ENSEIGNER LES FONCTIONS AFFINES : LE POINT DE VUE DE LA COVARIATION

Sylvie GRAU[1]
INSPE Nantes Université - Laboratoire du CREN

Résumé. Le travail sur les expressions algébriques occupe une part importante de l'enseignement des fonctions affines, mais si les élèves connaissent l'expression algébrique d'une fonction affine, ils ne savent pas l'utiliser pour modéliser des phénomènes, en particulier dans d'autres disciplines où il s'agit de mettre en évidence des lois ou des relations dites linéaires. Nous expliquerons pourquoi cet enseignement, tel qu'il est mené dans l'école aujourd'hui, n'est pas suffisamment cohérent et nous proposerons des situations pour aborder la fonction affine du point de vue de la covariation. L'enjeu est de construire une représentation dynamique des fonctions plus favorable à une entrée dans l'analyse. Nous donnerons quelques éléments d'un parcours pour aider les élèves à mettre en place un raisonnement covariationnel et analyserons les difficultés et les obstacles rencontrés par les élèves lors de nos expérimentations afin de comprendre les enjeux d'une telle approche.

Mots-clés. Fonction affine, didactique, variation, problématisation, point de vue, modélisation.

Abstract. Work on algebraic expressions occupies an important part of the teaching of affine functions, but if the pupils know the algebraic expression, they do not know how to use it to model phenomena, especially in other disciplines where it is necessary to highlight laws or so-called linear relations. We will explain why this teaching, as it is carried out in the school today, is not consistent enough and we will propose situations to approach the affine function from the point of view of the covariation. The challenge is to build a dynamic representation of functions more favorable to entry into the analysis. We will give some ideas of a course to help the students to set up a covariational reasoning and will analyze the difficulties and the obstacles encountered by the pupils during our experiments in order to understand the stakes of such an approach.

Keywords. Affine function, didactic, variation, problematization, point of view, modelling.

Introduction

En France, le programme de cycle 4 de 2020[2] est structuré autour de cinq thèmes dont le thème B intitulé *« Organisation et gestion de données, fonctions »*. Il est précisé (p. 128) que *« la diversité des registres de représentation (symbolique, graphique, numérique) et le passage des uns aux autres sont particulièrement efficaces pour l'apprentissage de la notion de fonction »*, mais aussi qu'il s'agit de permettre à l'élève de faire du lien entre *« des notions nouvelles et des notions antérieurement étudiées »*, entre *« des notions apparemment éloignées les unes des autres, voire étrangères les unes aux autres »*. Si cet extrait semble faire référence aux conversions de cadres considérés au sens de Douady comme des grands domaines des mathématiques (Douady, 1986 ; Rogalski, 2001) et aux conversions de registres de représentation sémiotique au sens de Duval (Duval, 2002, 2006), il n'en précise pas les enjeux en termes d'apprentissage. Pourtant, de nombreux travaux ont montré en quoi ces conversions mettent en évidence l'émergence d'obstacles à l'entrée dans l'analyse en lien avec certains ostensifs[3] que les élèves manipulent (tableaux, graphes, notations…) et qui génèrent à travers ces

[1] sylvie.grau@univ-nantes.fr

[2] BO n° 31 du 30 juillet 2020 : https://eduscol.education.fr/90/j-enseigne-au-cycle-4

[3] Voir la définition dans Chevallard (1996) : objet ayant une forme sensible pouvant être manipulé (matériel, geste, langage, graphiques, écritures, etc.), les non-ostensifs étant des idées, concepts, notions qui ne peuvent être qu'évoqués.

manipulations des conceptions plus ou moins erronées de ce qu'est une fonction (Bloch, 2002 ; Chauvat, 1998 ; Comin, 2000, 2009 ; Vandebrouck, 2011). Une étude de manuels et un test proposé aux élèves à l'entrée en 2de nous ont permis de montrer dans notre travail de thèse (Grau, 2017b) que l'apprentissage de la notion de fonction affine se résume très souvent à un apprentissage du vocabulaire, des notations et de techniques de calcul algébrique amenant les élèves à considérer par exemple que toutes les fonctions numériques sont monotones, voire croissantes, définies par l'image de deux réels, ou que leur représentation graphique se trace à la règle dans le seul quadrant positif.

Le programme ne donne pas de piste pour aborder la notion de fonction si ce n'est qu'elle apparaît en étroite relation avec la notion de proportionnalité et la modélisation de phénomènes continus. Il est attendu des élèves qu'ils sachent *« résoudre des problèmes modélisés par des fonctions »*. On peut alors faire l'hypothèse qu'il s'agit de construire la notion de fonction dans le cadre des mesures de grandeurs, ce qui suppose de penser la transition des calculs sur les grandeurs à la définition formelle des fonctions dans le cadre numérique (Comin, 2005). Par ailleurs, de nombreux élèves à l'entrée du lycée ne mobilisent pas la notion de fonction affine si la consigne ne le demande pas de manière explicite (Grau, 2017b), la notion n'est pas disponible (Robert & Rogalski, 2002, p. 510) pour une majorité d'élèves de 2de. De nombreuses recherches attestent que ces difficultés perdurent à l'entrée du supérieur, on en trouvera une synthèse dans le rapport du CNESCO de 2019 (Gueudet & Vandebrouck, 2019, pp. 39-44) :

> *La pratique des nombres réels [au lycée] n'est sûrement pas suffisante pour soutenir le travail nécessaire sur les fonctions : cela induit des difficultés dans le passage formalisé de dépendance à covariation, avec appui sur le registre graphique, - le passage de la perspective ponctuelle à une perspective globale — la courbe est l'ensemble des couples* $\{(x, f(x))\}$ *— et surtout dans la nécessaire rupture discret / continu qui reste toujours masquée ou mystérieuse : la courbe est implicitement continue pour les élèves mais l'ensemble des* $\{(x, f(x))\}$ *renvoie à un agrégat de points juxtaposés* (Gueudet & Vandebrouck, 2019, p. 40).

Comment, alors, amener les élèves à construire la notion de fonction affine pour qu'elle soit disponible en mathématiques comme dans les autres disciplines scolaires, et sans que cette connaissance ne devienne un obstacle à l'entrée dans l'analyse ?

Dans la suite de cet article, nous allons apporter quelques éléments théoriques en faveur d'une approche covariationnelle des fonctions affines. Dans une première partie, nous allons préciser ce que sont les points de vue statique et dynamique et en quoi ils jouent sur la conception des fonctions affines dans les différents registres de représentation sémiotiques. Nous étudierons ensuite le statut des fonctions affines comme modèle pour étudier la covariation de grandeurs physiques. Cette analyse nous a permis d'envisager un parcours prenant en compte l'enseignement du raisonnement covariationnel inspiré des travaux de Passaro (2016), et les conversions de registres de représentation sémiotiques (Duval, 2006) qui nous semblent nécessaires à la construction de la notion de fonction affine au cycle 4. Nous nous appuierons sur l'analyse d'une situation proposée en classe de 2nde pour comprendre les enjeux de cette approche. Notre conclusion vise à mettre en discussion cette proposition de parcours avec les résultats de la recherche sur l'entrée dans l'analyse au lycée (Gueudet & Vandebrouck, 2019 ; Vandebrouck, 2011).

1. Quelques éléments théoriques et outils d'analyse pour notre étude

Pour comprendre pourquoi la notion de fonction affine n'est pas disponible, il nous faut analyser la manière dont les élèves construisent le concept de fonction affine en nous appuyant sur les travaux de Brousseau (1986) et ceux de Vergnaud (1990) : pour quels problèmes cet objet vient-il apporter une réponse ou participer à une procédure de résolution ? Quelles sont les propriétés de cet objet ? Comment cet objet peut-il être représenté ? Quelles techniques sont associées à cet objet ?

Concernant la représentation, Duval identifie d'une part le langage naturel et d'autre part des registres symboliques, un registre étant considéré comme un système de signes associé à des règles de traitement. Les registres que nous allons considérer pour l'étude des fonctions affines sont en particulier le registre graphique, le registre des tableaux de valeurs et le registre des expressions algébriques. Pour Duval (1995), il n'y a pas d'appréhension conceptuelle d'un objet sans production ou appréhension de représentations sémiotiques. *« Tout concept mathématique doit s'appuyer sur des représentations, la conceptualisation doit donc nécessairement passer par des registres de représentation qui, pour différentes raisons, ne peuvent pas être univoques, surtout s'ils ont un caractère linguistique »* (D'Amore, 2001, p. 5). Ainsi, s'agissant de représenter un objet mathématique, les capacités sémiotiques de représentation du registre choisi amènent à ce que certains traits caractéristiques sont plus ou moins pris en considération. La conversion d'un registre à l'autre est donc essentielle, elle permet de comprendre la manière dont s'expriment ou non les caractéristiques de l'objet dans chaque registre. Une reconstruction est alors nécessaire pour concevoir l'intégralité de l'objet. L'apprentissage d'un concept suppose de prendre en compte non seulement la représentation de ce concept dans différents registres, le traitement des représentations à l'intérieur de chaque registre, mais aussi la conversion d'un registre à l'autre (D'Amore, 2001). Pour qu'une notion soit disponible, il faut de plus que ses représentations soient fonctionnelles, c'est-à-dire qu'elles permettent des traitements pour avancer dans la résolution des problèmes. Ainsi, la représentation graphique d'une fonction affine peut avoir différentes fonctionnalités (Chauvat, 1998), elle peut être utile pour accéder directement à des informations (lecture d'images ou d'antécédents), elle peut être un signe graphique qui renvoie à une propriété mathématique (l'alignement avec l'origine renvoie à l'idée de proportionnalité), mais aussi un milieu opératoire permettant des traitements pour résoudre des problèmes (trouver l'expression de la fonction affine ayant telle représentation graphique donnée).

