PENSER L'ARGUMENTATION POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUE[1]

Nicolas BALACHEFF[2]

Laboratoire d'informatique de Grenoble, Université Grenoble Alpes CNRS

Résumé. La *démonstration* est l'un des grands enjeux de l'enseignement des mathématiques. Les programmes l'ont longtemps cantonnée à la fin de la scolarité obligatoire. Aujourd'hui, la volonté des institutions est d'introduire la question de la validation en mathématique dès les premiers apprentissages. Pour cela, les programmes et leurs commentaires ont évolué en imposant un mot, *preuve*, auquel ils associent un autre mot : *argumentation*. Ce vocabulaire permet d'envisager les apprentissages à tous les niveaux scolaires, mais il ne peut avoir la même signification au cycle 2 et au cycle 4. Si les premières années s'accommodent de définitions peu spécifiques des mathématiques, il en va autrement lorsque l'on se rapproche du moment d'introduire la *démonstration*. Ce problème est l'objet de recherches et de débats contradictoires, dans tous les pays : dans quelle mesure l'argumentation peut-elle être un précurseur de la démonstration ? Au-delà des questions de définition se posent celles de la relation entre argumentation et connaissance, entre argumentation et preuve. Cet article rassemble des éléments de réponse à ces questions.

Mots-clés. Démonstration mathématique, argumentation mathématique, preuve, apprentissage de la preuve, théorie des situations didactiques.

Abstract. *Mathematical proof* is a major issue in mathematics education. For a long time, the curricula confined it to the end of compulsory education. Today, internationally, institutions want to introduce the issue of validation in mathematics from the very first grades. To this end, curricula and standards have evolved by imposing a word, *proof*, with its general meaning, to which they associate another word: *argumentation*. This vocabulary allows for learning at all school levels, but it cannot have the same meaning in primary school as at the end of compulsory school. While first graders can live with definitions that are not very specific to mathematics, the same cannot be said for the introduction of *mathematical proof*. This problem is the subject of conflicting research and debate in all countries: to what extent can argumentation be a precursor to mathematical proof? Beyond the questions of definition, we question the relationship between argumentation and knowledge, between argumentation and proof. This article gathers elements of answers to these questions.

Keywords. Mathematical proof, mathematical argumentation, proof, learning proof, theory of didactical situations.

1. L'argumentation, précurseur de la démonstration

La problématique de la validation, fondatrice de la culture scientifique et citoyenne, traverse toute la scolarité obligatoire. Elle occupe une place particulière dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques[3]. Le rapport remis au gouvernement français en février 2018 l'affirme très clairement :

> *la notion de preuve est au cœur de l'activité mathématique, quel que soit le niveau (de façon adaptée, cette assertion est valable de la maternelle à l'université)* (Villani & Torossian, 2018, p. 25).

---

[1] Le texte de cet article reprend largement celui de la conférence donnée lors des journées CORFEM de Strasbourg (juin 2019). Je remercie les relecteurs de *Petit x* pour leurs suggestions d'amélioration et leurs questions, et le comité éditorial pour son invitation.

[2] nicolas.balacheff@imag.fr

[3] Je reprends ce point de façon plus précise dans un autre texte disponible en ligne (Balacheff, 2019, pp. 424-427)

Les programmes et leurs commentaires en affirment l'importance en des termes qui varient nécessairement, puisque démontrer ne peut avoir la même signification au cycle 2 et au cycle 4. Les extraits suivants en témoignent :

• Cycle 2

Le discours produit est argumenté et prend appui sur des observations et des recherches et non sur des croyances (MENESR, 2018, Domaine 4).

• Cycle 3

Les mathématiques contribuent à construire chez les élèves l'idée de preuve et d'argumentation (MENESR, 2018, Domaine 3).

• Cycle 4

Démontrer : « utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion » ;

« Moyen mathématique d'accès à la vérité » en donnant à voir « les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent » ;

« Défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation » (EDUSCOL, 2016, pp. 1-2).

La lecture du rapport de Cédric Villani et Charles Torossian (Villani & Torossian, 2018) rencontre les mêmes difficultés. La section dédiée à *« La preuve »* recourt à des formulations telles que : *« démarche de justification argumentée »*, *« formes d'argumentation propres aux mathématiques »*, *« démonstration »* dont on comprend l'intention mais plus difficilement les nuances : comment distinguer une argumentation propre aux mathématiques de la démonstration ? Ces désignations seraient-elles équivalentes comme preuve et démonstration seraient synonymes selon l'un des auteurs[4] exprimant la position des mathématiciens ? Des réponses précises à ces questions sont nécessaires à la mise en œuvre des programmes et à l'exercice quotidien de l'enseignement de mathématiques.

Le texte des programmes articule un volet éducatif et un volet didactique, non exclusifs d'autres aspects, complémentaires et fortement liés. Dans le volet éducatif, l'enseignement doit amener les élèves à prendre conscience de la distinction entre croyance et connaissance en s'appuyant sur des interactions sociales réglées par les principes du débat scientifique. Dans le volet didactique, il s'agit de répondre à la question du vrai en mathématique, avec des moyens adaptés, dès les premiers apprentissages. L'objectif au terme de la scolarité obligatoire est que les élèves comprennent et pratiquent la démonstration comme un type de preuve spécifique des mathématiques. Une telle ambition requiert d'éclaircir les rapports entre preuve et démonstration, et de préciser ce que peuvent être les types de preuve qui pourraient être pratiqués par les élèves et les enseignants et enseignantes aux niveaux élémentaires. Le problème pris sous l'angle de l'enseignement, et pas seulement celui de l'apprentissage, fait apparaître une complexité qui n'échappe pas à l'institution :

Il n'est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme.

Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d'une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation (EDUSCOL, 2016, pp. 3-4).

Le travail de la classe comprend ainsi :

des temps de mise en commun et d'argumentation permettant de produire une preuve et des temps

[4] Cédric Villani, à l'occasion d'un bref échange de courriels à propos du rapport sur l'enseignement des mathématiques (30 mars 2018).

de mise en forme (démonstrations rédigées) (*ibid.*, pp. 3-4).

La dernière phrase est importante. Elle affirme une hiérarchie qui fait de *l'argumentation* un matériau pour construire une preuve, et de la démonstration le texte de cette preuve. Cette citation place l'argumentation au point de départ d'un processus qui va de la résolution d'un problème à la démonstration de la validité de sa solution. De plus, les programmes la mentionnent dès le cycle 2 comme le premier moyen d'établir la validité d'une déclaration, dans un parcours qui mènera au cycle 4 à la démonstration mathématique. *En quelque sorte, l'argumentation serait un précurseur de la démonstration*.

Si nous avons une conception assez stable et précise — ce qui n'exclut pas qu'elle soit discutée — de ce qu'est une démonstration dans l'enseignement des mathématiques, il n'en va pas de même de l'argumentation, sur laquelle la connaissance commune nous éclaire peu, et dont la place dans le savoir mathématique est inexistante. Bien sûr, on comprend sans difficulté que si la question du vrai se pose dès les premiers apprentissages, l'argumentation a une place naturelle. C'est du bon sens, mais il s'agit ici des mathématiques. Il s'agit de leur apprentissage et de préparer l'accès à cette forme très spécifique de validation qu'est la démonstration. Dans ce contexte et avec cet objectif, *quelle caractérisation donner de l'argumentation pour qu'elle soit à la fois acceptable à l'aune des mathématiques et, le moment venu, un appui pour l'apprentissage de la démonstration ?*

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de disposer d'une caractérisation de l'argumentation qui soit assez précise et utilisable. Il le faut aussi pour le vocabulaire utilisé par les programmes et les documents d'accompagnement dans lesquels on peut relever une part d'incertitude. Je le ferai à la lumière de ce que peut apporter la recherche en didactique des mathématiques.

Parce que la question du vrai est indissociable de celle de la connaissance, j'aborderai ensuite la relation entre preuve, argumentation et connaissance. Ce cadre posé, je m'intéresserai au rôle et aux caractéristiques des *situations de validation* (Brousseau, 1998) pour comprendre la complexité de l'enseignement de la preuve avant que la démonstration soit introduite et s'inscrive dans la pratique ordinaire de la classe. Je conclurai sur la question de l'argumentation dans la classe de mathématiques comme précurseur de la démonstration.

2. Une problématique : l'argumentation

« On vient toujours à l'argumentation avec un savoir substantiel de "ce qu'est" l'argumentation », remarque Christian Plantin[5] dans son introduction à une synthèse dans laquelle il met en perspective les approches, nombreuses, de ce concept. Outre les usages communs qui contribuent à la diversité des acceptions de ce mot, plusieurs disciplines contribuent à sa signification telles la philosophie, l'épistémologie, la logique, les sciences cognitives, les sciences du langage et même l'intelligence artificielle. Pour le sujet qui m'occupe ici, je retiendrai principalement l'apport des sciences du langage. Il n'y a pas, au sein même de cette discipline, une problématique unique de l'argumentation, mais plusieurs approches qui diffèrent substantiellement bien que sans frontières infranchissables[5]. Aussi convient-il, avant de l'utiliser, de préciser ce mot pour disposer d'une caractérisation efficace pour avancer sans créer de conflit insurmontable avec les sciences du langage. Il ne s'agit pas de faire œuvre de linguiste mais, en reprenant une idée de Christian Plantin, de circonscrire l'objet pour en faire un outil

[5] (Plantin, 1996, pp. 25, 12 et suivantes).

d'analyses des problèmes que nous rencontrons.

Le terme « argumentation » désigne dans l'usage commun à la fois l'action d'argumenter et, par extension, son produit. Le processus associé met en œuvre des moyens langagiers et de représentation pour rendre possible les interactions (actuelles ou potentielles) entre des protagonistes qui cherchent à s'assurer de la validité d'un énoncé ou, au contraire, s'opposent et confrontent leurs positions. Le produit a la forme d'un discours ou d'un texte qui matérialise les raisons de l'accord ou du désaccord. Pour faire la part du processus et du produit, je retiendrai l'usage du verbe « argumenter » pour évoquer le premier, et le substantif « argumentation » pour le second. Cette distinction sera respectée autant que possible, mais il se peut qu'elle ne le soit pas lorsqu'il est question de travaux dont les usages sont différents, le contexte devrait suffire à écarter les confusions.

Plus précisément, puisant dans les synthèses de Plantin (1990, 1996), je retiendrai la caractérisation suivante :

- L'argumentation est un discours
  - orienté : il vise la validité d'un énoncé ;
  - critique : il analyse, soutient et défend ;
  - intentionnel : il cherche à modifier un jugement.
- Argumenter est un processus
  - qui instrumente le langage ;
  - qui change la valeur épistémique[6] d'un jugement ;
  - qui modifie le rapport à la connaissance ;
  - qui structure la socialisation.

3. Vocabulaire

3.1 « Raisonnement »

La compétence « raisonner » est le cadre général dans lequel les textes situent « résoudre » et « démontrer ».

> *« Raisonner » désigne « [un] processus mental permettant d'effectuer des inférences » [...] une inférence est une opération mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie en vertu de sa liaison avec d'autres propositions* (EDUSCOL, 2016a, p. 1).

J'ai utilisé une définition très proche au début de mon travail sur l'apprentissage de la preuve, en désignant par raisonnement une activité intellectuelle consistant à obtenir de nouvelles informations à partir d'informations données. À la réflexion, cette formulation était maladroite parce qu'elle orientait l'attention vers la modélisation des processus mentaux alors que le problème posé à l'enseignant est celui de l'interprétation mathématique des comportements, des propos et des productions observées[7]. Cette interprétation est nécessaire pour prendre des décisions et, plus généralement, pour créer des situations dont les caractéristiques propres

[6] *Valeur épistémique* : degré de certitude ou de conviction attaché à une proposition (Duval, 1991, p. 254).

