NEUROSCIENCES COGNITIVES ET APPRENTISSAGE DES NOMBRES RATIONNELS : UN POINT DE VUE DIDACTIQUE

Micaela HIRSCH[1]
Université Paris Cité, EDA, F-75006 Paris, France

Éric RODITI[2]
Université Paris Cité, EDA, F-75006 Paris, France

Résumé. En février 2022, le CSEN a publié une note présentant une recherche sur la compréhension des nombres rationnels ; elle se termine par une série de recommandations pour leur enseignement. Une équipe de neuroscientifiques dirigée par Stanislas Dehaene, président du CSEN, est à l'origine de la recherche et de la note. Dans cet article, nous commençons par présenter les orientations générales des recherches de Dehaene relatives à son modèle du triple code et à son hypothèse de recyclage neuronal. Nous analysons le dispositif de recherche et les résultats obtenus, puis nous questionnons les conceptions des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement qui sous-tendent la recherche et les recommandations. Nous nous interrogeons ainsi sur le développement possible d'interactions futures entre neurosciences cognitives et didactique des mathématiques.

Mots-clés. Neurosciences cognitives, évaluation, fractions, décimaux, droite numérique, apprentissage.

Abstract. In February 2022, the CSEN published a note presenting a study on rational number comprehension, which concludes with a series of recommendations for their teaching. A team of neuroscientists led by Stanislas Dehaene, President of CSEN, is in charge of the research and the note. In this article, we firstly present the broad framework of Dehaene's research, related to his triple code model and his neuronal recycling hypothesis. We analyse the research protocol and the results obtained, and we question the conceptions of mathematics, its learning and teaching that underlie the research and the recommendations. We thus wonder about the possible development of future interactions between cognitive neuroscience and didactic of mathematics.

Keywords. Cognitive neuroscience, assessment, fractions, decimals, number line, learning.

Introduction

Le Conseil scientifique de l'éducation nationale (CSEN) a publié, en février 2022, une note intitulée « Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : Le test de la ligne numérique » (Dehaene *et al.*, 2022). Elle est rédigée par Dehaene, Potier-Watkins, Xi He et Lubineau qui sont membres de l'unité de neuroimagerie cognitive du centre de recherche NeuroSpin dirigé par Dehaene, qui signe la note comme président du CSEN. Elle est adressée aux enseignantes et aux enseignants ainsi qu'à leurs formateurs et formatrices[3], et est téléchargeable sur le site du réseau *Canopé*, l'opérateur du ministère de l'Éducation nationale (MEN) dont la mission est la diffusion de moyens pour la formation continue des professeurs du premier et du second degré. La note articule un retour sur les difficultés d'apprentissage des nombres rationnels, la présentation d'une recherche menée par les auteurs en partenariat avec la

[1] hirschmicaela@gmail.com

[2] eric.roditi@u-paris.fr

[3] Afin d'éviter la lourdeur des répétitions effectuées pour marquer la mixité des sexes, la revue recommandant d'éviter l'utilisation du point médian, nous avons autant que possible eu recours à des termes épicènes ou à des formules neutres du point de vue du genre. À défaut, nous avons utilisé le masculin en tant que neutre.

Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) et une série de conséquences qui en sont tirées, en termes de recommandations pour l'enseignement.

Cette note, rédigée par des chercheurs et chercheuses en neurosciences cognitives, traite donc d'un sujet qui concerne la didactique des mathématiques. En tant que didacticienne et didacticien, nous avons souhaité mettre en lumière les options scientifiques des auteurs, leurs différences éventuelles avec les nôtres et les interactions de recherche envisageables. Il nous a aussi semblé important de clarifier les convergences et différences quant au message adressé aux professeurs comme aux personnes chargées de leur formation initiale et continue.

La première partie présente les objectifs scientifiques que poursuit Dehaene depuis des années dans ses travaux sur l'apprentissage des nombres. La deuxième partie porte sur la recherche rapportée dans la note du CSEN et qu'il a conduite avec ses collègues à partir d'une évaluation qu'ils appellent « test de la ligne numérique ». Un point de vue didactique est porté sur les questions posées aux élèves et sur les analyses effectuées des réponses obtenues. À partir des conclusions de la recherche et des recommandations faites aux professeurs, la troisième et dernière partie discute les conceptions portées par cette note au sujet des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement.

1. L'intérêt des neurosciences pour l'apprentissage des nombres

L'intérêt des neurosciences pour l'apprentissage des nombres succède à celui qu'elles portaient, et qu'elles portent encore, pour la connaissance des nombres par les humains et par d'autres espèces animales. À ce sujet, Dehaene a développé un modèle de la connaissance du nombre connu sous le nom de « modèle du triple code ». En ce qui concerne l'apprentissage, il a élaboré le concept de « recyclage neuronal ». Il est essentiel d'avoir ces travaux à l'esprit — ainsi que leur portée quant au constructivisme piagétien — pour comprendre la recherche dont il est question dans la note du CSEN ainsi que les conséquences qui en sont tirées pour l'enseignement.

1.1. Le modèle du triple code

Le modèle du triple code (Dehaene, 1992) modélise les traitements cognitifs des adultes dans la réalisation de tâches numériques à partir de trois représentations des nombres, trois « codes », dont une implantation anatomique selon trois aires distinctes du cerveau a été proposée en s'appuyant sur des techniques d'imagerie médicale. Nous avons déjà présenté ce modèle dans une revue de didactique au sujet des nombre entiers (Roditi, 2005) ; Dehaene l'a lui-même présenté aux enseignants de mathématiques dans un article du bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP) ; nous en citons un long extrait dans lequel l'auteur décrit le modèle et indique parallèlement ses objectifs scientifiques et conclusions qu'il en tire quant à la théorie piagétienne de l'apprentissage du nombre :

> *Lorsque nous observons un ensemble d'objets et évaluons leur nombre, une chaîne de zones corticales, depuis le cortex visuel primaire jusqu'au cortex intrapariétal, est impliquée dans l'extraction progressive du nombre et l'exclusion des paramètres non pertinents tels que la taille des objets, leur forme ou leur position. Quand nous voyons un nombre écrit comme quinze, d'autres régions appartenant au système langagier de l'hémisphère gauche sont impliquées dans le décodage orthographique, lexical et phonologique du mot. Ce n'est qu'après que le mot a été identifié au sein de ce système alphabétique appris qu'il peut être associé à une quantité spécifique au sein du cortex intrapariétal. De même, lorsque nous voyons une écriture arabe comme 15, d'autres aires visuelles décodent son contenu chiffré avant de lui faire correspondre la quantité*

correspondante. Il y a ainsi une organisation à « triple code », dans laquelle trois réseaux cérébraux, ceux des quantités, de la numération verbale et de la numération arabe, communiquent entre eux, de sorte qu'en tant qu'adultes nous pouvons rapidement passer d'une représentation à l'autre.

Cette organisation à triple code a des conséquences essentielles pour notre compréhension du développement numérique. Il y a des indices que le système de la quantité approximative est présent très tôt, particulièrement dans la région intrapariétale droite où même des bébés de 3 mois présentent une activation au cours de tests numériques simples.

Ces indices confortent l'idée que le sens du nombre ne repose pas sur un lent processus d'induction ou le constructivisme piagétien, mais est en grande partie défini sur une base génétique. Cependant, les systèmes relatifs à la numération verbale ou arabe ne peuvent manifestement pas être hérités ; ce sont des inventions culturelles récentes, spécifiques de notre monde occidental, qui nécessitent un apprentissage (Dehaene, 2010, pp. 318-319).

Les trois codes dont il est question sont explicités dans la suite du texte, il s'agit du « code des quantités », du « code verbal » et du « code arabe ». On comprend, à la lecture de l'extrait précédent, que l'indication d'une implantation dans trois zones cérébrales constitue un argument de légitimation du modèle, mais aussi que l'identification d'une zone associée au code des quantités sert un objectif scientifique qui n'est pas seulement celui de la connaissance du nombre mais aussi celui de son apprentissage : nous y reviendrons plus loin, le code des quantités est un argument pour s'opposer à la théorie piagétienne d'une longue *construction* du nombre chez l'enfant.

Une confusion entre nombre et quantité peut être perçue à la lecture de l'extrait précédent ; elle ne manque pas de faire l'objet de critiques, citons par exemple l'historien des mathématiques Keller (2014) qui intervient durant les journées de l'APMEP à propos de l'hypothèse d'un « sens du nombre » présent chez les bébés comme chez les animaux :

En se fiant à l'expérience en question, rien, absolument rien, ne justifie la croyance à un intermédiaire, que ce soit une marque, un calcul ou un sens du nombre ; quand les auteurs prennent parti et assurent que leurs résultats sont la preuve que chez les enfants de six mois, il existe un système de représentation du nombre, c'est pur préjugé au sens propre du terme, préjugé probablement nuisible à la recherche dans la mesure où il détourne l'attention du vrai problème, celui de l'élucidation du mécanisme perceptif à l'œuvre. Dans le même ordre d'idées, lorsque Stanislas Dehaene dit : « Par exemple, sans aucun entraînement, des lions sauvages qui en rencontrent un autre groupe évaluent immédiatement combien ils sont, et ils décident d'attaquer ou de se replier en comparant ces deux nombres » on ne peut croire qu'il pense sérieusement ce qu'il écrit. Il est clair que les animaux comparent des collections, des étendues et des volumes, il y va certainement de leur survie. Mais encore une fois l'hypothèse la plus simple, la première qui devrait donc orienter les recherches, est la comparaison directe, et non la comparaison indirecte par le nombre et la mesure : le sujet doté d'un cerveau voit deux collections d'objets concrets, deux étendues ou deux volumes concrets, et superpose les images qu'il en a gardé (Keller, 2014).

Comme nous le verrons encore, la confusion entre quantité et nombre sert une hypothèse innéiste de la connaissance du nombre, fermement opposée au constructivisme piagétien, et soutenue par la présence de cette structure cérébrale dédiée à la représentation des quantités, sans qu'elle soit issue d'un apprentissage. La littérature neuroscientifique est très critique vis-à-vis du constructivisme piagétien, elle conteste notamment l'un des résultats bien connu du psychologue genevois : la conservation des quantités discontinues (discrètes) ne serait acquise que vers 5 à 6 ans.

