
RÉSOUTRE UN PROBLÈME PAR AJUSTEMENT D'ESSAIS SUCCESSIFS : QUELS APPRENTISSAGES POUR LES ÉLÈVES ? QUELLE INSTITUTIONNALISATION ?

Stéphane FAVIER¹

Université de Genève

Résumé. Notre intérêt porte sur la résolution de problèmes qui est, elle-même, objet d'apprentissage. Tant les enseignant·es que les chercheur·es rencontrent des difficultés pour identifier les savoirs mathématiques relatifs à la résolution de problème en jeu et enjeu du problème. Dans ces conditions, il n'est pas facile pour les enseignant·es de tirer profit du travail des élèves pour en dégager ce qu'il y aurait à en retenir. Nous abordons cette question en nous intéressant spécifiquement aux problèmes qui peuvent amener les élèves à produire une résolution par ajustements d'essais successifs. Cet article est principalement à destination des enseignant·es et des formateur·ices d'enseignant·es dans la mesure où les analyses fines présentées ici, et issues de données audiovisuelles recueillies dans le cadre de notre recherche doctorale, permettent de mettre en évidence la richesse de l'activité mathématique produite par les élèves ainsi que certaines difficultés rencontrées par les élèves, afin d'explicitier des apprentissages potentiels. Nous terminons cet article en proposant des pistes pour soutenir le travail des enseignant·es, notamment au niveau de la gestion du processus d'institutionnalisation.

Mots-clés. Résolution de problème, essais, ajustements, rétroaction, institutionnalisation.

Introduction

Lorsque les enseignant·es proposent des problèmes considérés comme outils (Coppé et Dorier, 2024 ; Coppé, 1^{er} article de ce numéro spécial), comme par exemple les problèmes utilisés pour introduire une notion mathématique, elles et ils savent clairement quelles connaissances mathématiques leurs élèves sont susceptibles d'investir. La tâche des enseignant·es consiste ainsi à faire avancer les élèves dans un processus d'institutionnalisation vers les savoirs mathématiques visés correspondants. Il n'en est pas de même pour les problèmes considérés comme objet d'apprentissage (*ibid.*), c'est-à-dire ceux dont l'objectif est d'apprendre à résoudre des problèmes (comme, par exemple, les problèmes ouverts, les activités de recherche et de preuve entre pairs, les situations de recherche pour la classe). Si ces problèmes offrent bien l'opportunité aux élèves de réinvestir des connaissances mathématiques et d'augmenter leur culture mathématique (Houdement, 2009), ils devraient permettre également aux élèves de vivre une partie de l'activité mathématique réelle du mathématicien (*ibid.*). Cette hypothèse signifie que les élèves font bien des mathématiques mais on peut se demander lesquelles elles et ils fréquentent et surtout elles et ils apprennent. Ces questions étant très larges à l'échelle de tous les problèmes objets, nous allons tenter d'y répondre pour ce qui concerne les problèmes qui peuvent se résoudre en faisant des essais et des ajustements. Il s'agit d'un type de problème assez classique à l'école primaire qui correspond à la démarche dite d'ajustements d'essais successifs dans la catégorisation proposée par Chanudet et Favier (2021).

¹ stephane.favier@unige.ch

L'objectif de cet article est donc de mettre en lumière la richesse de l'activité mathématique des élèves ainsi que certaines difficultés rencontrées notamment pour ajuster au mieux d'un essai à l'autre, à l'appui d'une analyse fine du travail privé au sens de Coppé (1993) des élèves. Ceci nous amènera à identifier des apprentissages possibles qui constituent le potentiel didactique (Georget, 2009) de ce type de problèmes. Partant de là, nous dégagerons des pistes susceptibles d'aider les enseignant·es à mieux interpréter le travail des élèves et à mieux gérer le processus d'institutionnalisation.

Ainsi, dans un premier temps, nous présentons quelques éléments de la littérature relatifs à la résolution d'un problème par ajustements d'essais successifs. Ensuite, nous explicitons les conditions dans lesquelles ont été recueillies les données dont l'analyse est présentée ici. Nous poursuivons en détaillant l'analyse *a priori* du problème ainsi que les analyses du travail de deux groupes d'élèves. Enfin, nous dégageons des apprentissages possibles relatifs à ce type de problèmes ainsi que des pistes pour soutenir les enseignant·es., notamment du point de vue du processus d'institutionnalisation.