[7] Cette remarque n'exclut pas une approche psychologique mais, en reprenant une remarque de Gérard Vergnaud (1990, p. 156), elle est une gageure pour le psychologue qui s'intéresse à l'apprentissage des mathématiques : formuler les connaissances-en-acte en des termes qui aient un sens mathématique.

susciteront l'évolution des connaissances des élèves[8].

J'ai donc adopté la définition de Raymond Duval qui réfère à des énonciations, expressions tangibles de la pensée. Elle fait de l'analyse du raisonnement — pour l'enseignement comme pour la recherche — *un travail sur le discours et sur le texte* dont on prendra en compte la contextualisation par l'état des connaissances, les niveaux de langage et les contraintes de situation. Cette définition est, d'une part, congruente avec les cadres théoriques dans lesquels je me place et, d'autre part, elle n'introduit pas de contradiction avec une problématique psychologique :

> Deux élèves ont trouvé la formule $f(n)=\frac{n(n-3)}{2}$ pour calculer le nombre de diagonales d'un polygone à n sommets. Ils rédigent :
>
> *« En sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaque point, le nombre de sommets – (ses deux voisins + lui-même).*
> *Il faut multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets (par chaque sommet, partent le même nombre de diagonales).*
> *MAIS, on compte chaque diagonale deux fois ».*

Le raisonnement

> *[est l'] organisation de propositions qui est orientée vers un énoncé-cible pour modifier la valeur épistémique que cet énoncé-cible a dans un état de connaissance donné, ou dans un milieu social donné, et, qui par voie de conséquence, en modifie la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation sont remplies* (Duval, 1992, p. 52).

Par *« conditions particulières d'organisation »*, Duval (1992) fait référence à la fois à la structure logique et à la norme particulière du discours de preuve (la vignette[9] ci-dessus illustre un cas dans lequel un travail sera nécessaire pour satisfaire *la norme du texte* d'une démonstration alors que la structure logique sous-jacente est acceptable).

La compréhension de la nature et du rôle de cette norme est l'un des enjeux de l'enseignement de la démonstration. J'en aborderai certains aspects dans la section sur les types de preuve.

3.2 « Explication »

« Explication » n'est pas un mot-clé saillant des textes des programmes ni de leurs commentaires. Il est en revanche, avec « argumentation », le terme le plus clivant au sein de la communauté scientifique lorsqu'est en question la distinction entre preuve qui prouve et preuve qui explique, pour reprendre la formulation de Gila Hanna (1990) qui très tôt a noté cette difficulté. Les problèmes sous-jacents sont, d'une part, celui de la compréhension de la preuve et, d'autre part, celui de sa capacité à répondre à la question de savoir pourquoi un énoncé est vrai au-delà de la bonne forme du discours qui garantit cette validité. C'est donc la question du lien entre preuve et connaissance, voire celui du lien entre calcul et raisonnement, qui réduit la validité au respect de règles syntaxiques, et raisonnement dans lequel subsiste une part d'exigence sémantique.

---

8 L'étude de ces situations est l'objet de la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998, pp. 104-112) ; c'est le cadre dans lequel je me place. Le concept clé de la théorie est le concept de *situation adidactique* ; situation — créée par l'enseignant (finalité didactique) — dans laquelle l'élève engage ses connaissances et prend ses décisions en référence aux besoins intrinsèques d'un problème spécifique d'un savoir mathématique, et non en référence aux attentes que l'enseignant pourrait avoir. La *situation didactique* structure l'ensemble des moyens que met en œuvre l'enseignant pour mettre en place une situation adidactique qui assurera le sens du savoir dont il vise l'acquisition. Pour aller plus loin, se reporter en particulier à l'introduction d'Annie Bessot (2004) à la théorie.

9 Reprise de Balacheff (1988, p. 145).

Dans ce qui suit, « explication » est utilisé, à la suite de Duval (1992), pour désigner un *« système de relations au sein duquel la donnée à expliquer trouve sa place »*. En effet, *« la question de la valeur épistémique résolue, se pose celle de la construction de la cohérence ou appartenance de la nouvelle production au système de connaissance »*[10]. L'explication est ainsi la mise en relation de l'énoncé produit de la résolution d'un problème avec les connaissances mathématiques explicitement disponibles et seulement avec celles-ci.

Duval (1992) affirmait un clivage entre explication et raisonnement. La première, écrivait-il, *« donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée (un phénomène, un résultat, un comportement, ...) »*, alors que pour le second *« le rôle des raisons avancées y est tout différent : il est de " communiquer " aux affirmations qui sont à justifier " leur force d'argument " ; ou encore : leur rôle est de convaincre »*.

3.3 « Explication », « argumentation », « preuve » et « démonstration »

En soutenant l'existence d'un clivage entre explication et raisonnement, Duval (1992) induit celui entre explication et preuve que rejette Hanna (1995) :

> *Une preuve ne devient légitime et convaincante pour un mathématicien que si elle conduit à une réelle compréhension mathématique* (Hanna, 1995, p. 42 - traduction libre).

Le débat sur la distinction entre preuves qui prouvent et preuves qui expliquent est aussi ancien que celui de la critique des éléments d'Euclide (Barbin *et al.*, 2013). Il est intéressant, pour le comprendre, de revenir sur le terme « argumentation ».

L'argumentation, précise Duval[11], est acceptée ou rejetée selon deux critères : sa pertinence (cohérence sémantique) et sa force (valeur épistémique « positive »), c'est-à-dire la force de la croyance que l'on attache à ses énoncés pour de bonnes ou de mauvaises raisons. La distinction, qu'il propose, entre *argumentation rhétorique* et *argumentation heuristique* a permis de rapprocher cette acception générale d'argumentation et une acception congruente aux exigences de l'activité mathématique. En effet, selon cette distinction, l'argumentation rhétorique vise à *convaincre un interlocuteur* (voire à le persuader), alors que l'argumentation heuristique a pour objet de *guider la résolution du problème* en favorisant des choix stratégiques ou en soutenant la validité supposée d'un énoncé par le seul recours à la validité de ceux auxquels le raisonnement le lie.

On peut remarquer que si Duval a introduit la notion de « valeur épistémique »[6] des énoncés — force de la croyance en leur validité — d'une argumentation rhétorique, il ne propose pas de terme particulier pour la valeur de ceux de l'argumentation heuristique. Une proposition récente de Hanna (2017) offre la possibilité de combler ce manque en reprenant la distinction introduite par les philosophes Frans Delarivière et Bart van Kerkhove (2017) entre *« valeur épistémique qui implique l'existence d'un agent »* et *« valeur ontique indépendante de tout agent »*. Il s'agissait pour ces auteurs de qualifier le caractère intrinsèque ou relatif de la valeur explicative d'une preuve — cette distinction tient aussi bien pour l'argumentation. Voici ce qu'ils écrivent :

> *Une preuve mathématique peut être considérée comme un argument par lequel on se convainc soi-même ou d'autres personnes que quelque chose est vrai, il peut donc sembler difficile d'aller au-delà du discours épistémique sur une preuve explicative. Cependant, si le contenu de toute preuve particulière est le fruit du travail épistémique d'une personne, il peut être séparé comme un objet*

[10] (Duval, 1992, p. 40)

[11] (Duval, 1992, pp. 37, 39 & 51).

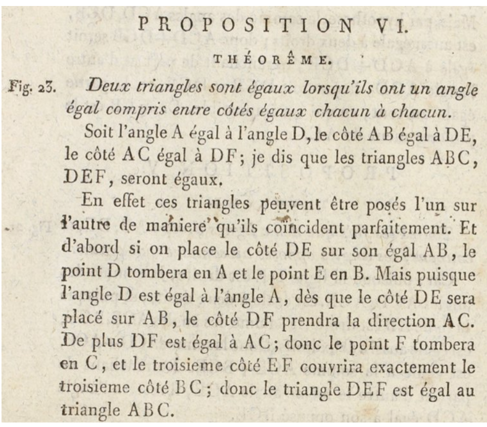
indépendant d'un esprit particulier. D'autres personnes peuvent lire cette preuve et en être convaincues. Cela nous amène à la question de savoir si le fait de montrer pourquoi un théorème est vrai est une caractéristique de la preuve elle-même ou une caractéristique des actes communicatifs, des textes ou des représentations (Delarivière *et al.*, 2017, p. 3).

Ceci est à rapprocher du critère de reconnaissance du caractère heuristique ou épistémique d'un argument, formulé par Duval[12], *« [qui] tient ou bien à l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation, ou à l'absence d'une telle organisation théorique». « Une argumentation heuristique requiert l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation »* et *« que l'on soit en mesure de comprendre ou de produire une relation de justification entre des propositions qui soit de nature déductive et non pas seulement de nature sémantique »*.

Ainsi la distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique revient-elle à l'évaluation de la valeur épistémique et de la valeur ontique des énoncés. Nous pouvons alors avancer qu'*une argumentation sera recevable au sens des mathématiques si la valeur épistémique de ses énoncés est conditionnée par leur valeur ontique* ; c'est ce critère qui permettra de lui reconnaître le statut de preuve en mathématique. La normalisation mathématique des démonstrations est un moyen technique pour effectuer cette évaluation.

La distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique, et entre valeur épistémique et valeur ontique d'un énoncé, permet de préciser l'opposition entre argumentation et démonstration.

Le pouvoir explicatif d'un texte, ou d'une représentation graphique, ou d'un exemple, est directement lié à la qualité et à la densité de son enracinement dans les connaissances de l'élève — il en va de même pour le mathématicien. Dans la perspective de l'élève — ou du mathématicien — engagé dans la résolution d'un problème et la validation de sa solution, ce qui est recherché en premier lieu est toujours une explication de la validité dans son propre référentiel. Cette explication peut accéder au statut de preuve si elle obtient suffisamment de soutien de la part d'une communauté qui l'accepte et la reconnaît comme telle. Enfin, elle peut être revendiquée comme preuve mathématique si elle répond aux normes actuelles de la pratique mathématique. Ainsi, la clé de voûte d'une problématique de la preuve est la nature de la relation entre le savoir du sujet, élève ou mathématicien, et ce qui est impliqué dans la preuve.



PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

Fig. 23. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.*

Soit l'angle A égal à l'angle D, le côté AB égal à DE, le côté AC égal à DF ; je dis que les triangles ABC, DEF, seront égaux.

En effet ces triangles peuvent être posés l'un sur l'autre de maniere qu'ils coïncident parfaitement. Et d'abord si on place le côté DE sur son égal AB, le point D tombera en A et le point E en B. Mais puisque l'angle D est égal à l'angle A, dès que le côté DE sera placé sur AB, le côté DF prendra la direction AC. De plus DF est égal à AC ; donc le point F tombera en C, et le troisieme côté EF couvrira exactement le troisieme côté BC ; donc le triangle DEF est égal au triangle ABC.

Figure 1[13]

Cette preuve d'Euclide, reprise ici des éléments de géométrie d'Adrien-Marie Legendre (édition de 1794), décrit une expérience mentale qui repose sur des théorèmes-en-acte qui, par nature, renvoient à une expérience matérielle et humaine. La « vérité » de ces énoncés tient à la force d'une évidence pratique que partage le lecteur (*valeur épistémique*). Cependant, leur institutionnalisation, depuis au moins 300 av. J.C., les a détachés de cette expérience particulière pour leur attribuer une vérité universelle. Ils ont ainsi acquis une vérité en soi (*valeur ontique*), de l'ordre de la vérité des postulats. Pour autant, cette situation n'a pas satisfait les mathématiciens, il faudra attendre les réformes du milieu du XX[e] siècle et les transformations géométriques pour faire évoluer cette approche quasi-empirique de la géométrie.

[12] (Duval, 1992, pp. 51 & 52).