1.2. Neurosciences et constructivisme piagétien : l'exemple de la conservation

Dans la mesure où l'hypothèse constructiviste de la connaissance est largement partagée en didactique des mathématiques, il nous semble important de ne pas éluder les critiques à son sujet et de donner accès à cette controverse scientifique.

Rappelons rapidement la classique épreuve de Piaget tant discutée. Elle vise à déterminer si les enfants repèrent la quantité d'objets d'une collection, ou s'ils repèrent seulement l'espace qu'elle occupe. Un expérimentateur aligne un certain nombre de coquetiers en les espaçant régulièrement ; il demande ensuite à l'enfant évalué de prendre autant d'œufs que de coquetiers puis de vérifier qu'il y en a bien « la même chose, pareil »[4]. L'enfant dispose alors les œufs un à un devant chaque coquetier et explique — avec ses mots — qu'il y en a autant puisqu'à chaque coquetier correspond un œuf. L'expérimentateur prétexte ensuite de la nécessité de laver les coquetiers pour les rassembler ; les coquetiers forment alors toujours une ligne, mais bien plus courte que celle des œufs. Il interroge l'enfant : y a-t-il maintenant plus de coquetiers, plus d'œufs ou est-ce qu'il y en a toujours pareil, la même chose ? Jusqu'à 5 ou 6 ans, l'enfant répond qu'il y a plus d'œufs que de coquetiers. Afin de s'assurer de la conviction de l'enfant, l'expérimentateur dialogue avec lui pour savoir s'il comprend bien que la ligne de coquetiers peut revenir à sa forme initiale et qu'il n'y a eu aucun coquetier ni enlevé ni ajouté[5]. Il arrive que des enfants comptent les œufs, les coquetiers et maintiennent leur avis malgré le nombre identique obtenu. Pour Piaget et Szeminska (1941), la conservation de la quantité discontinue se construit au cours du développement de l'enfant, elle constitue un critère de la connaissance du nombre.

Dehaene (2010) explique ce qui constitue, selon lui, l'erreur de Piaget :

> *Cependant le point de départ de Piaget était erroné. Les enfants ne débutent pas dans la vie sans concepts mathématiques. Les recherches ultérieures ont montré que plusieurs des tests de Piaget étaient biaisés, parce qu'ils impliquaient un dialogue verbal sophistiqué qui était tout simplement hors de portée pour l'âge de l'enfant. En outre, ils trompaient souvent les enfants en nécessitant l'inhibition d'une réponse évidente quoiqu'incorrecte, alors que les enfants n'avaient pas encore les capacités exécutives de haut niveau nécessaires. Quand des tests non verbaux plus simples étaient utilisés, même des enfants de 2 ou 3 ans réussissaient dans la conservation du nombre (pour une revue, voir Dehaene, 1997). Par exemple, lorsqu'on remplaçait les rangées d'objets par des rangées de bonbons M & M's et que les enfants n'avaient le droit d'atteindre que l'une des deux rangées, ils ne se laissaient plus leurrer par des changements de la longueur des rangées, mais cherchaient à atteindre le plus grand nombre, suggérant que même un enfant de 2 ans peut comprendre la constance du nombre face à des changements sans rapport avec lui* (Dehaene, 2010, p. 313).

On remarque à nouveau la confusion entre nombre et quantité soulignée par Keller cité précédemment, par exemple lorsque Dehaene écrit « conservation du nombre » ou « constance du nombre ». L'expérimentation avec les M & M's (Mehler & Bever, 1967) est abondamment citée par les neuroscientifiques ; elle est toutefois très critiquable car les auteurs ont dû adapter l'épreuve par rapport à celle de Piaget. Ils souhaitaient en effet intéresser les enfants en leur demandant de choisir, entre les deux lignes, celle qui contenait la plus grande quantité de bonbons. Ce qui n'avait aucun sens si la quantité était la même dans les deux lignes. Les jeunes enfants réussissaient alors en s'appuyant sur des indicateurs de longueur et de densité des lignes

[4] L'expérimentateur évite ainsi les termes « nombre », « autant que » et « quantité ».

[5] Il est possible de visionner une vidéo archive du site du Centre Jean Piaget qui montre le déroulement de cette épreuve : https://www.youtube.com/watch?v=Z0SRaSEQw5E

de bonbons. L'épreuve n'était donc plus une évaluation de la conservation. Les critiques n'ont pas manqué, comme l'indique Vilette (1996), psychologue spécialiste de l'apprentissage du nombre :

> *Les critiques n'ont pas tardé pour mettre en cause les conclusions hâtives de Mehler et Bever. De nombreux auteurs […] ont argué que les tâches utilisées n'étaient certainement pas une mesure de la conservation. L'une des critiques essentielles […] tient au fait que la transformation perceptive est confondue avec la transformation additive. Les enfants peuvent simplement utiliser leurs connaissances sur les ajouts pour désigner là où il y a plus. […] Les jugements corrects ne reflètent donc pas une capacité de conservation. Les nombreuses réplications expérimentales réalisées en tenant compte ou non des critiques, n'ont pas confirmé les résultats de Mehler et Bever.* (Vilette 1996, p. 51).

Nul doute que l'opposition à la thèse constructiviste piagétienne vise à renforcer l'hypothèse de l'existence d'une capacité innée à estimer les quantités. Et il y a un intérêt scientifique secondaire. Dans le modèle du triple code, le code des quantités est défini par Dehaene comme le système du « nombre approximatif », celui qui correspond à la comparaison, à l'estimation des proximités et à la manipulation quantitative (calcul) approchée. Le code des quantités ayant été associé à une aire cérébrale, l'enjeu des neurosciences est à présent d'étudier son évolution, laquelle est assimilée aux apprentissages numériques, c'est ce que Dehaene désigne plus généralement par « recyclage neuronal ».

1.3. Apprentissage et recyclage neuronal

Le recyclage neuronal constitue le phénomène explicatif du passage de capacités innées à des capacités plus élaborées, voire différentes mais suffisamment proches, et qui nécessitent un apprentissage issu d'une transmission culturelle.

Dans un article publié à l'attention d'enseignants québécois, Dehaene et deux chercheurs du laboratoire de recherche en neuroéducation de l'Université du Québec à Montréal expliquent le recyclage neuronal :

> *La capacité à comprendre les nombres et à réaliser des calculs représente […] un apprentissage culturel qui exige que le cerveau se recycle. En effet, […] la représentation symbolique des quantités par les chiffres arabes (1, 2, 3, etc.) représente une invention relativement récente dans l'histoire de l'humanité. Le cerveau ne possède donc pas, de manière innée, une région dont la fonction est de réaliser des calculs exacts à l'aide de symboles mathématiques. Cependant, le cerveau possède, dès la naissance, la capacité d'évaluer approximativement des quantités, ce que l'on appelle généralement le « sens du nombre » […] Tous les enfants possèdent donc d'étonnantes capacités que l'on peut qualifier de « protonumériques », avant même leur entrée en maternelle. C'est cette représentation interne de la quantité, ce sens du nombre, qui leur permet d'attribuer une signification aux chiffres arabes que nous leur montrons et,* in fine*, de réaliser des calculs. Plusieurs recherches menées auprès d'adultes montrent ainsi que lors de la réalisation de calculs complexes avec des nombres écrits en chiffres arabes, la région associée au sens du nombre demeure activée. Cela laisse entendre que cette région du cerveau, le sillon intrapariétal, s'est recyclée pour répondre aux symboles des chiffres. Au cours de l'apprentissage, sa fonction se modifie et se raffine afin d'associer l'intuition innée de la quantité aux symboles mathématiques. Le sens du nombre constitue donc la fondation sur laquelle se construisent les capacités arithmétiques de l'enfant. Même les mathématiques de très haut niveau, chez les mathématiciens professionnels, reposent toujours sur le même circuit cérébral […]* (Brault Foisy *et al.*, 2016, pp. 58-59).

Dehaene et ses collègues expliquent ainsi que le cerveau humain reste stable depuis des milliers d'années, qu'il ne comprend pas d'aire dédiée au nombre écrit en chiffres ou au calcul (les aires dédiées au code arabe et au code verbal sont associées au langage, pas aux nombres), mais une région du cerveau associée à la reconnaissance approximative des quantités, région qui s'active et se transforme par l'apprentissage pour devenir capable de traiter des problèmes arithmétiques de plus en plus complexes. Cette transformation, ce recyclage neuronal, se produirait dans le cerveau de chaque enfant qui apprend.

La question qui se pose alors est la suivante : si des neuroscientifiques étudient l'activation et la transformation du cerveau durant la réalisation d'activités mathématiques ou par l'apprentissage de savoirs mathématiques, quel chemin les neurosciences cognitives doivent-elles effectuer pour, non seulement intéresser les enseignants, mais aussi contribuer à leur action en classe et pour la classe ? La didactique des mathématiques est justement la discipline de recherche qui interroge spécifiquement la relation entre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En tenant compte des caractéristiques des savoirs et des connaissances acquises antérieurement, en fonction des contextes culturels et scolaires, les didacticiens conçoivent des dispositifs pour mettre de façon optimale les élèves en activité (d'apprentissage) mathématique. En classe comme en dehors de l'école, les élèves agissent et interagissent ; leurs apprentissages en découlent. Un objectif des recherches en didactique est d'apporter aux professeurs des résultats éprouvés sur l'enseignement, les apprentissages qui en découlent et leur variabilité selon les élèves, l'évaluation des acquis, les interventions possibles en classe en fonction des erreurs commises ou des procédures mises en œuvre, qu'elles soient exactes comme erronées.

Les neuroscientifiques s'impliquent de plus en plus dans la sphère éducative. D'une part parce que l'apprentissage — éventuellement issu de l'enseignement — constitue le levier de la transformation cérébrale permettant d'acquérir des connaissances mathématiques nouvelles. Mais aussi parce que, selon certains scientifiques, pour être le plus efficace, l'enseignement devrait se conformer à l'architecture du cerveau… En ce qui concerne l'enseignement du domaine numérique, Dehaene et ses collègues québécois indiquent :

> *Nous savons maintenant que l'architecture préalable du cerveau impose de fortes contraintes à la façon dont certains apprentissages culturels peuvent se réaliser. Les deux exemples présentés ici, la lecture et le calcul, nécessitent en effet de recycler des régions bien précises de notre cerveau à ces nouveaux usages. L'enseignement ne peut donc pas faire fi des caractéristiques initiales du cerveau et des contraintes qui leur sont associées. [...] En ce qui concerne l'apprentissage du calcul, il devient pertinent de réfléchir à des stratégies permettant de solidifier le sens du nombre et de l'associer aux symboles mathématiques, en proposant des exercices visant à mettre en relation ces deux types de représentation. Bien qu'il soit essentiel de tenir compte des compétences de chaque apprenant et de différencier l'enseignement en fonction de ses forces ou de ses faiblesses, il apparaît également primordial de planifier l'enseignement afin qu'il soit adapté le mieux possible à l'architecture du cerveau des élèves, qui présente, somme toute, des similarités non négligeables d'une personne à l'autre* (*op. cit.*, p. 59).