1. Résolution d'un problème par « ajustements d'essais successifs »

Le type de problèmes que nous étudions est susceptible de favoriser l'apparition d'essais et d'ajustements étant donné qu'ils sont proposés dans le cursus scolaire avant que les résolutions d'équations et donc de systèmes d'équations ne soient introduites.

Pour tenter de les résoudre, les élèves doivent (ou devraient) faire un essai, solution potentielle du problème, et confronter cet essai aux données du problème. Si les caractéristiques de cet essai respectent toutes les conditions du problème, l'essai est validé et devient une solution du problème (pas nécessairement la seule), et on dit que cette solution est prouvée par ostension. Sinon les élèves invalident leur essai et, à l'appui d'une interprétation efficiente de la rétroaction (nous revenons plus loin sur cet aspect), ajustent, c'est-à-dire proposent un autre essai plus proche de la solution, voire la solution elle-même. Cet aspect de la démarche — l'ajustement — nous intéresse particulièrement car il permet de supprimer la connotation liée au hasard (Vlassis et al., 2014). On retrouve cet aspect sous le label *Intelligent guessing and testing*, chez Posamentier et Krulik (2009), qui avancent :

*Although this strategy does not sound very mathematical, it is a frequently used strategy. Some books refer to it as "trial and error". But it is more than that! This strategy is extremely powerful and quite sophisticated*² (Posamentier et Krulik, 2009, p. 24).

Ajuster est fréquemment utilisé dans la vie de tous les jours (Elia et al., 2009 ; Posamentier et Krulik, 2009) ce qui nous amène à lui attribuer le statut de pratique sociale de référence (Martinand, 1986). En effet, de nombreuses situations nous amènent à procéder à des ajustements : régler la température de l'eau, préparer une certaine masse d'un ingrédient, accorder une guitare, programmer un robot pour qu'il effectue un déplacement, mettre un meuble de niveau avec des cales, lancer des fléchettes. La liste est loin d'être exhaustive et c'est sans doute parce que les élèves sont confrontés à de telles situations que Stacey (1991) indique que « *guess and check is an intuitive strategy available to all* »³ (p. 6). Dans le même ordre d'idée,

² Notre traduction : *Bien que cette stratégie ne semble pas très mathématique, elle est fréquemment utilisée. Certains ouvrages la qualifient de « essai et erreur ». Mais c'est bien plus que cela ! Cette stratégie est particulièrement efficace et plutôt subtile.*

³ Notre traduction : *devine et vérifie est une stratégie intuitive à la portée de tous.*

l'étude conduite par Elia et al. (2009) montre que c'est la stratégie qui a le plus grand potentiel de réussite. Ces chercheurs expliquent que :

*when students are not explicitly taught any heuristic strategies, trial-and-error may be the only strategy they can use, as it does not entail high cognitive demands and it is widely used in a variety of mathematical and everyday situations*⁴ (Elia et al., 2009, p. 616).

Pour autant, deux obstacles se dressent quant à l'utilisation de cette stratégie (Stacey, 1991) : la difficulté à savoir quoi deviner, c'est-à-dire à faire un essai, et l'identification des contraintes qui peuvent être utilisées pour contrôler un essai.

Sur le plan institutionnel, il est intéressant de noter que cette manière de résoudre des problèmes bénéficie d'une reconnaissance à l'échelle internationale. Citons, à titre d'exemple, le cas des évaluations internationales PISA 2012 (OECD, 2013) qui prévoient le code « *résolution correcte par une méthode d'essais-erreurs (code 23)* » (p. 42) pour analyser les productions des élèves. À l'échelle de la Suisse romande, résoudre des problèmes par ajustements d'essais successifs est un objectif présent dans les programmes, à tous les niveaux de la scolarité obligatoire. Faut-il y voir une difficulté dans cet apprentissage qui nécessite un temps si long ou bien le fait qu'on lui donne de l'importance ?

