de partage sont travaillées depuis la maternelle et donc bien connues par fréquentation comme en témoigne le programme de l'école maternelle :

> *Commencer à résoudre des problèmes de composition de deux collections, d'ajout ou de retrait, de produit ou de partage (les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 10)* (MENJS, 2021a, p. 16).

Il paraît donc naturel de penser que les schèmes (Vergnaud, 1985) de résolution de problèmes de division-partage se construisent depuis la maternelle et que la confrontation ultérieure aux problèmes de division-groupement est, de fait, problématique pour les élèves. Si l'on se réfère aux usages dans les classes (distributions de cartes ou de jetons pour un jeu, distribution de fruits, de bonbons, de gâteaux pour le goûter…), le nombre de joueurs ou de convives est fixé à l'avance (nombre d'élèves dans un atelier jeu, nombre d'élèves de la classe pour le goûter) et on distribue à chacun une part équivalente, ce qui est le sens de la division-partage. Or, pour la division-groupement, le problème est inverse, à savoir, on a tant de jetons, il faut des paquets de 5 jetons par joueur, combien de joueurs peut-on avoir ? Question qui ne se pose (presque) jamais en classe. Pour l'exemple 1 (45 jetons à répartir équitablement entre 5 personnes), les images mentales sont ainsi facilement mobilisables grâce à la fréquentation des situations de partage (on peut imaginer les 5 personnes et imaginer la distribution un à un de jetons par exemple).

Pour autant, la représentation sous forme « distribution » de la division-partage soulève tout de même un problème en termes d'unités, problème qui ne semble être jamais discuté (certainement par habitude de cette mise en scène). L'exemple 1 peut être considéré comme archétypal de l'introduction de la division euclidienne comme soustraction réitérée :

> ***Exemple 1 :*** *J'ai 45 jetons que je dois répartir équitablement entre 5 joueurs. Combien de jetons aura chaque joueur ? Combien de jetons reste-t-il ?*
>
> Après la première distribution d'un jeton par joueur, on a : $45\ jetons-5\ jetons=40\ jetons$;
>
> après la deuxième distribution d'un jeton par joueur, on a : $40\ jetons-5\ jetons=35\ jetons$;
>
> …
>
> après la huitième distribution d'un jeton par joueur, on a : $10\ jetons-5\ jetons=5\ jetons$;
>
> après la neuvième distribution d'un jeton par joueur, on a : $5\ jetons-5\ jetons=0\ jetons$.

Le nombre de distributions donne la valeur d'une part, soit 9 jetons par joueur. Dans cette résolution nous avons implicitement fait la correspondance « 1 joueur $\Leftrightarrow$ 1 jeton » lors de la distribution tour à tour. La notion de « jeton par joueur » est explicite en tant que correspondance mais pas en tant qu'unité quotient. Il est primordial de bien identifier les unités et de les expliciter. Le simple calcul numérique « $45-5=40$ » peut laisser place à l'interprétation « $45\ \textit{jetons} - 5\ \textit{joueurs} = 40\ \textit{jetons}$ » en cohérence avec les données de l'énoncé mais loin de son sens.

Dans l'exemple 2, la représentation mentale de la situation est moins aisée car moins vécue (attention, vu l'énoncé, il ne s'agit pas simplement d'imaginer des paquets de 5 jetons, il faut faire intervenir les joueurs et donc faire une correspondance « un joueur $\Leftrightarrow$ un paquet de 5 jetons »). Cette construction sémiotique de la division-partition peut être une explication à la différence de traitement des problèmes de partition et de quotition. Nous proposons, dans la partie **2.**, de voir cette différence de traitement par le prisme de la proportionnalité.

Pour aller plus loin dans la réflexion, nous pouvons également nous intéresser à la technique « classique » de la division. En effet, lorsque l'on pose en potence la division $18 \div 7$, les élèves apprennent généralement à dire « dans 18, combien de fois 7 ? ». Cette question revient à la recherche du nombre de parts de 7 unités dans 18 unités. Il s'agit donc d'une division quotition (on cherche le « quotient »). Dans ces propos généralistes, on peut remarquer que si le « sens » de la division est amené par la division-partition, la technique, elle, est basée sur la division-quotition.