Pour l'enseignement des nombres, et des rationnels en particulier, il faudrait donc faire travailler intensément le « code des quantités » (ou « sens des nombres ») et le mettre en relation avec le code symbolique (dit « code arabe » dans le modèle du triple code initialement dédié aux nombres entiers). Par recyclage neuronal, cela renforcerait, chez les élèves, la région du cerveau dédiée au « sens du nombre », cette région qui est activée durant toutes les activités mathématiques, y compris les plus complexes. Tel est, nous allons le voir dans la partie suivante, ce qui sous-tend la recherche présentée dans la note du CSEN. Avant cela, indiquons que les conclusions de Dehaene sur l'enseignement donnent lieu à controverse et citons à ce sujet Barallobres (2018), didacticien des mathématiques de l'Université du Québec à Montréal :

> *[...] la fonction de l'enseignant n'est plus celle d'aider les élèves à participer d'une pratique*

socialement partagée (par exemple, les pratiques mathématiciennes), mais de les aider à développer des connexions neuronales pour apprendre n'importe quel concept. La structuration des environnements d'apprentissage (objectif déclaré de la neuroéducation) n'a pas comme finalité de préserver la signification des pratiques scientifiques dans le contexte scolaire (ce qui requiert une analyse épistémologique du savoir), mais celle d'améliorer le fonctionnement du cerveau (Barallobres, 2018, p. 171).

2. Le test de la ligne numérique : la recherche qui fonde la note du CSEN

Publiée en février 2022, la note du CSEN présente les résultats d'une évaluation menée en septembre 2020 auprès de 1 274 élèves de 6e au sujet de leur connaissance des nombres rationnels. Les auteurs en tirent des résultats sur les acquis des élèves, mais aussi des conséquences pour l'enseignement. Nous nous intéressons ici à l'outil d'évaluation et aux résultats obtenus ; la question des conséquences tirée pour l'enseignement fait l'objet de la partie suivante.

2.1. Le « modèle du triple code » : cadre théorique du « test de la ligne numérique »

Pour répondre aux questions du test, les élèves devaient placer des nombres sur une droite graduée. Chaque nombre était donné par l'une de ses représentations symboliques ou comme le résultat d'un calcul, ce qui correspond à une autre représentation symbolique du nombre. Les auteurs le précisent : *« À chaque essai, l'élève reçoit un nombre et dispose de dix secondes pour le placer sur une ligne graduée, à l'aide de la souris de l'ordinateur »* (Dehaene *et al.*, 2022, p. 3). La partie précédente de cet article dédiée aux travaux de Dehaene met en lumière les raisons scientifiques qui sous-tendent un tel dispositif : les élèves doivent associer deux codes du modèle du triple code, d'une part les représentations symboliques des nombres qui relèvent du « code arabe », et leurs représentations sur une droite graduée qui relèvent du « code des quantités ».

La droite numérique et la compréhension des nombres

La note débute par une partie intitulée « Bien placer, c'est comprendre » qui laisse entendre aux professeurs que le fait de savoir placer les nombres sur la droite graduée correspond à leur compréhension (Dehaene *et al.*, 2022) :

> *[…] le CSEN recommande l'utilisation en classe de la bande numérique qui évolue ensuite vers la ligne numérique. C'est un outil essentiel pour faciliter et <u>révéler</u> [c'est nous qui soulignons[6]] la compréhension de l'arithmétique. […]*
>
> *La ligne graduée permet de comprendre qu'à chaque nombre correspond une position précise et vice versa. […]*
>
> *La recherche montre que les adultes qui sont experts en arithmétique possèdent un concept intégré de ligne numérique qui rassemble les entiers, les fractions et les décimaux. […]*
>
> *Plus généralement, la métaphore d'un espace des nombres est à la base d'un très grand nombre d'objets mathématiques de plus haut niveau […]* (Dehaene *et al.*, 2022, pp. 2-3).

La nature des arguments interroge. Il semble que le travail de positionnement sur la ligne numérique soit bien présenté comme un moyen de comprendre les nombres, voire d'en « révéler » la compréhension, indépendamment du fait que ce positionnement corresponde à une activité mathématique, c'est-à-dire, pour reprendre les termes de Barallobres cité plus haut, indépendamment du fait qu'elle préserve « la signification des pratiques scientifiques dans le

[6] Dans la suite du texte, c'est nous qui soulignons lorsque les citations sont en italiques et soulignées.

contexte scolaire ». Nous percevons ici un glissement sémantique — fréquent dans les travaux de Dehaene — qui tend à assimiler position, nombre et quantité : ce qui est appelé le « sens du nombre » dans le modèle du triple code est précisément le « code des quantités » qui comprend les représentations non symboliques et non verbales des nombres, dont la droite numérique. Les didacticiens des mathématiques considèrent d'autres indicateurs pour juger de la compréhension des nombres.

Des apports de la didactique quant à l'apprentissage des nombres rationnels

D'un point de vue didactique, le fait de savoir placer les nombres sur la droite numérique constitue à la fois une source et un critère de la connaissance des nombres, mais pas davantage. Dans une recherche en cours sur les nombres rationnels, Hirsch (2022) met ce critère en relation avec d'autres formes de connaissance des fractions parmi celles qui sont couramment distinguées :

> *La typologie qui fait le plus fréquemment référence dans les recherches, reste celle de Behr, Lesh* et alii *(1983) qui distinguent cinq conceptions. La fraction « partie-tout » ou « partition » quantifie la relation entre un tout (une unité ou, respectivement, une collection d'unités) et le nombre de parties égales qui le composent. Cette conception est mobilisée dans les propositions : « les trois quarts de la tarte ont été mangés » ou « dans cette classe, les trois cinquièmes des élèves sont des filles ». La fraction « rapport » met en relation la mesure de deux parties, sans référence à celle du tout, comme dans la phrase « L'équipe de direction comporte trois femmes pour deux hommes ». La fraction « opérateur » ne représente pas une quantité mais une transformation. Ainsi, la multiplication du prix affiché par la fraction 4/5 permet de calculer le prix à payer lors d'une remise de 20 %. La conception « quotient » correspond au nombre que représente une fraction [...] c'est le cas de la fraction 1/2 quand elle signifie seulement le nombre 0,5. Enfin, une unité étant fixée, une fraction « mesure » est une fraction utilisée pour exprimer la mesure d'une grandeur : par exemple, la longueur d'une corde est 5/4 lorsque la corde tendue coïncide avec cinq reports d'un quart de l'unité.* (Martinez & Roditi, 2017, p. 26).

Ces différentes conceptions des fractions qui correspondent à des usages en mathématiques sont au cœur de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques visant à documenter l'apprentissage des nombres rationnels comme à concevoir des situations pour leur enseignement.

Ce n'est pas l'objectif de cet article d'apporter une synthèse de ces recherches, citons néanmoins, en ce qui concerne les auteurs français, Douady et Perrin-Glorian (1986), Perrin-Glorian (1986), Brousseau et Brousseau (1987), Bolon (1996), Adjiage (2007) et plus récemment Allard (2015), Chambris, Tempier et Allard (2017), Coulange et Train (2018) et Margolinas (2021).

Les cinq conceptions explicitées précédemment ne sont pas indépendantes les unes des autres. Rappelons que si les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ et $\frac{75}{100}$ sont équivalentes, c'est aussi parce que le rapport entre leur numérateur et leur dénominateur est précisément le nombre $\frac{3}{4}$. Autrement dit, ces fractions sont équivalentes parce que 3 est égal à $\frac{3}{4}$ de 4, comme 6 est égal à $\frac{3}{4}$ de 8, ou comme 75 est égal à $\frac{3}{4}$ de 100. Indiquons enfin, et cela a son importance dans le test de la ligne numérique proposé par Dehaene et son équipe, placer précisément $\frac{4}{2}$ peut se faire en assimilant

$\frac{4}{2}$ au nombre 2, mais aussi en effectuant 4 bonds de longueur $\frac{1}{2}$ à partir de l'origine. Ainsi, deux élèves pourront réussir en mettant en fonctionnement soit une « fraction quotient » soit une « fraction mesure ». Coulange et Train (2018) proposent de mener en classe un travail spécifique sur la relation entre mesure et position. Associé à des interactions entre élèves animées par l'enseignant, un tel travail développera chez les élèves différentes conceptions des fractions ainsi que les liens entre elles par une réorganisation des connaissances.

Dans la note du CSEN, bien que le titre soit « Évaluer la compréhension des fractions et des nombres décimaux », différentes conceptions qui participent pourtant à la compréhension des fractions ne sont pas évaluées. Si le positionnement des nombres rationnels sur la ligne numérique n'est pas présenté comme l'alpha et l'oméga de leur compréhension, de nombreuses indications scientifiques sont apportées dans la note sur son caractère déterminant pour l'ensemble des apprentissages numériques, voire mathématiques ; elles méritent d'être discutées afin d'éviter toute méprise chez les professeurs et leurs formateurs qui ne seraient pas formés à la recherche.

Détermination statistique ou condition suffisante à la compréhension des nombres ?

Dans la note du CSEN, de nombreuses références attestent de l'apport déterminant du travail sur la ligne numérique pour l'apprentissage des nombres (Dehaene *et al.*, 2022) :

> *[…] la compréhension précoce des relations entre le nombre et l'espace prédit les résultats scolaires ultérieurs en mathématiques. […]*
>
> *Au cycle 2, la capacité de placer des nombres sur la ligne numérique est le plus important prédicteur de l'apprentissage ultérieur des fractions, tant sur le plan conceptuel que procédural. Par la suite, la capacité de placer les nombres décimaux prédit l'apprentissage ultérieur de l'algèbre* (Dehaene *et al.*, 2022, pp. 2-3).