Aussi, les questions qui guident notre réflexion sont comment les élèves avancent dans leur résolution et comment elles et ils gèrent leurs essais et les ajustements. Ces questions sont d'autant plus légitimes que l'accès au travail des élèves est difficile (pour les enseignant·es et les chercheur·es) et que, très souvent, les productions écrites récupérées à l'issue de la résolution ne renseignent que très peu sur la nature et la richesse de l'activité mathématique. Ceci est d'autant plus problématique que, même si les élèves parviennent à trouver la solution, on se demande toujours ce qu'ils ont pu apprendre. C'est pour toutes ces raisons qu'il est nécessaire d'observer de manière fine et en continu le travail des élèves. Ainsi, pour apporter des éléments de réponse à ces questions, nous allons prendre appui sur une partie de l'étude effectuée dans le cadre de notre recherche doctorale⁵ (Favier, 2022). La section suivante présente les principaux éléments relatifs au recueil des données présentées dans cet article.

2. Recueil de données

Comme nous l'avons dit, nous avons étudié dans notre thèse les processus de résolution que les élèves mettent en œuvre lorsqu'elles et ils sont confronté·es à des problèmes qui se résolvent par ajustements d'essais successifs. Pour cela, nous avons recueilli des données audiovisuelles auprès de six classes différentes : deux classes pour le degré 4P (élèves de 7-8 ans), deux pour le degré 8P (élèves de 11-12 ans) et deux pour la 10^e année (élèves 13-14 ans). En ce qui concerne les conditions de passation, l'enseignant·e de la classe menait la séance dans les conditions habituelles. Les élèves travaillaient individuellement avant d'unir leurs forces par groupe de deux ou trois élèves.

⁴ Notre traduction : *lorsqu'aucune stratégie heuristique n'est explicitement enseignée aux élèves, faire des essais-erreurs est peut-être la seule stratégie qu'ils peuvent utiliser, car elle n'a pas une exigence cognitive importante et elle est largement utilisée dans une variété de situations mathématiques et de la vie de tous les jours.*

⁵ Notre recherche doctorale s'est effectuée dans le cadre du projet financé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique - FNS (subside n° 100019_173105 / 1) : « *La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes* ».

Dans cet article, nous reprenons les analyses du travail de deux groupes d'élèves de 4P (équivalent au CE1) (composés chacun de deux élèves) résolvant le problème intitulé *Jeu de cartes*⁶ :

Chaque carte de mon jeu représente soit un triangle, soit un carré. Je tire au hasard 15 cartes. Je compte tous les côtés des figures dessinées sur les cartes que j'ai tirées et je trouve 49. À ton avis, combien ai-je tiré de triangles et de carrés ?

Pour recueillir des données au plus près du travail des élèves, nous avons équipé un élève de chaque groupe d'une caméra embarquée installée sur sa tête. Ce dispositif nous permet d'avoir des données audiovisuelles de l'espace de travail des élèves avec leur propre point de vue. Cela permet d'accéder notamment à la chronologie complète de leur résolution ainsi qu'aux verbalisations produites au cours de la résolution.

Les démarches mises en œuvre par les élèves sont tout d'abord décrites au travers des essais réalisés, souvent illustrés de photos de la production en cours de l'élève. Ensuite, nous mettons en évidence la validation des essais en relevant ce que font ou disent les élèves et les ajustements réalisés.

Avant de présenter ces analyses, nous allons détailler l'analyse *a priori* de ce problème qui nous permet de mettre en avant le rôle primordial des interprétations des rétroactions du milieu qui sont caractéristiques de ce type de problèmes.

3. Analyse *a priori* du problème

Si nous choisissons d'utiliser les termes de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 2011) pour exprimer la caractéristique principale de ce type de problèmes, nous dirions que les contraintes ou les données du problème offrent un milieu suffisamment antagoniste pour que chaque essai soit suivi d'une rétroaction qui va informer l'élève sur la validité de l'essai. Ceci met en évidence le *caractère rétroactif* du milieu (Hersant, 2010, p. 43). Ce qui fait la richesse de ce type de problèmes est que ces rétroactions ne permettent pas seulement de valider ou d'invalider les essais. En effet, pour se rapprocher de la solution il est nécessaire de dépasser cette seule invalidation. Ainsi, les rétroactions peuvent aussi être interprétées de manière :

- qualitative, c'est-à-dire en déterminant si l'écart est en plus ou en moins ;
- quantitative, c'est-à-dire en déterminant exactement la valeur de cet écart.