Par ailleurs, différentes conceptions d'un objet peuvent relever d'un même cadre au sens de Douady (1986) — celui de l'analyse dans notre cas — mais aussi de points de vue différents (Rogalski, 2001). Pour Rogalski, chaque point de vue, dans un même cadre et un même registre, se caractérise par le fait que des propriétés y sont plus ou moins visibles, si bien que chaque point de vue peut être spécifiquement adapté à un type de problèmes. Le passage d'un point de vue à un autre relève de théorèmes. Les travaux de Vandebrouck pointent en particulier l'importance de la mise en fonctionnement de la notion de fonction selon les trois points de vue que sont la perspective ponctuelle, locale et globale des fonctions (Vandebrouck, 2011) dans les différentes registres. Par exemple, la donnée d'un tableau de valeurs de la fonction ne donne qu'une indication ponctuelle sur l'image de chaque valeur isolément. Pour obtenir une information locale ou globale, on peut ordonner les valeurs dans le tableau. Cela peut être insuffisant et changer de point de vue peut rendre nécessaire de changer de registre. Dans notre exemple, il peut être nécessaire d'avoir d'autres informations sur le comportement de la fonction (continuité, variations, limites), données qui implicitement peuvent être portées par la représentation graphique ou le contexte de la situation.

Face à un problème, l'enjeu est de faciliter les traitements en déterminant un problème équivalent par un changement de cadre, de registre ou de point de vue. Il faut cependant noter que ce choix peut être réalisé par simple préférence personnelle, parce que les procédures y sont automatisées ou familières. L'enseignement d'une notion peut alors nécessiter d'imposer une conversion aux élèves pour les contraindre d'explorer de nouvelles pistes, de nouveaux outils, de rencontrer de nouveaux objets.

Ainsi, au sein d'un groupe IREM, nous nous sommes intéressés à la distinction entre deux points de vue sur les fonctions — le point de vue statique et le point de vue dynamique - afin de comprendre en quoi ils modifient la conception de la notion de fonction affine. Nous allons tout d'abord présenter ces deux points de vue.

1.1. Le point de vue statique : action sur les valeurs

Une fonction numérique peut être considérée comme un processus de calcul qui, à un réel x, associe un réel y. Ce point de vue est dit statique. Cette conception semble induite par la définition très large qui apparaît la première fois dans le programme de 2de de 1968 et que l'on rencontre encore fréquemment dans les manuels sous la forme :

> *On appelle fonction une relation qui, à chaque élément d'un ensemble de départ A, associe au plus un élément d'un ensemble d'arrivée B* (Wattiaux *et al.*, 1968).

Elle est basée sur la correspondance terme à terme que l'on peut illustrer par un schéma de type diagramme de Venn comme dans la définition donnée dans un manuel actuel de 2de du Livre scolaire[4] (illustration 1).

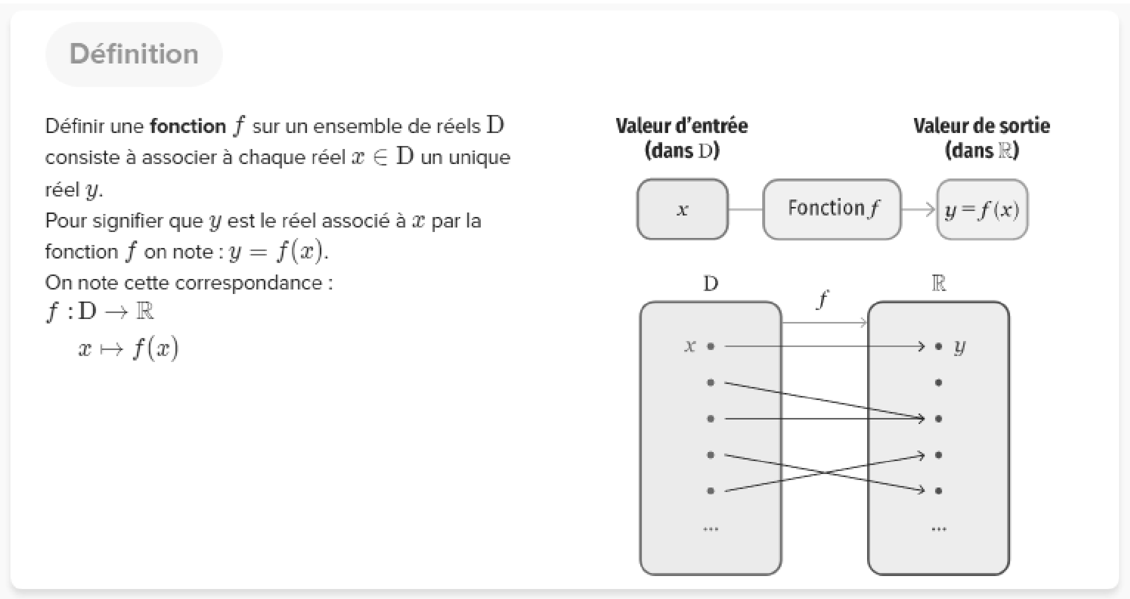


Illustration 1 *: Extrait du manuel Le livre scolaire Mathématiques 2de (p. 42).*

Ce point de vue invite à s'intéresser au processus qui permet d'associer à un réel x le réel y. Cela amène à assimiler la fonction à son expression dans le registre algébrique, ce que Comin appelle une fonction *performative* (la correspondance terme à terme est explicitée par une formule) (Comin, 2005, p. 37).

[4] Manuel numérique *Mathématiques 2de*, Le livre scolaire, collection 2019 : https://www.lelivrescolaire.fr/books/6067399 (consulté le 30/01/2022).

Dans les programmes de 2^{de} de 1999, on peut lire dans les commentaires des contenus et capacités attendus pour le domaine *« Fonctions »* que *« l'utilisation de calculatrice ou d'ordinateur amènera à considérer une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est à dire comme une "boîte noire") »*. Ainsi, la conception statique présentée plus haut, associée à l'utilisation de la calculatrice ou du tableur, amène d'une part à définir l'objet fonction dans le cadre numérique et d'autre part à s'appuyer essentiellement sur la maîtrise de techniques de calcul algébrique pour produire des expressions et effectuer des traitements. Le programme de 2020[5] introduit la notion de fonction au cycle 4 mais les attendus de fin d'année proposent de « produire une formule représentant la dépendance de deux grandeurs » en 5^{e}, de *« produire une formule littérale représentant la dépendance de deux grandeurs »* en 4^{e} pour *« modéliser un phénomène continu par une fonction »*, *« utiliser les notations et le vocabulaire fonctionnels »* et *« passer d'un mode de représentation d'une fonction à un autre »* en 3^{e}. L'approche statique reste donc privilégiée dans les programmes actuels et il faut noter que les fonctions sont introduites comme outil dans le cadre des mesures de grandeurs, avant d'être étudiées comme objet dans le cadre algébrique sans que le passage de l'un à l'autre ne soit explicitement indiqué.

Voyons comment le cas particulier de la fonction affine est représenté dans les différents registres selon le point de vue statique :

- Dans le registre algébrique, la fonction affine f est caractérisée sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux réels. Pour déterminer a et b à partir de valeurs connues, il suffit d'écrire les deux égalités correspondantes et de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Ce traitement relève de techniques qui ne sont plus enseignées et peuvent s'avérer très coûteuses pour les élèves qui ne maîtrisent pas suffisamment les calculs algébriques.
- Dans le registre des tableaux, la relation entre la variable notée x et la variable notée y est donnée dans un tableau de valeurs par la succession de deux opérateurs : multiplier par a et additionner b. Dans la plupart des manuels, l'opérateur n'est indiqué que pour les fonctions linéaires (voir illustration 2) pour lesquelles on a un tableau de proportionnalité. Le traitement s'effectue par des opérations. Ces calculs sont rarement explicités sauf pour la technique dite « du produit en croix » très largement automatisée en fin de collège.

Pour la fonction $f : x \mapsto 4x$, on considère le tableau de valeurs suivant.

x	–3	–1	0	1,5	2
$f(x)$	–12	–4	0	6	8

$\times 4$

$a = 4$ est le coefficient de proportionnalité du tableau.

Illustration 2 *: Extrait du manuel Le livre scolaire Mathématiques 3e (2021[6]).*

[5] Programme du cycle 4 : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/A-Scolarite_obligatoire/37/7/Programme2020_cycle_4_comparatif_1313377.pdf

[6] Manuel numérique *Mathématiques 3^e*, Le livre scolaire, collection 2021 : https://www.lelivrescolaire.fr/page/35609487 (consulté le 30/01/2022).

• Dans le registre graphique, la même relation est caractérisée par un trapèze *OXMB* où *O* est l'origine du repère, *X* le point d'abscisse x_1 et d'ordonnée nulle, *M* le point de coordonnées $(x_1 ; y_1)$ et *B* le point de coordonnées $(0 ; b)$. La fonction affine est caractérisée par la droite (*BM*) (voir graphique 1). On note que, dans ce registre, le paramètre *b* peut être lu directement sur le graphique mais que l'obtention de *a* suppose un traitement qui n'est pas immédiat.

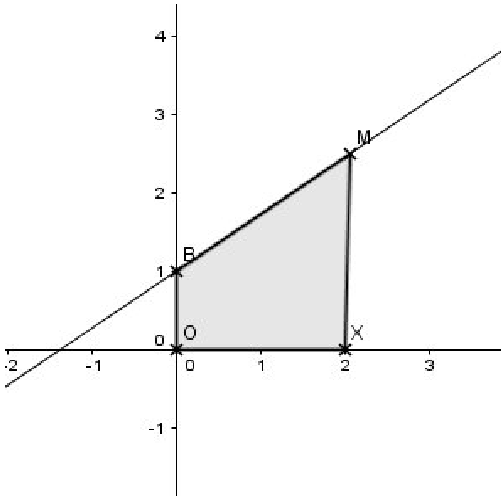


Figure 1 *: Le trapèze OXMB.*

Les conversions de registres ne relèvent pas de correspondances isomorphes et certaines sont plus aisées que d'autres. Par exemple il est plus simple de représenter graphiquement une fonction à partir de sa formule que de retrouver sa formule à partir de sa représentation graphique. Nombreux sont les élèves qui repèrent dans l'expression algébrique de la fonction affine une certaine symétrie entre les paramètres, ils ont alors tendance à transposer cette symétrie dans le registre graphique et donc à considérer que si *b* est l'ordonnée du point d'intersection de la droite représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto f(x) = ax + b$ avec l'axe des ordonnées, alors *a* serait l'abscisse du point d'intersection de cette même droite avec l'axe des abscisses.