Faut-il en conclure que les élèves capables de positionner des nombres rationnels ont suffisamment compris ces nombres pour mobiliser les différentes conceptions des fractions de manière efficace en situation ? Nous ne le pensons pas, bien au contraire. Les « transferts de compétences » parfois évoqués dans la sphère éducative ne sont pas attestés. En ce qui concerne les nombres décimaux, l'une de nos recherches (Roditi, 2007) a montré l'efficacité d'un dispositif visant l'apprentissage de la comparaison de deux nombres décimaux par des élèves en échec sur cette tâche. Ceux qui ont bénéficié du dispositif ne commettaient plus d'erreur en comparant deux décimaux. Pourtant, ils échouaient parfois lorsque la tâche était d'intercaler un nombre décimal entre deux autres, même si les erreurs étaient moins nombreuses qu'auparavant. L'amélioration de la comparaison est positivement corrélée à celle de l'intercalation, mais cela ne doit pas conduire à penser que la réussite à la comparaison permet de « prédire » la réussite à l'intercalation si le travail sur les difficultés spécifiques à cette seconde tâche n'est pas suffisant.

Dans la note du CSEN, le terme « prédicteur » doit être entendu au sens statistique. Plusieurs variables étant étudiées sur une population, des analyses de régressions multiples sont traditionnellement employées afin d'exprimer l'une des variables en fonction des autres, et cela avec une erreur minimale. Dans le vocabulaire statistique, cette variable est dénommée indifféremment variable de sortie, variable dépendante ou variable-critère, tandis que les autres sont dénommées variables d'entrée, variables indépendantes, variables prédictrices ou plus simplement prédicteurs. Des études statistiques complémentaires sont parfois mises en œuvre pour évaluer l'évolution de l'erreur en limitant le nombre de prédicteurs, ce qui conduit à hiérarchiser les prédicteurs et à déterminer le meilleur d'entre eux. Il n'est pas question ici de développer davantage ; l'article de Cosnefroy et Sabatier (2011) permet d'approfondir cette question. On y lit :

> *Si la notion de comparaison des prédicteurs en termes d'importance relative s'avère relativement naturelle dans la présentation des résultats, il n'est pourtant pas toujours aisé de précisément savoir à quoi elle renvoie* (Cosnefroy & Sabatier, 2011, p. 257).
>
> *Enfin, il faut rappeler que quelles que soient les méthodes utilisées, ces dernières ne pourront pallier les problèmes de spécification, ici entendus comme un mauvais choix des variables indépendantes introduites dans le modèle.* (Cosnefroy & Sabatier, 2011, p. 283).

Dans la note du CSEN, il convient de comprendre la phrase « la compréhension précoce des relations entre le nombre et l'espace *prédit* les résultats scolaires ultérieurs en mathématiques » comme « la compréhension précoce des relations entre le nombre et l'espace *est positivement corrélée avec* les résultats scolaires ultérieurs en mathématiques ». Ainsi formulée, l'affirmation n'a pas de quoi étonner : il n'y a pas de « prédiction » dans le sens courant du terme, la corrélation tient essentiellement au fait que l'enseignement des mathématiques se poursuit au long de la scolarité des élèves. Négliger l'enseignement de contenus mathématiques au motif qu'ils seraient prédits par d'autres déjà acquis constituerait donc une erreur ! À ce sujet, signalons l'article de Brissiaud (2019) publié sur le site des *Cahiers pédagogiques*[7] dans lequel l'auteur discute du caractère prédictif des épreuves reposant sur la ligne numérique et passées par les élèves dans le cadre de la « nouvelle » évaluation CP-CE1. Les nouvelles connaissances mathématiques se construisent à partir des anciennes moyennant un travail mathématique dédié, les didacticiens l'ont théorisé par la « dialectique ancien-nouveau » (Brousseau, 1998) et la « dialectique outil-objet » (Douady, 1984). Examinons à présent les questions qui ont été posées aux élèves.

2.2. Analyse didactique de quelques questions du test et des résultats obtenus

Dans le test de la ligne numérique, en dix secondes maximum, l'élève doit, avec sa souris, placer le nombre qui lui est présenté à l'écran sur un segment de droite. Le segment est gradué en unités de 0 à 20 (seuls 0, 10 et 20 sont indiqués) pour la première série constituée de nombres entiers ; il est gradué en dixièmes de 0 à 5 (seuls les entiers sont indiqués) pour la seconde série constituée de nombres rationnels (y compris décimaux et entiers). Chaque nombre est donné soit par l'une de ses représentations symboliques (par exemple : 4 ; 2,4 ; $\frac{1}{2}$) soit comme le résultat d'un calcul (par exemple : $13-4$; $6\times18-18\times6$; $4{,}1-2{,}5$; $2+\frac{1}{5}$). L'objectif était d'évaluer la compréhension des nombres entiers (y compris le système de numération décimale, les additions et soustractions et les principes arithmétiques comme la commutativité de la multiplication) et celle des décimaux et des fractions (y compris le système de numération et les calculs simples). Présentons et analysons quelques questions de ce test et les résultats obtenus.

Numération décimale et commutativité de la multiplication

Des questions classiques, posées par les didacticiens pour évaluer leur compréhension du système décimal de position, ne sont pas présentes dans le test ; la raison est sans doute qu'elles ne conduisent pas à placer un nombre sur la droite numérique. Ces questions demandent par exemple d'écrire en chiffre « $5\,centaines+3\,millions+2\,dizaines$ » pour évaluer la compréhension de la notation positionnelle ou « $5\,centaines+12\,dizaines+3\,unités$ » pour évaluer celle du

[7] https://www.cahiers-pedagogiques.com/

caractère décimal de la numération. Les travaux initiés par Tempier (2010) et poursuivis depuis plus de dix années peuvent être consultés à ce sujet.

Dehaene et son équipe ont préféré interroger la compréhension du système décimal en demandant par exemple aux élèves de placer sur la ligne numérique graduée entre 0 et 20 les deux nombres suivants « $1\times10-10$ » et « $2\times10-10$ » supposant sans doute que les élèves ayant acquis le système décimal compteraient en dizaines : une dizaine moins dix unités égalent zéro, et deux dizaines moins dix unités égalent une dizaine. Ces tâches occasionnent toutefois environ 20 % d'erreurs, les élèves plaçant le résultat sur la graduation 10 pour le premier nombre et 0 ou 20 pour le second. On ne peut pas attribuer ces erreurs au fait que les élèves ne sauraient pas placer un nombre sur la ligne numérique, l'enquête révèle en effet un taux excellent de réussite au placement des nombres entiers. En revanche, nous pensons que les résultats sont brouillés par les réponses des élèves qui comprennent qu'ils doivent effectuer les opérations. Les priorités opératoires ne figurant pas au programme de l'école primaire, les élèves qui calculent ont très bien pu donner la priorité à la soustraction. Ainsi, ils ont pu calculer $2\times10-10=2\times(10-10)=2\times0=0$ ce qui donne un résultat faux qui ne renseigne en rien de la compréhension du système décimal par l'élève. De même, ils ont pu calculer $1\times10-10=1\times(10-10)=1\times0=0$ ce qui donne cette fois un résultat juste alors que le raisonnement est toujours erroné et que cette réponse n'indique toujours rien de la compréhension du système décimal. Les élèves qui calculent ont également pu appliquer un théorème-en-acte de distributivité de la multiplication sur l'addition par exemple, pour le deuxième calcul, ils ont pu penser : $2\times10-10=2\times10-1\times10=1\times10=10$. Cette réussite ne témoigne donc pas de connaissance du système décimal. L'application correcte de la distributivité peut aussi conduire des élèves à l'erreur. Le test montre en effet que l'erreur $5\times0=5$ est fréquente, aussi les élèves qui commettent cette erreur ont pu calculer $1\times10-10=1\times10-1\times10=0\times10=10$. La réponse 10 est d'ailleurs une réponse erronée notée comme fréquente par les auteurs. Une fois encore, l'erreur n'informe pas d'une mauvaise compréhension du système décimal.

Une autre erreur fréquente est signalée, $2\times10-10=20$, mais elle n'est pas expliquée par les auteurs. Nous supposons que des élèves qui répondent sans savoir quoi répondre ont très bien pu cliquer sur des positions attractives du segment gradué de 0 à 20, c'est-à-dire sur l'une des trois graduations correspondant aux extrémités ou au milieu du segment : 0, 10 ou 20, et cela d'autant plus que ces trois valeurs sont les trois seules valeurs numériques indiquées sur la graduation. Une telle variété de procédures potentielles qui, indépendamment de leur validité, conduisent à des réponses correctes ou non, brouille sensiblement l'évaluation de la compréhension du système décimal. Une analyse didactique des questions aurait bénéficié à la validité du test.

Il en est de même pour l'évaluation de la commutativité de la multiplication. Dehaene et ses collègues écrivent à ce sujet (Dehaene *et al.*, 2022, p. 5) : *« Le manque d'appréciation de la commutativité de la multiplication, évaluée par des problèmes tels que $8\times15-15\times8$, entraînent également 55 % d'erreurs (réponses 8, 10, 15 ou 20), ce qui montre que les élèves n'ont pas compris le raccourci qu'elle permet ».* Toute personne familière des pratiques scolaires en mathématiques pensera que le contexte du test n'est pas favorable à la mobilisation de la commutativité : le test porte essentiellement, pour les élèves, sur le fait d'associer un nombre à une position, pas de développer des stratégies de calcul mental. Le contrat implicite induit par les questions précédentes ($9+4$; $13-4$; etc.) est en effet plutôt ici de calculer et d'associer le résultat à une graduation. Il est donc à craindre que la tâche proposée ne soit pas un outil d'évaluation valide de la connaissance de commutativité par les élèves. Les élèves qui la mettent en œuvre témoignent d'un haut niveau de mise en fonctionnement (Roditi & Salles, 2015) de cette connaissance puisqu'ils la mobilisent de leur propre initiative alors que le contexte ne s'y prête pas. Malgré le temps contraint, ceux qui calculent rapidement pourront calculer 8×15 (par exemple en calculant $2\times15=30$, $2\times30=60$ puis $2\times60=120$) puis obtenir 0 en calculant $120-120$. Ce ne sera alors pas la commutativité qui a été mobilisée… Certains élèvent peuvent encore utiliser une distributivité-en-acte et calculer $8\times15-15\times8=8\times0$ ou 15×0. S'ils calculent juste, ils obtiennent eux aussi la bonne réponse, mais ils peuvent également trouver $8\times0=8$ ou $15\times0=15$ qui sont deux erreurs fréquentes sur la multiplication par zéro. Comme signalé précédemment, un élève démuni (comme celui qui chercherait à effectuer les opérations dans l'ordre car les priorités opératoires ne lui ont jamais été enseignées) pourra répondre en cliquant sur l'une des trois positions attractives 0, 10 ou 20. Cela constitue une autre manière d'obtenir la réponse attendue sans avoir mobilisé la compétence évaluée, une autre manière d'obtenir les réponses erronées fréquentes citées dans la note. Une fois encore, il apparaît que cette recherche aurait gagné à être menée avec des didacticiens spécialistes d'enseignement, d'apprentissage et d'évaluation des mathématiques à l'école.

