
ÉTUDE DES BROUILLONS D'ÉLÈVES DE CYCLE 3 LORSQU'ILS RÉSOLVENT DES PROBLÈMES COMPLEXES

Chantal MOUSSY¹

INSPÉ de Créteil, UPEC

Cécile ALLARD²

INSPÉ de Créteil, UPEC, LDAR

Résumé. Nous présentons des résultats issus d'un travail mené dans le cadre d'un LéA (Lieu d'éducation Associé), LéA-2TEM-2019-2023 consacré à la résolution de problèmes arithmétiques en cycle 3. Notre étude porte sur les écrits d'élèves de cycle 3 confrontés à des problèmes complexes qu'Houdement (2017) définit comme des agrégats de « problèmes basiques ». Dans cet article nous analyserons les productions de deux élèves et nous montrerons comment ces derniers utilisent leurs écrits privés et comment ils mobilisent et adaptent leurs connaissances lorsqu'ils sont confrontés sur une période de 6 semaines entre novembre et décembre à des problèmes complexes présentant les mêmes structures mathématiques mais dans des contextes différents. Cela permettra de questionner les connaissances en jeu dans la résolution de problèmes complexes.

Mots-clés. Problèmes complexes, représentation mentale, écrit, adaptation des connaissances.

Introduction

Nous présentons des résultats issus d'un travail mené dans le cadre d'un LéA (Lieu d'éducation Associé), LéA-2TEM-2019-2023 consacré à la résolution de problèmes en cycle 3. Notre étude porte sur les écrits des élèves de cycle 3 confrontés à des problèmes complexes qu'Houdement (2017) définit comme des agrégats de « problèmes basiques ». Les problèmes basiques se présentent sous la forme d'énoncés courts, dont la syntaxe est simple et ne comporte aucune information superflue. Les « problèmes basiques » recouvrent les problèmes de la typologie de Vergnaud (1990). Par exemple, le problème suivant « j'ai 125 billes et j'en gagne 26, combien j'en ai ? » est un « problème basique » et, selon Houdement (2017), il est raisonnable de penser que la reconnaissance de la structure et la résolution de ce type de problème devraient être automatisées à un moment de la scolarité. Le problème ci-dessous que nous appellerons « le problème de l'école Jacques Prévert », et dont une analyse sera réalisée dans cet article, est quant à lui un problème complexe selon cette autrice :

Dans l'école Jacques Prévert, il y a deux classes de CM2. Dans la première classe il y a 13 filles et 15 garçons. Dans la deuxième classe, il y a 29 élèves. Il y a 32 garçons en tout en CM2. Quel est le nombre de filles dans la deuxième classe de CM2 ?

La réponse à un tel problème n'est pas immédiate. Pour l'obtenir, il est nécessaire, selon Houdement (2017), de réorganiser et, « de connecter des informations pour construire des

¹ chantal.moussy@u-pec.fr

² cecile.allard@u-pec.fr

problèmes calculables, souvent basiques, et utiles pour avancer vers la réponse » (p. 12), mais aussi « *de qualifier les résultats intermédiaires* » (p. 12). La complexité de ce type de problème peut venir de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées mais aussi de la distance avec des connaissances mathématiques entraînées bien plus tôt dans la scolarité.

Les problèmes complexes, dont la résolution ne se réduit pas à l'application d'une opération, nous sont apparus comme de bons candidats pour étudier les écrits de recherche des élèves et identifier à partir de ces derniers des connaissances mobilisées et leur adaptation dans la résolution de nouveaux problèmes.

Après avoir rappelé quelques éclairages théoriques, nous décrirons brièvement dans un premier temps le dispositif spécifique que nous avons mis en place depuis quatre ans dans le cadre du LéA pour travailler les problèmes complexes, et nous préciserons comment ce dispositif a été pensé pour que les élèves laissent des traces de leur recherche (des brouillons) susceptibles de rendre compte d'une certaine progressivité dans cette activité.

Dans un deuxième temps, nous analyserons les productions de deux élèves de CM2 confrontés à quatre problèmes complexes relevant des mêmes structures mathématiques. Plus précisément, nous étudierons l'évolution de leurs brouillons tout au long du dispositif (présenté plus loin), qui alterne travaux écrits des élèves et synthèses réalisées par l'enseignant à partir de ces derniers. Nous mettrons en évidence certains éléments susceptibles de témoigner d'apprentissages effectifs, qu'il s'agisse de connaissances en calcul, de la reconnaissance des structures ou encore de la mise en relation des données.

1. Appuis théoriques

Les travaux sur la résolution de problèmes sont nombreux et ils explorent de multiples aspects, abordant aussi bien les processus cognitifs des élèves que les outils et supports mobilisés en classe. Pour notre étude, nous nous appuyons sur quelques références portant sur la construction d'une « représentation » (au sens de Julo, 1995), la mémoire des problèmes et l'utilisation par les élèves d'écrits pour avancer dans la résolution.

1.1. Construction d'une représentation

Selon Julo (1995), se représenter un problème ne consiste pas seulement à comprendre l'énoncé ou à le traduire en un ensemble structuré de symboles. La représentation du problème ne découle pas mécaniquement de la maîtrise des outils mathématiques. Elle s'élabore dans un processus dynamique d'allers-retours entre des connaissances antérieurement construites et la situation nouvelle à interpréter. Comme le souligne l'auteur, la résolution de problèmes mobilise des connaissances « *liées directement aux situations particulières que nous avons rencontrées auparavant et à l'expérience représentationnelle que nous avons acquise à leur propos* » (p. 90).

Ainsi, les élèves appréhendent un problème à la lumière de leurs expériences précédentes, en sélectionnant certaines informations et en en négligeant d'autres. Notre dispositif permet précisément d'observer ces choix : l'analyse des brouillons fournit des indices sur ce que les élèves retiennent, reformulent ou écartent au cours de la construction de leur représentation.

1.2. Multiprésentation et mémoire des problèmes

Dans ses travaux, Julo (1995) s'interrogeait sur la possibilité de favoriser la réussite des élèves en difficulté en privilégiant une intervention au niveau de la représentation du problème, avant que l'élève ne passe à l'action. Pour cela, il a introduit la multiprésentation, qui consiste à proposer aux élèves simultanément trois problèmes présentant les mêmes caractéristiques : même structure mathématique, mêmes nombres (même réponse numérique), même syntaxe, les informations arrivant dans le même ordre avec la même organisation énonciative, seuls les contextes variant.

Selon Julo (1995, 2002), puis Nguala (2005), les élèves réussissent davantage lorsqu'on leur propose une liste de problèmes semblables plutôt qu'un seul problème isolé. Le fait de pouvoir choisir celui dont le contexte leur paraît le plus familier semble stimuler l'activité de représentation des problèmes, faciliter ensuite la compréhension des autres problèmes de la série et conduit souvent à une meilleure réussite. Ce type d'expérience offre également aux élèves l'occasion de travailler plusieurs fois sur des problèmes de même structure, ce qui contribue à enrichir leur mémoire des problèmes. Ce dernier point est également présent dans les travaux de Priolet (2014), qui propose, après la résolution, la construction de boîtes référentes. Celles-ci regroupent les problèmes résolus selon leur structure et leurs différentes représentations, ce qui permet selon elle de consolider la mémoire des problèmes des élèves et de les aider à passer d'une forme de représentation à une autre (du texte au schéma, du dessin aux nombres, etc.).

Dans notre LéA 2 TEM, nous proposons un autre dispositif. Sur six semaines, nous soumettons aux élèves quatre problèmes ayant la même structure mathématique mais des contextes différents. Nous observons ce qu'ils écrivent, dessinent et mobilisent comme connaissances pour résoudre les nouveaux problèmes auxquels ils sont alors confrontés.

1.3. L'écrit pour chercher lors de la résolution de problèmes

En classe, les consignes du type « Explique comment tu as fait » ou « Fais un dessin ou un schéma », formulées par les enseignants pour encourager les élèves à passer par l'écrit, donnent lieu à des productions très variées. Plusieurs recherches montrent à quel point ces productions graphiques jouent un rôle central dans la compréhension et la résolution des problèmes. Fagnant (2013, 2018) souligne notamment l'importance de s'appuyer sur les « *symbolisations informelles* » produites spontanément par les élèves : ces représentations graphiques, souvent éloignées des formes conventionnelles, constituent un appui essentiel pour donner du sens aux opérations et éviter le recours à des démarches superficielles. Elle précise également que les dessins schématiques soutiennent le processus de construction d'une représentation mentale. Monnier (2003), de son côté, met en évidence la fonction spécifique du schéma. Ce dernier permet « *de représenter les relations existant entre les informations essentielles de l'énoncé et leur organisation entre elles* » (p. 27). Toutefois, cette forme de représentation n'est pas spontanément mobilisée par les élèves, notamment lorsqu'ils estiment que leur représentation mentale de la situation suffit. Pour cette autrice, l'usage du schéma repose sur un apprentissage explicite et sur une certaine familiarité avec les conventions graphiques. Elle ajoute que, s'il peut aider l'élève à se construire une représentation du problème, il est rarement suffisant pour déstabiliser la première représentation mentale construite. Enfin, Cadet (2018) apporte un éclairage complémentaire en rappelant le rôle particulier du dessin. Pour cet auteur, le dessin constitue « *la forme saisissable de la réalité de l'élève* » (p. 80) et peut « *être en même temps une représentation personnelle du problème et un mode de validation approprié de la réponse* » (p. 80).