Le point de vue statique amène les élèves à caractériser une fonction par une formule mais dans l'idée d'une génération ponctuelle et non d'une formalisation d'un processus global.

Ainsi Comin a montré que face à un exercice du type :

> *Une personne veut louer une voiture. Elle a le choix entre trois contrats.*
>
> *Au contrat A : la personne paie un forfait de 80 € et 0,12 € par kilomètre parcouru.*
>
> *Au contrat B : la personne paie un forfait de 60 € et 0,15 € par kilomètre parcouru.*
>
> *Au contrat C : la personne paie un forfait de 150 €.*
>
> *Choisir parmi les fonctions suivantes celle qui modélise chacun des contrats A, B, C :*
>
> $f_1 : x \longmapsto 150\,x$; $f_2 : x \longmapsto 60 + 0{,}15\,x$; $f_3 : x \longmapsto 80\,x + 0{,}12$;
>
> $f_4 : x \longmapsto 80{,}12\,x$; $f_5 : x \longmapsto 80 + 0{,}12\,x$; $f_6 : x \longmapsto 150$

presque tous les élèves de classe de 2^de^ interrogés donnent la bonne réponse (97 % pour le contrat B), alors que face à cet autre exercice :

> *Trois voyageurs de commerce : Adrien, Marie, Simon ont élaboré un programme pour calculer leur rémunération : la rémunération d'Adrien est fixe, celle de Marie est proportionnelle au*

montant des ventes et celle de Simon comporte une partie fixe à laquelle s'ajoute une partie proportionnelle au chiffre d'affaires réalisé. Retrouver parmi les fonctions suivantes celle qui permet de calculer la rémunération de chacun des trois voyageurs :

$f_1 : x \longmapsto 685 + 0{,}045\,x$; $f_2 : x \longmapsto 0{,}15\,x^2$; $f_3 : x \longmapsto 1370$;

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{0{,}15}{x}$; $f_5 : x \longmapsto 0{,}075\,x$; $f_6 : x \longmapsto 0{,}05\,x^2 + 780\,x$

seulement la moitié des élèves de classe de 2^de^ interrogés donnent la bonne réponse pour la fonction linéaire et la fonction affine (Comin, 2009, p. 26). Cette différence montre que, pour les élèves, la conception commune est que la formule est l'expression d'un programme de calcul (ce programme étant suggéré dans le premier exercice) et non l'expression d'une structure représentant une situation (comme suggéré dans le second exercice).

Nous avons proposé à des élèves de 2^de^ un troisième type d'exercice :

Les Américains utilisent une autre unité que le degré Celsius pour mesurer la température, ils utilisent le degré Fahrenheit. Quand la température augmente de 50 °C, elle augmente de 90 °F. L'eau bout à 100 °C, ce qui correspond à 212 °F. Avec un tableur, quelle formule permet de convertir une température exprimée en degrés Celsius en degrés Fahrenheit ?

La majorité des élèves ne prennent pas en compte les variations, ils considèrent que $50\,°C = 90\,°F$ et cherchent un coefficient de proportionnalité (Grau, 2017b). Ce dernier exemple montre que pour les élèves, la fonction est assimilée à un ensemble de couples (ici des mesures de températures) qui peuvent être représentés dans un tableau, l'unité de mesure étant reléguée en tête du tableau, et dans le registre graphique par des points assimilés à l'idée de courbe représentative. Ils n'ont pas les moyens de représenter la variation dans les différents registres et ont donc tendance à ne pas la considérer comme telle.

Carlson et Oehrtman (2005) ont spécifié les tâches proposées aux élèves lorsque l'on considère les fonctions d'un point de vue statique. Pour eux, la fonction est alors liée à une formule que l'élève doit exécuter ou découvrir, l'élève ne peut imaginer qu'une seule valeur à la fois comme entrée ou sortie ce qui fait que x représente pour lui un nombre spécifique, les tâches sont essentiellement algébriques, la fonction inverse suppose un traitement algébrique (pour exprimer y en fonction de x) ou géométrique s'il considère la symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé, le graphe d'une fonction est alors une figure géométrique[7].

Dans la lignée de ces travaux, Passaro définit un autre point de vue possible (Passaro, 2013).

1.2. Le point de vue dynamique : processus

Comme le rappelle Comin, *« le concept de fonction trouve historiquement sa source dans l'étude des relations de dépendance entre deux grandeurs : toute variation de l'une entraînant ou accompagnant une variation de l'autre »* (Comin, 2005). La fonction peut donc être considérée comme un processus de covariation, où une variation d'une variable x engendre une variation d'une autre variable y.

Cette conception dynamique s'intéresse à la covariation de deux grandeurs, elle s'inscrit donc dans le cadre de l'arithmétique des grandeurs. On peut schématiser ce point de vue par deux droites graduées permettant de repérer les variations respectives des deux grandeurs, ces deux

[7] Traduction libre d'après un extrait de *Action and process views of functions* (Carlson & Oehrtman, 2005, p. 7).

droites pouvant définir un repère si les deux axes sont sécants en l'origine (voir schéma 1). La courbe représente alors l'interdépendance des variations. La conception dynamique amène à définir les fonctions affines comme les fonctions pour lesquelles on a proportionnalité des accroissements Δ_y d'une variable *y* par rapport aux accroissements Δ_x d'une variable *x*.

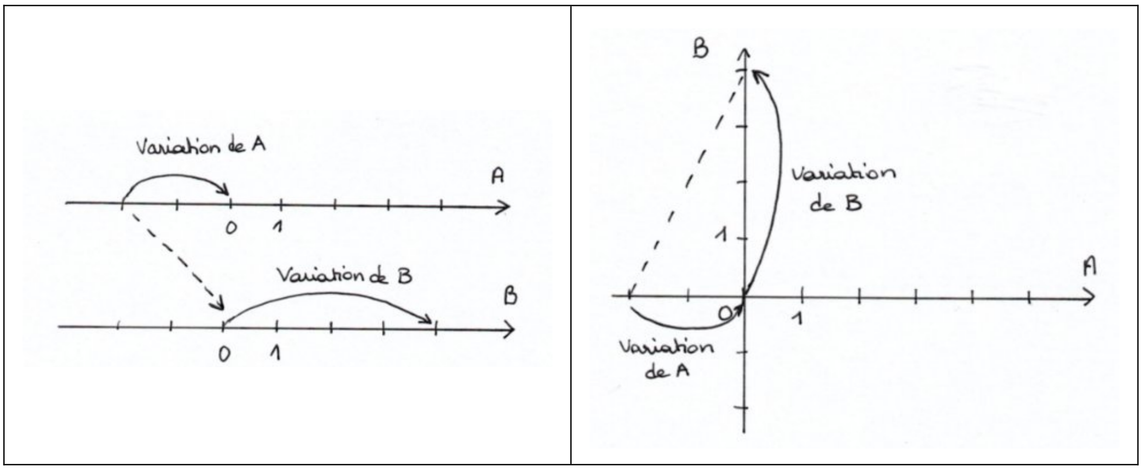


Schéma 1 *: Point de vue covariationnel.*

Le point de vue processus s'intéresse à la relation entre deux grandeurs — notons les G_A et G_B — mais le terme « relation » permet d'englober différents aspects : il peut s'agir d'une relation de causalité, d'une transformation, d'une corrélation, d'un processus, d'une loi physique… Si *x* est une mesure prise par G_A et *y* la mesure correspondante de G_B, la relation entre les deux grandeurs peut être considérée comme une fonction, à condition que pour chaque mesure de G_A, une seule mesure de G_B lui soit associée. Dans le cas des fonctions affines, cette relation se caractérise par la proportionnalité des accroissements et peut s'exprimer dans différents registres. Cela nécessite cependant d'introduire de nouveaux ostensifs pour les variations :

- Dans le registre algébrique, si nous avons deux valeurs x_1 et x_2 de G_A et les valeurs y_1 et y_2 de G_B qui leur sont associées, cette relation s'exprime par $(y_2 - y_1) = a(x_2 - x_1)$ avec *a* constante. La notation Δ_x peut être introduite pour désigner la variation $(x_2 - x_1)$.
- Dans le registre des tableaux, la proportionnalité des accroissements se traduit par un opérateur multiplicatif entre eux, ce qui suppose de faire apparaître les variations par des flèches et un opérateur entre deux colonnes, ce qui n'est pas habituel. À cela s'ajoute un opérateur multiplicatif indiquant le coefficient de proportionnalité des accroissements. Nous appellerons cette représentation « tableau fléché » comme dans l'exemple ci-dessous (voir schéma 2) :

	+1	+1	+5	
x	1	2	3	8
f(x)	2	5	8	27
	+3	+3	+15	

×3

Schéma 2 *: Tableau de valeurs fléché.*

• Dans le registre des graphiques, la covariation se caractérise par ce que nous appellerons « une marche et contremarche » (voir schéma 3), consistant à représenter par des segments ou des flèches, la variation en abscisses et en ordonnées entre deux points. Dans certains manuels ces marches et contremarches sont représentées en couleur ou en pointillés, parfois elles sont justes visibles du fait que la représentation graphique est faite sur un support quadrillé. Ces marches sont égales ou semblables (voir schéma 4). Dans le registre géométrique, ces représentations amènent à raisonner avec des triangles rectangles semblables, ce qui permet de démontrer l'alignement des points avec le théorème de Thalès et donc de démontrer que la représentation graphique d'une fonction affine est bien une droite.

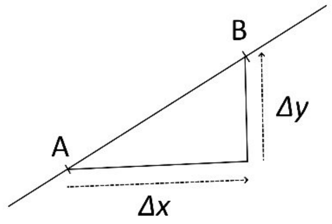


Schéma 3 *: Marche et contremarche.*

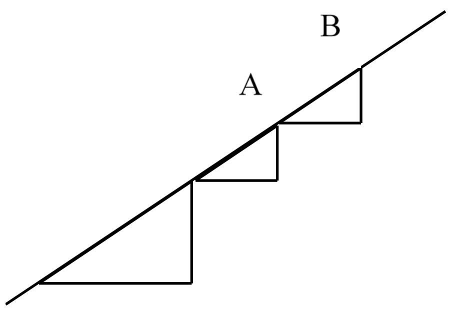


Schéma 4 *: Marches et contremarches semblables.*

Suivant les registres et même dans un même registre, les deux points de vue n'amènent donc pas les mêmes informations. Si le tableau fléché et les marches et contremarches permettent de visualiser la proportionnalité des accroissements, le point de vue statique suffit à déterminer l'ordonnée à l'origine par un calcul de l'image de 0 avec l'expression algébrique ou par lecture graphique de l'intersection de la représentation graphique de la fonction avec l'axe des ordonnées.