Placer les nombres $\frac{1}{2}$ et $2+\frac{1}{5}$ sur le segment gradué en dixièmes de 0 à 5

Les élèves devaient aussi positionner des nombres rationnels entre 0 et 5, par exemple les nombres $\frac{1}{2}$ et $2+\frac{1}{5}$. Dehaene et ses collègues indiquent (*op. cit.*, p. 6) : *« Beaucoup d'élèves n'ont pas compris qu'une fraction représente une seule quantité, un seul nombre, et ils choisissent donc comme réponse l'un ou l'autre des entiers indiqués. D'autres élèves confondent les fractions et les décimaux, et confondent ainsi 4/8 avec 4,8 ou 3/6 avec 3,6 »*. La formulation de la dernière phrase, qui assimile la non-compréhension du sens de la virgule et de la barre de fractions à une confusion entre fractions et décimaux ne manquera de surprendre les didacticiens, et pourrait même être qualifiée de mathématiquement regrettable dans un texte adressé aux professeurs et à leurs formateurs. Il n'est pas utile dans un article de la revue *Petit x* d'expliquer pourquoi les nombres décimaux sont des rationnels ; il nous semble utile en revanche de rappeler que le défaut de conceptualisation des fractions et des décimaux induit chez les élèves une absence de sens précis accordé aux deux signes que sont la virgule et la barre de fraction, et que cela a déjà été clairement établi il y a bientôt quarante ans par Perrin-Glorian (1986).

Une réponse erronée fréquente associée à la fraction $\frac{1}{2}$ n'est pas commentée dans la note du CSEN (c'est la troisième erreur la plus fréquente après 1 et 1,2) : de nombreux élèves ont positionné $\frac{1}{2}$ sur la graduation correspondant à 2,5. Il est pourtant à remarquer que le segment étant gradué de 0 à 5, ces élèves ont vraisemblablement associé la fraction $\frac{1}{2}$ au milieu du segment, soit en pensant seulement à la moitié et en cliquant sur le milieu, soit en calculant la moitié de 5. Cette réponse erronée — et fréquente — mobilise bien la fraction comme un seul nombre, mais ce nombre est une « fraction opérateur », pas une « fraction quotient » ; il est regrettable qu'une analyse des effets induits par la modalité de réponse ne figure pas dans la note. Il est en outre vraisemblable que les résultats auraient été sensiblement modifiés si les graduations n'avaient pas été de dixième en dixième, mais de demi en demi. Les élèves qui placent correctement la fraction $\frac{1}{2}$ sur la graduation équidistante de 0 et 1 auraient pu compter les graduations (et donc comprendre 1 et 2 comme deux nombres) ou placer $\frac{1}{2}$ entre 0 et 1 (et donc comprendre $\frac{1}{2}$ comme un seul nombre). Nous nous interrogeons une fois de plus sur la validité des questions posées dans ce test, c'est-à-dire sur leur capacité à évaluer ce que les chercheurs souhaitent évaluer. Quand on évalue, on donne une tâche à réaliser et l'on cherche à faire en sorte qu'une réponse juste corresponde uniquement à la mise en œuvre de la connaissance objet d'évaluation, autrement dit qu'il ne soit pas possible de mobiliser une connaissance inexacte ou une autre connaissance et d'obtenir néanmoins le résultat attendu. C'est une opération difficile à réaliser, celles et ceux qui évaluent le savent bien : les enseignants, les chercheurs ou les professionnels de la mesure des acquis des élèves. Cette opération nécessite différentes révisions des tâches évaluatives après plusieurs passations et analyses des résultats par des personnes spécialistes à la fois des contenus évalués, des tâches scolaires et des apprentissages des élèves.

Des analyses analogues pourraient être conduites sur les réponses des élèves à la question $2+\frac{1}{5}$. Même si aucun calcul n'est nécessaire pour répondre, la question posée ne manque pas d'induire une addition. C'est ainsi que nous comprenons la réponse 3,5 produite par plus de 15 % des élèves et qui est la troisième réponse la plus fréquente : les élèves ajoutent 2 et 1, obtiennent 3 et, ne sachant calculer mentalement la valeur décimale de $\frac{3}{5}$ en moins de dix secondes, ou bien confondant la barre de fraction et la virgule, cliquent sur la graduation correspondant à 3,5.

À propos de cette partie du test, Dehaene et ses collègues écrivent en conclusion (Dehaene *et al.*, 2022, p. 6) : *« Ce sont des erreurs très fréquentes, peut-être liées au fait que les décimaux et les fractions sont souvent enseignées presque conjointement en CM2 »*. Cette conclusion, formulée sous forme d'hypothèse, apparaît très fragile : comme l'indiquent les didacticiens précédemment cités, les difficultés d'apprentissage des nombres rationnels (fractions et décimaux) sont connues depuis longtemps et conduisent à recommander un enseignement sur plusieurs années. Une conclusion plus robuste, soutenue par d'autres recherches, aurait mérité de figurer dans un texte adressé aux enseignants par l'institution scolaire… Nous nous interrogeons alors sur l'intention des auteurs de cette enquête : l'objectif majeur de cette étude, menée avec le soutien de la DEPP et donc du ministère de l'Éducation nationale, ne nous semble pas d'être utile aux enseignants, mais bien de renforcer les travaux scientifiques relatifs au modèle du triple code et au recyclage neuronal, en faisant associer des écritures numériques symboliques et des positions sur la ligne numérique.

3. De la recherche aux recommandations pour l'enseignement

De leur recherche, Dehaene et ses collègues tirent deux conclusions majeures :

> *Le premier enseignement de cette recherche est que les élèves de sixième n'ont pas encore bien compris comment les différents types de nombres se relient entre eux et s'intègrent dans un seul système. Cette intégration est loin d'être terminée en fin de premier degré. L'arithmétique est constituée d'un tissu de relations que seule la rencontre avec une diversité de problèmes (concrets et abstraits), soutenue par un guidage approprié par les enseignants, permettent de découvrir. […]*
>
> *Le second enseignement est que la notion de ligne numérique peut aider à comprendre les décimaux et les fractions. En effet, des revues récentes de la littérature sur les interventions pédagogiques indiquent qu'il est efficace de pratiquer des activités qui consistent à ancrer dans le*

concret la connaissance de la grandeur des décimaux et des fractions à travers des activités de comparaison, de mise en ordre et de positionnement de ces nombres sur des lignes numériques. (Dehaene *et al.*, 2022, pp. 6-7).

Nous nous proposons d'en analyser différentes conséquences, en lien avec les recommandations qu'ils font aux professeurs. Nous nous appuyons pour cela sur les éléments de la note supposés soutenir ces conclusions, et nous analysons ce que ces recommandations révèlent de leurs conceptions au sujet des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement.

3.1. De l'analyse des productions des élèves aux recommandations aux enseignants

Nous avons déjà montré que certaines analyses des réponses produites par les élèves au test de la ligne numérique n'étaient pas suffisamment informatives ni précises compte tenu des savoirs produits en didactique des mathématiques. D'autres propos nous ont même semblé plutôt inexacts au vu des recherches en didactique. Ainsi, au sujet des nombres décimaux, Dehaene et ses collègues indiquent :

> *Les élèves doivent comprendre que ces nombres constituent une extension de la notation positionnelle des nombres entiers. [...] Dans les décimaux comme 2,2, l'élève doit prêter attention à la virgule et comprendre comment sont organisées les positions successives à droite de celle-ci. Une erreur classique consiste à croire que 1,9 est plus petit que 1,25 : dans les nombres à virgule, la longueur n'est plus un indice fiable de la taille des nombres ! La même méconnaissance du rôle crucial de la virgule est à l'origine d'erreurs de calcul du type « 1,2+3=1,5 » très courantes chez les élèves. Apprendre à positionner les nombres décimaux, ce qui oblige à prêter attention à la position de la virgule, facilite la compréhension de leur grandeur et de leur sens.* (Dehaene *et al.*, 2022, p. 3).

La formulation *« l'élève doit prêter attention à la virgule »* ou *« la même méconnaissance du rôle de la virgule »* laisse entendre qu'il ne s'agit pas d'un problème de conceptualisation du nombre décimal, mais plutôt d'un problème d'attention à la position de la virgule et à sa signification. Les recherches en didactique des mathématiques déjà cités de Brousseau et Perrin-Glorian ont révélé que la focalisation sur la virgule conduit à une conception inexacte et pourtant véhiculée par le langage courant : le nombre décimal serait composé de deux nombres entiers, la partie entière et la partie décimale. Ces recherches et de nombreuses autres conduisent à penser que l'enseignement doit viser une compréhension de la valeur des chiffres associée à leur position par rapport au chiffre des unités, et pas seulement à la virgule. De nombreuses erreurs sont commises par les élèves du fait de la symétrie entre dizaines et dixièmes, centaines et centièmes, etc. qui est pensée par rapport à la virgule au lieu de l'être par rapport au chiffre des unités. Quand il évoque l'erreur classique qui conduit à penser que 1,9 est inférieur à 1,25, Dehaene ne l'attribue pas à une conception « double entier » du nombre décimal, mais à une question de longueur de l'écriture chiffrée. Il ne faut pas se méprendre : comme nous l'avons montré dans un article comparant des travaux en didactique et en neurosciences cognitives sur la comparaison des décimaux (Roditi & Noûs, 2021), la différence de longueur de l'écriture chiffrée, ou même de la partie décimale, ne signifie pas une différence de nombre de chiffres, mais bien une différence de longueur, au sens de la mesure géométrique. Selon le modèle du triple code et du recyclage neuronal, l'hypothèse des chercheurs est en effet que c'est l'aire cérébrale dédiée de façon innée à la comparaison des grandeurs qui, par recyclage neuronal, devient efficace pour la comparaison des nombres donnés sous forme symbolique.