Dire d'un propos ou d'un texte qu'il est une explication ne préjuge pas de la valeur épistémique ou ontique en soi de ses énoncés ; tel énoncé peut avoir la valeur ontique positive d'un théorème-en-acte (*i.e.* croyance empiriquement fondée sur une invariance observée et objectivée).

Le passage de l'explication à l'argumentation répond au besoin de formuler et d'organiser les raisons de la validité d'un énoncé pour autrui. Faire accepter l'argumentation change le statut et la valeur de l'énoncé qu'elle soutient par la reconnaissance publique qu'il acquiert. L'argumentation gagne alors le statut de preuve. Parmi ces preuves, certaines ont une structure particulière qui satisfait des normes collectives, telles celles de la démonstration en mathématiques.

Bien qu'il ne soit jamais certain qu'un dessin vaille mieux qu'un long discours[14], le croquis de la figure 2 propose une image synthétique des relations complexes entre explication et preuve.

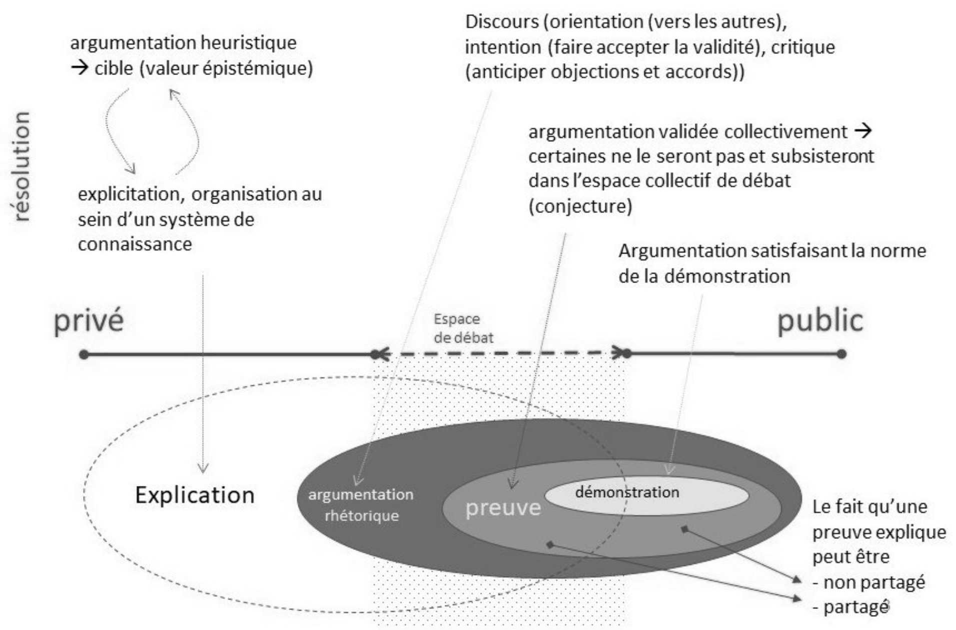


Figure 2

L'élément important est la frontière entre sphère privée et sphère publique. Dans la sphère privée, l'explication travaille sur les objets et leurs relations. Elle est le socle de la construction de l'argumentation, que ce travail assure ou non la soumission de la valeur épistémique à la valeur ontique. Le franchissement de cette frontière implique la recherche d'un consensus, c'est-à-dire un processus social qui, par nature, ne saurait garantir qu'individuellement les protagonistes reconnaîtront le caractère explicatif de l'argumentation — la preuve — collectivement acceptée. Cette incertitude est plus forte encore dans le cas de la démonstration du fait de sa conformité avec une norme qui prend le pas sur ses propriétés rhétoriques : on peut reconnaître la solidité et la rigueur d'une démonstration sans pour autant la comprendre, il faut pour y parvenir un travail qui peut être difficile. Tous les enseignants de mathématiques ont à coup sûr eu cette expérience dans le cours de leurs études.

[13] Source : gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France.

[14] Une première version sommaire de ce schéma proposée au début de mon travail sur la preuve, à la fin des années 80, a suscité des incompréhensions. Cette nouvelle version bénéficie des remarques de Marie-Line Gardes, que je remercie.

4. Conception et argumentation

4.1. Illustration 1 - où il est question du défi de l'usage commun

Lors des premiers apprentissages, de nombreux élèves tendent à considérer l'aire et le périmètre, comme des « mesures » rendant compte de la surface ou de l'encombrement d'une forme plane[15]. La difficulté à distinguer précisément périmètre, contour, aire, surface et encombrement d'une forme plane est observée jusqu'à la fin du cycle 3, voire au-delà.

Cette confusion est favorisée par l'usage commun de la langue tel que, par exemple, le dictionnaire en rend compte : le *périmètre* est à la fois *« [la] ligne qui délimite une surface plane »* et *« [la] longueur de cette ligne »*, l'aire est d'abord un *« espace assigné à une activité ou à un phénomène en expansion »* et techniquement *« la superficie d'une figure »* cependant que la *superficie* est une *« étendue géométriquement mesurable »*[16].

Les significations que reflètent ces usages persistent alors qu'avance l'apprentissage. J'ai choisi d'aller sur ce terrain pour analyser la gestion des contradictions[17], dans une dialectique des preuves et réfutations, par des élèves de 5e et de 4e. La tâche porte sur le cas du rectangle, une figure familière pour laquelle les élèves connaissent les formules de calcul de l'aire et du périmètre :

> Dans une classe, les élèves travaillent sur l'aire et le périmètre d'un rectangle. Voici ce qu'en disent certains d'entre eux :
>
> David : *Deux rectangles qui ont le même périmètre ont la même aire.*
>
> Suzanne : *Deux rectangles qui ont la même aire ont le même périmètre.*
>
> Guy : *Si on augmente le périmètre d'un rectangle, son aire augmente aussi.*
>
> Serge : *Si on augmente l'aire d'un rectangle, son périmètre augmente aussi.*
>
> Brigitte : *Tous les rectangles qui ont une aire de 36 cm^2 ont un périmètre qui ne fait pas moins de 24 cm.*
>
> Louise : *Pour tout rectangle, il en existe un autre qui a la même aire mais dont le périmètre est plus grand.*
>
> Que pensez-vous de ce que raconte chacun de ces élèves : êtes-vous d'accord ou non ? Expliquez pourquoi.

Les élèves travaillaient en binômes avec une contrainte choisie pour favoriser leurs interactions : papier à volonté mais un unique stylo. Le temps n'était pas limité, il a été en moyenne de 45 *min*. L'observateur ne devait pas intervenir jusqu'à l'accord des élèves sur des réponses et des explications communes. Les extraits suivants illustrent la place des connaissances dans la construction des argumentations construites par les élèves à l'appui de leurs jugements.

Un binôme, disons C&P, accepte l'assertion « Deux rectangles qui ont le même périmètre ont la même aire » dont ils proposent la justification suivante :

> C&P : *Oui, car ils ont le même périmètre donc ils sont isométriques, sinon ils n'auraient pas la même aire, car la surface est délimitée par le périmètre donc comme le périmètre est [le] même, l'aire est la même.*

---

[15] (Douady & Perrin-Glorian, 1989, pp. 387 & 404)

[16] Source : Portail lexical du Centre National des Ressources Textuelles et Lexicales (CNTRL). https://www.cnrtl.fr/

[17] (Balacheff, 1988b, pp. 281-320). La tâche est reprise de (Walsch, 1983).

Cette explication est explicitement sous-tendue par le principe commun selon lequel si deux formes sont différentes alors les mesures associées le sont aussi.

Un autre binôme, disons A&C, juge positivement l'assertion « Si on augmente l'aire d'un rectangle son périmètre augmente aussi ». Mais il ne voit pas d'emblée comment l'expliquer :

A&C : *C'est bête parce que c'est évident [...] comment on peut y démontrer ?*

A&C revient sur cette question de preuve après avoir considéré l'assertion « Tous les rectangles qui ont une aire de $36\,cm^2$ ont un périmètre qui ne fait pas moins de $24\,cm$ » qui les conduit à utiliser les formules de l'aire et du périmètre. Sans changer leur jugement initial, ils invoquent des propriétés arithmétiques :

A&C : *Quand tu augmentes le périmètre, les nombres tu les augmentes… Là, les nombres qui se multiplient… qui s'ajoutent [...] ben oui, parce que quand tu augmentes le périmètre, la longueur et la largeur augmentent. Donc lorsqu'on les multiplie tous les deux, ça augmente aussi.*

Cette explication est associée à un usage explicite des formules d'aire et périmètre (figure 3).

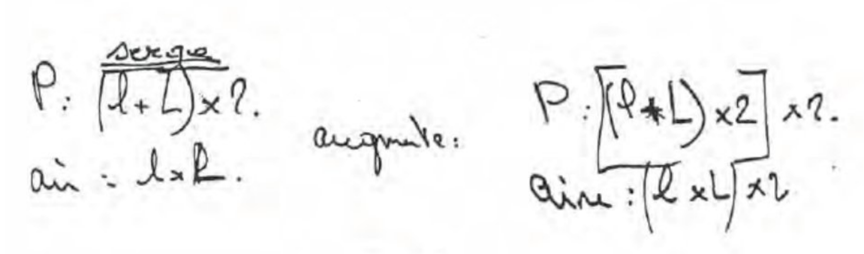


Figure 3

Le cas C&P illustre une conception surface-contour qui peut être caractérisée par le cadre spatio-graphique dans lequel l'activité porte sur le dessin et relève d'une « appréhension globale » en donnant à voir des relations entre les objets dessinés dans l'espace de la page[18]. Cette activité est sous le contrôle du principe : « Plus les formes sont grandes, plus les mesures attachées sont grandes ».

Le cas de A&C illustre une conception aire-périmètre qui se développe dans le cadre de l'*arithmétique symbolique*[19], dans lequel les formules fournissent une représentation dont la manipulation et l'interprétation sont sous le contrôle de leur référent (*i.e.* ce qu'elles modélisent). Le principe d'une covariation monotone croissante de l'aire et du périmètre est assez fort pour s'imposer et contrôler la manipulation des formules. Les échanges, reproduits ci-dessous, entre les deux élèves d'un autre binôme, C&S, et le texte (figure 4) qu'ils produisent en témoignent :

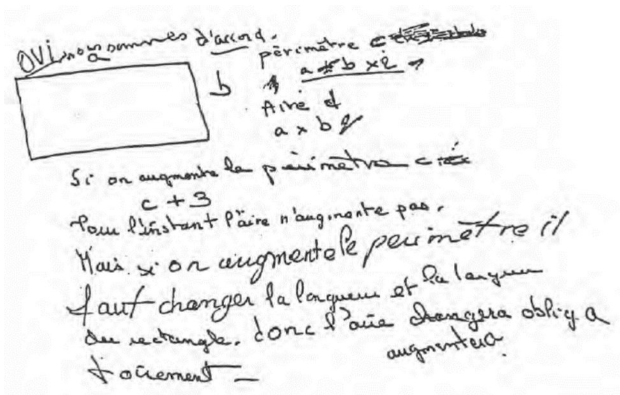


Figure 4

[18] (Laborde, 2003, p. 140).

[19] (Balacheff, 2001).

S339 : *Là ça sera plus du tout les mêmes mesures, si on augmente le périmètre.*

S354 : *Le périmètre a et l'aire b… On augmente le périmètre a, par exemple* $+2$.