2. Les divisions vues comme des problèmes de proportionnalité

Pour parler de proportionnalité, nous renvoyons le lecteur aux articles de Simard (2012a, 2012b) mais nous résumons ce qui nous sera utile dans la suite par le schéma suivant :

Grandeur 1 (unité G_1)	N_1	1
Grandeur 2 (unité G_2)	N_2	$VP\,1$

Tableau 1

Nous supposons que deux grandeurs 1 et 2 sont proportionnelles (*i.e.* liées par une relation multiplicative via une fonction linéaire). La mesure N_1 est donnée dans l'unité G_1 et correspond à la mesure N_2 donnée dans l'unité G_2. La valeur numérique « 1 » de la première ligne est la mesure 1 dans l'unité G_1 ou encore $1\,G_1$. La mesure $VP\,1$ dans la seconde ligne est l'abréviation de « valeur pour 1 » exprimée dans l'unité G_2. Le coefficient de proportionnalité a s'exprime en unité quotient G_2/G_1.

La situation présentée se résume par la fonction linéaire f telle que $f(x)=a\times x$ où x est la variable correspondant aux mesures de la grandeur 1, f est la fonction qui à la mesure x exprimée dans l'unité G_1 fait correspondre la mesure $f(x)$ exprimée dans l'unité G_2. Le nombre a est un scalaire appelé « coefficient de linéarité » (dont la valeur numérique coïncide avec la valeur numérique du coefficient de proportionnalité exprimée dans l'unité G_2/G_1).

De manière numérique, sans unité, nous avons : $\dfrac{N_2}{N_1} = VP\,1 = a$.

Or la différence entre $\frac{N_2}{N_1}$, $VP\,1$ et a réside dans les unités avec lesquelles il faut parler de ces valeurs. En effet, $VP\,1$, la « valeur pour 1 », est une mesure de la grandeur 2 exprimée en unité G_2. Le coefficient de proportionnalité s'exprime comme une grandeur quotient des deux unités en jeu, à savoir G_2/G_1. Et enfin, le coefficient de linéarité de la fonction linéaire sous-jacente est un scalaire sans unité. Dans les exemples 1 et 2 donnés en partie **1.**, la grandeur 1 est « la quantité de joueurs » exprimée en unité « *joueurs* ». La grandeur 2 est « la quantité de jetons » exprimée en unité « *jetons* ». Pour l'exemple 1 (division-partition), $N_1=5$, $N_2=45$, on demande la valeur $VP\,1$. On peut représenter ce problème par le schéma suivant :

Nombre de joueurs	5	1
Nombre de jetons	45	?

Tableau 2

Dans l'exemple 2 (division-quotition), $VP\,1=5$, $N_2=45$, on demande la valeur de N_1, ce qui peut se représenter sous la forme :

Nombre de joueurs	?	1
Nombre de jetons	45	5

Tableau 3

La catégorisation des problèmes multiplicatifs donne à voir les problèmes de divisions comme des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle dont un des trois termes donnés est l'unité.

3. Qualification et unités en jeu

Les énoncés des exemples 1 et 2 attendent des procédures basées sur la division. Dans cette partie nous allons étudier la procédure attendue (division) sous le prisme de la proportionnalité[2]. En premier lieu, nous pouvons réécrire les exemples 1 et 2 sous la forme archétypale des problèmes de proportionnalité[3]. Les énoncés suivants sont volontairement réduits, il conviendrait de préciser que les situations sont supposées proportionnelles.

Exemple 1R : *Pour 5 joueurs, il faut 45 jetons. Combien faut-il de jetons pour 1 joueur ?*

Exemple 2R : *Pour 1 joueur il faut 5 jetons. Combien de joueurs peut-on avoir avec 45 jetons ?*

Nous avons choisi de nous intéresser aux unités en jeu dans la résolution d'un problème de division vu sous le prisme de la proportionnalité car il nous semble important de clarifier les données en jeu pour l'enseignement. La résolution de problème est une activité mathématique maintenant largement étudiée et nous placerons notre étude dans le cadre développé par Houdement (2017). En particulier, l'activité de qualification permet de porter un regard intéressant sur les deux exemples 1R et 2R. La qualification consiste à pouvoir raccrocher les valeurs numériques d'un problème arithmétique (issues de l'énoncé ou de calculs) aux grandeurs en jeu dans l'énoncé pour pouvoir expliciter à chaque étape de la résolution ce que l'on

[2] Il ne s'agit pas ici de lister les procédures de proportionnalité possibles pour ces énoncés. Nous laissons le lecteur se livrer à cet exercice, s'il le souhaite.