Les erreurs des élèves ne sont donc pas interprétées en fonction du sens mathématique des concepts, en lien avec l'histoire de leur construction, de leur propriété « outil » pour résoudre des problèmes ou « objet » pour leur lien avec les autres concepts. Les erreurs sont interprétées en fonction de ce qui est retenu dans le modèle neuroscientifique du nombre, quitte d'ailleurs à tenir des propos quelque peu inexacts. Si l'erreur 1,9<1,25 correspondait à la comparaison des longueurs des écritures chiffrées, les élèves écriraient aussi que 2,9<1,25 ; or ils ne le font pas, Grisvard et Léonard (1985) l'ont bien montré. Si le problème d'apprentissage des nombres décimaux n'était, comme le présente Dehaene, que celui du « rôle crucial de la virgule », ils commettraient effectivement très couramment des erreurs de calcul du type « 1,2+3=1,5 ». Cela n'est pas ce que montre Chesné (2014) : les élèves se trompent très peu sur les parties entières. À l'entrée en 6^e^, ils sont 83 % à réussir le calcul 15,7+23 et ne sont plus que 63 % à réussir le calcul 18,5+3,67. L'erreur est d'ajouter les parties décimales comme deux nombres entiers et de calculer 18,5+3,67=21,72. L'erreur ne provient pas d'une ignorance du « rôle crucial de la virgule », mais plutôt d'une incompréhension de la relation entre valeur et position dans le système décimal.

En interprétant les erreurs des élèves, Dehaene cherche à conforter son modèle de la compréhension du nombre et sa conception de son apprentissage. Cette recherche est destinée à confirmer son hypothèse selon laquelle l'enseignement doit permettre *« de solidifier le sens du nombre et de l'associer aux symboles mathématiques, en proposant des exercices visant à mettre en relation ces deux types de représentation »* (Brault Foisy *et al.*, 2016, p. 59). La recherche sur le « test de la ligne numérique » le conduit alors, entre autres recommandations, à conseiller aux enseignants de *« faire pratiquer la mesure, notamment celle des longueurs, à l'aide d'un mètre qui introduit les nombres entiers puis les décimaux »* (Dehaene *et al.*, 2022, p. 7). Brousseau et Perrin-Glorian ont pourtant montré combien le fait d'associer précocement la partie entière à une unité et la partie décimale à une sous-unité conduisait les élèves à penser le nombre décimal comme un couple de deux entiers, et faisait donc obstacle à sa conceptualisation.

3.2. Dans la note du CSEN : conceptions relatives aux mathématiques et à leur apprentissage

Les nombres rationnels et les nombres décimaux sont des objets mathématiques qui relèvent d'un haut niveau d'abstraction. Comme l'explique Chambon (2020) dans son ouvrage intitulé Histoire du nombre, considérer le rapport de deux nombres comme un seul nombre a nécessité de rompre avec la dichotomie entre « nombre » (lié à l'arithmétique) et « figures » (liées à la géométrie). Le travail a été initié par Stevin au milieu du XVI^e^ siècle, mais il a fallu la contribution de plusieurs mathématiciens pour atteindre cette unification au XVIII^e^ siècle. L'unification du domaine numérique avec les irrationnels, et surtout les nombres négatifs, a été encore plus tardive. Nous ne soutenons pas l'idée que la compréhension d'un concept mathématique nécessite, pour chaque individu, de revivre les errances et les étapes de sa construction ; nous estimons néanmoins avec Brousseau (1998) et Douady (1986) que cette compréhension passe par celle des problèmes que les concepts mathématiques contribuent à résoudre. Dans cette construction, les objets et les méthodes sont logés à la même enseigne. Le calcul a longtemps procédé de manipulations matérielles (de *calculi* en particulier) avant de s'effectuer à l'écrit en opérant sur des symboles. Les techniques calculatoires ont elles aussi évolué, et restent d'ailleurs marquées culturellement, ce qui les rend parfois sensiblement différentes d'un endroit à l'autre de la surface du globe.

On ne trouve pas de trace de cette préoccupation dans les recommandations faites aux enseignants dans la note du CSEN. La remarque de Barallobres (2018) quant à l'absence de *« finalité de préserver la signification des pratiques scientifiques dans le contexte scolaire (ce qui requiert une analyse épistémologique du savoir) »* reste ici pertinente. Certaines phrases de la note laissent même entendre que la compréhension en mathématiques se concentre sur celle des objets, pas sur les techniques qui seraient, quant à elles, surtout à mémoriser :

> *[...] il arrive souvent que les élèves mémorisent les recettes arithmétiques sans pour autant comprendre le sens des objets qu'ils manipulent.*
>
> *En sciences cognitives, on parle d'une dissociation entre la mémoire procédurale et la mémoire sémantique : la connaissance de la procédure ne suffit pas à garantir la compréhension du sens des objets mathématiques.*
>
> *Les élèves qui n'ont pas compris le sens des fractions se bornent à traiter ces deux nombres indépendamment l'un de l'autre. C'est pourquoi ils ont du mal à retenir les règles qui régissent les opérations sur les fractions [...]* (Dehaene *et al.*, 2022, p. 2 et p. 3).

L'un des résultats de la recherche qui est souligné dans la note du CSEN semble plus profondément confirmer une conception des mathématiques où elles sont considérées comme un ensemble d'objets et de règles déjà là pour les enseignants ; leur métier étant alors de les faire comprendre et mémoriser aux élèves, sans que cette compréhension ne relève d'une pratique scientifique transposée dans la classe, sans que cette mémorisation n'engage des constructions intellectuelles nouvelles, issues de réorganisation ou parfois de bouleversement des connaissances anciennes. Citons le passage de la note sur lequel nous nous appuyons et analysons-le :

> *[...] certains élèves recevaient du feedback sur leurs réponses [...], et d'autres non [...]. Les résultats indiquent que ce paramètre a un effet significatif : les résultats sur les fractions sont un peu meilleurs dans le groupe avec feedback, auquel on indiquait la bonne réponse lorsqu'ils se trompaient. C'est un résultat intéressant [...] il montre que l'évaluation peut aussi être un moment d'apprentissage : se tester permet d'apprendre. Le feedback aide les élèves en les corrigeant, et cet effet positif se voit en quelques minutes seulement. Ce résultat laisse penser que la pratique régulière du placement des nombres sur la ligne numérique, avec le feedback d'un logiciel ou de l'enseignant, pourrait améliorer la compréhension de la grandeur des fractions, donc de leur sens.* (Dehaene *et al.*, 2022, pp. 4-5).

Laissons de côté le jeu sur le vocabulaire statistique qui permet d'indiquer un *« effet significatif »* lorsque *« les résultats [...] sont un peu meilleurs »*. Laissons également de côté le fait que les auteurs s'adressent aux enseignants et à leur formateurs en leur indiquant comme un *« résultat intéressant »* le fait que l'évaluation peut aussi être un moment d'apprentissage. Attardons-nous sur la nature du résultat. Nous l'avons vu, la plupart des réponses des élèves se concentrent sur deux ou trois positions du segment gradué qui correspondent à deux ou trois stratégies de réponse possibles. Le feedback indique la bonne réponse en cas d'erreur. Si plusieurs questions sont analogues, les élèves qui reçoivent ce feedback à la première réponse fausse peuvent alors simplement éliminer les stratégies inefficaces et adopter la stratégie gagnante (pensons par exemple à l'élève qui place $\frac{1}{2}$ au milieu du segment, et qui comprend par le feedback que c'est le nombre un demi qu'il faut placer, pas un demi segment). Cette adaptation des élèves correspond-elle à un apprentissage ? Il nous semble permis d'en douter, d'autant plus que les résultats sont seulement un peu meilleurs. Nous nous étonnons même de la satisfaction liée au fait que *« cet effet positif se voit en quelques minutes seulement »* et qu'elle conduise à une recommandation pédagogique d'entraînement régulier au *« placement des nombres sur la ligne numérique »*.

3.3. Note du CSEN : conceptions relatives à l'enseignement des mathématiques

Intéressons-nous enfin aux *« stratégies d'enseignement »* recommandées par Dehaene et ses collègues dans la note du CSEN, et plus précisément à celles qui portent sur les fractions. Elles sont présentées dans la dernière page de la note. Cela ne surprendra pas, il est recommandé de placer des fractions sur la ligne numérique (Dehaene *et al.*, 2022) :

> *La recherche montre qu'un entraînement qui vise à mieux faire comprendre la grandeur des fractions entraîne également des gains en compréhension de la manière dont les règles arithmétiques s'appliquent aux fractions. Cependant, l'impact du simple fait de jouer à placer des fractions sur la ligne numérique est débattu : les données suggèrent que le jeu lui-même ne suffit pas, et qu'il faut l'accompagner d'un enseignement explicite de ce que sont les fractions et de la manière dont elles se comportent* (Dehaene *et al.*, 2022, p. 7).

La note ne précise pas si les recherches mentionnées ont été effectuées en laboratoire ou dans des classes, rien n'est non plus indiqué sur l'enseignement qui doit accompagner le jeu. Ce passage de la note laisse encore apparaître une conception des mathématiques scolaires et de leur enseignement dans laquelle les activités proposées sont éloignées de pratiques scientifiques transposées pour la classe, et dans laquelle le rôle des enseignants serait principalement de donner à voir les mathématiques déjà là aux élèves, de les expliquer. Comme si les mathématiques étaient présentes en dehors de l'esprit des élèves et qu'elles se donnaient à voir à eux par l'intermédiaire de l'enseignant.