Une analyse de cours de mathématiques en ligne[8] a montré que si certains choix de représentation sont pertinents, ils sont rarement explicités et l'élève n'a donc pas la possibilité d'effectuer lui-même ces choix lorsqu'il pourrait en avoir besoin. Prenons différents exemples. Le premier (schéma 5) ne fait pas référence au concept de fonction, le cadre peut être considéré comme celui de la géométrie, les nombres indiquant les mesures des segments. Différentes couleurs amènent à identifier des triangles semblables et des pointillés permettent des lectures ponctuelles. Dans le second (schéma 6), la référence aux fonctions est indiquée par les notations. Les valeurs ne sont pas indiquées mais désignées par des écritures algébriques qui veulent généraliser la propriété représentée. Les deux paramètres de la fonction affine sont identifiés,

[8] Étude menée en 2016 par comparaison de 6 cours de mathématiques en ligne (Grau, 2017b).

l'un par l'ordonnée à l'origine et l'autre par une marche-contremarche. Le dernier exemple est tiré d'une ressource sur un site académique (schéma 7), il figure en fin de présentation avec comme titre *« astuces pour caractériser graphiquement une fonction affine »*. Ici, le registre algébrique est utilisé pour écrire l'expression de la fonction, une marche-contremarche représente les variations désignées par *« valeur 1 »* et *« valeur 2 »* sans doute pour indiquer un ordre de lecture. Une formule écrite en langage naturel permet d'identifier un calcul qui peut être généralisé. Une interprétation du signe du coefficient multiplicateur est donnée par *« la droite monte »* ou *« la droite descend »* sans référence au sens de variation de la fonction.

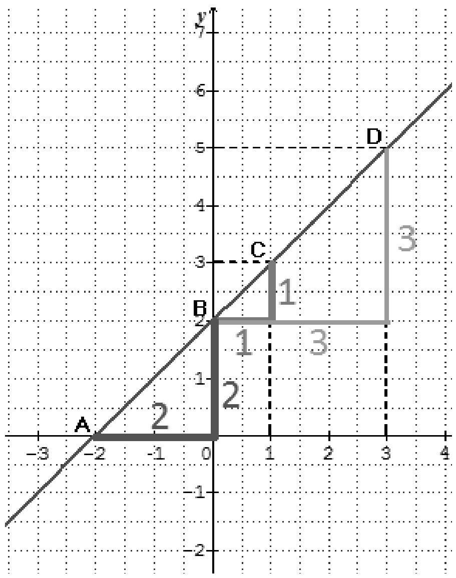


Schéma 5 *: Sur le site de Grégory Fabas*[9].

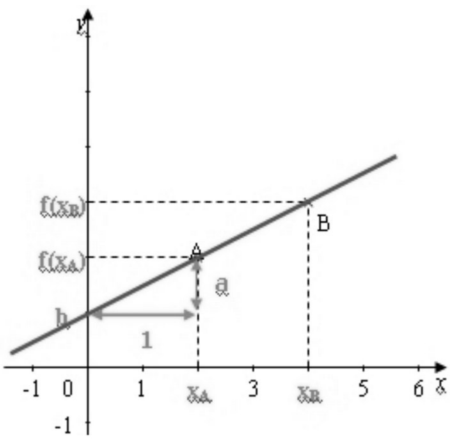


Schéma 6 *: Sur le site Mathovore.fr*[10].

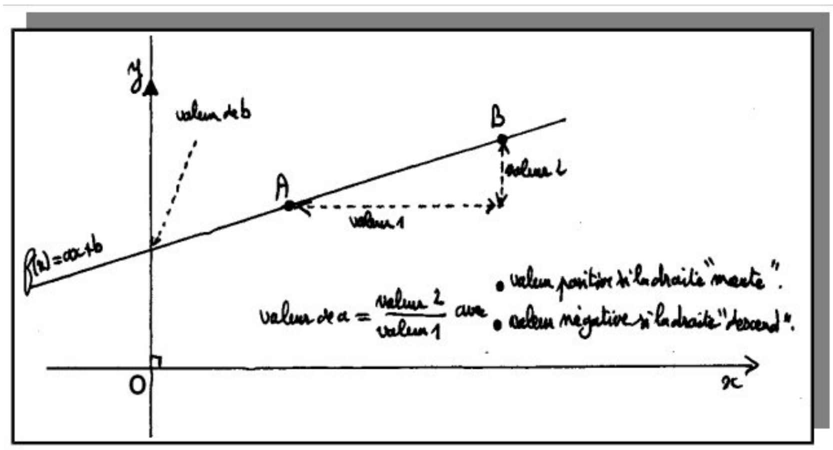


Schéma 7 *: Ressource sur le site de l'académie de Nancy-Metz*[11].

Si chacune de ces représentations vise à proposer des ostensifs des variations et donc favoriser une construction d'un point de vue dynamique des fonctions affines, chacune montre des

[9] http://losfabas.free.fr/2sd/co/module_2%20sd_5.html (consulté le 21/03/2022).

[10] https://mathovore.fr/les-fonctions-affines-cours-maths-27 (consulté le 23/01/2022).

[11] http://www4.ac-nancy-metz.fr/clg-j-ferry-neuves-maisons/spip/IMG/pdf/cours_fonctions_affines.pdf (consulté le 23/01/2022).

écueils : le premier reste dans une représentation statique et un point de vue ponctuel mais il permet de voir la proportionnalité des accroissements du fait des figures semblables, le second permet des conversions de registres mais ne permet pas de comprendre la proportionnalité des accroissements, il montre les variables mais le traitement reste ponctuel, le troisième montre un traitement possible pour n'importe quelles valeurs et cherche là encore à permettre la conversion de registres, la formalisation n'est cependant pas mathématique et ne permet pas de traitements algébriques pour justifier la technique.

La covariation étant considérée comme la variation concomitante de deux grandeurs, *« le raisonnement covariationnel correspond à l'ensemble des activités cognitives sollicitées lors de la coordination de la variation de deux quantités dans la perspective où on s'intéresse au type de relation entretenue par celles-ci »* (Carlson *et al.*, 2002 ; Carlson & Oehrtman, 2005). Les auteurs précisent que la covariation amène à concevoir une fonction comme un processus d'entrée-sortie non plus d'une valeur spécifique mais d'un ensemble de valeurs d'entrée et de sortie, l'élève doit imaginer l'ensemble du processus même si le processus n'est pas défini par une formule (on peut étudier par exemple la covariation de la température en fonction de l'heure, il n'existe pas de relation algébrique reliant ces deux grandeurs), il doit considérer la fonction inverse comme le processus inversé (Carlson & Oehrtman, 2005, p. 7).

Avant les programmes de 2016, les activités proposées au collège visaient le plus souvent la comparaison de quantités et la détermination d'une quantité à partir d'une autre. Les problèmes rencontrés décrivaient des phénomènes par des modèles en quantifiant la dépendance mais les élèves avaient rarement à déterminer ou critiquer ces modèles, ils leur étaient imposés pour permettre le traitement. Les programmes de 2016 changent radicalement par rapport à ceux de 2008 en faisant de « modéliser » une compétence à travailler au cycle 4. Modéliser demande de décrire les variations d'une quantité en fonction d'une autre et donc de mettre en place un point de vue processus. Nous avons donc cherché comment amener les élèves à construire un raisonnement covariationnel lors de la rencontre avec la notion de fonction affine.

1.3. Développement du raisonnement covariationnel

Nous avons vu deux différences majeures entre le point de vue statique et le point de vue dynamique. D'une part, le point de vue statique induit une prise d'information ponctuelle alors que le point de vue dynamique par l'étude de la covariation de grandeurs peut favoriser la construction du concept de continuité. D'autre part, la représentation graphique peut devenir un milieu opératoire à condition d'ajouter des ostensifs des variations qui, pour les fonctions affines prennent la forme de marches et contremarches. Ces deux points de vue sont cependant complémentaires car ils apportent des réponses à différents problèmes. Le point de vue statique permet de répondre à des problèmes ponctuels, son expression dans le registre algébrique rend possibles des traitements efficaces (calcul d'images, résolution d'équations). Le point de vue dynamique permet d'identifier le comportement local ou global du processus aidant à modéliser des situations pour lesquelles le calcul algébrique n'est pas opérant. Il s'agit donc d'amener les élèves face à ces différentes sortes de tâches et de s'interroger sur la pertinence d'une séquentialisation de cet enseignement.

Les résultats des travaux de Passaro (2013) peuvent utilement nous aider. Ses travaux portent sur le passage de la notion de fonction à celle de dérivée. Son hypothèse est que le raisonnement covariationnel modifie la conception que les élèves ont des fonctions et qu'il se révèle par la prise en compte de différents faits, donnés ou construits par l'élève, qu'elle organise en 13 unités. Elle définit le raisonnement covariationnel comme une articulation de ces 13 unités de raisonnement. (Le tableau 2 se limite aux sept premières unités pertinentes pour notre propos. La colonne de gauche numérote les unités, celle du milieu donne une description du raisonnement mis en œuvre et celle de droite qualifie les unités suivant les trois niveaux définis par Passaro (2016)).

Unités	Description	Rôle
U1	Identifier une relation fonctionnelle a) identifier les deux grandeurs étudiées, b) établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence et sens de cette dépendance), c) vérifier si cette relation est une relation de proportionnalité.	Unités de raisonnement racines
U2	Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation a) établir que la grandeur indépendante est variable, b) établir que la grandeur dépendante est variable, c) établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs.	
U3	Décrire le comportement de la fonction a) établir le sens de variation de la grandeur dépendante quand la grandeur indépendante augmente, b) qualifier cette variation de manière intuitive.	Unités de raisonnement troncs
U4	Décrire le comportement des accroissements a) considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante, b) considérer des accroissements de la grandeur dépendante, c) établir la concomitance entre les accroissements des deux grandeurs, d) décrire le comportement global de cette concomitance.	
U5	Repérer les changements de comportement.	Unités de raisonnement branches
U6	Considérer des intervalles sur lesquels la fonction est continue monotone a) généraliser intuitivement le comportement sur un intervalle, b) passer à des accroissements plus petits.	
U7	Interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et nommer la grandeur associée.	