Ainsi, les productions graphiques, qu'elles soient intuitives ou structurées, peuvent donner des indications sur la manière dont les élèves mettent en relation les données d'un problème.

Dans notre étude, nous privilégions des feuilles blanches plutôt que des ardoises ou des pages seyes, afin de libérer les élèves des contraintes habituelles de l'écrit et de leur offrir davantage d'espace pour noter, organiser et conserver des traces de leur démarche et raisonnement. Ce support favorise la production de traces intermédiaires précédant l'expression des résultats. Nous faisons l'hypothèse que cela aide les élèves à s'appropriier et à mettre en relation les données du problème (Moussy et Allard, 2023), et à soutenir leur raisonnement, à condition d'apprendre quelques règles d'usage (Allard et Cavelier, 2020), comme ne pas effacer, pouvoir barrer, etc.

Ces brouillons, qui peuvent prendre le statut d'« écrit privé », constituent des traces de l'activité de l'élève à partir desquelles nous pouvons chercher à comprendre comment les élèves agissent lorsqu'ils résolvent des problèmes. Pour les analyser, nous emploierons le terme de « dessin », qui est suffisamment large pour englober toutes les représentations graphiques utilisées par les élèves.

1.4. Une catégorisation de dessins

Pour analyser les productions des élèves, nous nous appuyons sur la catégorisation de dessins que nous avons produite (Allard et Cavelier, 2020 ; Moussy et Allard, 2023).

La première catégorie comporte des **dessins figuratifs sans mise en relation des données** (cf. figure 1). Ces dessins peuvent être utiles en début de scolarité parce qu'ils constituent un support pour soutenir la mémoire et raconter une histoire. Mais ils présentent peu d'intérêt dans la résolution d'un problème et, bien qu'ils ne soient plus attendus à partir de la fin de primaire, des élèves souvent « faibles » continuent pourtant parfois à les produire pour montrer qu'ils sont en activité.

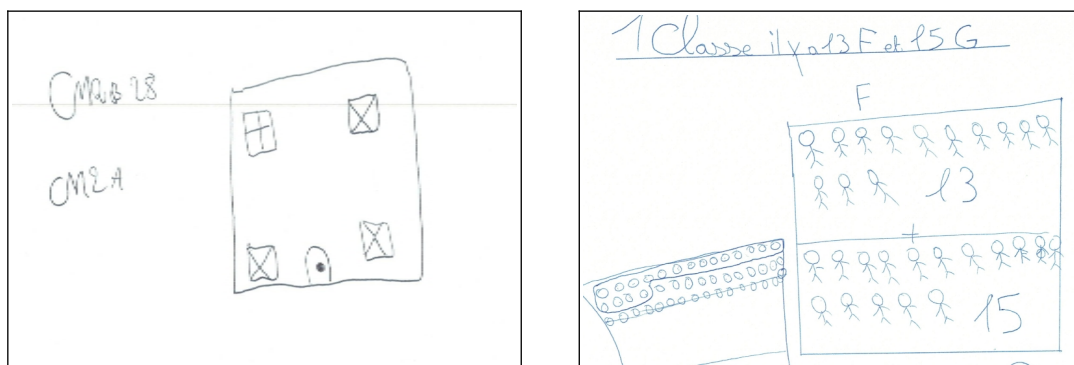


Figure 1 : Des exemples de dessins figuratifs pour le problème de l'école Jacques Prévert.

La deuxième catégorie, que nous appelons des « dessins MER » (cf. figure 2), pour « **dessin avec des Mises En Relation de données** », révèle une utilisation des signes graphiques spontanément mobilisés par les élèves, et souvent peu conventionnels. Les élèves, par exemple, entourent des nombres (nombres dans des bulles) ou mettent en relation des nombres grâce à des flèches au-dessus desquelles figurent parfois une relation ($+5$, $\times 7$, etc.). Ces signes, qui ne sont pas le résultat d'un apprentissage spécifique, proviennent parfois d'une rencontre en dehors du système scolaire ou d'une utilisation fréquente par certains enseignants. Ces signes peuvent être interprétés de façons différentes par un élève ou une classe sans l'être par d'autres. Ils sont alors reconnus par certains élèves comme des outils pouvant être mobilisés dans des situations différentes de celles dans laquelle ils ont été rencontrés.

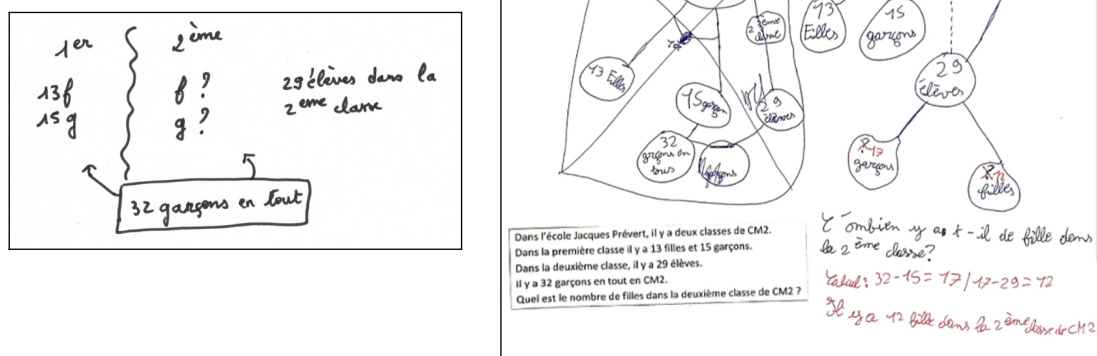


Figure 2 : Des exemples de dessins MER pour le problème de l'école Jacques Prévert.

La troisième catégorie (cf. figure 3) est composée de **dessins MER conventionnels**, c'est-à-dire avec des règles d'usage. Ces derniers sont partagés par une plus grande communauté que la classe, l'établissement, le système scolaire. Ces dessins nécessitent un apprentissage pour ce qui est du codage (sens des accolades, de la juxtaposition des segments, etc.). Les schémas en barre en sont un bon exemple (Consultant et Polotskaia, 2010 ; Auquier et al., 2018), même si l'usage des accolades, la matérialisation de l'inconnue peuvent varier d'un schéma à un autre. Il est à noter que pour produire ce genre de dessins, il est nécessaire d'avoir déjà fortement réorganisé les données.

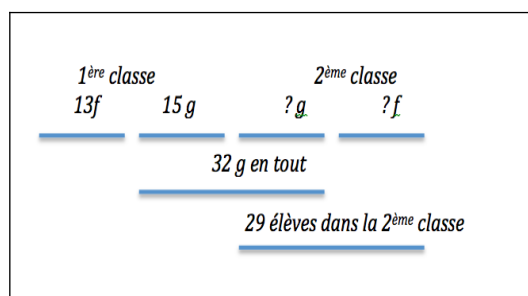


Figure 3 : Exemple de dessin MER conventionnel pour le problème de l'école Jacques Prévert.

Ces trois types de représentations graphiques sont empruntés par les élèves, voire mixés, et donnent à voir la manière dont les élèves peuvent mettre en relation les données d'un problème, avant la résolution totale du problème et la production d'une réponse. Elles peuvent éventuellement nous informer sur la représentation mentale du problème que les élèves se sont construite.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons rapidement le dispositif spécifique mis au point avec les enseignantes dans le cadre du LéA.

2. Un dispositif spécifique pour apprendre à partir de résolution de problèmes

Notre dispositif est constitué, d'une part, de séances de résolution de problèmes arithmétiques complexes et, d'autre part, en amont de ces séances, d'un entraînement au calcul et à la résolution de problèmes arithmétiques basiques, par l'intermédiaire d'un carnet de calculs et

d'un carnet de problèmes dans lesquels les élèves conservent la mémoire de ce qui a été fait (cf. annexe 1). Ces deux types d'entraînements nous semblent pouvoir, d'une part, faciliter la reconnaissance des problèmes basiques présents dans les problèmes complexes à résoudre et, d'autre part, renforcer les connaissances des techniques opératoires et contribuer à donner du sens aux égalités équivalentes « $a + ? = b$ » et « $b - a = ?$ ».

Le dispositif mis en place pour les séances de résolution de problèmes arithmétiques complexes comporte plusieurs phases articulant à la fois des moments collectifs d'oral et des moments individuels où les élèves travaillent à l'écrit. Nous rappelons ci-dessous les principales phases de ce dispositif décrit dans Allard et Cavelier (2020).

1^{re} phase, collective orale. La lecture de l'énoncé est effectuée par l'enseignant, ce qui décharge les élèves du déchiffrement de l'énoncé. Par ailleurs, à ce moment-là, les élèves ne disposent d'aucun support écrit ni de stylo, ce qui permet, en retardant le moment de la recherche, de favoriser l'immersion dans le contexte et la création d'images mentales, et aussi de retarder et d'éviter que les élèves ne se jettent sur les calculs avec les nombres de l'énoncé.