Une critique a déjà été adressée à Dehaene quant à son illusion d'une forme de transparence des représentations des concepts mathématiques dans l'enseignement :

> *Lorsque Dehaene (1997/2010) avance ses propositions sur l'apprentissage du « sens du nombre » par l'élève, (rappelons que ses travaux portent sur l'origine du nombre et non pas sur l'apprentissage), ses propos sont empreints d'un empirisme échevelé :*
>
> > *La calculette, qui ne se trompe jamais, peut lui apprendre qu'une soustraction donne toujours un résultat inférieur au nombre de départ, que multiplier par un nombre de trois chiffres augmente de deux ou trois chiffres la taille du nombre de départ, et ainsi de suite. Le sens des nombres s'acquiert ainsi : en observant. (p. 151)*
>
> *Le sens du nombre est-il alors contenu dans ce que la calculette « donne à voir », comme si ce qui est « vu » était tout entier là, sur l'écran, et non produit par l'activité du sujet qui regarde. Dans le premier cas, tous les lecteurs devraient lire la même chose. Cependant, les recherches en didactique des mathématiques (Bednarz & Dufour-Janvier, 1984 ; Briand & Chevalier, 1995 ; Brousseau, 1981 ; etc.) montrent bien que la prise de conscience du fait qu'une soustraction donne toujours un résultat inférieur au nombre de départ découle d'une lecture « intentionnée » des données fournies par la calculette, provenant d'une question que le sujet se pose (ou qui lui est posée dans le contexte de l'enseignement). Guidé par une autre question, l'élève pourrait très bien « observer » que la soustraction de deux nombres naturels donne toujours un nombre naturel. Pourquoi dès lors privilégier la première « observation » ? (Barallobres, 2018, p. 177).*

Dans la note du CSEN, on perçoit l'idée que les représentations des objets mathématiques soient transparentes et fassent apparaître les concepts :

> *Elle [la bande numérique] aide notamment à comprendre que tous les nombres entiers 1, 2, 3… sont ordonnés et également espacés […].*
>
> *La ligne graduée permet de comprendre qu'à chaque nombre correspond une position précise, et vice versa. Il devient alors possible de se demander ce qu'il y a « plus à droite » — ce qui fait réfléchir aux grands nombres ; « à gauche de zéro » — c'est l'introduction des nombres négatifs ; ou encore « entre deux nombres » — ce qui donne un accès intuitif aux nombres décimaux et aux fractions* (Dehaene *et al.*, 2022, p. 2).

Nous retrouvons aussi cette idée dans les recommandations formulées pour l'enseignement des fractions ; il est en effet recommandé de :

> *Expliquer comment les nombres peuvent être représentés par des barres que l'on peut diviser ou*

> *regrouper. Ainsi les opérations telles que 3/4+5/4 deviennent faciles à visualiser (voir la figure ci-contre) […].*
>
> *Faire pratiquer les constructions géométriques. Leur division ou leur pliage permettent de comprendre la division des longueurs et des surfaces par deux, par trois, par quatre… (voir la figure ci-contre)* (Dehaene *et al.*, 2022, p. 7).

La figure indiquée montre successivement une barre subdivisée en quatre quarts, puis trois quarts de barre, puis cinq quarts de barre, puis enfin la réunion des trois quarts et des cinq quarts qui coïncide avec deux barres. Ce type de situation est répandu dans l'enseignement ; les élèves manipulent des *réglettes Cuisenaire* et, par un jeu analogue de composition et comparaison, ils constatent et écrivent que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, que $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=2$ ou que $\frac{1}{2}+\frac{4}{8}=1$. La question que nous nous posons est la suivante : ces jeux de combinaison et de comparaison correspondent-ils à une activité mathématique ? et conduisent-ils à un apprentissage mathématique dont les écritures seraient les preuves ?

Une recherche en cours (Yvorra, 2022) explore cette question pour mieux comprendre les liens possibles entre manipulation et observation, verbalisation et formalisation, et abstraction et conceptualisation. Une séance de mathématiques a été expérimentée durant laquelle les élèves manipulent des bandes de papier cartonné correspondant à une unité. Ils construisent des fractions d'unité — demis, tiers, quarts et cinquièmes — par découpage après pliage ou par la mesure, puis ils assemblent ces fractions d'unité et écrivent les calculs correspondants comme ceux indiqués ci-dessus et dans la note du CSEN. La chercheuse demande alors combien font $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$. Les élèves renouvellent leurs manipulations et obtiennent trois bandes correspondant aux trois fractions d'unité qui, juxtaposées, coïncident avec l'unité. Ils écrivent alors $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=1$. Toute personne qui aura calculé mentalement aura compris que la somme n'est pas égale à 1 mais à $\frac{59}{60}$. Cela interroge donc sur l'activité mathématique des élèves. S'ils trouvent un résultat qui n'est pas égal à la somme des fractions, c'est parce que leur activité n'est pas mathématique : ils n'associent pas les concepts aux écritures, ils y associent seulement leurs représentations. Le travail précédent qui aboutissait à des égalités mathématiquement correctes était-il davantage un travail mathématique ? Nous ne le pensons pas, et pour les mêmes raisons.

Afin de provoquer un travail mathématique, un autre matériel a été proposé aux élèves : des disques cartonnés de grand format représentant des cadrans d'horloge. Ils ont retrouvé des égalités comme $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$ qu'ils ont traduites en « une demi-heure plus deux quarts d'heure font une heure ». La chercheuse a renouvelé la demande de déterminer combien font $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$. Les élèves ont repris leurs activités manipulatoires, mais cette fois, grâce à la grande taille des disques, il leur a semblé que le total ne faisait pas tout à fait 1. La chercheuse a suscité le questionnement : avec les bandes, on trouve 1, avec les disques, on ne trouve pas tout à fait 1, comment est-ce possible ? Les élèves ont mis en cause la précision des découpages, mais la chercheuse a insisté et a demandé aux élèves comment être sûrs, comment « savoir ». La conversion des fractions d'heures en minutes a apporté la solution. C'est par un retour à la signification « partition » de la fraction que les conversions ont été réalisées et que la somme a été calculée : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{24}{60}=\frac{59}{60}$. Les élèves ont ainsi résolu leur problème issu d'une incertitude quant à la précision des coïncidences matérielles grâce à une mobilisation des concepts : ils ont vu $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=1$, et ils ont compris $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{59}{60}$.

Il nous semble important, pour terminer l'analyse de cette note du CSEN, de bien mettre en évidence la différence entre deux conceptions des mathématiques scolaires : une conception selon laquelle les mathématiques sont présentes dans le réel indépendamment des élèves qui ont à les y voir, à les y reconnaître ; et une conception selon laquelle les mathématiques ne sont présentes que dans l'esprit des élèves par une construction intellectuelle qui s'effectue notamment en réponse à des problèmes. Cette deuxième conception n'exclut en rien le lien avec le réel, bien au contraire : l'action sur le réel constitue même le fondement de l'apprentissage selon Vergnaud, psychologue et didacticien des mathématiques. Citons à ce sujet un extrait de la synthèse intitulée *Regards psychologiques sur les apprentissages mathématiques* rédigée par Goasdoué (2018) qui explique clairement en quoi l'apprentissage mathématique issu de l'action sur le réel n'est pas simplement une extraction des mathématiques présentes dans le réel :

> *Défendre, au contraire, que les concepts prennent racine dans l'action impose de décrire par quels moyens on parvient à extraire des régularités de l'action qui seront intégrées dans des concepts. La notion de schème proposée par Kant, reprise par Piaget puis approfondie par Vergnaud dans une conception élargie, est un élément fondateur des théories défendant l'ancrage dans l'action des connaissances. Elle permet de décrire par quels moyens nous travaillons le réel, dirait Vygotski ou en termes plus piagétiens, avec quels outils nous assimilons le réel.*
>
> *Défini par Vergnaud comme « une organisation invariante de la conduite pour une classe de situation », le schème n'est pas directement observable, peut être inféré de l'observation de comportements dans une variété de situations. Cette notion permet à la fois de décrire les capacités d'adaptation et de comprendre la stabilité ou la constance de la pensée. Nous assimilons toute situation nouvelle à des expériences antérieures, dont nous avons extrait des invariants, des « îlots de sécurité », qui fondent le pouvoir assimilateur des schèmes. La sélectivité du psychisme et donc de la mémoire conduit au processus fondamental de repérer « ce qui est le même sous le différent » (Vergnaud 2001, p. 112). Le flux continu des expériences est organisé par les schèmes, et organise les schèmes* (Goasdoué, 2018, p. 188).

Ce réel peut être compris à la fois comme composé des objets du monde concret ou comme un réel pour l'élève (si les apprentissages nécessaires ont bien été effectués) composé d'objets mathématiques déjà construits par ce processus de conceptualisation. On retrouve alors le cycle de conceptualisations successives correspondant aux dialectiques « outil-objet » et « ancien-nouveau » développées respectivement par Douady (1984) et Brousseau (1998) déjà évoquées précédemment. À ces deux conceptions des mathématiques sont associées des conceptions différentes de l'enseignement, une conception où le rôle des professeurs est de montrer et d'expliquer, et une autre où ils ont aussi à mettre leurs élèves face à des problèmes qui contextualisent les savoirs à apprendre, des problèmes dont la résolution les conduira justement à la construction de connaissances relatives à ces savoirs, à la conceptualisation. C'est cette deuxième conception qui est partagée en didactique des mathématiques comme par de nombreux chercheurs en psychologie et en sciences cognitives qui ont consacré leurs recherches à la compréhension de l'apprentissage des nombres. On n'en trouve pas trace dans la note du CSEN.

Conclusion

L’enseignement et l’apprentissage sont des phénomènes complexes inscrits dans des contextes culturels, sociaux, institutionnels, politiques et économiques. Les élèves et les enseignants y sont engagés ; le sens de leur activité dépend de leur histoire personnelle et familiale comme de leur inscription dans des groupes sociaux. Le Conseil scientifique de l’éducation nationale a pour fonction d’éclairer la politique éducative, mais aussi de documenter la formation et les pratiques pédagogiques. C’est ainsi qu’en février 2022, le CSEN a publié une note à l’attention des enseignants et de leur formateurs sur l’enseignement et l’apprentissage des fractions et des nombres décimaux. Elle a été rédigée par Dehaene et d’autres neuroscientifiques qui présentent une recherche récente menée avec le soutien du ministère, et qui en tirent des recommandations pédagogiques.