Tableau 1 *: Description des 7 premières unités et sous unités de raisonnement d'après la grille d'analyse finale (Passaro, 2016, p. 17).*

Les trois premières unités portent sur une étude globale et qualitative sur les variations concomitantes des deux grandeurs observées. Les unités 4 à 7 concernent un questionnement sur les accroissements concomitants des deux grandeurs observées. Les unités 8 à 11 relèvent du programme du cycle terminal, elles sont toujours dirigées par un questionnement local sur les accroissements mais plus quantitatif (approche du concept de fonction dérivée). Enfin les unités 12 et 13 portent sur une étude ponctuelle, le questionnement nécessite la prise en compte d'un taux de variation instantané (approche du nombre dérivé). Passaro montre que les élèves doivent revenir très souvent aux unités 1 et 2 qu'elle appelle des unités de raisonnement « racines » et aux unités « troncs » 3 et 4 pour pouvoir mettre en œuvre les unités suivantes appelées « branches » qui sont celles visées pour aborder l'analyse. Cela suppose de travailler explicitement les premières unités dès le collège. Nous allons donner quelques exemples pour penser cet enseignement dans le cas particulier des fonctions affines.

L'unité U1 suppose de considérer la fonction affine avant tout comme une relation fonctionnelle entre deux grandeurs (donc dans le cadre de l'arithmétique des grandeurs) et d'identifier un sens de dépendance. Il s'agit donc de proposer des situations où l'élève a à sa charge cette identification, or très souvent les activités proposées aux élèves fournissent déjà les résultats de cette unité. Les grandeurs sont nommées, la relation entre elles est indiquée soit dans une formulation explicite (par exemple : « chaque planche est au prix de 20 € »), soit dans un tableau dont l'en-tête indique les grandeurs et les unités, soit dans un graphique où chaque axe a une légende. Ensuite la plupart des exercices posent la question de la proportionnalité. Entraîner l'unité U1 suppose d'amener les élèves à automatiser cette vérification avant de traiter une situation comme une situation de proportionnalité.

L'unité U2 doit amener les élèves à identifier les variables. Le point de vue statique assigne un rôle asymétrique aux variables, « y est fonction de x » amène les élèves à concevoir x comme une variable mais pas y. Le point de vue processus s'intéresse à la concomitance entre les variations des deux grandeurs, les deux sont donc considérées comme des variables.

L'unité U3 correspond à un raisonnement porté sur le sens de la variation, ce qui suppose d'amener l'élève à organiser les données de sorte qu'il puisse analyser l'ordre. Une analyse de manuels[12] a montré que 80 % des contextes d'exercices proposés faisant intervenir des dépendances entre grandeurs relevaient de fonctions monotones, que ces fonctions sont majoritairement croissantes et pour un quart des fonctions du temps ce qui impose un ordre chronologique. Les questions de variation sont essentiellement posées dans le registre graphique, amenant une lecture d'un point de vue global.

Pour ce qui est de l'unité U4, il s'agit d'amener l'élève à considérer des régularités dans les variations permettant des comparaisons. Les marches et contremarches rencontrées dans certains manuels montrent implicitement ces régularités mais comment penser des situations amenant les élèves à construire la nécessité de ce raisonnement ? Nous avons montré plus haut que ce travail sur les variations peut être mené à condition d'ajouter des ostensifs permettant des traitements (tableau de valeurs fléché ; marches-contremarches sur le graphique ; notation Δ_x pour désigner une variation de x).

Si l'unité U5 vise à repérer des changements de comportement, l'unité U6 nous semble particulièrement intéressante puisqu'elle passe du global au local en réduisant l'étude sur un intervalle et en considérant un intervalle plus fin. C'est ce qui est mobilisé en particulier lorsque l'on envisage une approximation linéaire sur un intervalle. Ce type de raisonnement est attendu pour construire le concept de dérivée. L'unité U7 peut aller jusqu'à raisonner sur le taux de variation considéré comme une variable.

Cette articulation d'unités de raisonnement nous a servi de base pour la conception de situations

[12] Analyse de 4 manuels identifiés comme les plus utilisés dans l'académie de Nantes (Grau, 2017b) : *Sésamaths* (Génération 5), *Phare* (Hachette), *Transmaths* (Nathan) et *Prisme* (Belin) en 2012.

mettant au travail chacune de ces unités explicitement à plusieurs moments de l'apprentissage des fonctions affines au cycle 4. Nous allons maintenant présenter quelques-unes de ces situations.

2. Quels problèmes proposer en classe pour introduire la notion de fonction au collège ?

Pour Brousseau, la situation d'apprentissage doit faire apparaître *« la connaissance mathématique visée comme seul moyen ou, du moins, comme savoir optimal permettant de résoudre la question mobilisée dans la situation adidactique et, plus généralement, la classe de problèmes d'où cette question est issue »* (Brousseau, 2004 cité par Schneider & Mercier, 2005). Le choix de la situation suppose donc une analyse épistémologique, la difficulté étant de comprendre le processus de construction du savoir. Dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP) (Fabre & Orange, 1997), le savoir est construit en lien avec des problèmes et la formulation de nécessités, considérées comme ce qui fait que ce savoir est ce qu'il est et ne peut pas être autrement. Ce cadre offre des outils d'analyse du processus dynamique de problématisation. Il s'agit donc de trouver une classe de problèmes pour laquelle la notion de fonction affine est utile pour la résolution, et d'identifier les nécessités de ce savoir en lien avec cette classe de problèmes.

Quels sont alors les problèmes qui nécessitent une modélisation par une fonction affine pour être résolus et comment amener les élèves à construire des nécessités en lien avec ces problèmes pour caractériser les fonctions affines ?

Les auteurs de la brochure *« Enseigner les mathématiques en Seconde : Trois parcours sur les Fonctions »* (IREM de Poitiers, Groupe Lycée, 2011) identifient plusieurs « grandes questions » d'après l'écologie de la notion de fonction :

- décrire les variations d'une quantité en fonction d'une autre ;
- déterminer une quantité à partir d'une autre ;
- optimiser ;
- comparer des quantités ;
- décrire un phénomène par un modèle, en quantifiant la dépendance ;
- prévoir l'évolution d'un phénomène.

Ils ont alors choisi une organisation de l'enseignement des fonctions en classe de 2de suivant trois parcours : optimiser, connaître les variations, comparer des quantités. Ces trois entrées permettent de traiter l'ensemble du programme de 2de, sans fixer l'ordre de traitement de ces parcours. Partant de cette proposition, avec le groupe collège de l'IREM des Pays de Loire, nous avons cherché quels parcours seraient pertinents au cycle 4 et comment les fonctions affines pouvaient y être introduites. Reprenant les attendus de programme, il a été décidé de travailler sur : décrire et quantifier une dépendance entre deux variations de deux quantités ; prévoir l'évolution d'un phénomène ; déterminer une quantité à partir d'une autre. Le groupe s'est appuyé sur des situations déjà expérimentées et a cherché à adapter les consignes pour amener les élèves à construire des nécessités. L'objectif était pour chaque situation d'amener l'élève à mobiliser les unités de raisonnement covariationnel de Passaro.

Ainsi, la situation *« Le petit Chaperon Rouge »* (Blochs & Lalande, 2009) est introduite par ce texte :

Le petit Chaperon Rouge habite à un bout de la ville. Sa Mère-grand habite à l'autre bout de la ville 10 km plus loin. Sur la longue avenue qui sépare la maison du Chaperon Rouge et celle de sa Mère-grand, on peut marcher à 5 km par heure ou prendre un bus qui roule à 30 km/h.

Sur son carnet personnel, le petit Chaperon Rouge raconte ses sorties en traçant un graphique. Sur l'axe horizontal il marque les heures, sur l'axe vertical il marque la distance qui le sépare de sa maison.

Suivent cinq graphiques avec des questions fermées auxquelles les élèves devaient répondre par lecture graphique. L'adaptation proposée par le groupe a été de proposer les graphiques mais de limiter la consigne à *« raconte une histoire correspondant à chaque graphique pour chacune des sorties »*. Pour ce travail, le graphique a un mode opératoire, il ne s'agit plus simplement de lire une information mais bien de la déduire à partir de l'interprétation nécessaire des variations[13].

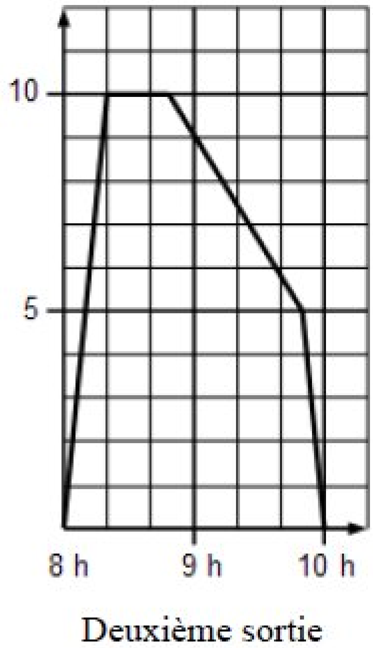


Illustration 3 *: Extrait de l'activité « Le petit Chaperon Rouge »*
(Blochs & Lalande, 2009).