[3] Ils sont ainsi renommés respectivement Exemple 1R et Exemple 2R, « R » pour « Revu ».

manipule. Dans le contexte des exemples ci-dessus, nous pouvons qualifier les calculs à effectuer avec les unités choisies pour les grandeurs en jeu.

Face à ces exemples, le document *Grandeurs et mesures au cycle 3* (MENJS, 2016) propose les solutions suivantes :

- Solution de l'exemple 1R : « $45\,jetons \div 5 = 9\,jetons$ ». Cette procédure revient à considérer le nombre « 5 » comme un scalaire (nombre sans unité) alors que dans l'énoncé ce nombre n'est pas un scalaire mais une mesure. Cette procédure, vue en termes de proportionnalité, revient à dire « 1 joueur, c'est 5 fois moins que 5 joueurs », il faut donc « 5 fois moins de jetons ». Ici, le nombre « 5 » est bien un scalaire et la procédure se base sur la propriété multiplicative de la linéarité (MENJS, 2016, p. 6).
- Solution de l'exemple 2R : « $45\,jetons \div 5\,jetons = 9$ ». Cette procédure propose une modélisation par la division, un calcul avec des unités… mais omet la réponse. Cette réponse semble évidente « 9 *joueurs* »… mais cette évidence cache la difficulté de transformation du scalaire « 9 » en mesure « 9 *joueurs* ». Et cause la question : *« pourquoi, lorsque l'on divise des jetons par des jetons, obtiendrait-on des joueurs ? »*. Encore une fois, cette procédure vue en termes de proportionnalité est claire, il s'agit de trouver le rapport scalaire entre 5 jetons et 45 jetons *« il y a 9 fois 5 jetons dans 45 jetons ». « Si 5 jetons correspondent à 1 joueur, alors 9 fois 5 jetons correspondent à 9 fois 1 joueur ou 9 joueurs »*. Il s'agit d'une procédure basée sur la propriété multiplicative de la linéarité (MENJS, 2016, p. 6).

Les deux solutions proposées précédemment reposent sur l'identification du coefficient multiplicatif qui fait passer « de 5 à 1 » (exemple 1R) et « de 5 à 45 » (exemple 2R). Dans l'exemple 1R, ce coefficient est évident alors que dans l'exemple 2R, il résulte d'un calcul. L'exemple 2R est donc moins « simple mathématiquement » que l'exemple 1R.

Nous allons maintenant regarder des solutions apportées aux exemples 1R et 2R où les données numériques seront systématiquement liées à leur unité.

- Exemple 1R : On divise le nombre total de jetons par le nombre total de joueurs pour obtenir le nombre de jetons par joueur. On trouve ensuite le nombre de jetons à donner à un joueur.
- Exemple 2R : On divise le nombre total de jetons par le nombre de jetons par joueur, pour trouver le nombre de joueurs.

Nous allons expliciter clairement les unités en jeu dans ces procédures en analysant finement les équations aux dimensions.

Dans l'exemple 1R, on cherche la « valeur pour 1 ». On divise un nombre de jetons (45) par un nombre de joueurs (5), on trouve un nombre qui s'exprime en jetons par joueur (*jetons/joueur*)[4]. Nous calculons implicitement le coefficient de proportionnalité $\left(a = \dfrac{45\,jetons}{5\,joueurs} = 9\,jetons / joueur\right)$ de la situation. Puis, pour répondre à la question posée, on utilise implicitement ce coefficient de proportionnalité pour dire qu'à 1 joueur, on fait

[4] Nous préférons la notation « *jetons/joueur* » à la notation $\dfrac{jetons}{joueurs}$ qui pourrait se lire « jetons sur joueurs »… encore un problème de verbalisation qui reste à explorer.

correspondre 9 jetons $\left(9\,\dfrac{jetons}{joueurs}\times 1\,joueur = 9\,jetons\right)$. Cette procédure consiste donc, implicitement, en un calcul du coefficient de proportionnalité suivi d'une utilisation du coefficient de proportionnalité afin d'obtenir la valeur pour 1.