C357 : *Pour l'instant, son aire elle augmente pas.*

S358 : *Pour l'instant son aire elle augmente pas ?! […] Mais si, euh … si on augmente le périmètre, il faut changer longueur et largeur du rectangle … Ça marchera plus […] si tu laisses ton a, ton b […] donc l'aire changera obligatoirement … et on sait pas si … elle augmente ou si … elle diminue … mais j'pense qu'elle augmentera si on ajoute.*

C368 : *Obligatoirement ? Tu l'as prouvé ? T'as fait tous les cas ? … Tout, tout, tout ?*

S369 : *Si on ajoute c'est obligatoirement … si on ajoute elle va pas baisser.*

C370 : *Ah ouais, parce que si t'ajoutes au périmètre il faut aussi ajouter à l'aire.*

S371 : *Mais non, si t'ajoutes au périmètre, l'aire elle bouge pas.*

C374 : *Il faut changer les chiffres.*

S375/381 : *Ça va changer les chiffres […] donc l'aire elle changera.*

Des élèves prennent en charge le problème de la validation et manifestent leur conscience du décalage entre ce qu'ils produisent et le standard de preuve souhaité dans la classe de mathématique, par exemple L&O :

L170 : *Là faut démontrer avec des lettres…*

O155/161 : *Il y aurait fallu faire toutes les démonstrations et tout […] toute façon on peut pas, on a pas pris les axiomes, tout ça…*

L129 : *On pourrait faire des énoncés, tout ça … on peut faire compliqué, ça dépend […] on pourrait mettre des phrases, p't'être que ce serait mieux.*

Ces élèves ne parviennent pas à dépasser les difficultés qu'ils identifient faute de disposer d'une conception permettant la modélisation algébrique en s'appuyant sur les formules qui leur sont familières.

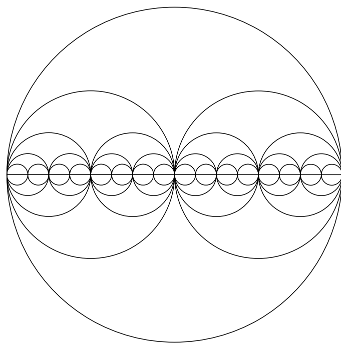
4.2. Illustration 2 - où il est question de limite

Vincent et Ludovic sont deux élèves de collège. Ils n'ont pas de difficultés particulières en mathématiques. Ils se sont portés volontaires pour participer à une expérience organisée par Bettina Pedemonte[20] pour étudier l'unité cognitive entre résolution de problème et preuve. Le problème était le suivant :

Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.

Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre ?

Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre ?



Sans hésiter, les deux élèves expriment, avec les formules usuelles, le périmètre et l'aire des figures pour les premières étapes de la construction. Puis ils conjecturent que le périmètre est constant et que l'aire décroit vers zéro. Mais Vincent remarque :

[20] (Pedemonte, 2002, p. 157).

Vincent : L'aire elle est toujours devisée par 2… donc, à la limite ? La limite est une ligne, le segment dont on est parti …

Et il continue :

41. Vincent : *Ça tombe sur le segment … si les cercles sont tellement petits.*

42. Ludovic : *Hum … mais ce sera toujours* $2\pi r$.

43. Vincent : *Oui mais quand l'aire tend à zéro ça sera presque égal…*

44. Ludovic : *Non, je pense non.*

45. Vincent : *Si on fait tendre à zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi … je ne sais pas…*

46. Ludovic : *Je finis la première démonstration.*

Vincent et Ludovic collaborent activement et paraissent partager les mathématiques en jeu dans cette situation, cependant les contrôles qu'ils mettent en œuvre sont de natures différentes. Ludovic travaille dans le *cadre*[21] *algébrique* ; le contrôle porte sur le respect des règles de l'algèbre élémentaire. Vincent, quant à lui, travaille dans le *cadre de l'arithmétique symbolique* dans lequel le contrôle vient d'une confrontation constante de l'expression littérale à ce qui est observé dans l'espace graphique de la feuille. Les deux élèves ont compris le problème de la même façon, tous les deux manipulent la représentation symbolique en respectant la syntaxe des écritures littérales mais les contrôles qu'ils mobilisent sont fondamentalement distincts.

4.3. Connaissance, conception, argumentation

Nous avons l'expérience personnelle et quotidienne d'une mise en œuvre d'une même connaissance, ou plutôt ce que nous reconnaissons pour tel, sous des formes différentes selon les situations et les contextes. Ainsi, la représentation d'un nombre décimal n'est-elle pas traitée de la même façon selon qu'elle représente un prix que l'on doit payer en monnaie ou la mesure d'une longueur avec des contraintes de précision. La notion de « conception » est utile pour rendre compte de cette diversité en désignant par ce mot l'instance d'une connaissance en situation. Ainsi pourrons-nous rendre compte d'une connaissance en décrivant les conceptions qui la composent, chacune étant empiriquement attestée par son rattachement à une situation, un problème ou une tâche particulière. Cette diversité est transparente lorsqu'elle est maîtrisée, l'activation d'une conception se faisant sur des critères de pertinence et d'efficacité dans une situation donnée. En revanche, elle est problématique lorsque l'activation est inadaptée et conduit à des erreurs ou à des mises en œuvre coûteuses.

Il était d'usage de parler de « misconceptions » dans les années 80 pour désigner ces instances « fautives » de la connaissance. Cette position conduisait à penser l'apprentissage en termes de correction de l'erreur[22] plus qu'en termes d'évolution de la connaissance. Cette critique fait partie des fondements de la didactique des mathématiques :

> *L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans*

---

[21] Le terme « cadre » est utilisé ici au sens que lui a donné Régine Douady (1986) pour étudier les *jeux de cadres*, notamment algébrique et géométrique : *« Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. […] Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique »* (Douady, 1986, p. 11).

[22] Cette acception de misconception restera dominante internationalement jusque dans les années 90, elle évoluera (Confrey, 1990) mais elle porte aujourd'hui encore le poids de son histoire.

les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée (Brousseau, 1976, p. 171).

Un *ensemble de problèmes* étant précisé, une conception peut être caractérisée par la donnée conjointe et reliée d'un *système de représentation*, d'un *ensemble d'opérateurs* et d'une *structure de contrôle* qui permet de juger, choisir et décider. Si la différence des systèmes de représentation est un bon indicateur de conceptions différentes, leur identité est insuffisante pour celles des conceptions qui pourraient rendre compte de l'activité de deux élèves. Ainsi le cas de Vincent et Ludovic illustre-t-il comment l'usage partagé de l'expression littérale d'aire et de périmètre permet la collaboration des deux élèves — elle joue le rôle d'un médiateur sémiotique[23] — alors que leurs conceptions sont essentiellement différentes ; cette différence a son origine dans la nature des contrôles qui déterminent leurs jugements (syntaxe du calcul algébrique vs contrôle visuel sur le dessin).

Les structures de contrôle règlent l'activité de résolution de problème depuis les premiers instants jusqu'à celui, final, de la décision de sa bonne fin. Ainsi, la validité d'une solution est-elle fondamentalement dépendante des conceptions. Pedemonte (2005) a mis en évidence des *conditions minimales*[24] pour que sa validité mathématique soit assurée :

- disponibilité des théorèmes correspondant aux opérateurs ;
- existence d'un cadre mathématique qui puisse être substitué à la conception et fournir le socle théorique, c'est-à-dire des objets et un système de déduction et de principes admis[25].

Les approches cognitives de l'apprentissage de la démonstration ont insisté sur la difficulté que constitue la maîtrise de la logique sous-jacente, et font dépendre le moment de cet apprentissage de celui que la psychologie du développement repérait dans l'évolution de la pensée rationnelle. C'est ainsi que les programmes anciens prescrivaient l'enseignement de la démonstration à partir de la classe de quatrième et que, dans les pays anglo-saxons, cet enseignement pouvait n'apparaître que tardivement :

> *Les enfants ou les novices ne pensent pas initialement de manière déductive. […] Ce n'est que beaucoup plus tard — généralement au niveau universitaire — que la preuve formelle axiomatique apparaît en termes de définitions et de déductions formelles* (Tall *et al.*, 2012, p. 15 - traduction libre).

Ce que nous disent les recherches récentes sur l'activité mathématique des élèves, et celle des mathématiciens au cours de l'histoire, permet d'avancer deux objections :

- La rationalité des élèves se construit dès les premiers apprentissages dans la classe de mathématique, leur permettant d'entrer dans une problématique de la validation bien avant que les objets mathématiques soient formalisés.
- La validation de la solution d'un énoncé dépend des moyens de représenter, de relier et de traiter des objets en jeu, ainsi que des moyens de contrôles associés.

De plus, la résolution et la validation ne constituent pas des phases distinctes de l'activité de résolution de problèmes, mais des moments reliés et intriqués qui nécessitent des jugements, des

[23] (Mariotti & Cerulli, 2001).

[24] (Pedemonte, 2005, p. 331).

[25] (Mariotti *et al.*, 1997).

choix et des décisions qui dépendent des représentations et des mises en relation des objets en jeu. L'activité argumentative apporte des éléments dont la transformation et la réorganisation donneront ceux d'une explication voire d'une preuve. Ces liens ressortent de ce que Paolo Boero (2017) désigne par l'*unité cognitive des théorèmes*[26], qui peut être rompue si les conditions minimales posées par Pedemonte (2005) ne sont pas satisfaites.

Pour autant, les élèves font des propositions qu'il est nécessaire de comprendre et de situer les unes par rapport aux autres, soit qu'elles aient un sens acceptable au regard d'une évaluation mathématique, soit qu'elles constituent un point de départ pour susciter une évolution des conceptions sous-jacentes.

5. Type d'argumentation et de preuve

5.1. Preuves empiriques et intellectuelles

La dépendance mutuelle des conceptions, des systèmes de représentation et des systèmes de validation oblige à distinguer différents types de preuve pour pouvoir modéliser les évolutions possibles et leurs conditions. Cette nécessité est classiquement affirmée dans le cadre d'une problématique cognitive[27]. Cependant, si le développement de l'enfant est l'un des déterminants des niveaux de validation — on le sait depuis les travaux de Jean Piaget — ils ne sont pas les seuls, loin s'en faut. Il faut aller au-delà des problématiques cognitives en prenant en compte, au moins, l'économie propre des situations de validation et la nature des conceptions disponibles.

La typologie des preuves que j'ai proposée à la fin des années 80 a souvent été utilisée en l'interprétant comme une suite de « stades », ce qu'elle n'est pas. Les observations sur lesquelles elle s'appuyait attestaient que les élèves acceptent un type de preuve selon ce que leurs conceptions permettent de construire et selon leur perception de la situation. Cette dépendance est particulièrement manifeste lors du traitement de contre-exemples[28]. De fait, plusieurs types de preuves peuvent être identifiés dans le cours de la résolution d'un problème ou dans le cours d'un débat contradictoire. Les enjeux de l'interaction sociale ou ceux de la situation peuvent susciter l'effacement de l'argumentation au profit d'un discours visant à persuader.

En fait, un type de preuve est moins une information sur l'élève que sur l*'élève en situation à un moment donné de son histoire mathématique*.

Le schéma ci-après (figure 5) présente sous une forme synthétique les types de preuves et rappelle les deux catégories auxquelles ils peuvent être rattachés.

[26] *« Lors de la production de la conjecture, l'élève élabore progressivement son énoncé au cours d'une activité argumentative intensive fonctionnellement liée à la justification de la plausibilité de ses choix. Au cours de la phase ultérieure de vérification de l'énoncé, l'élève s'inscrit dans ce processus de manière cohérente, en organisant certains des arguments précédemment produits selon une chaîne logique »* (Boero, 2017, p. 99 - traduction libre).

[27] (Tall, 1998, p. 196).

[28] (Balacheff, 1987b, pp. 166 et suivantes).