2^e phase, collective orale. Cette phase permet de lever des implicites liés au vocabulaire ou à la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème, qui peuvent être un frein à la construction d'une représentation adaptée. Par des questions telles que « De quoi ça parle ? », « Y a-t-il seulement des garçons dans la classe ? », « Les filles sont-elles des élèves ? », « Un garçon est-il un élève ? » ou « Qu'est-ce que l'on cherche ? », l'enseignant aide les élèves à se représenter mentalement la situation sans « tuer » le problème. Ces questions visent à permettre aux élèves de garder en mémoire des éléments du contexte et de mettre en relation les informations données avec celles que l'on cherche.

3^e phase, individuelle. Après une 2^e lecture de l'énoncé du problème par l'enseignante, les élèves ont pour tâche de prendre sur une feuille blanche (brouillon) des notes sur l'énoncé qui devraient aider, en l'absence du texte, à se souvenir du contexte et à mettre en relation les nombres de l'énoncé et la question du problème.

4^e phase, collective. Une mise en commun de brouillons est organisée. L'enseignante choisit des écrits qui présentent des oublis de nombres ou montrent des relations entre les informations du problème qui peuvent prêter à confusion. Par exemple, pour le problème de l'école Jacques Prévert, les élèves interprètent souvent l'information « 32 garçons » comme correspondant au nombre d'élèves de la deuxième classe. Elle peut également sélectionner des écrits révélant une absence de qualification des nombres, au sens de Houdement (2011), pour qui

[qualifier] revient à savoir dire (ou se dire) quelle grandeur contextualisée est associée au nombre étudié, que ce nombre soit donné par l'énoncé ou issu d'un calcul, et constitue une connaissance que les élèves possèderaient ou devraient posséder pour résoudre des problèmes arithmétiques (Houdement, 2011, p. 74).

Cette phase d'étude des écrits des élèves a pour objectif de consolider ou modifier la première représentation que les élèves ont pu se construire et, en même temps, de montrer l'usage de certains signes pour mettre en relation les données et inconnues du problème.

5^e phase, individuelle, puis en groupe. Nous laissons ensuite un court temps individuel de manière à offrir une occasion supplémentaire aux élèves de revenir sur ce qu'ils ont écrit sur leur brouillon : par exemple noter des données manquantes, ou encore de revisiter des relations qui n'étaient pas encore saisies. Les élèves utilisent à ce moment

une autre couleur (pour compléter leur brouillon), ce qui nous permet d'identifier les signes mobilisés avant la mise en commun et de voir quelles modifications sont apportées au brouillon. Avant de résoudre le problème en petit groupe, les élèves le résolvent individuellement.

6^e phase, collective. Des affiches élaborées par les groupes les plus rapides sont d'abord présentées, puis l'enseignant effectue une synthèse, orale autour de trois axes, qui pourrait constituer une sorte d'institutionnalisation, mais qui ne porte pas uniquement sur des contenus mathématiques :

- les règles d'usage du brouillon (Allard et Cavelier, 2020) : il s'agit bien d'un écrit privé qui ne constitue pas un écrit de communication, mais sur lequel il est possible de raturer ou de conserver les essais, mais en aucun cas l'élève ne peut effacer ;
- les connaissances mathématiques, comme les relations entre opération et opération inverse ; par exemple, ajouter quelque chose à 15 pour trouver 32 revient à soustraire 15 à 32 ;
- l'usage de signes et symboles : trouver un signe pour étiqueter l'inconnue (« ? », ou « ... », ou une lettre, etc.) et trouver des symboles pour contribuer à enrichir le répertoire des usages de divers éléments graphiques et leur donner une signification (ligne fermée pour entourer, flèche pour matérialiser les relations entre les données numériques, etc.). Une attention particulière est portée sur l'importance des « qualifications » (Houdement, 2011) pour ne pas perdre le « fil de l'histoire » et pour pouvoir avancer des arguments pragmatiques.

Une affiche est ensuite construite par l'enseignante (cf. annexe 2) : elle comprend certains des éléments ci-dessus et un exemple de résolution mettant en évidence les relations entre les données du problème. L'ensemble aide à garder la mémoire des problèmes complexes rencontrés et de leur résolution.

Nous présentons dans le paragraphe suivant les quatre problèmes proposés aux élèves.

3. Les problèmes complexes proposés et leur analyse

Trois des problèmes que nous avons appelés « le problème de l'école Jacques Prévert », « le problème des paniers de fruits », « le problème des parkings » sont issus de la ressource co-construite avec les enseignantes de notre LéA (Allard et Cavelier, 2020). Ces dénominations, qui ne sont pas mentionnées lors de la première phase du dispositif, mais lors de la 6^e phase, peuvent permettre aux élèves, qui les ont rencontrés deux années de suite, de les citer plus aisément et d'en conserver un souvenir. Ces problèmes présentent des contextes et des nombres différents mais conservent les mêmes structures mathématiques.

En 2021-2022, après avoir travaillé ces trois problèmes à raison d'un par semaine, nous avons proposé un quatrième problème, appelé le « le problème des verres ». L'objectif était d'observer dans quelle mesure les élèves parvenaient à mobiliser et adapter les connaissances acquises lors des situations précédentes. Ce problème comportait moins de données numériques que les précédents, mais exigeait une interprétation des informations afin de reconnaître des structures mathématiques similaires. Parallèlement, au cours des six semaines de la période allant de novembre à décembre, les élèves ont également été confrontés à d'autres problèmes complexes présentant des structures mathématiques différentes.

Le problème ci-dessous est le premier problème complexe de l'année proposé aux élèves.

Le problème de l'école Jacques Prévert

Dans l'école Jacques Prévert, il y a deux classes de CM2. Dans la première classe il y a 13 filles et 15 garçons. Dans la deuxième classe, il y a 29 élèves. Il y a 32 garçons en tout en CM2. Quel est le nombre de filles dans la deuxième classe de CM2 ?

Ce problème complexe s'inscrit dans le champ additif et se compose de problèmes basiques de type partie-partie-tout, impliquant soit la recherche du tout, soit celle d'une partie du tout. (Vergnaud, 1990).

Sans être exhaustives, nous proposons deux procédures de résolution, qui illustrent différents choix possibles de sous-problèmes basiques à résoudre, et mettent en évidence la question du problème et les questions des sous-problèmes.

Une première procédure consiste à construire et à résoudre le premier sous problème (**ss-pb 1**) pour déterminer le nombre d'élèves dans la première classe, puis à construire le deuxième sous-problème (**ss-pb 2**) pour déterminer le nombre total d'élèves des deux classes ($28+29=57$), puis à construire un troisième sous-problème (**ss-pb 3**) pour obtenir le nombre de filles total sur les deux classes ($57-32$), et enfin à résoudre le quatrième problème basique (qui permet de répondre à la question du problème), en retranchant le nombre de filles de la première classe pour obtenir le nombre de filles dans la deuxième classe. Nous avons constaté que cette procédure n'est pas majoritaire et les quelques élèves qui ont essayé l'ont abandonnée.

Procédure 1	Filles	Garçons	Élèves en tout
Première classe	13	15	Question ss-pb 1
Deuxième classe	Question du problème		29
Total	Question ss-pb 3	32	Question ss-pb 2

Tableau 1 : Procédure 1 pour le problème de l'école Jacques Prévert.

Une deuxième procédure consiste à construire le premier sous problème (**ss-pb 1**) qui permet d'abord d'obtenir le nombre de garçons dans la deuxième classe en retranchant les 15 garçons de la première classe aux 32 garçons en tout dans les deux classes, puis à construire et à résoudre le second problème basique (qui permet de répondre à la question du problème) en retranchant aux 29 élèves de la deuxième classe le nombre de garçons de la deuxième classe, obtenu par le calcul précédent. Nous avons constaté que cette procédure est spontanément utilisée par les élèves de notre LéA.

Procédure 2	Filles	Garçons	Élèves en tout
Première classe	13	15	
Deuxième classe	Question du problème	Question ss-pb 1	29
Total		32	

Tableau 2 : Procédure 2 pour le problème de l'école Jacques Prévert.

Cette deuxième procédure nécessite la construction d'un sous-problème seulement, alors que la première nécessite celle de trois sous-problèmes. Cependant, dans la deuxième procédure, le premier sous-problème nous semble être le plus difficile à construire par les élèves. En effet, l'expression « 32 garçons en tout » constitue les 15 garçons de la première classe et le nombre

inconnu de garçons de la deuxième classe, et nécessite de traiter à la fois des informations de la première et de la deuxième classe.

Le problème des paniers de fruits

Sur une table, il y a deux paniers de fruits, un panier rouge et un panier vert. Ces paniers contiennent des pommes et des oranges. Dans le panier rouge, on compte 12 pommes et 17 oranges. Dans le panier vert, il y a 33 fruits. On compte 30 pommes en tout dans les deux paniers. Combien d'oranges y a-t-il dans le panier vert ?

Ce deuxième problème complexe est du point de vue sémantique, plus difficile que le problème de l'école Jacques Prévert. En effet, le terme « élèves » renvoie à deux catégories « filles » et « garçons » alors que le terme « fruit » ne se réduit pas à « pommes » et à « oranges », et il n'est pas exclu que le panier puisse contenir des bananes. Par conséquent, nous supposons qu'il est possible que ce contexte rende la représentation mentale du problème plus délicate. Une procédure possible de ce problème est présentée dans le tableau ci-dessous, et correspond à celle effectivement observée dans les classes.