Dans l'exemple 2R, on cherche le nombre de joueurs potentiels avec 45 jetons, la solution numérique attendue est « $45 \div 5 = 9$ ». La qualification pour cet exemple 2 est nettement plus compliquée, en effet on divise le nombre total de jetons (45) par le nombre de « jetons par joueur » (5), le calcul que l'on obtient, avec les unités est alors $\dfrac{45\,jetons}{5\,jetons/joueur} = 9\,\dfrac{jetons}{\dfrac{jetons}{joueurs}} = 9\,joueurs$. Ici, on utilise le nombre « 5 » comme étant le nombre de jetons par joueur, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité de la situation et pas uniquement un nombre de jetons. Ainsi, on utilise implicitement le coefficient de proportionnalité. Cette procédure consiste donc, implicitement, en une identification du coefficient de proportionnalité suivi d'une utilisation de ce coefficient de proportionnalité (mais en divisant par ce coefficient). L'équation aux unités est plus complexe que dans l'exemple 1R.

Pour aller plus loin, on peut aussi interpréter la division par le coefficient de proportionnalité comme l'utilisation implicite du coefficient de proportionnalité de la situation inverse. A savoir considérer que « diviser par $5\,jetons/joueur$ » c'est multiplier par « $\dfrac{1}{5}\,joueur/jeton$ ». Ce qui correspond à la représentation suivante :

Nombre de joueurs	?	1
Nombre de jetons	45	5

Tableau 4

Or l'unité quotient « joueurs par jeton » n'a pas de réalité tangible, elle ne permet pas de s'exprimer naturellement dans cette situation.

La qualification en œuvre dans le problème 2R est indéniablement plus complexe que dans le problème 1R. Cette difficulté à « dire les choses » peut être à l'origine de la difficulté de concevoir les deux problèmes comme faisant partie de la même catégorie de problèmes.

Conclusion

L'étude précise de deux problèmes de divisions (partition et quotition) ayant pour références des mêmes données numériques et un même contexte montre une difficulté accrue en termes de qualification. L'explicitation des équations aux unités pour ces deux problèmes met en lumière, mathématiquement, la différence de difficulté, et donc de réussite, des problèmes de division-quotition par rapport aux problèmes de division-partition. Dans la lignée de Houdement (2017), nous ne pouvons que conseiller de qualifier les différentes données des problèmes utilisées à chaque étape d'une résolution. Nous pouvons faire l'hypothèse que demander aux élèves de « dire les choses » dans le contexte de l'énoncé (ce qui revient dans notre propos à mettre des unités) permettrait de leur faire prendre conscience des différents changements d'unités opérés.

Ainsi, à force d'habitude orale, la verbalisation de la résolution de problème de division permettrait sans doute de donner plus de sens aux notions de divisions-partition et divisions-quotition.

Références bibliographiques

Bell, A., Fischbein, E. & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 2*, 129-147.

Fishbein, E., Deri, M., Nello, M. & Marino, M. (1985). The role of implicit model in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Levain, J.-P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs en fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathématics, 23*, 139-161.

Simard, A. (2012a). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit x, 89*, 51-63.

Simard, A. (2012b). Proportionnalité en CM2 - 6e. *Petit x, 90*, 35-52.

Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française, 30*(3/4), 245-251.

MENJS (2016). *Grandeurs et mesures au cycle 3*. Eduscol.

MENJS (2021a). *Programme d'enseignement de l'école maternelle, BO n° 25 du 24/06/2021*. Eduscol.

MENJS (2021b). *La résolution de problèmes mathématiques au collège*. Eduscol.

MENJS (2022). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen*. Eduscol.