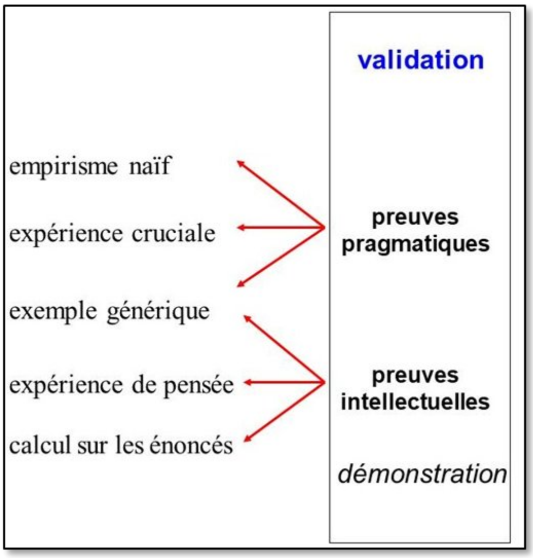


Figure 5

Le passage de l'empirisme naïf à la démonstration peut, en une formule rapide, décrire le mouvement de l'apprentissage de la preuve en mathématique. Ce passage de *preuves pragmatiques* à des *preuves intellectuelles*, nécessaire pour aller vers la démonstration, est aussi celui d'une problématique pragmatique à une problématique théorique, et donc d'une évolution de la lecture des situations dans lesquelles l'activité mathématique se déploie, et une évolution du statut des connaissances mobilisées.

5.2. L'exemple générique

L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même mais en tant que bon représentant d'une classe d'objets partageant les mêmes caractéristiques. La formulation met en avant et relie les propriétés caractéristiques et les structures de la classe d'objets en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants sans pour autant dépendre de ses propriétés singulières.

Cherchant à établir leur conjecture sur le calcul du nombre des diagonales d'un polygone[29], deux élèves (classe de 4e, 1982) expriment d'abord leur conjecture en utilisant l'hexagone, qui a dans leur projet une valeur d'exemple générique que souligne le « de même », puis ils évoluent vers une formulation qui se dégage des marques du particulier (figure 6).

L'exemple générique se trouve à la frontière des preuves pragmatiques et des preuves intellectuelles. Le franchissement de cette frontière est suscité par la prise de conscience du caractère générique du cas support de l'argumentation. En voici une illustration (figure 7) dans laquelle *le caractère générique de l'exemple* utilisé par l'élève est attesté. La rédaction que proposent ces élèves achève le mouvement vers une représentation qui rende compte de la généralité, en conservant cependant un contrôle sur le fil des écritures qui reflète celui de la construction de la solution ; ainsi peut-on comprendre l'étrange « donc $a-a=0$ ».

[29] (Balacheff, 1988b, pp. 124-131).

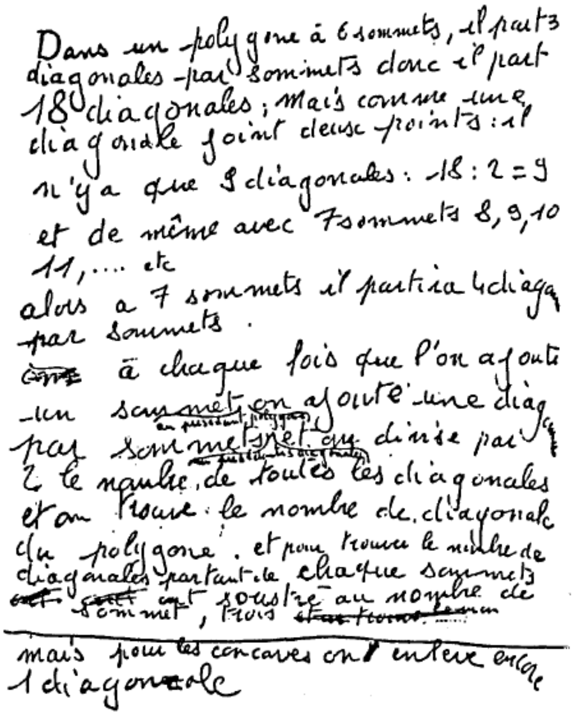


Figure 6

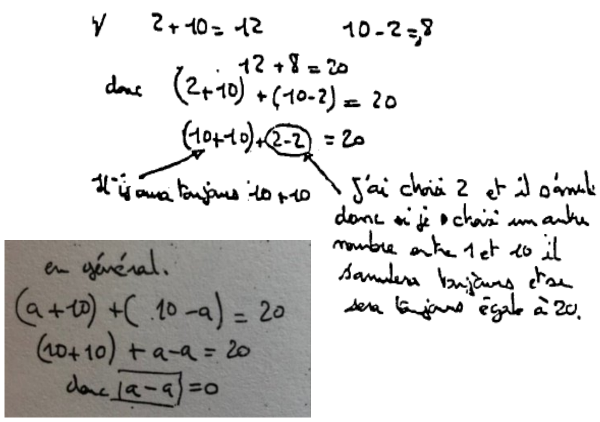


Figure 7

Dès le cycle 3 (figure 8), engagés dans la résolution d'un problème portant sur la parité de la somme de deux nombres dont la parité est connue, des élèves évoluent d'un empirisme naïf vers l'utilisation d'un exemple pour exprimer la généralité de leur argumentation[30].

[30] Je reprends ici un exemple tiré de Teo Kwee Huang & Ng Swee Fong (2017) qui illustre bien l'usage de l'exemple générique et la possible transition vers l'expérience mentale sur laquelle je reviens dans la section suivante.

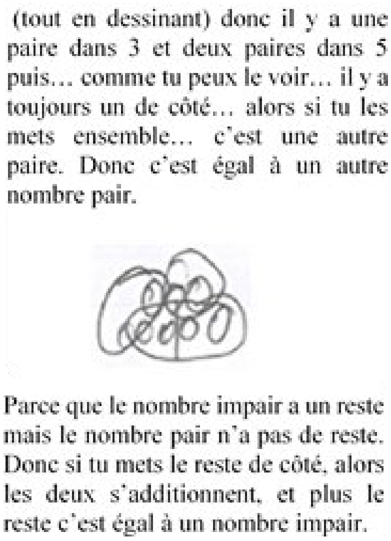


Figure 8

5.3. L'expérience mentale

L'*expérience mentale* invoque l'action en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier (par ex. figure 9). Prise dans la perspective de l'évolution de la résolution d'un problème, elle s'inscrit dans une dynamique de conceptualisation et de modélisation. Bien qu'inscrits dans un contexte temporel et spatial, indissociable de l'expression d'une action, les constituants fondateurs de l'argumentation sont décontextualisés. L'expression d'une expérience mentale rencontre le défi de la représentation des objets, de leurs propriétés et relations, et celui de l'expression des raisons.

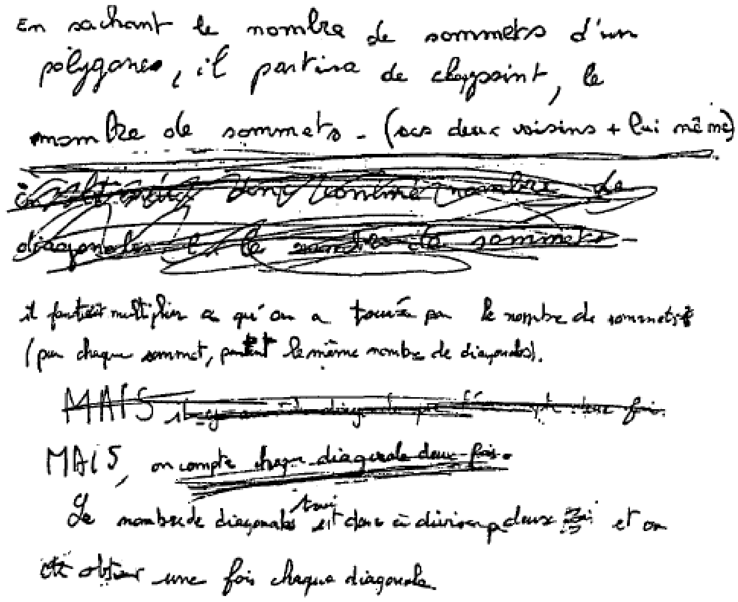


Figure 9

La généralisation est associée à une représentation opératoire. Elle engage l'évolution d'une argumentation rhétorique vers une argumentation heuristique, qui requiert celle de la valeur épistémique vers la valeur ontique des énoncés qui constituent le discours.

C'est entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, le marqueur de cette transition est l'évolution des moyens de représentation et d'expression du raisonnement.

5.4. Le rôle du langage

La question de l'acquisition des représentations et des formes langagières particulières des mathématiques est d'une importance reconnue, mais le plus souvent sans que soit posée précisément et en référence au contenu mathématique celle, technique, de *l'interaction entre développement du langage et conceptualisation*. Les mathématiques ne sont pas singulières sur ce point, mais elles ont une caractéristique qui les distingue parmi les disciplines scientifiques qui tient au caractère substantiellement abstrait de ses objets. L'histoire des mathématiques est jalonnée par les « inventions » de représentations dont le caractère instrumental permet l'expression du raisonnement avec une rigueur qui le rapproche du calcul. L'invention et le développement de l'écriture algébrique en est, bien sûr, l'exemple le plus remarquable.

Pour comprendre ce rôle des systèmes de représentation, langagier ou non langagier, il faut revenir sur l'histoire des mathématiques en se replaçant dans le contexte technique et épistémologique des mathématiciens de l'époque. C'est ce que fait Gilbert Arsac (2013) dans son livre sur la naissance du concept de convergence uniforme d'une série de fonctions d'une variable réelle. Ce travail, que je ne présenterai pas ici[31], montre le poids du langage et de l'absence d'une formalisation opératoire. Au début du XIXe siècle, la notion de variable domine celle de fonction (variable indépendante versus variable dépendante). Le raisonnement est guidé par une conception cinématique de la continuité et de la convergence, et par le principe de continuité. La notation algébrique de la valeur absolue est manquante, la continuité est définie sur un intervalle — et non en un point — et est intimement liée à la continuité du dessin de la courbe. De plus, l'indisponibilité des quantificateurs rend difficile l'identification des dépendances et la négation des énoncés qui les impliquent (per ex. la discontinuité comme négation de la continuité). La conceptualisation n'a pu avancer qu'avec l'invention d'une *technologie symbolique*, en reprenant l'expression d'Alan Bishop[32] pour, d'une part, saisir et exprimer la convergence uniforme telle que nous la connaissons aujourd'hui et, d'autre part, assurer la construction d'une preuve que les mathématiciens reconnaissent irréfutable en même temps qu'ils la comprennent. Preuve qui prouve *et* qui explique.

Arsac montre que, pour échapper aux réécritures anachroniques, la connaissance peut être caractérisée par la donnée simultanée et reliée d'une part du problème en jeu, ici la conservation d'une propriété lors d'un passage à la limite, et d'autre part des systèmes de représentation disponibles, des opérations possibles et des moyens de validation accessibles. Ainsi, différents niveaux de validation se succèdent depuis l'argumentation de Cauchy dans le cours d'Analyse de 1821 jusqu'à sa révision dans un compte-rendu à l'Académie des sciences en 1853. Cette évolution s'est poursuivie jusqu'à la formulation contemporaine du critère de Cauchy uniforme, passant de l'argumentation à de la démonstration.

---

[31] Je reprends plus précisément la contribution d'Arsac (2013) à propos de l'apprentissages de la preuve dans Balacheff (2019).

[32] (Bishop, 1988, pp. 82 et suivantes).

Ce détour par l'histoire souligne la pertinence de la question posée par les enseignants de l'équipe académique Mathématiques de Bordeaux[33] : n'est-il pas préférable de laisser l'élève s'exprimer dans son langage ? L'institution, comme cela est signalé au début de ce texte, apportera sûrement une réponse positive afin « de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation ». C'est peut-être l'idée des enseignants auteurs de la question qui souhaitent utiliser l'expression de l'élève pour « détecter les éléments positifs de son discours ». Peut-être peut-on aller plus loin en créant les conditions pour que l'expression de l'élève soit un point de départ pour susciter son évolution et la compréhension de ses raisons.