Procédure	Pommes	Oranges	Fruit
Panier rouge	12	17	
Panier vert	Question ss-pb 1	Question du problème	33
Total	30		

Tableau 3 : Procédure pour le problème des paniers.

Le problème des parkings

Il y a deux parkings dans le parc d'attractions, le parking A et le parking B.

Sur le parking A, il y a 153 places pour les voitures et 97 places pour les motos.

Sur le parking B, il y a 300 places pour tous les véhicules (voitures et motos). Dans les deux parkings, il y a en tout 320 places pour les voitures.

Combien de places y a-t-il pour les motos dans le parking B ?

Procédure	Places voitures	Places motos	Total places
Sur parking A	153	97	
Sur parking B	Question ss-pb 1	Question du problème	300
Sur les deux parkings	320		

Tableau 4 : Procédure pour le problème des parkings.

Le problème des verres

Deux verres identiques contenant la même quantité de liquide sont posés sur la table. Dans le verre bleu, il y a 19 cL d'eau et 6 cL de sirop. Dans le verre rouge, il y a de l'eau et du sirop. Jessica sait qu'elle a utilisé 15 cL de sirop pour les deux verres. Quelle est la quantité d'eau et la quantité de sirop dans le verre rouge ?

L'expression « verres identiques contenant la même quantité de liquide » constitue une donnée du problème qui n'est pas numérique mais qui combine à la fois une information « qualitative » (« verres identiques ») et une information « quantitative » exprimée sous une forme littérale (« même quantité de liquide »). La compréhension de cette formulation suppose un travail

d'inférence de la part des élèves et est susceptible de constituer un obstacle supplémentaire (Goulet et Voyer, 2023).

Pour résoudre le problème, il est nécessaire de considérer le sous-problème (**ss-pb1**) consistant à déterminer la composition totale du verre bleu. Dans le problème de l'école Jacques Prévert, et selon la procédure adoptée par les élèves, ce sous-problème n'était pas systématiquement construit. En effet, l'information « 29 élèves dans la deuxième classe » était fournie, alors que dans le problème des verres, l'élève doit interpréter les expressions « verres identiques », et « même quantité de liquide dans les deux verres » pour construire un problème basique visant à obtenir la composition totale du verre bleu. Ensuite, pour obtenir les deux réponses attendues, les élèves doivent résoudre deux problèmes basiques. Le premier consiste à déterminer la quantité de sirop dans le verre rouge. Ce problème nous semble également être difficile à construire car il mobilise des informations relatives aux deux verres. Le deuxième concerne la quantité d'eau dans le verre rouge. Une procédure est représentée dans le tableau ci-dessous.

Procédure	Eau	Sirop	Total liquide
Dans le verre bleu	19 cL	6 cL	Question ss-pb 1
Dans le verre rouge	Question du problème	Question du problème	Réponse ss-pb 1
Dans les deux verres		15 cL	

Tableau 5 : Procédure pour le problème des verres.

Les contextes de ces quatre problèmes sont proches du vécu des élèves. Cependant, leur résolution n'est pas toujours aisée. Nous faisons l'hypothèse que le dispositif mis en place pourrait faciliter l'identification des problèmes basiques sous-jacents et que l'utilisation du brouillon pourrait constituer une aide pour s'appropriier et mettre en relation les données du problème et ce que l'on cherche. Nous nous proposons dans la suite d'analyser des écrits d'élèves et de montrer comment ces derniers mobilisent et adaptent leurs connaissances lorsqu'ils sont confrontés sur un temps long à la résolution des problèmes ci-dessus.

4. Données recueillies

Notre corpus entier est constitué des brouillons recueillis pendant 4 ans dans 15 classes composées en moyenne de 22 élèves. Pour cet article, nous avons choisi de présenter une analyse qualitative qui porte sur des brouillons d'élèves de CM2.

4.1. Choix de l'enseignante

Depuis 2019, les enseignantes de REP+ (Réseau d'Éducation Prioritaire Renforcé) de Champigny engagées dans notre LéA mettent en œuvre le dispositif présenté précédemment. Nous nous sommes intéressées aux élèves de CM2 de la classe d'Anouck, enseignante expérimentée (plus de 12 ans d'expérience) en REP+. Anouck, habituée au dispositif depuis sa création, travaille en classes double niveau depuis le début de l'expérimentation. Elle suit ainsi ses élèves pendant deux ans. Sa classe, en 2020-2021, est composée de 9 élèves de CM1 et de 11 élèves de CM2. En 2021-2022, les 9 élèves de CM1 sont alors en classe de CM2. Nous nous proposons dans la suite de cet article d'analyser les productions de certains d'entre eux.

4.2. Choix des élèves

Nous nous sommes appuyées sur le problème de l'école Jacques Prévert pour choisir les élèves à suivre. En 2021-2022, parmi les 9 élèves de CM2, seuls 7 étaient présents aux quatre problèmes précédemment évoqués. Parmi les 7 brouillons recueillis, deux grandes catégories se dégagent : d'une part ceux contenant des dessins de type MER avec ou sans obtention de la réponse (quatre brouillons) ; d'autre part ceux présentant une prise d'informations très lacunaire et des dessins à caractère figuratif (trois brouillons). Afin d'affiner notre choix des élèves à suivre, nous avons examiné les productions sur l'ensemble des autres problèmes proposés. L'analyse des dessins de type MER et de la résolution des problèmes nous a conduites à nous concentrer sur les productions de Sarah et de Nina, qui montrent des évolutions différentes au fil des problèmes.

Pour analyser les brouillons, nous avons cherché à repérer, d'une part, des éléments qui portent sur l'usage de l'écrit et l'usage du brouillon, et plus précisément :

- Le brouillon comporte-t-il avant la mise en commun (3^e phase du dispositif) des dessins MER rendant lisibles les sous problèmes basiques à traiter, à l'aide de signes graphiques (flèches, lignes fermées, « ? », etc.) ?
- Les élèves modifient-ils leur brouillon après la mise en commun (5^e phase du dispositif) en le complétant ou en recopiant un dessin MER présenté au tableau ? Ce qui pourrait signifier que les élèves ont du mal à identifier comment modifier leurs propres productions, et qu'ils préfèrent adopter un dessin MER qui leur semblerait peut-être avoir été validé par l'enseignant. Le changement de couleur imposé aux élèves lors de cette phase pour compléter leur brouillon nous permet d'identifier les signes mobilisés avant la mise en commun (en bleu) et de voir quelles modifications sont apportées au brouillon (en noir).
- Le brouillon présente-t-il des calculs barrés, de multiples essais, etc. ? Ce qui montrerait que le brouillon est utilisé comme une aide à la résolution.

D'autre part, la présence ou non de connaissances construites au fur et à mesure des problèmes rencontrés, comme :

- la matérialisation de l'inconnue par un signe : « ? » ou « ... » ou un espace, dans des dessins ou dans des calculs ;
- la qualification des calculs intermédiaires ;
- l'équivalence de l'addition à trou et de la soustraction « $a + ? = b$ » et « $b - a = ?$ » vue dans les carnets de calculs ;
- les modes de calculs utilisés (en ligne, en colonne, etc.).

Pour des raisons de lisibilité, les brouillons des élèves que nous présentons ci-dessous ont été recopiés avec les deux couleurs imposées afin de permettre aux lecteurs de distinguer les éléments produits avant la mise en commun (en bleu) et après la mise en commun (en noir). Enfin, chaque brouillon a fait l'objet d'une reconstitution chronologique qui nous semblait la plus vraisemblable (en rouge sur les brouillons).

5. Analyse des brouillons de deux élèves

Nous procédons à l'analyse successive des productions de Nina et de Sarah.

5.1. Analyse des productions de Nina : un effet du carnet de problèmes, des apprentissages efficaces, vers une réussite presque complète

Nina et le problème de l'école Jacques Prévert

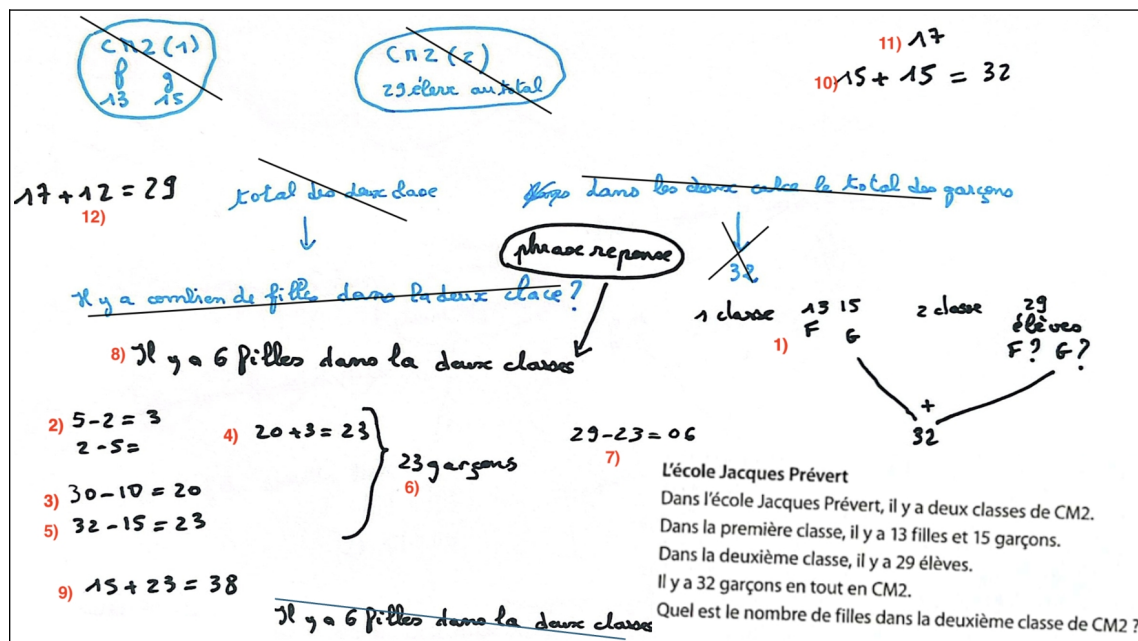


Figure 4 : Nina, problème de l'école Jacques Prévert.