Une autre situation que l'on trouve dans une majorité de manuels est « le problème de la boîte ». Il s'agit d'un rectangle dont on découpe une partie (le même carré hachuré à chaque angle droit) et qu'on plie suivant les pointillés pour fabriquer une boîte sans couvercle (voir schéma 8) :

[13] Voir la mise en œuvre proposée par C. Lommé sur son blog : https://clairelommeblog.wordpress.com/2021/04/11/le-petit-chaperon-rouge-fait-des-maths/

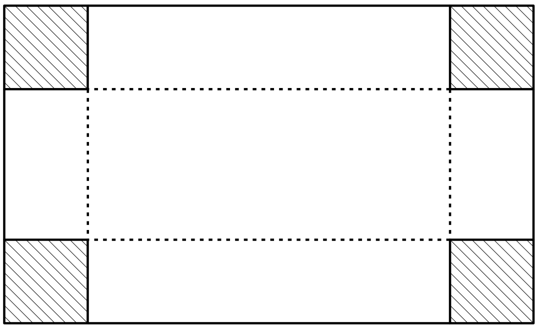


***Schéma 8** : Le problème de la boîte.*

L'objectif ici est de laisser les élèves identifier les grandeurs variables. Des feuilles identiques sont donc distribuées aux élèves mais chacun a une dimension différente du carré à découper. Avant de réaliser les boîtes, la question posée est de savoir si elles auront le même volume. Contrairement aux consignes usuelles qui demandent de calculer les volumes et de les comparer ou qui demandent explicitement d'exprimer le volume en fonction du côté du carré sans même réaliser différentes boîtes, ici les élèves doivent analyser le schéma pour identifier toutes les variables dépendantes avant de mettre en relation le volume avec le côté du carré. Les expérimentations ont montré que dans les classes de 3e, les élèves se répartissent également suivant les trois avis :

- le volume diminue quand le côté du carré augmente ;
- le volume est toujours le même, la hauteur compense la perte au niveau du fond ;
- le volume est proportionnel au côté du carré.

Ces résultats attestent des conceptions qui prédominent chez les élèves. Comme les avis se répartissent équitablement entre les trois propositions, le doute devient le moteur d'une recherche de preuve. Les élèves réalisent les boîtes, ce qui peut modifier un peu les conceptions, mais les calculs sont utiles pour arriver à l'idée de variation. Tous les résultats de la classe peuvent être mis en commun et il devient nécessaire d'organiser ces résultats. Le tableau s'impose et l'idée d'organiser en écrivant les mesures du côté du carré dans l'ordre croissant permet de constater que le volume croît puis décroît, ce qui surprend la majorité des élèves. La recherche d'un maximum vient donc facilement et le choix des dimensions, s'il ne permet pas une solution entière, amène à considérer un intervalle. On voit sur cet exemple comment chaque unité de raisonnement intervient dans la construction du problème — passant de l'identification des grandeurs à la considération de la variation du volume en fonction du côté du carré découpé, puis à la description du comportement de ces accroissements pour identifier un extrémum — et comment les nécessités viennent de faits construits au fur et à mesure. Mais surtout, l'expérimentation a montré que la première étape consistant à identifier les variables et leur organisation dans un registre de représentation pour pouvoir les traiter, posait déjà de grosses difficultés aux élèves. En particulier, les élèves ont tendance à identifier trois variables correspondant aux trois dimensions de la boîte sans voir que le volume peut s'exprimer uniquement en fonction du côté du carré découpé.

Un autre exemple de situation est « le problème du pluviomètre » (Grau, 2017a ; Rouquès *et al.*, 2019). Dans cette situation, les élèves ont un relevé quotidien de la hauteur d'eau dans un pluviomètre sur les quinze premiers jours du mois de mars, un relevé de la pluviométrie sur cette même période ainsi que les prévisions pour la fin du mois trouvées sur un site de météorologie sur Internet. On sait qu'une cave est inondée quand la hauteur d'eau dans le pluviomètre dépasse 142 *mm*. La question est de dire si oui ou non il y a un risque d'inondation dans les jours qui vont suivre (voir annexe 1). L'énoncé présente dans deux tableaux séparés deux grandeurs qui varient en fonction de la date (la hauteur d'eau dans le pluviomètre, la pluviométrie donnée par le site). Identifier que les variations qui nous intéressent sont indépendantes de la date est une première étape du travail. Ensuite les élèves doivent organiser les données pour identifier les variations, ils vérifient que les deux grandeurs — la hauteur d'eau dans le pluviomètre et la pluviométrie — ne sont pas proportionnelles (la forme du pluviomètre n'est pas indiquée, il s'agit en fait d'un tronc de cône, la relation entre les grandeurs est une racine cubique). Enfin soit par tracé de la représentation graphique, soit par analyse des données dans un tableau, les élèves doivent repérer qu'une seule date peut poser problème, identifier un intervalle et procéder par approximation linéaire pour estimer la hauteur d'eau à la date critique. Cette situation a été proposée à différents niveaux de la scolarité mais dès la 6e, les élèves arrivent à identifier la date pouvant poser problème et ils utilisent une approximation linéaire pour répondre à la question. La spécificité de cette activité est de contraindre les élèves à passer régulièrement d'un point de vue à l'autre entre le local, le ponctuel et le global (ponctuel pour associer son image à chaque valeur, global pour repérer le sens de la variation, local pour effectuer une approximation linéaire). L'autre spécificité est que les élèves utilisent des ostensifs pour les variations parce qu'ils en ont besoin pour construire leur modèle. La représentation des variations est alors opérationnelle pour résoudre le problème.

2.1. Quelques résultats des expérimentations

L'analyse des différentes expérimentations de situations covariationnelles à différents niveaux du cycle 4 et de 2de montre qu'il est souvent possible de résoudre le problème posé par une modélisation par une fonction affine sans disposer de la formule algébrique de la fonction. De plus, le cadre de l'arithmétique des grandeurs amène à autoriser des approximations alors que le cadre algébrique fournit des solutions exactes. Ainsi, les élèves peuvent dès la classe de 6e résoudre des problèmes affines complexes en utilisant la proportionnalité des accroissements. De façon assez naturelle, ils peuvent effectuer des approximations linéaires pour optimiser, prévoir une évolution, décrire un phénomène ou même calculer une valeur approchée d'une quantité à partir d'une autre. Nous avons donc pensé des parcours dans lesquels les élèves rencontrent des situations de type :

- vérifier la concomitance des variations des deux grandeurs : cela permet de mobiliser les connaissances scientifiques mais aussi sociales que nous avons de ces grandeurs. Implicitement un « prix au kilo » désigne une proportionnalité entre la grandeur prix et la grandeur masse. Expliciter cela amène les élèves à être plus critiques dans les situations rencontrées ultérieurement ;
- identifier les situations de proportionnalité : une grande majorité des élèves considère tous les tableaux de valeurs comme des tableaux de proportionnalité du fait qu'ils ont majoritairement rencontré ce registre pour représenter effectivement des situations de proportionnalité et qu'au moment de travailler la proportionnalité, presque toutes les situations rencontrées (si ce n'est toutes) sont des situations de proportionnalité. Travailler l'unité de raisonnement U1 suppose d'amener les élèves à automatiser le questionnement « s'agit-il d'une situation de proportionnalité ? » Répondre suppose d'identifier les grandeurs, d'analyser la dépendance ;
- ordonner : si une des grandeurs est le temps, les valeurs sont implicitement ordonnées, il faut donc proposer des situations qui demandent explicitement à l'élève de prendre la responsabilité d'ordonner les valeurs pour que cela lui apparaisse comme une nécessité (voir annexe 1 : la situation du pluviomètre décrite plus haut).

Pour amener les élèves à considérer les variations, il peut être utile d'utiliser des grandeurs repérables[14] car dans ce cas les variations sont des grandeurs mesurables et elles peuvent alors être proportionnelles (voir pour cela la situation pression-température (Grau, 2017a), pour un même corps à volume constant, la variation de pression (en *hPa*) est proportionnelle à la variation de température exprimée en Kelvins).

Nous avons aussi testé des situations dans lesquelles les variations n'étaient pas monotones. Il est alors très intéressant de voir les élèves porter un regard local sur le phénomène et procéder par des approximations linéaires dans des intervalles qu'ils choisissent. Ces situations sont l'occasion de mettre en évidence les écarts entre les résultats suivant l'intervalle considéré et donc de formaliser des critères de choix en lien avec la précision attendue.

Toutes ces situations (Grau, 2017b) amènent les élèves à effectuer des traitements arithmétiques plus qu'algébriques, mais elles permettent de construire les unités de raisonnement qui fondent le concept de fonction. L'expression algébrique peut être formalisée mais elle n'est pas nécessaire. Pour la rendre nécessaire, on peut alors poser un problème qui explicitement demande cette expression : programmer un convertisseur sur tableur pour passer d'une mesure de la température en degrés Celsius à une expression en degré Fahrenheit par exemple ou exprimer une loi entre deux grandeurs. L'expression est alors la solution du problème et non le savoir mobilisé pour résoudre le problème. Les valeurs prises par les paramètres sont identifiées par des nécessités liées aux relations entre grandeurs établies par l'élève. L'élève ne les retrouve pas à partir d'une forme de l'expression préalable mais il les détermine et ensuite peut identifier la forme spécifique de l'expression.

Un autre résultat intéressant est qu'un même problème est souvent mieux résolu par les élèves de 6e que par ceux de 3e. Les élèves de 3e ont des connaissances sur les fonctions et sur la proportionnalité qui peuvent devenir des obstacles à un traitement plus arithmétique. Ils cherchent systématiquement à appliquer des formules ou des techniques sans revenir au sens. Pour pouvoir modéliser, l'élève doit apprendre avant tout à observer et analyser le phénomène, ce qui suppose de demander aux élèves de produire quelque chose plutôt que de leur poser une question. Pour réaliser le produit attendu, ils ont la responsabilité de poser eux-mêmes des questions. Ils sont alors amenés à construire le problème. Par exemple, demander de programmer un convertisseur sur tableur amène l'élève à se demander quelle est la relation entre les deux mesures. Pour l'anecdote, un groupe a trouvé la formule sur l'Internet mais ils ont alors construit un nouveau problème : comment cette expression peut être trouvée à partir des données que nous avions ? Ils ont travaillé tout autant que les autres mais à partir de la solution.

Il s'avère donc que la proportionnalité des variations peut être une caractérisation des fonctions affines plus disponible chez les élèves que la forme algébrique de leur expression. Nous allons analyser une situation proposée en classe de 2de, attestant de cette disponibilité.