6. Contrôle, preuve et validation

La genèse de la preuve mobilise des contrôles logiques et sémantiques qui fonctionnent dans le cours de l'élaboration de la solution, c'est le sens de l'idée d'unité cognitive. Ces contrôles sont intimement liés aux conceptions engagées par les élèves, pour le choix d'une stratégie de résolution et la décision de bonne fin. *Contrôle et preuve* sont deux niveaux de validation indissociables dans l'activité mathématiques. Claire Margolinas (1993) va dans ce sens lors de son étude sur *l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*[34], en mettant en évidence le lien entre contrôle et validation qu'elle exprime dans la définition qu'elle propose : *« nous appellerons processus de contrôle le processus d'anticipation de la validation »*.

Elle distingue quatre types de processus :

(1) choix de la méthode,

(2) procédé et procédure de résolution,

(3) fin de résolution,

(4) interprétation — distinction résultat/réponse.

Ces processus puisent dans le répertoire des moyens stratégiques ou tactiques, globaux ou locaux, qui permettent de juger, vérifier, choisir et valider une décision. L'ensemble de ces moyens, en relation avec des systèmes de représentation et des opérateurs dont ils dépendent et dont ils règlent l'usage, constitue la « structure de contrôle » qui entre dans la caractérisation d'une conception[35].

Les processus de contrôle fournissent le matériau de l'argumentation heuristique qui prend forme dans la phase privée de la résolution d'un problème. Dans cette phase, résolution et validation sont intriquées sans qu'il y ait le besoin pour l'élève, ou le groupe d'élèves, d'expliciter systématiquement ou précisément les raisons des actions mises en œuvre. Toutefois, cette explicitation est nécessaire à l'apprentissage de la preuve. Le problème de l'enseignant est donc de créer les conditions qui la sollicitent. Pour cela, les principaux leviers sont la création d'un défi peu tolérant à l'incertitude, un contexte d'interaction sociale (par ex. prise de décision collective) suscitant la formulation de l'argumentation dans un contexte susceptible de porter la contradiction, et un transfert vers les élèves de la responsabilité de la preuve. Le concept de *situation de validation*[36] modélise les situations qui associent ces trois leviers. Le travail sur la validation y domine celui de la résolution en donnant une place prépondérante aux processus de

[33] (Équipe académique Mathématiques, 2003, p. 5).

[34] (Margolinas, 1993, pp. 213-215).

[35] (Balacheff & Margolinas, 2005).

contrôle. Il rend difficilement évitable leur explicitation, en particulier dans la phase qui conclut la résolution. Alors que la solution est assurée du point de vue de celui ou celle qui l'a produite, il faut la faire accepter par d'autres, passer de l'explication (privée) à l'argumentation (publique) dans le but de la faire reconnaître comme preuve (institutionnalisée). Au cours du débat de preuve, la solution défendue peut être modifiée voire même rejetée. Ce rejet relance la résolution.

L'idée, souvent reprise, qu'il y aurait d'une part la résolution du problème et d'autre part la preuve (ou démonstration) de sa solution n'est pas en contradiction avec l'observation de l'imbrication de la résolution et de la validation. Mais le discours clivant de l'institution induit leur séparation dans la pratique de l'enseignement, alors que la résolution ne perd pas de vue la validation. La bonne fin de la phase conclusive dépend de la possibilité de construire un lien opérationnel, en termes de connaissance et de structuration logique, entre résolution et validation[37].

En résumé, les processus de validation — contrôle, argumentation, preuve — se construisent sous au moins quatre contraintes :

- celles des *conceptions* mobilisées que caractérisent les opérateurs, les représentations et les contrôles disponibles ;
- celles du *langage et de son organisation dans le discours* que l'on distinguera de la représentation des objets et de leur fonctionnement technique dans la résolution du problème. Ce langage décrit les mises en œuvre qu'il permet de communiquer et d'analyser ;
- celles de la *situation* qui fait peser des enjeux de validation plus ou moins forts qui règlent des principes d'économie de logique liés à toute pratique. Parmi ces situations, celles incluant un débat de preuve engagent la personne au risque d'un glissement du projet de convaincre vers celui de persuader ;
- celles du *contrat didactique* qui, pour une situation donnée, détermine les responsabilités de la charge de la preuve.

7. De l'importance de la situation

7.1. Illustration 3 - la somme des angles d'un triangle

Le théorème sur l'invariance de la somme des angles d'un triangle est l'un des apprentissages fondamentaux de la géométrie au début du cycle 4. Une façon fréquente de l'introduire est de proposer une activité telle que par exemple[38] :

(a) Tracer un triangle ABC et mesurer ses trois angles.

(b) Calculer la somme de ces trois mesures.

Que remarque-t-on ?

Cette conjecture semble-t-elle vraie pour n'importe quel triangle ?

Une telle introduction me paraît manquer l'opportunité qu'offrirait une mise en situation qui

---

[36] (Brousseau, 1998, pp. 109-110).

[37] (Garuti *et al.*, 1998 ; Pedemonte, 2005).

[38] (d'après Barnet, 2016, p. 201).

problématiserait la conjecture en amont du théorème. En effet, avant que le théorème soit connu, la plupart des élèves pensent que plus un triangle est grand plus la somme de ses angles est grande. Il est possible de s'appuyer sur cette conception pour susciter la prise de conscience de l'invariant et, mieux encore, pour provoquer l'intérêt pour une preuve intellectuelle parce que les preuves empiriques seraient disqualifiées.

Ce qui suit décrit les grandes lignes d'une séquence de situations didactiques pour aller de la conjecture dans un sens fort, c'est-à-dire qu'il y a de bonnes raisons de penser que l'invariant géométrique est vrai, à la recherche d'une preuve mathématique du théorème « la somme des angles d'un triangle est 180° ». Les premières utilisations de cette séquence remontent au milieu des années 80, en classe de 5e, je reprends la description de l'époque[39].

Le principe est :

(1) de mobiliser la conception qui doit être déstabilisée et reconsidérée,

(2) d'obtenir la formulation de la conjecture,

(3) de disqualifier le recours aux mesures comme moyen de preuve pragmatique pour permettre l'exigence légitime de preuves intellectuelles.

La première situation met en place l'activité. Elle ne cherche ni l'explicitation ou la discussion de la conception dont l'évolution est visée, ni à susciter la conjecture.

- L'enseignant demande que chaque élève trace un triangle, qu'il en mesure les angles, puis qu'il fasse la somme des résultats obtenus ;
- l'enseignant justifie cette activité en expliquant qu'il s'agit de poursuivre l'étude de l'usage du rapporteur et de la mesure des angles ;
- à l'issue de cette activité, l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme (figure 10), les résultats obtenus. Il demande un commentaire aux élèves.

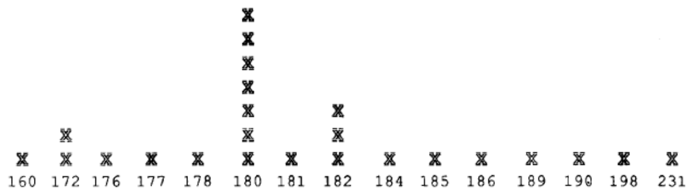


Figure 10 *: Exemple d'histogramme à l'issue de la première situation.*

Tous les résultats proposés sont acceptés. En effet, à cette étape, dans le référentiel des élèves, leur diversité n'a pas de signification particulière : elle reflète à leurs yeux celle des triangles dessinés. Le commentaire demandé n'est là que pour « clore » cette première situation, il peut se limiter à une remarque sur la dispersion des valeurs ou au contraire sur la fréquence de telle ou telle valeur. *L'enseignant reste en retrait*.

Pour différencier ce qui tient à l'incertitude des mesures de ce qui tient aux conceptions des élèves, il faut que toute la classe soit confrontée à la mesure des angles d'un même triangle. C'est ce que réalise la deuxième situation :

- l'enseignant remet à chaque élève une copie d'un même triangle assez « grand » pour favoriser l'engagement de la conception attendue. En effet, le premier triangle dessiné par les élèves occupe rarement plus de la moitié de la page ;

[39] (Balacheff, 1987a).

- l’enseignant demande à chaque élève de formuler un pari sur la somme des mesures des angles de ce triangle et de l’inscrire sur une feuille qui sera ramassée ;
- l’enseignant demande ensuite que chaque élève mesure les angles du triangle donné puis qu’il calcule la somme des nombres obtenus ;
- à l’issue de cette activité, l’enseignant recense et note au tableau, sous la forme d’un histogramme, les résultats obtenus (figure 11) ;
- pour chaque élève, les résultats sont confrontés aux paris, un commentaire est demandé à l’élève ;
- l’enseignant demande à la classe des commentaires sur l’histogramme.

```
163 X
180 XXXXX XXXXX XXXXX XXXXX X
181 XX
182 X
```

***Figure 11** : Exemple d’histogramme à l’issue de la deuxième situation.*

Pour parier, les élèves recourent à une estimation de la mesure des angles, ce qui leur est parfois demandé pour la reconnaissance des angles de 45° ou 90°, et à la comparaison du triangle qui leur est proposé avec leur triangle initial. C’est de cette dernière comparaison que sont issus les paris sur des nombres très sensiblement plus grands que ceux obtenus au cours de la première activité.

Il est attendu que des commentaires sur l’histogramme formulent l’exigence que tous les élèves aient trouvé la même mesure pour le même triangle. Les différences qui ne manquent pas d’apparaître sont explicables par les incertitudes sur les mesures ; incertitudes propres aux instruments ou dues aux pratiques. *L’enseignant le souligne*.

À cette étape, la conjecture n’a pas de légitimité bien que certains (par ex. les redoublants) puisse la proposer. Pour favoriser l’explicitation de conceptions et leurs discussions, la troisième situation est organisée en constituant des petites équipes selon le schéma suivant :

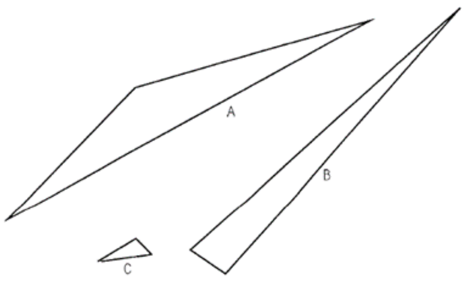


Figure 12

- l’enseignant remet une feuille sur laquelle sont dessinés trois triangles ;
- il demande à chaque groupe de formuler un pari sur la somme des mesures des angles pour chacun des triangles puis d’inscrire ce pari sur une feuille qui sera récoltée ;
- l’enseignant demande aux équipes de mesurer les angles pour chaque triangle, et de calculer la somme des nombres obtenus ;
- à l’issue de cette activité, l’enseignant recense et note au tableau, sous la forme d’un histogramme pour chaque triangle, les résultats proposés ;
- pour chaque équipe les résultats sont confrontés aux paris et un commentaire est demandé par l’enseignant.

Le recensement des mesures, avec la réalisation d’un histogramme pour chacun des triangles, est l’occasion pour les groupes d’une confrontation des paris aux résultats des mesures. Le commentaire demandé favorise l'explicitation des conceptions et souligne la contradiction éventuelle entre le pari et la mesure réalisée.

C'est à ce moment que la conjecture sur l'invariance de la somme des angles peut être formulée comme telle. Le problème de sa validation ou de sa réfutation émerge naturellement des échanges. On peut observer des élèves qui refusent longtemps la conjecture ne pouvant imaginer, par exemple, qu'un triangle très « pointu » ne puisse avoir une somme des angles plus en rapport avec sa forme (l'angle de la pointe est si petit). Pour le plus grand nombre, la recherche d'une preuve devient *le* problème à résoudre. *Le défi collectivement relevé est celui de la construction d'une preuve qui ne peut être empirique car le recours au dessin et aux mesures a été disqualifié*.