Usage de dessins MER

Pour le problème de l'école Jacques Prévert, la prise de notes en bleu de Nina (cf. figure 4) présente un dessin MER en ce sens qu'il contient des lignes fermées pour isoler les données concernant chacune des deux classes. L'information « Dans les deux classes le total des garçons est 32 » est isolée de la deuxième classe, et la question du problème est écrite avec des mots. Ce premier dessin MER constitue une réorganisation des informations. À la suite de la mise en commun, elle décide de barrer ce dessin MER, et d'adopter un autre dessin MER (1) présenté au tableau, qui intègre des points d'interrogation « ? » pour matérialiser les inconnues du problème, des qualifications en abrégé, et des traits obliques (1) pour rendre lisible un sous-problème basique calculable. Cette représentation graphique qui avait également été proposée lors de la mise en commun l'année 2020-2021 semble lui convenir.

Identification des sous-problèmes basiques

Les calculs successifs en bas à gauche de son brouillon (de (2) à (6)) montrent qu'elle a identifié les sous-problèmes arithmétique basiques : trouver d'abord le nombre de garçons dans la deuxième classe, en tentant le calcul de $32 - 15$. Cependant, la technique opératoire de la soustraction n'étant pas maîtrisée (essais (2) (3) (5)), elle obtient 23 garçons dans la deuxième classe (6).

Le calcul (7) en ligne $29 - 23 = 06$ indique qu'elle a bien repéré l'autre problème basique pour trouver la réponse au problème. On peut supposer qu'elle a ensuite calculé $15 + 23 = 38$ (9) et constaté que cela ne correspondait pas à l'information « 32 garçons en tout », ce qui l'a peut-être amenée à barrer tout en bas de son brouillon la phrase « il y a 6 filles dans la deuxième classe ». Les étapes (10) (11) et (12), qui présentent des additions à trou, nous semblent être le résultat du travail de groupe prévu à la fin de la 5^e phase du dispositif.

Connaissances mobilisées

On observe des calculs en ligne, des qualifications dans les résultats intermédiaires (6), un dessin MER plus complet à la suite de la mise en commun. Cette analyse nous laisse penser que Nina avait bien identifié les sous problèmes basiques, mais que ses connaissances en calcul ne lui permettaient pas encore d'obtenir seule la réponse au problème.

Nina et le problème des paniers de fruits

1) $12 + 17 = 30$ pommes

2) $12 + ? = 30$

3) $30 - 12 = ?$

4) $30 - 12 = 18$ pommes dans le 2^e r.

5) $\begin{array}{r} 18 \\ + 12 \\ \hline 30 \end{array}$

6) $18 + ? = 33$

7) $33 - 18 = ?$

8) $\begin{array}{r} 33 \\ - 18 \\ \hline 15 \end{array}$

9) $18 + 15 = 33$

10) Il y a 15 oranges dans le 2^e panier

Les paniers de fruits
Sur une table, il y a deux paniers de fruits, un panier rouge et un panier vert. Ces paniers contiennent des pommes et des oranges.
Dans le panier rouge, on compte 12 pommes et 17 oranges.
Dans le panier vert, il y a 33 fruits.
On compte 30 pommes en tout dans les deux paniers.
Combien d'oranges y a-t-il dans le panier vert?

Figure 5 : Nina, problème des paniers de fruits.

Usage de dessins MER

Pour le problème des paniers de fruits (cf. figure 5), Nina mobilise immédiatement un dessin MER en bleu au centre en haut de son brouillon qui lui semble approprié dans un premier temps au nouveau problème, puis le barre pour le reproduire sur la droite de son brouillon. Dans son dessin MER apparaissent très visiblement les données connues, et les données inconnues qu'elle désigne par « ? ». Cette organisation des données nous permet de lire le premier sous-problème basique à traiter. À la suite de la mise en commun, alors que son propre dessin MER sur la droite nous semblait complet, Nina recopie sur la gauche un dessin MER (1) présenté au tableau, et un peu plus épuré, et qui semble lui convenir.

Identification des sous-problèmes basiques

Son écrit est organisé et ses calculs montrent qu'elle identifie bien les sous problèmes basiques calculables.

Connaissances mobilisées

Elle remobilise tout ce qui a été vu auparavant : des dessins MER, mais également des écritures équivalentes en ligne vues dans les carnets de problèmes, comme « $a + ? = b$ » et « $b - a = ?$ » (cf. annexe 1) pour chacun des sous-problèmes basiques à résoudre. Il semble donc que sa réussite à la résolution de ce problème soit vraiment tributaire de connaissances en calcul, et qu'elle ait su tirer profit de l'entraînement au carnet de calculs et au carnet de problèmes.

Nina et le problème des parkings

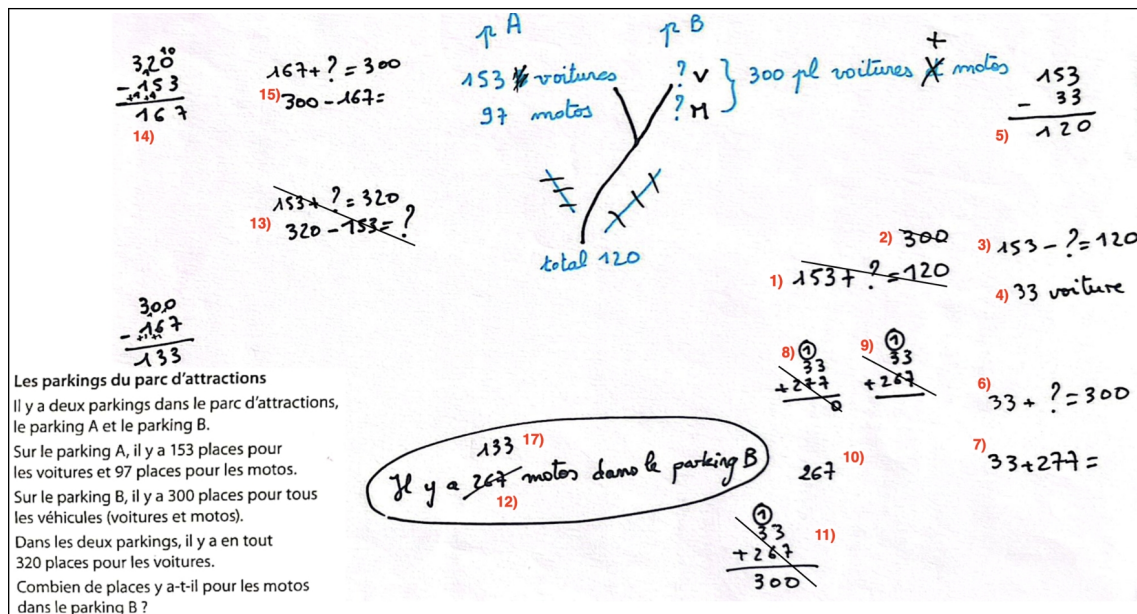


Figure 6 : Nina, problème des parkings.

Usage de dessins MER

Malgré la fréquentation, pendant deux semaines, d'autres problèmes complexes n'ayant pas la structure mathématique du problème de l'école Jacques Prévert et du problème des paniers, Nina semble reconnaître immédiatement dans le problème des parkings (cf. figure 6) un problème déjà rencontré, et produit un dessin MER en bleu dans lequel elle réorganise les informations du problème en identifiant et en matérialisant les inconnues par le signe « ? » sans les qualifier dans un premier temps. À la suite de la mise en commun, elle complète cette fois-ci son dessin MER en qualifiant les inconnues de manière abrégée. Elle matérialise par des traits obliques l'un des sous-problèmes basiques à résoudre, mais sans modifier le nombre « 120 » qu'elle confond avec « 320 ».

Identification des sous-problèmes basiques

Les étapes (1) et (2) sur la droite de son brouillon montrent qu'elle identifie le premier sous-problème basique. Mais la confusion des nombres « 120 » et « 320 » l'amène à écrire en ligne $153 + ? = 120$ au lieu de $153 + ? = 320$. S'apercevant certainement que cette égalité est impossible, elle écrit 300 pour obtenir une égalité non écrite qui pourrait être $153 + ? = 300$. Puis elle barre ces écritures, reconnaissant peut-être alors qu'elles ne correspondent pas au sous-problème basique qu'elle semble avoir identifié.