2.2. Un exemple de malentendu en classe de 2de

Amener les élèves à caractériser la fonction affine par la proportionnalité des écarts suppose un changement radical de positionnement de l'enseignant qui n'est pas simple quelle que soit son ancienneté dans le métier. En effet, ce savoir est trop ancré dans la mémoire pour se laisser questionner. En 2021, une stagiaire a proposé une situation complexe en classe de 2de. Elle a mis à disposition des élèves quatre documents : une carte des températures aux USA extraite d'un

[14] Une grandeur est dite repérable si on ne peut pas effectuer la somme de deux valeurs de cette grandeur (la température, la date, le potentiel électrique, la pression…).

bulletin météorologique, l'image de deux thermomètres à double graduation degrés Celsius et Fahrenheit, deux affiches du film « Fahrenheit 451 » et un tableau regroupant des phénomènes et la température en °C à laquelle ils se produisent (document en annexe 2). Son objectif était de revoir la définition et les propriétés de la fonction affine à partir des productions des élèves. Il est intéressant d'analyser le choix de sa consigne qui est en deux étapes :

1. Établir la relation qui existe entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius.
2. Mr Icks pense que 451 *°F* correspond à la température d'auto-inflammation du gazole. Qu'en pensez-vous ?

L'énoncé prend donc en charge le découpage de la tâche. Même si la situation est pensée comme une situation complexe, on voit que la stagiaire pose une première étape induisant la procédure qu'elle considère comme la procédure experte pour répondre à la question qui va suivre. Pourtant c'est bien la seconde étape qui peut amener les élèves à poser le problème et donc faire éventuellement émerger la nécessité de formaliser la relation entre les deux unités de mesure.

Quand on analyse les productions des groupes (voir annexe 3), on constate que naturellement les élèves ont étudié les variations. Ils ont pris l'initiative d'introduire des symboles pour représenter ces variations (flèches dans les tableaux, marches sur le graphique) ou d'utiliser des formulations en langage naturel comme *« +10 °C c'est comme +18 °F »*. Un seul groupe a tenté une expression algébrique de la fonction, c'est celui que l'enseignante a aidé. En effet, pour répondre à la première consigne, ils ont écrit *« étend-donner que au Etat-Unis ils utilisent le Fahrenheit et que en Europe ils utilisent le celsius, nous supposons que l'Océan Atlantique relie les deux mesure de température »*. Cette réponse montre bien que l'emploi du mot « relier » par les élèves ne renvoie pas à une « relation mathématique » au sens d'une relation fonctionnelle. Les élèves l'ont compris comme « quelque chose de commun ». Devant cette proposition qui reste très obscure, l'enseignante a orienté le travail plus explicitement sur la recherche d'une formule. Pour les autres groupes, aucun n'a formalisé l'expression algébrique pour répondre à la première consigne, ils se sont contentés de décrire cette relation dans le registre des tableaux, des graphiques ou en langage naturel, alors même que la fonction affine et son expression algébrique ont été travaillées l'année précédente.

La trace écrite prévue initialement par l'enseignante partait de l'expression algébrique pour poser le vocabulaire, revoir les techniques de calcul d'images et d'antécédents. Aucun de ces aspects n'est apparu, elle ne pouvait donc absolument pas s'appuyer sur les productions des élèves. Cet exemple montre à quel point la définition de la fonction affine par son expression algébrique était éloignée des nécessités mises en évidence par les élèves et des traitements qu'ils ont été capables d'effectuer.

Conclusion

Si les fonctions apparaissent comme nécessaires pour décrire la covariation de deux grandeurs, la caractérisation d'une fonction ne nécessite pas toujours son expression algébrique, souvent les problèmes posés peuvent être résolus par des calculs arithmétiques suite à une analyse des variations à partir de valeurs, d'un tableau de valeurs ou d'un graphique. En fait, l'enseignement néglige souvent la distinction entre ce qu'on pourrait appeler la « fonction pratique » qui caractérise la relation entre grandeurs, de la « fonction théorique » qui est une fonction mathématique définie sur un ensemble de nombres. Les programmes antérieurs à ceux de 1986 étaient basés sur l'idée d'une approche initiale par les savoirs théoriques suivie d'une mise en application dans des situations simples et enfin d'une mobilisation dans des situations complexes. Les fonctions théoriques étaient donc enseignées puis on apprenait à mobiliser ces fonctions pour modéliser des phénomènes. Il s'agissait d'enseigner l'objet avant d'en faire un outil. À partir des années 2000, la démarche s'inverse, on attend des élèves qu'ils construisent les outils en relation avec les situations complexes rencontrées puis qu'ils généralisent pour abstraire des objets théoriques. Notre difficulté actuelle est que les deux paradigmes cohabitent dans notre système scolaire français, sans qu'enseignants et élèves en soient conscients. Le risque est que seuls les élèves les plus proches de la culture scolaire soient capables de comprendre ce qui se joue et donc de faire le lien entre les situations complexes, souvent rencontrées en activités d'introduction, et les objets théoriques présentés par l'enseignant au moment de l'institutionnalisation. Cela nous amène à inciter les enseignants à analyser les situations proposées, les consignes et à avoir une analyse plus critique des manuels ou supports utilisés pour amener les élèves à plus d'autonomie dans la résolution de problèmes et à construire les objets théoriques à partir de ce qu'ils ont effectivement compris des situations.

Si Comin soulevait déjà l'obstacle du passage du cadre des mesures de grandeurs à celui de l'analyse (Comin, 2009), les travaux de Passaro montrent un autre enjeu, celui du développement d'un raisonnement covariationnel. Différentes unités de raisonnement définissent des passages obligés lors de l'analyse d'une situation dans laquelle différentes grandeurs varient. Notre hypothèse est que ces unités de raisonnement sont souvent prises en charge par l'enseignant, les énoncés et restent implicites. Nous pensons au contraire qu'elles doivent être travaillées très tôt dans la scolarité et reprises dans de multiples contextes, pour que la notion de fonction, utilisée comme outil en lien avec des problèmes identifiés et des nécessités explicitées, puisse être objet d'enseignement et devienne un savoir disponible pour les élèves.

Dans la situation des degrés Celsius et Fahrenheit présentée dans cet article, on peut imaginer institutionnaliser une définition de la fonction affine mettant en évidence la proportionnalité des variations et l'expression de ces variations dans les différents registres pour en tirer l'expression algébrique de la fonction. Cette expression pouvant être rendue nécessaire parce qu'utile, pour définir un programme de calcul, par besoin d'une caractérisation à moindre coût ou d'une caractérisation d'une famille de fonctions parmi d'autres.

Notre projet d'élaboration d'un parcours à travers de multiples situations permettant de mettre au travail les différentes unités de raisonnement nécessite de continuer les recherches pour vérifier à long termes la disponibilité effective des savoirs et comprendre ce que le raisonnement covariationnel modifie dans les conceptions des élèves au moment de l'entrée dans l'analyse.

Références bibliographiques

Bloch, I. (2002). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x, 58*, 25-46.

Blochs, B. & Lalande, J. (2009). *Les problèmes sans problème. 200 exercices corrigés pour apprendre à résoudre les problèmes*. CRDP de Franche-Comté.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'Enseignement des Mathématiques*. Thèse de l'Université de Bordeaux 1.

Brousseau, G. (2004). Research in mathematics education. In *ICME-10 proceedings* (pp. 244-254). IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Carlson, M. & Oehrtman, M. (2005). *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function*. Mathematical Association of America.

Chauvat, G. (1998). Courbes et fonctions au collège. *Petit x, 51*, 23-44.

Chevallard, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x, 42*, 33-57.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux 1.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : Méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. *Petit x, 67*, 33-61.

Comin, E. (2009). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions en seconde. *Petit x, 79*, 23-47.

D'Amore, B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique : Interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedogogica Experimentalis, XXXVIII*(2), 143-168.

Douady, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7/2*, 5-32.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Bern.

Duval, R. (2002). Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? *Cadres et registres*, 83-105. http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/staf26/Doua.pdf

Duval, R. (2006). *La conversion des représentations : Un des deux processus fondamentaux de la pensée*. Presses Universitaires de Grenoble.

Fabre, M. & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER, 24*, 37-57.

Grau, S. (2017a). Modélisation : Le cas des fonctions affines. *Repères IREM, 108*, 41-62.

Grau, S. (2017b). *Problématisation en mathématiques : Le cas des fonctions affines*. Thèse de l'Université de Nantes.

Gueudet, G. & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur : Éclairages en didactique des mathématiques*. Rapport de recherche, CNESCO (Conseil national d'évaluation du système scolaire).
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02547063/document

IREM de Poitiers Groupe Lycée. (2011). *Enseigner les mathématiques en seconde : Trois parcours sur les fonctions*. IREM.

Passaro, V. (2013). Jouer avec le concept de fonction ou explorer la fonction par l'étude covariationnelle. *Bulletin AMQ, LIII*(3), 73-86.

Passaro, V. (2016). Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Québec. *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques*. Enseignement et apprentissage de l'analyse, Brest.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(4), 505-528. https://doi.org/10.1080/14926150209556538

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 13-30. IREM de Paris.

Rouquès, J.-P., Valade, L. & Gragnic, C. (2019). *Des maths ensemble et pour chacun*. Canopé. https://www.reseau-canope.fr/notice/des-maths-ensemble-et-pour-chacun-2nde.html

Schneider, M. & Mercier, A. J. (2005, mai). Situation adidactique, situation didactique, situation-problème : Circulation de concepts entre théorie didactique et idéologies pour l'enseignement. *AFIRSE*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01995384

Vandebrouck, F. (2011). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : Activités des élèves et pratiques des enseignants*. Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01267429/document

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Wattiaux, R., Wattiaux, L., Mas, A., Delplanche, E. & Legrain, G. (1968). *4e Mathématiques Cours Brédif*. Hachette, Paris.

Annexe 1
La situation du pluviomètre

Monsieur Legoff, habitant du Finistère Nord, a installé un pluviomètre dans son jardin. Chaque jour, il mesure la hauteur d'eau en millimètres dans son pluviomètre et ensuite il le vide. Il a relevé dans un tableau la hauteur d'eau de pluie dans son pluviomètre du 1er au 15 mars.