L'observation de la séquence a en particulier été conduite dans deux classes dans lesquelles les pratiques d'enseignement étaient très différentes. L'une sans position particulière affichée sur la question de la preuve, l'autre dans laquelle avaient été introduites explicitement les « règles du débat scientifique »[40]. Dans le premier cas, le travail a progressé vers une preuve intellectuelle mais ses caractéristiques n'ont pu être discutées ; l'action prévalant sur la réflexion, l'enseignant n'avait pas de leviers pour susciter la discussion. Dans le second cas, les élèves cherchent à s'en tenir aux règles du débat que certains instrumentalisent dans le jeu procédurier d'une injonction à prouver ou à réfuter ; l'enseignant est interpellé comme arbitre du respect des règles. Dans les deux cas, alors que la séquence conduit efficacement à poser le problème de la preuve, l'enseignant se trouve confronté au problème de la conclusion et de l'institutionnalisation qui peut difficilement se porter sur autre chose que la validité de la preuve apportée alors que ce c'est la reconnaissance des principes d'une telle preuve qui était visée.

Cette limite, confirmée par les travaux les plus récents[41], est le problème le plus important sur lequel la recherche en didactique des mathématiques doit avancer.

7.2. Situation de validation au sens de la théorie des situations didactiques

Les caractéristiques de la situation dans laquelle se trouve l'élève conditionnent, tout particulièrement aux niveaux élémentaires, le fait qu'il prenne ou non la responsabilité de la validité de la solution d'un problème. Prendre cette responsabilité, c'est-à-dire ne pas la laisser à l'enseignant ou la déléguer à un autre élève, est le moteur de l'apprentissage de la preuve, de son rôle, de ses méthodes et critères, de ses formes. La théorie des situations didactiques modélise de telles situations pour les comprendre et les concevoir. Je ne présenterai pas de façon détaillée le concept de situation de validation, je rappelle simplement l'idée que Brousseau avait en le forgeant à la fin des années 60. Cette définition donne une direction à la réflexion que nous devons mener aujourd'hui pour satisfaire les demandes ambitieuses des programmes :

> *L'élève doit établir la validité d'une assertion, il doit s'adresser en tant que sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. Ces échanges contribuent à faire expliciter les théories mathématiques mais aussi à mettre en place les mathématiques en tant que moyen d'éprouver celles que l'on conçoit. Une démarche de preuve est construite dans une dialectique de la validation qui conduit l'élève, successivement à user spontanément des figures de rhétorique puis à y renoncer. Les relations que l'élève doit pouvoir établir pour cela sont spécifiques de cette dialectique »* (Brousseau, 1998, p. 127).

[40] (Balacheff, 1988a).

[41] (par ex. Stylianides, 2007).

Le modèle d'une situation de validation est un jeu social dont l'enjeu est la validité d'un énoncé qui doit pouvoir être explicitement défendu ou rejeté par les protagonistes sur un pied d'égalité quant à leur légitimité à le faire. Les échanges requièrent le partage d'un système de représentation, langagier et/ou non langagier, et d'une référence (savoirs, milieu matériel, ressources documentaires).

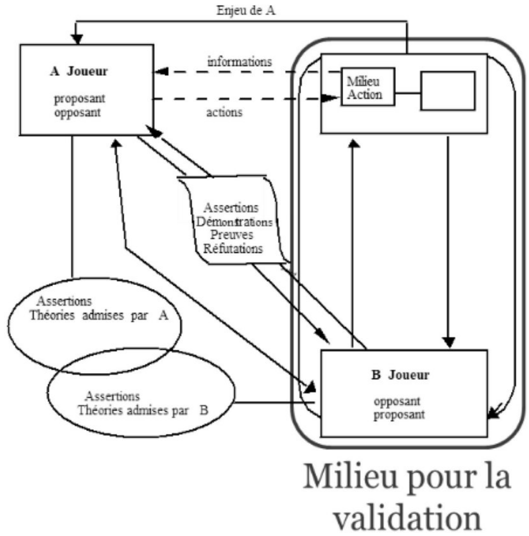


Figure 13

Une situation de validation orientée vers *un apprentissage explicite de la preuve* devra inclure le besoin de reconnaître la nécessité de règles, de les énoncer et d'en convenir collectivement, ainsi que le besoin d'un accord sur la structure du discours et ses critères d'acception. La situation de résolution de problème sur laquelle se construit la situation de validation doit susciter non seulement le débat de preuve, mais aussi celui sur la nature et la légitimité de cette preuve. Pour cela, chaque élève a pour « antagoniste »[42] le milieu, « contre lequel » il résout le problème, et les autres élèves, « contre qui » il ou elle défend la validité de sa solution ou la légitimité de sa réfutation d'une solution par ailleurs soutenue.

L'interaction sociale est nécessaire aux situations dont l'objet est l'apprentissage explicite de la preuve, le milieu matériel ne suffit pas[43]. Le schéma (figure 13) reprend le schéma initial des situations de validation en explicitant dans le modèle du jeu à deux joueurs (A et B) tour à tour proposants et opposants, le point de vue du joueur A, le milieu pour la validation qui inclut le milieu pour la résolution du problème, et le joueur B.

Dans ce jeu de la validation, la compétence langagière est l'instrument de la dialectique du vrai et du faux. Elle inclut les techniques propres aux registres sémiotiques des mathématiques (par ex. écriture algébrique, représentation et codage des objets géométriques), et les figures rhétoriques de la discipline. L'apprentissage de la preuve, au-delà de l'apprentissage de techniques, passe par l'acculturation à des pratiques discursives.

7.3. De l'argumentation outil à la preuve objet

Lors de son cours intitulé *Rationalité et démonstration mathématiques*, donné lors de la cinquième école d'été de didactique des mathématiques, Marc Legrand (1990) formulait l'hypothèse suivante :

> *Il n'est pas beaucoup plus raisonnable d'espérer pouvoir introduire inductivement et naturellement les élèves ou les étudiants dans la rationalité mathématique, à partir d'une pédagogie centrée sur les situations-problèmes, qu'il ne l'est de croire qu'ils finiront bien par entrer dans cette rationalité grâce à une pédagogie de simple monstration* (Legrand, 1990, p. 386).

Cette hypothèse est confortée tant par la pratique de l'enseignement que par la recherche

[42] Je reprends ici les termes utilisés par Guy Brousseau (1998, p. 93) pour définir le milieu au sens de théorie des situations didactiques.

[43] (Margolinas, 1993, p. 84).

expérimentale, qui a bien des difficultés à situer le rôle de l'enseignant et ses moyens. Les situations de *« débat scientifique »*[44] cherchent à donner une réponse pratique pour sortir de ce qui apparaît comme un dilemme tant pour l'enseignement que pour l'institution. Elles reposent sur un engagement fort de l'enseignant initiateur de situations ayant une *« consistance épistémologique »*, une *« bonne adéquation avec la nature des savoirs à enseigner »* prenant en compte *« les connaissances effectivement disponibles chez les élèves/étudiants »* puis son relatif retrait en arbitre des échanges jusqu'au moment d'une nécessaire institutionnalisation *« pour mettre de l'ordre dans le désordre qu'introduit fatalement le débat et pour introduire et expliquer ce qu'aucun débat ne peut introduire et/ou expliquer à un coût raisonnable »*[45].

Ce que Legrand (1990) désigne, et sur quoi il insiste, est l'ensemble des règles du débat pour l'acceptation de la preuve et, corrélativement, de la réfutation en mathématique. Il faut, pour expliciter ces règles, *passer de l'argumentation outil de la validation*, qui repose sur des règles tacites, au débat sur *l'argumentation comme objet dont les caractéristiques explicitées conditionnent sa recevabilité comme preuve*. En d'autres termes, la question de la validité de la solution du problème précisément en jeu doit être dépassée pour laisser la place à celle des critères du vrai, qui n'est pas autre chose que poser les bases de la production des savoirs mathématiques.

Les difficultés de l'enseignement de la démonstration ont souvent conduit à privilégier celui des règles de production de la preuve et des formes de sa formulation ramenées à un apprentissage de la logique. Ainsi l'acquisition du schéma fondamental du *modus ponens* (A, A→B ⊢ B) et de ses conditions d'utilisation apparaît-elle être le principal objectif. Cette priorité met au second plan le fait que la validation d'un énoncé ne tire pas sa légitimité du seul statut des énoncés mobilisés par le problème considéré, mais de celui de l'ensemble de ceux auxquels ils sont liés au sein d'un ensemble structuré ; une théorie qui doit être reconnue pour telle. Avec toutes les précautions qu'appelle l'utilisation de ce vocabulaire, ce qui est à l'ordre du jour est *l'entrée des élèves dans une problématique théorique*.

La comparaison de l'enseignement en France et dans d'autres pays conforte cette observation : le caractère localement organisé des connaissances impliquées dans la production d'une preuve dans les ouvrages scolaires français contraste avec l'organisation quasi-axiomatique au Japon[46] — ce qui n'exclut pas l'existence et l'usage d'un répertoire de théorèmes qui constitue le savoir officiel[47], mais c'est autre chose.

La référence à un cadre théorique explicite en tant que contexte de l'activité mathématique est présente dans nombre de recherches mais n'a pas été thématisée jusqu'à la proposition de Alessandra Mariotti (1997) de définir[48] un « théorème mathématique » comme le système des relations mutuelles entre trois composantes : un énoncé, sa preuve et la théorie au sein de laquelle cette preuve prend sens.

Outre la maîtrise de compétences de raisonnement (logique), l'apprentissage de la preuve en mathématique implique la prise de conscience de ce qui la sépare de l'argumentation naturelle

---

[44] (Legrand *et al.*, 2011).

[45] (*ibid.*, p. 115).

[46] (Miyakawa, 2016, sect. 3.3.3).

[47] (Knipping, 2003, pp. 6 & 10).

[48] (Mariotti *et al.*, 1997, pp. 182-183).

acquise au fil des interactions sociales quotidiennes, et une rupture épistémologique pour entrer dans une problématique théorique dont la nature est essentiellement différente de celle de la connaissance commune.

Modéliser les situations qui permettent de prendre en charge cette rupture reste le principal problème auquel nous sommes confrontés. De telles situations doivent réunir les conditions pour que l'argumentation, cœur de la résolution de problèmes, soit prise comme objet pour comprendre et apprendre ce qu'est une preuve en mathématique. L'apprentissage se fera dans une dialectique du pratique et du théorique au sens de la dialectique outil-objet dans laquelle, il faut le rappeler, l'objet est plus que la somme de ses caractéristiques logiques et discursives :

> *Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine* (Douady, 1992, p. 134).

Conclusion : l'argumentation, un précurseur problématique

Contrôle, preuve et démonstration sont trois régimes de la validation dont les poids respectifs changent au long du continuum qui va de la prise en charge d'un problème à la communication de sa solution selon une norme édictée par une institution. Leurs interactions mutuelles et leurs dépendances aux conceptions sous-jacentes, qui les rendent possibles et dont ils suscitent l'évolution, les constituent en un système dont la nature détermine celle des mathématiques elles-mêmes.

Au cours des dernières décades, la doctrine institutionnelle a cherché à établir un rapport aux mathématiques plus proche des caractéristiques épistémologiques de la discipline. Ainsi l'acquisition de savoirs est-elle complétée — ou peut-être contextualisée — par celle de « compétences » parmi lesquelles les programmes actuels désignent *chercher*, *raisonner* et *communiquer*. La définition assez large et non réductible à des techniques de ces compétences pourrait-elle permettre l'émergence d'une activité qui donne de l'épaisseur au discours mathématique et ainsi *faire vivre dans la classe une véritable petite société mathématique*[49] ? Bien sûr, il n'y a pas de réponse tranchée. En revanche, les résultats de la recherche tant sur l'amont épistémologique que sur l'ingénierie de situations — pratiquées effectivement ou conçues à des fins expérimentales — constituent une base solide pour construire un programme scientifique qui permettra d'y répondre.