À l'étape (3), elle transforme l'égalité $153 + ? = 120$, qui n'est pas une opération réalisable à l'école élémentaire, en $153 - ? = 120$. Le résultat erroné (33) du nombre de voitures dans le parking B, sans doute issu d'un calcul mental (4), est ensuite vérifié par un calcul en colonne (5). Ce nombre 33 est ensuite utilisé pour résoudre un autre problème basique qui amène à la réponse au problème en posant le calcul en ligne $33 + ? = 300$ (6). Il est possible que ce calcul ait été effectué mentalement, et l'amène à produire un résultat erroné de « 277 » dans un premier temps (7). Commencant la vérification en colonne (8) et s'apercevant de l'erreur, elle repose le calcul (9) en colonne, affirme que la réponse est 267 (10) puis vérifie en posant le calcul en colonne (11). Elle écrit une phrase réponse avec ce résultat faux (12). Même si le résultat est erroné, son

brouillon montre qu'elle a bien identifié les sous problèmes basiques calculables. Par la suite, elle réitère sa démarche sur la gauche de son brouillon après avoir modifier le nombre 120 en 320 (lignes (13) à (16)).

Connaissances mobilisées

Son brouillon présente des dessins MER reflétant une utilisation progressive d'une représentation graphique pour mettre en relation les données, de calculs en ligne mobilisant des équivalences des égalités « $a + ? = b$ » et « $b - a = ?$ » et de calculs en colonne pour chacun des sous problèmes basiques à traiter. Son brouillon montre qu'elle met en œuvre une véritable démarche de recherche, malgré une confusion ponctuelle dans la prise en compte des données numériques.

Nina et le problème des verres

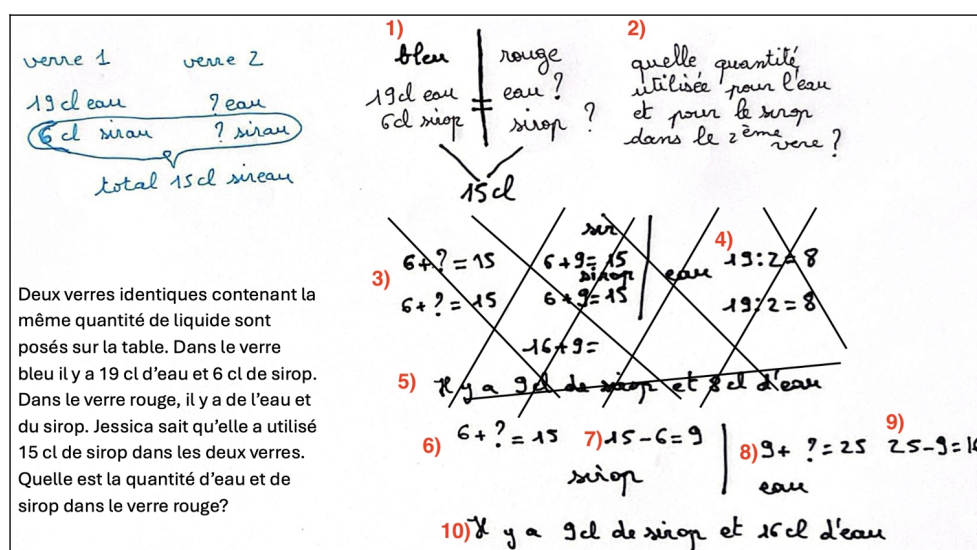


Figure 7 : Nina, problème des verres.

Usage de dessins MER

Enfin, dans le problème des verres, Nina organise les données en produisant un dessin MER en bleu dans lequel les inconnues sont identifiées et matérialisées par des « ? ». L'utilisation de la bulle « fléchée » dans sa prise de note nous permet d'envisager qu'elle a identifié un premier sous-problème basique à traiter : trouver la quantité de sirop dans le verre rouge. Cependant, sa première prise de notes ne rend pas compte de l'information concernant l'égalité des quantités de liquide dans les deux verres, donnée non numérique exprimée sous une forme littérale. Après la mise en commun des brouillons, elle ressent le besoin d'adopter à nouveau un dessin MER présenté au tableau dans lequel l'expression « même quantité de liquide dans les deux verres » est matérialisée par un signe « = » entre les deux verres (1) et elle note la question du problème avec des mots (2).

Identification des sous-problèmes basiques

Le premier calcul (3), écrit en ligne et probablement réalisé mentalement, montre qu'elle a néanmoins identifié un sous-problème basique à traiter consistant à déterminer la quantité de sirop dans le verre rouge et à formuler une première réponse au problème. Son interprétation du signe « = » entre les deux verres, dans le dessin MER recopié, est erronée. Elle semble penser que la quantité d'eau doit être identique dans les deux verres, ce qui l'amène à diviser par deux la

quantité d'eau du verre bleu donnée dans l'énoncé (4). Il est possible que, ayant rencontré au cours des semaines précédentes un problème complexe nécessitant de trouver une moitié comme dans le « problème des billes » dont l'énoncé est le suivant :

Combien de billes vertes Anna a-t-elle ? Anna a 276 billes. 158 billes sont pailletées, les autres sont de couleur rouge ou verte. Elle a le même nombre de billes rouges et vertes,

Nina ait mobilisé la même procédure pour aborder le problème des verres. Par conséquent, sa première phrase-réponse, ligne (5), comporte un résultat faux. Consciente de son erreur, elle barre l'ensemble de ses calculs. Elle reconsidère la situation et reprend alors une partie de ses calculs aux étapes (6) et (7). L'identification du sous-problème basique consistant à déterminer la quantité de liquide dans le verre bleu la conduit à trouver 25, probablement par calcul mental. Elle réutilise ce résultat pour résoudre le dernier sous-problème dans les égalités (8) et (9) et trouve la deuxième réponse au problème.

Connaissances mobilisées

Elle mobilise un dessin MER incomplet, le complète, mais cela ne modifie pas la représentation mentale qu'elle s'est construite du problème. Elle utilise avec aisance des écritures mathématiques équivalentes « $a + ? = b$ » et « $b - a = ?$ ».

Synthèse des productions de Nina

La confrontation à des problèmes complexes de même structure dans des contextes différents sur un temps long semble avoir contribué à enrichir sa mémoire des problèmes. Au fur et à mesure de l'avancement dans la période, les écrits de Nina montrent un enrichissement des traces graphiques, dont des dessins MER qui ne sont jamais figuratifs. Le changement de contexte ne semble pas avoir été un obstacle pour elle. Il est possible que l'entraînement avec les carnets de problèmes ait facilité l'identification des sous-problèmes basiques à traiter dans les problèmes complexes. De même, le travail régulier dans le carnet de calculs a sans doute contribué à renforcer le sens des opérations ainsi que la maîtrise des techniques opératoires.

Cependant, l'introduction d'un nouveau problème qui nécessite d'interpréter une information quantitative exprimée sous une forme littérale, et d'envisager des inférences, semble constituer un obstacle.

5.2. Analyse des productions de Sarah : une mobilisation de certaines connaissances, un temps long nécessaire et un malentendu qui demeure

Sarah et le problème de l'école Jacques Prévert

① classe de CM2
13 fille / 15 garçon

(2) classe CM2
29 élèves

L'école Jacques Prévert
Dans l'école Jacques Prévert, il y a deux classes de CM2.
Dans la première classe, il y a 13 filles et 15 garçons.
Dans la deuxième classe, il y a 29 élèves.
Il y a 32 garçons en tout en CM2.
Quel est le nombre de filles dans la deuxième classe de CM2 ?

= 32 garçon, ~~les filles = ?~~ F ?

2^{ème} classe = ? pour les filles.

15 + ? = 32 / 15 + 17 = 32 / 17 + ? = 29 / 17 + 12 = 29 / 12 fille et 17 garçon

Figure 8 : Sarah, problème de l'école Jacques Prévert.

Usage de dessins MER

Sa prise de notes montre une réorganisation des données dans laquelle figurent le contenu des deux classes, la question du problème et l'inconnue qualifiée et matérialisée par « ? ». Par ailleurs, le « 32 garçons » est isolé des deux classes ; l'accolade semble constituer pour elle un moyen d'exprimer que cette information concerne simultanément les deux classes. Elle modifie peu son dessin MER après la mise en commun.

Identification des sous-problèmes basiques

Ses calculs organisés montrent que Sarah a bien identifié les sous-problèmes basiques à résoudre.

Connaissances mobilisées

Elle mobilise un dessin MER vu l'année précédente, les équivalences des écritures de calculs en ligne. Il est possible que ce problème rencontré l'an passé ait marqué sa mémoire.

Sarah et le problème des paniers de fruits

Les paniers de fruits
Sur une table, il y a deux paniers de fruits, un panier rouge et un panier vert.
Ces paniers contiennent des pommes et des oranges.
Dans le panier rouge, on compte 12 pommes et 17 oranges.
Dans le panier vert, il y a 33 fruits.
On compte 30 pommes en tout dans les deux paniers.
Combien d'oranges y a-t-il dans le panier vert?