Dates	01 mars	02 mars	03 mars	04 mars	05 mars	06 mars	07 mars	08 mars	09 mars	10 mars	11 mars	12 mars	13 mars	14 mars	15 mars
Hauteur d'eau en *mm* dans le pluviomètre	0	0	0	0	38	76	127	89	38	117	129	107	89	0	72

Monsieur Legoff a remarqué que sa cave est inondée quand, sur une journée, la hauteur d'eau dans son pluviomètre atteint 142 *mm*. Il doit s'absenter du 16 au 21 mars. Avant de partir, il consulte un site météo et il obtient les renseignements suivants :

Dates	Pluviométrie en ℓ / m^2
1 mars	0
2 mars	0
3 mars	0
4 mars	0
5 mars	0,2
6 mars	1,6
7 mars	7,5
8 mars	2,6
9 mars	0,2
10 mars	6
11 mars	8
12 mars	4,6
13 mars	2,6
14 mars	0
15 mars	1,4
16 mars	3,2
17 mars	4
18 mars	3,4
19 mars	7
20 mars	1,2
21 mars	1,1

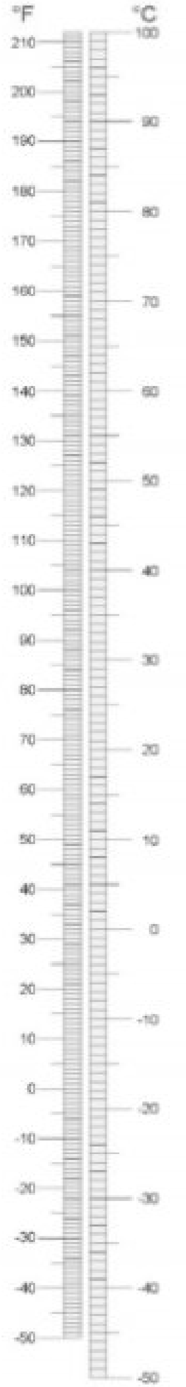
Monsieur Legoff doit-il s'inquiéter pour sa cave ?

Annexe 2
Situation proposée en classe de 2de

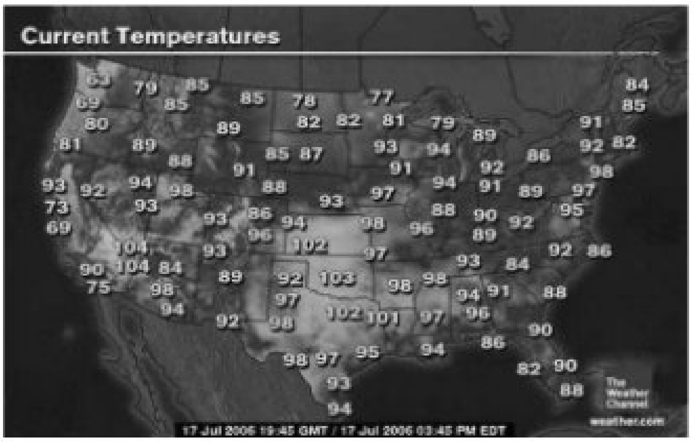
Chapitre 6 : Fonctions affines

Activité 1

En regardant une chaîne d'information américaine, Mr Icks oberve la carte météorologique suivante (document 1). Les températures indiquées le laissent perplexe.

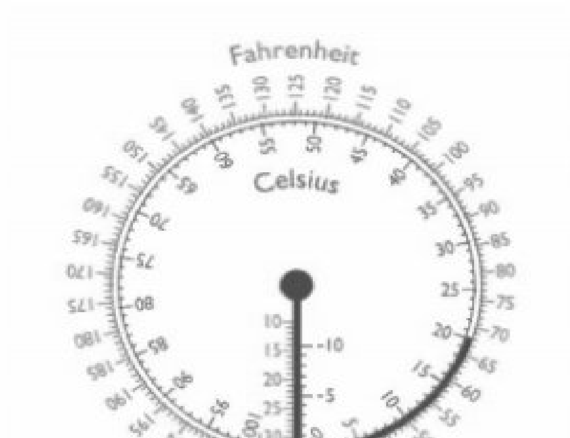


Document 1 :



Il décide de faire une recherche internet sur les températures. Il découvre trois unités : les degrés Celsius, les degrés Fahrenheit et les Kelvins. Il existe des termomètres utilisant deux unités (documents 2a et 2b).

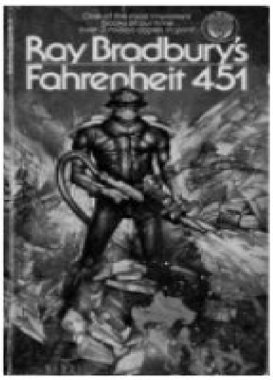
Document 2a :



Document 2b :

Il trouve aussi une affiche de cinéma et une couverture du livre Fahrenheit 451 de Ray Bradbury (document 3)

Document 3 :



Mr Icks cherche alors à comprendre ce que signifie ce titre et trouve des exemples de température (document 4).

Document 4 :

Commentaire	Degré Celsius
Zéro absolu	-273,15
Plus basse température naturelle enregistrée à la surface de la Terre	-89
Mélange eau/sel de Fahrenheit	-17,78
Température de fusion de l'eau (à la pression standard)	0
Température moyenne à la surface de la Terre	15
Température moyenne du corps humain	36,8
Plus haute température naturelle enregistrée à la surface de la Terre	56,7
Température de vaporisation de l'eau (à la pression standard)	99,975
Température d'auto-inflammation du papier	233
Température d'auto-inflammation du gazole	257
Température estimée à la surface du Soleil	5 526

Problématique :

- **Établir la relation qui existe entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius.**
- **Mr Icks pense que 451°F correspond à la température d'auto-inflammation du gazole. Qu'en pensez vous ?**

Annexe 3

Productions d'élèves de 2de

Groupe 1

• Degrés Celsius = Français
Degrés Fahrenheit = Etats-Unis

Les degrés Celsius et Fahrenheit calcule la Température

Degrés °C	-10	-5	0	30	60	80	100
Degrés °F	14	23	32	86	140	176	212

x ÷

(48 : 10 = 1,8)

°C	10	20	30	40	50	60
°F	50	68	86	104	122	140

$10 \xrightarrow{+10} 20 \xrightarrow{+10} 30 \xrightarrow{+10} 40 \rightarrow 50 \rightarrow 60$

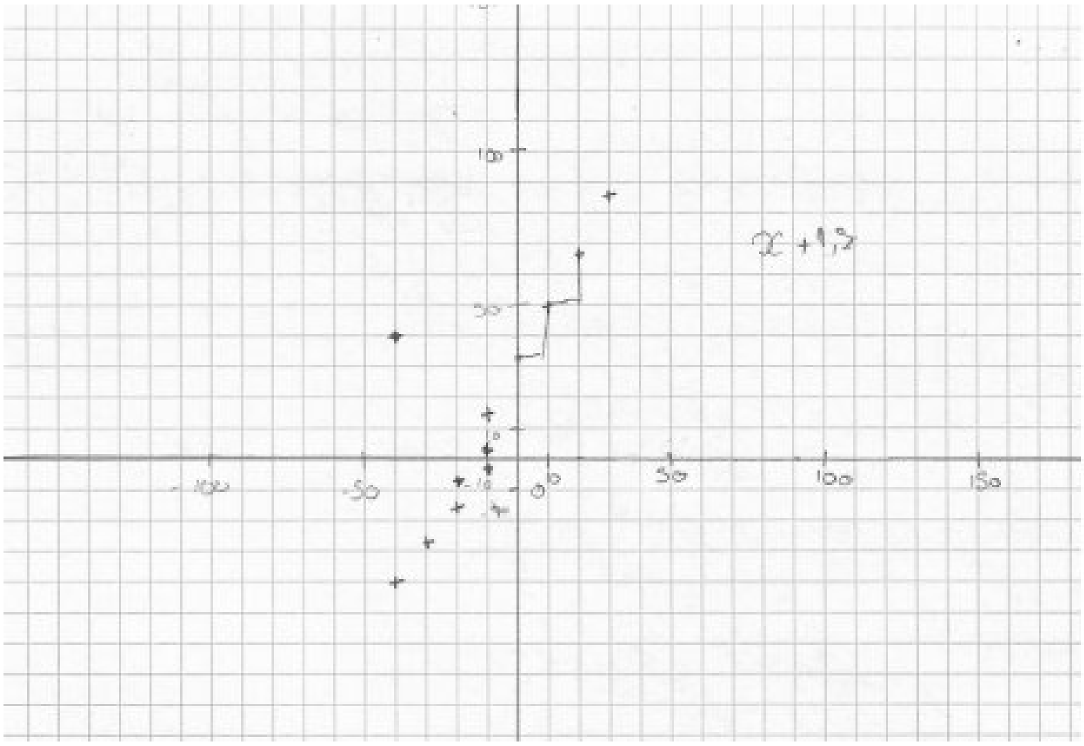
$50 \xrightarrow{18} 68 \xrightarrow{18} 86 \rightarrow 104 \rightarrow 122 \rightarrow 140$

oui — Les degrés Celsius commence à zero alors que les degrés Fahrenheit commence à trente deux.

oui — Les degrés Celsius augmente de dix en dix ou diminue de 10 en dix alors que les degrés Fahrenheit augmente ou diminue de 18 en 18.

oui — Les °C et les °F ne sont pas proportionels.

Groupe 2



+18

F°	-40	-28	-4	14	32	50	68	104	122	140	158	176	194	212
C°	-40	-30	-20	-10	0	10	20	40	50	60	70	80	90	100

+10

+ 10°C, c'est comme + 18° F

100° F = 38 °C   50°F = 10°C

$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

451 = (100 × 4) + 50 + 1

38 × 4 + 10 + 0,5

162,5

+ 1°F

+ 0,5°C

451 × 0,5 = 225,2

$451 \times \frac{5}{9} + 10 \simeq 260{,}6$

Groupe 3

Étand-donner que au Etat-Unis ils utilisent le Fahrenheit et que en Europe ils utilisent le celsius nous supposons que l'Océan Atlantique relie les deux* [* mesure de] températures

Fahrenheit	32	50	68	86	104	122	140
celsius	0	10	20	30	40	50	60

$y = x + 18$

x = celsius

18 = ~~la différence entre celsius et fahrenheit~~ c'est la différence en fahrenheit entre 10° celsius

+18

F	50	68
C	10	20

+10

bien.

25x18=450

18 : 10 = 1,8

donc 25+1,8 = 26,8

26,8 °C

Donc en réfléchissant nous en avons déduis que 451 F ne correspond pas a la température d'auto inflamation du gazole