Lorsque Brousseau (1998) utilise les expressions que j'emprunte ci-dessus, il fait référence à des *« situations de preuve »*[50]. Pourtant, c'est le concept de *« situation de validation »* qui est retenu comme l'un des concepts fondateurs de la théorie. Ce concept apparaît, pour les questions que nous considérons ici, nécessaire mais insuffisant. Les situations de preuve doivent avoir les caractéristiques des situations de validation avec la contrainte supplémentaire de créer un besoin intrinsèque d'analyse, de certification et d'institutionnalisation des moyens de la preuve dans le cadre collectif de la classe. Ces conditions et les moyens de les créer ne sont pas encore déterminés, en particulier parce que si on sait assez précisément ce qu'est une preuve en termes

[49] En reprenant, pour formuler cette question, les mots de Brousseau (1998, p. 111).

[50] (Brousseau, 1998, pp. 43, 111 & 313), notamment dans la section consacrée au *schéma de la validation explicite* (*ibid.*, pp. 109 et suivantes).

d'objectif d'acquisition à la fin du cycle 4, en revanche il n'y a pas de caractérisation précise et partagée qui puisse servir de référence dans le cours de la scolarité qui précède, dès le cycle 2.

Ainsi, deux grands sujets devraient structurer le programme de recherche à venir : la caractérisation de l'argumentation mathématique et les formes de l'institutionnalisation des preuves en amont du moment si particulier de l'affirmation de la démonstration comme *« moyen mathématique d'accès à la vérité »* ainsi que le formulent les commentaires.

Une *argumentation mathématique* doit au moins être potentiellement recevable au regard des normes de la classe de mathématiques, c'est-à-dire être acceptée pour preuve par la classe et confirmée par l'enseignant. Il ne s'agit là que d'une clarification minimale prenant en compte la dimension sociale. Je propose de partir, pour ce qui concerne le contenu et la forme, de la proposition d'Andreas Stylianides (2007) :

> *Une* preuve *est un* argument mathématique*, une séquence connectée d'énoncés pour ou contre une assertion mathématique, avec les caractéristiques suivantes :*
>
> > *1. Elle utilise des énoncés acceptés par la communauté de la classe (*ensemble d'énoncés acceptés*) qui sont vrais et disponibles sans autre justification ;*
> >
> > *2. Elle utilise des formes de raisonnement (*modes d'argumentation*) qui sont valides et connues de la communauté de la classe, ou à sa portée conceptuelle ;*
> >
> > *3. Il est communiqué à l'aide de formes d'expression (*modes de représentation des arguments*) qui sont appropriées et connues de la communauté scolaire ou à sa portée conceptuelle* (Stylianides, 2007, p. 291 - texte original en note)[51].

Les termes « preuve » et « argument mathématique » sont utilisés comme synonymes, ce qui est souvent le cas dans la littérature anglo-saxonne dans le contexte de l'enseignement. Pour l'essentiel, cette proposition correspond à la définition courante de la démonstration. Son intérêt est de mettre en évidence trois caractéristiques qui correspondent à trois problèmes qui seront à résoudre pour disposer d'une caractérisation utilisable dans la classe. La première pose le problème de la *création d'une référence* dont il faut modéliser la forme et préciser les conditions de création. La deuxième et la troisième distinguent deux aspects de l'argumentation, sa nature (*types d'argumentation*) et son expression (*modes de représentation des arguments*). Ces deux caractéristiques sont en fait intriquées dans le processus de production de l'argumentation. En effet, le raisonnement et l'argumentation sont contraints par les moyens de représentation, les compétences langagières, ainsi que le niveau des connaissances qu'ils mobilisent et partagent — que l'on pense, par exemple, au cas de l'exemple générique ou à celui de l'expérience mentale.

Bien que les racines historiques de la démonstration lui donneraient une légitimité (Arsac, 1987), le concept d'argumentation mathématique sera un concept didactique et non la transposition d'un savoir mathématique. On ne peut le concevoir comme transposition de la démonstration sauf à considérer que la fonction « sociale » de celle-ci, au sein de la communauté scientifique, lui serait constitutive. Ce serait une erreur tant épistémologique que théorique : bien que le produit d'une activité humaine objet d'une certification au terme d'un processus social, la démonstration est indépendante d'une personne ou d'un groupe particulier. La normalisation de la preuve en

[51] *« Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics: 1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification; 2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and 3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community ».*

mathématique, outre le caractère institutionnel de sa référence (le *savoir* mathématique), a requis sa dépersonnalisation, sa décontextualisation et son atemporalité. Or l'argumentation est intrinsèquement portée par un agent, individuel ou collectif, et est dépendante des circonstances de sa production. Il s'agit là d'une difficulté que met en évidence la vigueur des débats sur la recevabilité des preuves « sans mots » ou celle des exemples génériques.

Les caractéristiques de l'argumentation mathématique doivent non seulement permettre de la distinguer d'autres pratiques de l'argumentation (dans la vie courante, dans l'exercice professionnel, dans d'autres sciences), de garantir la transition vers la norme de la démonstration, mais aussi d'être efficace lorsqu'il s'agit d'arbitrer les propositions des élèves et éventuellement de les institutionnaliser pour les organiser et les capitaliser dans la classe. De plus, l'argumentation mathématique doit satisfaire les exigences de l'institutionnalisation. C'est un problème difficile et délicat aux niveaux élémentaires, la reconnaissance de son caractère mathématique ne peut être réduit au jugement sur sa seule forme. Comment, par exemple, arbitrer le cas de l'exemple générique qui met en balance le général et le particulier dont l'équilibre se trouve au terme d'un débat contradictoire recherchant un accord aussi peu que possible entaché de compromis ?

Enfin, *les preuves sont à la fois fondatrices et organisatrices des connaissances* dont elles contribuent à conforter l'évolution et à outiller l'organisation dans le cours de l'apprentissage. Dans l'enseignement, elles légitiment les nouveaux savoirs et les constituent en système : savoirs et preuves reliés font Théorie. La fonction d'institutionnalisation des situations de preuve place la validation explicite sous l'arbitrage de l'enseignant qui est *in fine* le garant de son caractère mathématique. Cette dimension sociale, au sens où le fonctionnement scientifique dépend d'une organisation construite et acceptée, est au cœur de la difficulté de l'enseignement de la preuve en mathématiques.

Références bibliographiques

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration : Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 8*(3), 48. https://revue-rdm.com/2005/l-origine-de-la-demonstration/

Arsac, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme : De la difficulté historique du raisonnement sur les limites*. Hermann.

Balacheff, N. (1987a). Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture. *Cahiers de didactique des mathématiques, 39*. IREM de Paris VII.

Balacheff, N. (1987b). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1988a). Le contrat et la coutume, deux registres des interactions didactiques. In C Laborde (éd.). *Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques* (pp. 15-26). La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (1988b). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Thèse de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Balacheff, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs Algebra the Core of a Didactical Dilemma. In R Sutherland, T Rojano, A Bell & R Lins (éds.). *Perspectives on School Algebra* (pp. 249-260). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_14

Balacheff, N. (2019). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régime de la validation. In J Pilet & C Vendeira (éds.). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018* (pp. 423-456). ARDM et IREM de Paris - Université de Paris Diderot. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02333720

Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). CK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A Mercier & C Margolinas (éds.). *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 1-32).

Barbin, E., Menghini, M. & Moktefi, A. (2013). Les dernières batailles d'Euclide : Sur l'usage des Éléments pour l'enseignement de la géométrie au XIX[e] siècle. In E Barbin & M Moyon (éds.). *Les ouvrages de mathématiques entre recherche, enseignement et culture* (pp. 57-70). Presses Universitaires de Limoges.

Barnet, C. (éd.). (2016). *Mission indigo - Maths Cycle 4 5[e]*. Hachette éducation.

Bessot, A. (2004). Une introduction à la théorie des situations didactiques. Master « Mathématiques, Informatique », Université Joseph Fourier - CNRS, Grenoble, 2003-2004. *Cahiers du Laboratoire Leibniz, 91*, 28. hal-00078794.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

Boero, P. (2017). Cognitive unity of theorems, theories and related rationalities. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 99-106). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01873224

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 164-198.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Confrey, J. (1990). A review of the research on students conceptions in mathematics, science, and programming. In C Courtney (éd.). *Review of research in education, 16*, 3-56. American Educational Research Association.

Delarivière, S., Frans, J. & Van Kerkhove, B. (2017). Mathematical Explanation: A Contextual Approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research, 34*(2), 309-329. https://doi.org/10.1007/s40961-016-0086-2

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 387-424.

https://doi.org/10.1007/BF00315608

Duval, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x, 31*, 37-61.

Garuti, R., Boero, P. & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulties of proof. In A Olivier & K Newstead (éds.). *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 2* (pp. 345-352). http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49. https://www.researchgate.net/publication/245635574_Challenges_to_the_importance_of_proof

Hanna, G. (2017). Connecting two different views of mathematical explanation. *Enabling Mathematical Cultures*. Enabling Mathematical Cultures, Mathematical Institute, University of Oxford. https://enablingmaths.wordpress.com/abstracts/

Knipping, C. (2003). Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement - analyses comparatives des classes allemandes et françaises en quatrième - Introduction. *Bulletin de l'APMEP, 10*.

Laborde, C. (2003). Géométrie - période 2000 et après. *Proceedings of the EM–ICMI Symposium Geneva* (pp. 20-22).

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 365-406. https://rdm.penseesauvage.com/Rationalite-et-demonstration.html

Legrand, M., Lecorre, T., Leroux, L. & Parreau, A. (2011). *Le principe du « débat scientifique » dans un enseignement*. IREM de Grenoble. http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/spip/IMG/pdf/principedebac949.pdf

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée Sauvage.

Mariotti, M. A., Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E Pehkonen (éd.). *Proceedings of the 21st PME Conference, vol. 1* (pp. 180-195). University of Helsinki.

Mariotti, M. A. & Cerulli, M. (2001). *Semiotic mediation for algebra teaching and learning, 3*(8).

Miyakawa, T. (2016). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: The cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics, 92*(2), 37-54. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9711-x

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport enrte argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(3), 313-347.

Plantin, C. (1990). *Essai sur l'argumentation*. éditions Kimé.

Plantin, C. (1996). *L'Argumentation*. Seuil.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics, 38*(3), 289-321.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof : Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z Usiskin (éd.). *Developments in School Mathematics Education Around the World* (pp. 117-136). Reston, Virginia: NCTM. https://pdfs.semanticscholar.org/d850/5fa1c58102b6a8e1ba3618f99cf3824ebe30.pdf

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M. & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G Hanna & M de Villiers (éds.). *Proof and Proving in Mathematics Education, vol. 15* (pp. 13-49). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2

Teo, K. H. (2017). *Relational understanding triumphs over instrumental understanding: the case of Singapore primary four children's understandings of odd and even numbers* [Thesis]. https://repository.nie.edu.sg/handle/10497/19065

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 133-170.

Villani, C. & Torossian, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques (p. 96). Rapport public, Ministère de l'éducation nationale. https://www.vie-publique.fr/rapport/37113-21-mesures-pour-lenseignement-des-mathematiques

Walsch, W. (1983). *Mathematische Aufgaben für die Klassen 6 bis 10*. Volk und Wissen Volkseigener Verlag.

EDUSCOL (2016). *Mathématiques-Raisonner*. MENESR-DGESCO : RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

Équipe académique Mathématiques (2003). *Initiation au raisonnement*. Académie de Bordeaux. http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedaclg/dosped/raisonnement/brochure_init_raison/brochure_intro.htm

MENESR (2018). Cycle 2. *Bulletin officiel de l'éducation nationale, 30* (26-07-2018), 30. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/30/62/2/ensel169_annexe1_985622.pdf