Calculs :

1) $12 + ? = 30$
 $12 + ? = 30$
 $17 + ? = 30$

2) $17 + 30 = 47$
16

3) $12 + 30 = 42$
20

4) 2 y a 16 orange 20 pomme X

5) $11 + 23 = 33$ X

6) 11 pomme et 23 orange X

7) 18 pomme et 15 orange

8) $18 + 15 = 33$

9) $30 - 12 = 18$

10) $33 - 17 = 16$ X

11) 18 pomme et 15 orange

Figure 9 : Sarah, problème des paniers de fruits.

Usage de dessins MER

Pour le problème des paniers de fruits, Sarah réorganise les données et dessine deux paniers (cf. figure 9), en indiquant les contenus avec les nombres de l'énoncé sans qualifier cependant toutes les données. Elle formule la question avec des mots, mais ne matérialise pas les inconnues du deuxième panier avec des « ? ». L'expression « =30 » sous la grande ligne fermée entourant les deux paniers pourrait laisser penser qu'elle a identifié un sous-problème basique à résoudre, à savoir : « le nombre de pommes du panier rouge et du panier vert est de 30 pommes ».

Identification des sous-problèmes basiques

Pour autant, son opérationnalisation n'est pas correcte. Elle semble se rappeler d'une démarche qui consisterait à trouver deux nombres comme pour la résolution du problème de l'école Jacques Prévert, mais sans réellement identifier les sous-problèmes basiques en jeu. Ce qui l'amène alors à écrire deux relations (1) contenant deux nombres à trouver : $12 + ? = 30$ et $17 + ? = 30$ sur la droite de son brouillon. Si la première égalité est correcte, l'autre ne l'est pas.

Le manque de qualification semble lui faire défaut. Elle obtient 16 oranges et 20 pommes (4) après avoir effectué ce qui pourrait ressembler à des additions à trou en ligne (2) et (3). Elle abandonne cette démarche et indique d'une croix les lignes à écarter. Sa recherche, par tâtonnements ligne (5), de deux nombres, l'un représentant les pommes et l'autre les oranges du deuxième panier, dont la somme est 33, montre qu'elle n'a pas identifié les sous-problèmes basiques calculables. Elle opte alors pour ces deux nombres : 11 pommes et 23 oranges (6). On ne sait pas si la ligne (7) est obtenue par tâtonnement ou si elle a entendu la réponse dans le travail de groupe. Mais elle écrit par la suite des calculs en ligne (8), (9) et (10) qui laissent penser qu'elle vérifie les solutions de la ligne (7).

Connaissances mobilisées

Sarah mobilise un dessin MER mémorisé et des égalités en ligne comprenant des inconnues, mais les liens entre addition et soustraction ne sont pas encore stabilisés comme le montrent les lignes (2) et (3). Elle ne formalise pas dans un premier temps spontanément les équivalences « $a + ? = b$ » et « $b - a = ?$ ». Son brouillon montre qu'elle fait des essais et que ses connaissances en calcul sont encore fragiles. Il semble que les reformulations orales n'aient pas déstabilisé la représentation qu'elle s'est construite du problème.

Sarah et le problème des parkings

A
153 $\hookrightarrow$ voiture
97 $\hookrightarrow$ Les motos

B ?
300 $\hookrightarrow$ Les voitures et Les motos

1) $320 = 350 \hookrightarrow$ voiture
Compteur de place pour Les motos et Les voiture ?

Les parkings du parc d'attractions
Il y a deux parkings dans le parc d'attractions, le parking A et le parking B.
Sur le parking A, il y a 153 places pour les voitures et 97 places pour les motos.
Sur le parking B, il y a 300 places pour tous les véhicules (voitures et motos).
Dans les deux parkings, il y a en tout 320 places pour les voitures.
Combien de places y a-t-il pour les motos dans le parking B ?

2) $320 + 153 + 97 = 671$
600 $\rightarrow$ 300
70 $\rightarrow$ 35 3)
1 $\rightarrow$ 1
671 $\rightarrow$ 336

336 4)
motos

5) $153 + \quad = 320$
6) $320 - 153 = 167$ voiture
7) $167 + \quad = 300$
8) $300 - 167 = 133$ motos

Figure 10 : Sarah, problème des parkings.

Usage de dessins MER

Malgré la fréquentation d'autres types de problèmes complexes pendant deux semaines, Sarah convoque immédiatement pour le problème des parkings (cf. figure 10) un dessin MER semblable à celui du problème des paniers de fruits, dans lequel elle matérialise cette fois-ci des inconnues qualifiées par le signe « ? ». Elle écrit la question avec des mots. Elle ne modifie après la mise en commun que le nombre total de voitures dans les deux parking (1).

Identification des sous-problèmes basiques

Comme pour les paniers de fruits, sa représentation graphique pourrait encore laisser penser qu'elle a bien identifié le problème basique qui consiste à déterminer d'abord le nombre de voitures dans le parking B. Cependant, les premiers calculs (2) et (3) présents dans l'encadré montrent qu'il n'en est rien et que, comme Nina, elle réactive des connaissances mathématiques

liées à la recherche de la moitié d'un nombre à trois chiffres, notion retravaillée lors de la résolution du problème « des billes ».

Connaissances mobilisées

La mobilisation d'un dessin MER pour réorganiser les données révèle que certains savoirs institutionnalisés sont réactivés, mais semble davantage perçue comme une simple tâche à accomplir plutôt que comme un outil permettant d'organiser les informations et de faire progresser dans la résolution. Les difficultés persistent : Sarah peine à décomposer la situation en sous-problèmes pertinents et a tendance, par automatisme, à réutiliser la dernière opération rencontrée dans d'autres problèmes. Les reformulations orales lors de la présentation des différents brouillons n'ont visiblement pas suffi à modifier sa représentation du problème ni à l'aider à identifier les sous-problèmes essentiels. Les égalités de (5) à (8), qui présentent des égalités équivalentes, nous semblent plutôt provenir du travail de groupe.

Sarah et le problème des verres

The image shows a student's handwritten work for a problem about two glasses. At the top, a MER diagram is drawn with two glasses. The first glass, labeled '1er', contains 'sirop bleu' and '19+6 centilitres de sirop'. The second glass, labeled '2ème', contains 'sirop + l'eau' and a question mark. A bracket connects the two glasses, with the text '15 centilitres de sirop + l'eau' written next to it. Below the diagram, there are several numbered lines of work:

- 1) =
- 2) ~~15 centilitres de sirop + l'eau~~
- 3) quelle quantité d'eau et pour le sirop dans le verre rouge
- 4) ~~19+6=25~~
- 5) ~~?+?=15~~
- 6) ~~19+6=25~~
- 7) ~~25+25=50~~
- 8) ~~6+9=15~~
- 9) ~~15-6=9 sirop~~
- 10) ~~5 cl d'eau~~
~~9 cl sirop~~
- 11) ~~9+16=25~~
- 12) 9 sirop
16 d'eau

At the bottom, there is a text box containing the problem statement in French:

Deux verres identiques contenant la même quantité de liquide sont posés sur la table. Dans le verre bleu il y a 19 cl d'eau et 6cl de sirop. Dans le verre Rouge, il y a de l'eau et du sirop. Jessica sait qu'elle a utilisé 15 cl de sirop pour les deux verres. Quelle est la quantité d'eau et de sirop dans le verre Rouge ?

Figure 11 : Sarah, problème des verres.

Usage de dessins MER

Pour le problème des verres, Sarah organise les données à l'aide d'un dessin MER (cf. figure 11) représentant les deux verres, et utilise une accolade pour isoler l'information « 15 cL de sirop en tout », comme dans le problème de l'école Jacques Prévert. Son dessin ne mentionne pas l'information, qualitative, exprimée sous une forme littérale, concernant la quantité de liquide dans les deux verres. Après la mise en commun, elle ajoute un signe « = » entre les deux verres (1) et réorganise partiellement sa prise de note, lignes (2) et (3), en écrivant la question avec des mots.

Identification des sous-problèmes basiques

Son premier calcul (4) montre une tentative de détermination de la quantité totale dans le verre bleu, mais la succession des essais (lignes (5) et (7)) traduit des hésitations sur la signification du signe « = » dans le dessin MER. Les lignes (8) et (9) montrent qu'elle identifie un autre problème basique calculable consistant à trouver la quantité de sirop dans le verre rouge. Cette démarche la conduit à formuler à la fois une réponse erronée et une réponse juste (10). Après avoir barré sa réponse, elle montre dans son calcul (11) qu'elle a identifié le dernier sous-

problème basique et donc enfin compris le sens du signe « = » dans le dessin MER. Elle fournit les réponses au problème à la ligne (12).

Connaissances mobilisées

Elle mobilise un dessin MER et du calcul mental.