La complexité des phénomènes d’enseignement et d’apprentissage explique la diversité des orientations scientifiques des chercheurs qui se consacrent à leur étude. En didactique des mathématiques, ils étudient l’enseignement et l’apprentissage de savoirs mathématiques. Les recherches montrent des variabilités importantes selon la nature des savoirs, les situations d’enseignement proposées, les pratiques enseignantes, et bien sûr selon les élèves. Les neurosciences cognitives étudient les mécanismes neurobiologiques qui sous-tendent la cognition d’où, quand il s’agit d’apprentissage mathématique, un intérêt pour la mémoire, la perception, le langage, le raisonnement, etc. Les disciplines scientifiques se développent à la fois de manière autonome et par des interactions. La didactique des mathématiques, par exemple, a des liens très forts avec les mathématiques, bien sûr, mais aussi avec l’histoire et l’épistémologie, la psychologie, la linguistique, et plus récemment la sociologie.

Cela explique notre intérêt pour toutes les recherches sur l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques, et en particulier pour cette note du CSEN que nous avons étudiée, sans toutefois inclure dans nos analyses les nombreuses références bibliographiques qui émaillent le texte.

Nous avons jugé nécessaire de commencer par préciser l’orientation scientifique dans laquelle s’inscrit la recherche décrite dans la note et qui porte sur l’évaluation de la compréhension des nombres décimaux et des fractions à partir d’un test appelé « test de la ligne numérique ». Comme l’indique Fayol (2015) :

> *L’idée selon laquelle les quantités et les grandeurs (ou encore les magnitudes) peuvent être représentées selon une ligne mentale orientée de gauche à droite n’est pas récente. Toutefois, son exploitation systématique récente repose sur la théorie anatomo-fonctionnelle du triple code, élaborée par Stanislas Dehaene et Laurent Cohen. Cette théorie postule que les grandeurs et quantités s’organisent cognitivement en trois représentations mentales directement reliées les unes aux autres : une représentation verbale […] ; une représentation indo-arabe […] ; une représentation analogique qui fournirait la signification sémantique […]* (Fayol, 2015, p. 44).

Fayol conclut :

> *En résumé, les travaux portant sur la ligne numérique […] présentent une double orientation : soit théorique en vue d’évaluer dans quelle mesure les représentations mentales se conforment à une forme linéaire aux caractéristiques variables selon les thèses défendues ; soit pragmatique afin de définir un indice du niveau de développement des compétences numériques définies en termes de représentations ou de stratégies* (*ibid.*, p. 48).

La recherche de Dehaene et ses collègues présente les deux orientations. Au vu des corrélations entre les scores au test de la ligne numérique et les performances mathématiques ultérieures, ils ont développé des jeux ayant pour objectif d’induire des progrès en mathématiques. Dans la note du CSEN, ces jeux sont recommandés, ainsi que d'autres situations de classe pour l'enseignement. La vigilance scientifique s'impose toutefois lorsque des interprétations sont formulées en termes de causalité alors que les résultats ont été obtenus avec des méthodes corrélationnelles. Il en est de même quand des termes comme « déterminants » ou « prédicteurs » sont extraits de leur contexte statistique.

La recherche portait donc sur un test adressé à des élèves de début de 6e qui devaient placer des nombres rationnels (entiers puis entiers ou non) sur un segment de droite gradué. Les nombres étaient donnés par une représentation symbolique (4 ; $2{,}4$; $\frac{1}{2}$) ou comme le résultat d'un calcul ($13-4$; $4{,}1-2{,}5$; $2+\frac{1}{5}$). Le premier objectif était de mettre en lien les performances relatives aux nombres entiers, aux décimaux et aux fractions ainsi qu'aux questions portant sur le système de numération décimale, les propriétés algébriques des opérations et les calculs. Le second objectif était d'évaluer l'effet de feedback inclus dans le logiciel de test : pour un groupe d'élèves, la bonne réponse était indiquée lorsqu'ils se trompaient. Les auteurs concluent à la fois que le test de la ligne numérique possède une excellente valeur diagnostique des niveaux des élèves en mathématiques, et que le feedback accroît significativement la réussite. Nos analyses invitent à la prudence, autant pour le test que pour l'analyse des résultats obtenus. Le test évalue en effet la connaissance des nombres rationnels de manière incomplète et imprécise : plusieurs conceptions des fractions et des décimaux ne sont pas interrogées, et les élèves pouvaient souvent trouver la réponse correcte sans mobiliser les connaissances évaluées. En outre, l'accroissement des résultats lié au feedback est modeste bien que significatif, et correspond peut-être davantage à un ajustement qu'à un apprentissage. Pour l'ensemble de ces raisons, nous estimons que la recherche aurait gagné à être menée en collaboration avec des didacticiens spécialistes d'évaluation des apprentissages mathématiques, pour l'élaboration du questionnaire comme pour l'analyse des résultats.

Nous regrettons également que la conception des mathématiques sous-jacente à la recherche comme aux recommandations formulées dans sa conclusion soient si éloignée de celle qui fait référence en didactique et en formation. Nous soutenons une conception des mathématiques scolaires dont l'apprentissage ne s'accomplit pas seulement à travers des observations, manipulations, explications et répétitions, mais qui donne de l'importance aux problèmes qui sont la source des connaissances, aux relations sémantiques et structurelles entre les savoirs, aux représentations sémiotiques et à leurs fonctions spécifiques, à la signification des pratiques mathématiques, etc.

Alors que le CSEN indique l'*evidence-based education* comme étant la voie à emprunter pour aider les pratiques pédagogiques à progresser, cette note qu'il publie recommande des stratégies d'enseignement qui ne prennent pas en compte la littérature scientifique didactique, et qui n'ont fait ni l'objet d'expérimentations dans des classes ordinaires, ni d'évaluation par des méthodes rigoureuses de leurs effets sur les apprentissages en fonction des contextes et des publics scolaires comme des pratiques d'enseignement des professeurs.

En conclusion de cette étude, il apparaît que la didactique des mathématiques pourrait interagir de façon fructueuse avec les neurosciences cognitives, comme elle le fait avec les mathématiques, l'histoire, l'épistémologie, la psychologie, la linguistique et la sociologie. Cela nécessiterait le concours de scientifiques convaincus par l'intérêt de l'interdisciplinarité, conscients de la portée et des limites des différentes approches. De telles interactions conduiraient à l'accroissement des savoirs sur les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, et contribueraient à l'amélioration des apprentissages des élèves.

Références bibliographiques

Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité : complexité et enseignement au début du collège. *Petit x, 74*, 5-33.

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 7.

Barallobres, G. (2018). Réflexions sur les liens entre neurosciences, mathématiques et éducation. *McGill Journal of Education, 53*(1), 169-188.

Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière École-Collège*. Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 5.

Brault Foisy, L.-M., Masson, S. & Dehaene, S. (2016). Quand le cerveau se « recycle » pour apprendre à lire et à compter. *Vivre le primaire, 29*(3), 57-59.

Brissiaud, R. (2019). Maths : les fondements scientifiques de l'évaluation s'effondrent. *Les cahiers pédagogiques*. https://www.cahiers-pedagogiques.com/maths-les-fondements-scientifiques-de-l-evaluation-s-effondrent-1ere-partie/ https://www.cahiers-pedagogiques.com/maths-les-fondements-scientifiques-de-l-evaluation-s-effondrent-2eme-partie/

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans le cadre de la scolarité obligatoire : compte rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence*. Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Bordeaux I.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chambon, G. (2020). *Histoire des nombres*. Paris : PUF

Chambris, C., Tempier, F. & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères IREM, 108*, 63-91.

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 7.

Coulange, L. & Train, G. (2018). Enseigner les nombres décimaux et les fractions, transitions (ou ruptures ?) primaire-secondaire. In M Abboud (dir.). *Mathématiques en scènes, des ponts entre les disciplines - Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1490-1499).

Cosnefroy, O. & Sabatier, C. (2011). Estimation de l'importance relative des prédicteurs dans un modèle de régression multiple. Intérêt et limites des méthodes récentes. *L'année* *psychologique, 111*, 253-289.

Dehaene, S. (1992). Varieties of Numerical Abilities. *Cognition, 44*, 1-42.

Dehaene, S. (2010). Le cerveau calculateur. *Bulletin de l'APMEP, 488*, 312-326.

Dehaene, S., Potier-Watkins, C., Xi He, C. & Lubineau, M. (2022). Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : Le test de la ligne numérique. *Note du CSEN, 5*.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1986). *Liaison école-collège : Nombres décimaux*. Paris : IREM de Paris VII.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-32.

Fayol, M. (2015). *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Un bilan scientifique*. Paris : Cnesco.

Goasdoué, R. (2018). Regards psychologiques sur les apprentissages mathématiques. In JL Dorier *et al.* (dir.). *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux de l'apprentissage*. (pp. 165-212). Belin : Paris.

Grisvard, C., & Leonard, F. (1985). Intermediate Cognitive Organizations in the Process of Learning a Mathematical Concept: The Order of Positive Decimal Numbers. *Cognition and instruction, 2*(2), 157-174.

Hirsch, M. (2022). *Pluralité des savoirs relatifs aux fractions : une analyse des connaissances des élèves en fin de collège*. Mémoire de master de recherche de l'Université Paris Cité.

Keller, O. (2014). Existe-t-il un sens du nombre ? *Actes des Journées nationales de l'APMEP 2014*.
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/P1-28-compte-rendu.pdf

Margolinas, C. (2021). Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique. *Grand N, 106*, 5-30.

Martinez, S. & Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS. *Éducation & Formations, 94*, 23-40.

Mehler, J. & Bever, T. (1967). Cognitive Capacity of Very Young Children. *Science, 158*, 141-142.

Perrin-Glorian, M.-J. (1986). Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x, 10*, 5-29.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neufchâtel : Delachaux et Niestlé.

Roditi, E. (2005). L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant. *Spirale - Revue de recherches en éducation, 36*, 37-52.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 12*, 55-81.

Roditi, E. & Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation et formations, 86-87*, 236-267.

Roditi, E. & Noûs, C. (2021). Didactique des mathématiques et neurosciences cognitives : une analyse des contributions à la recherche sur l'apprentissage d'un contenu scolaire. *Revue française de pédagogie, 211*, 103-115.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N, 86*, 59-90.

Vilette, B. (1996). *Le Développement de la quantification chez l'enfant*. Lille : Presses universitaires du Septentrion.

Yvorra, M. (2022). *Manipulation et conceptualisation : le cas des fractions au cycle 3*. Mémoire de master de recherche de l'Université Paris Cité.