Synthèse des productions de Sarah

Il semble que Sarah ait acquis certaines connaissances mathématiques, notamment l'équivalence entre les opérations « $a + ? = b$ » et « $b - a = ?$ », et qu'elle mobilise l'écrit pour organiser ses calculs. Ses brouillons montrent qu'elle s'appuie sur les problèmes déjà rencontrés pour produire des dessins MER mémorisés et réorganiser les données, mais qu'elle peine encore, malgré les différents moments de reformulation proposés dans le dispositif, à identifier les sous-problèmes basiques à traiter. Il semble qu'elle cherche aussi souvent à réutiliser les stratégies de résolution récemment travaillées, sans toujours parvenir à adapter ses connaissances au nouveau contexte. À la lecture de ses brouillons on peut interpréter qu'un malentendu existe : pour Sarah, « résoudre un problème » consiste à chercher à produire un dessin MER et à appliquer la dernière connaissance apprise, sans en interroger la pertinence dans la situation.

Conclusion

Dans cet article, après avoir présenté un dispositif élaboré dans le cadre d'un LÉA pour soutenir le travail au brouillon lors de séances de résolution de problèmes complexes, nous avons analysé les écrits de deux élèves de CM2 sur une période de six semaines, afin de comprendre la manière dont ils mobilisent, transforment et adaptent leurs connaissances lorsqu'ils sont confrontés à de nouveaux problèmes.

Le dispositif mis en œuvre comprend, d'une part, la résolution, sur un temps long, de quatre problèmes complexes présentant des structures mathématiques similaires et, d'autre part, un usage du carnet de problèmes (comportant des problèmes basiques) et du carnet de calculs. Il est destiné à favoriser l'articulation entre problèmes basiques et problèmes complexes et à contribuer au développement des compétences en calcul et à la compréhension du sens des opérations. Chaque séance de résolution de problèmes complexes alterne des phases orales et écrites, individuelles et collectives, qui favorisent la construction d'une représentation mentale du problème. Notre organisation oblige les élèves à passer par l'écrit, et notamment par des dessins, pour représenter les relations entre les données, identifier les sous problèmes basiques calculables, avant de produire la phrase réponse.

L'étude des brouillons de deux élèves met en évidence une évolution contrastée, dans la mobilisation des dessins MER, pour relier les informations et rendre visibles certains problèmes basiques à résoudre, et dans les connaissances mathématiques, notamment le sens des opérations. Chez Sarah, l'usage d'un dessin MER reste davantage perçu comme une tâche à réaliser et ne déstabilise pas sa représentation initiale du problème. À l'inverse, l'analyse des productions de Nina montre qu'elle s'approprie davantage cet outil, qu'elle utilise pour mettre en relation les données et identifier les sous-problèmes. Par ailleurs, le travail mené avec le carnet de problèmes et le carnet de calculs semble favoriser, chez les deux élèves, une progression dans l'exécution des calculs ainsi que dans la maîtrise du sens des opérations, même si les deux élèves sont parfois tentées de reproduire une démarche récemment utilisée sans ajustement.

Au-delà de l'étude de ces deux brouillons, le dispositif semble favoriser chez les élèves une utilisation de l'écrit plus structurée, permettant de dépasser la simple production de réponses ou de calculs. Les écrits privés, et en particulier les dessins MER, s'enrichissent progressivement. Ce dispositif semble également favoriser la reconnaissance des problèmes basiques à traiter dans les problèmes complexes et renforcer des connaissances en calcul, tout en participant à l'enrichissement de la mémoire des problèmes. Il permet aussi à terme de souligner l'importance de la qualification, notamment des calculs effectués.

Pour les enseignants du LéA, ce dispositif propose une nouvelle manière d'envisager le lien entre la résolution des problèmes basiques et celle des problèmes complexes grâce au carnet de problèmes, contribuant à enrichir la mémoire des problèmes. Par ailleurs, le travail d'analyse fine des brouillons, dont nous avons montré deux exemples, s'est révélé utile pour les enseignantes et leur a permis d'envisager un travail avec les élèves qui porte davantage sur les mises en relation des données que sur ce qui est souvent désigné comme la compréhension de l'énoncé. Ces deux points pourraient constituer des pistes de formation.

Références bibliographiques

Allard, C. & Cavelier, S. (2020). *Résoudre des problèmes en CMI/CM2*. Nathan.

Auquier A., Demonty, I. & Fagnant, A. (2018). Impact des structures sémantiques et de l'introduction des schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 23, 41-68.

Cadet, E-R. (2018). Le rôle du dessin dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux. *Grand N*, 101, 71-92.

Consultant, A., & Polotskaya, B. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques. Deux jeux pour apprendre. *Association Mathématique du Québec*, vol. L (1), 12-28.

Fagnant, A. (2013). Opérations arithmétiques et symbolisations variés. *Éducation & Formation*, 298(1), 23-38.

Fagnant, A. (2018). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction des représentations schématisées par les élèves : quels enjeux faces aux problèmes standards et problématiques ? Dans J. Pilet et C. Vendeira (éds), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (p. 91-110).

Goulet, M.-P. & Voyer, D. (2023). Enseigner la résolution de problèmes écrits de mathématiques au primaire : pratiques déclarées des enseignants des deuxième et troisième cycles. *Formation et profession*, 31(1), 1-18.
<https://dx.doi.org/10.18162/fp.2023.771>

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 67-96.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59-78.

- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.
- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes. *Grand N*, 69, 31-52.
- Monnier, N. (2003). Les schémas dans les activités de résolution de problèmes. *Grand N*, 71, 25-47.
- Moussy, C. & Allard, C. (2023). Que font les élèves sur leur brouillon lorsqu'ils cherchent ? Dans *Actes du XLVIII^e colloque Copirelem* (p. 506-521).
- Nguala, J. B. (2005). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, 76, 45-63.
- Priolet, M. (2014). Enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire : un cadre didactique basé sur une approche systémique. *Éducation et didactique*, 8-2, 59-86.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.

Annexe 1

Des extraits du carnet de problèmes et de calculs

Séquence 1 Séance 1 : carnet de problèmes		
Dans une classe, il y a 14 filles et 15 garçons. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?	$15 + 14 = ?$ $10 + 10 + 5 + 4$ Il y a 29 élèves .	
Dans une classe, il y a 30 élèves et 16 garçons. Combien y a-t-il de filles ?	$30 - 16 = ?$ $16 + ? = 30$ Il y a 14 filles .	
Dans une classe, il y a 31 élèves et 13 filles. Combien y a-t-il de garçons ?	$31 - 13 = ?$ $13 + ? = 31$ Il y a 18 garçons .	
Dans un panier, il y a 17 pommes et 15 oranges. Combien y a-t-il de fruits ?	$17 + 15 = ?$ $10 + 10 + 7 + 5 = ?$ Il y a 32 fruits .	
Dans deux paniers, il y a 38 fruits. Dans le premier panier, il y a 18 fruits. Combien y a-t-il de fruits dans le deuxième panier ?	$38 - 18 = ?$ $18 + ? = 38$ Il y a 20 fruits .	

Séquence 1 Séance 1 : carnet de calculs		
57 + 24	$57 + 20 + 4$ $50 + 20 + 7 + 4$	
85 + 78	$85 + 70 + 8$ $80 + 70 + 8 + 5$ $85 + 75 + 3$	
62 + 48	$62 + 40 + 8$ $60 + 40 + 2 + 8$ $60 + 48 + 2$	
59 + 63	$59 + 60 + 3$ $50 + 60 + 9 + 3$ $60 + 62$	
129 + 65	$129 + 60 + 5$ $120 + 65 + 9$ $120 + 60 + 9 + 5$ $130 + 64$	
249 + 52	$249 + 50 + 2$ ou $240 + 50 + 9 + 2$ $240 + 52 + 9$ $250 + 51$	

Annexe 2

Affiches réalisées par les enseignants

ECOLE J. PREVERT

13F. 15G. CLASSE 1	?F ?G 29E. CLASSE 2
---	--

→ Ce que je cherche (RESULTAT FINAL)

→ RESULTAT INTERMEDIAIRE = ce qui va m'aider.

Classe 2: $?F + 32G = 29E$

Classe 1: $13F + 15G = ?E$

$\hookrightarrow ?G + 15G = 32G$

LES PANIERS

12P
17O
?F

?P
?O
33F

30P

→ $30P - 12P = 18P$ → Panier vert

→ $33F - 18P = 15O$ → Panier vert

Il y a 15 Oranges dans le Panier Vert

JE CALCULE

$?G + 15G = 32G$

donc $32G - 15G = 17G$

c'est mon résultat intermédiaire

ENSUITE

$?F + 17G = 29E$

donc $29E - 17G = 12F$

Il y a 12 Filles dans la CLASSE 2.

LES VERRES

E: 19cl
S: 6cl

→

E: ?cl
S: ?cl

→ même quantité

Sirop total: 15 cl

• $E? + S? = T?R$ et Sirop 15 = $S?R + 6B$

• $19 + 6 = T?B$

⇒ $15 - 6 = 9 \text{ cl (Sirop R)}$

⇒ $19 + 6 = 25 \text{ cl (T?B = TR)}$ ⇒ $25 = E?R + 9$
 $\hookrightarrow 25 - 9 = 16 \text{ cl}$

Le brouillon à quoi sert-il?

C'est personnel, non corrigé, non noté

Le professeur peut écrire dessus avec ma permission: c'est génial.

Je peux dessiner, faire des essais, des flèches, barrer ... ne pas effacer!

- garder une trace pour se souvenir;
- raconter l'histoire du problème;
- montrer et échanger mes essais avec l'adulte et les camarades.