C'est l'exploitation de telles interprétations de ces rétroactions par l'élève qui doit lui permettre, théoriquement, d'ajuster de manière pertinente afin de se rapprocher, voire de trouver la solution. Nous illustrons ces différentes interprétations des rétroactions lors de l'analyse *a priori* et les utilisons dans nos analyses des productions des élèves.

Les différentes stratégies suivantes tentent de décrire la pluralité des procédures de résolution par essais, qui peut être induite par la manière d'ajuster et/ou par la manière de faire et de tester un essai. Dans la suite, nous explicitons chacune de ces stratégies en les illustrant avec des exemples.

Caractériser un essai consiste à proposer des valeurs possibles pour chaque grandeur ou quantité inconnue dans le problème. Ces valeurs sont fixées en tenant compte (ou pas) des données du problème qui les concernent. Imaginons par exemple qu'un élève propose comme premier essai

⁶ Ce problème est une adaptation d'un problème extrait des documents d'application des programmes français (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, 2005, p. 7-9).

10 carrés. Il déduit des données du problème, qu'il y a 5 triangles. Le test de l'essai relativement au nombre total de côtés donne 55. Ce nombre étant différent de celui communiqué dans l'énoncé (du fait que 55 est supérieur à 49), il peut déduire qu'il y a trop de côtés donc qu'il faut en enlever. Il y a deux moyens pour cela. Soit on enlève des cartes, soit on remplace des cartes par d'autres.

Enlever des cartes présente l'inconvénient que le nombre total de cartes change ce qui peut constituer un obstacle important. En effet, en procédant ainsi et lorsque le nombre total de côtés visé est atteint, l'élève devra vérifier si le nombre total de cartes est correct. Si tel n'est pas le cas, il risque, selon le même principe, d'ajouter des cartes, etc. Aussi, cette première manière d'enlever des côtés semble peu efficace et est potentiellement source d'erreurs dans le cas d'un élève qui ne vérifierait pas systématiquement si l'ensemble des données est respecté.

Pour enlever des côtés, l'élève peut aussi jouer sur le remplacement de cartes. L'avantage est que le nombre total de cartes peut être conservé si l'élève remplace un certain nombre de cartes par le même nombre d'autres. Pour savoir quelles et combien de cartes il faut remplacer, il faut s'appuyer sur le fait qu'un carré a plus de côtés qu'un triangle. En investissant cette connaissance mathématique, l'élève peut par exemple proposer de remplacer 3 carrés par 3 triangles c'est-à-dire réaliser l'essai 7 carrés et 8 triangles. Si un élève procède ainsi, nous parlerons d'**ajustement de type qualitatif**, que le raisonnement soit verbalisé ou non. Un sous-cas de ce type d'ajustement est l'**ajustement systématique**, qui consiste à faire une série d'ajustements qualitatifs qui diffèrent tous d'une unité, c'est-à-dire, dans notre illustration précédente, en remplaçant un seul carré par un seul triangle pour chaque nouvel essai réalisé. Si l'interprétation de la rétroaction est correcte, cet ajustement systématique conduit nécessairement à la bonne solution mais le chemin peut être long en fonction du problème et du point de départ. D'ailleurs, à propos du point de départ, notons que le premier essai peut être un cas extrême (essai qui ne contient que des carrés ou que des triangles), un cas équilibré entre le nombre de triangles et de carrés ou un cas quelconque (la répartition est déséquilibrée sans être extrême).

Après le test du 1^{er} essai réalisé précédemment (55 côtés au lieu de 49), l'élève peut aussi ajuster en partant du constat qu'il y a 6 côtés en trop donc qu'il faut enlever 6 côtés. Pour cela, il faut s'appuyer sur la connaissance mathématique qu'un carré a 1 côté de plus qu'un triangle. Ainsi, remplacer un carré par un triangle fait diminuer le nombre total de côtés d'une unité. Et pour faire diminuer le nombre total de côtés de 6 unités, il faut remplacer 6 carrés par 6 triangles. Dans ce cas, nous parlerons d'**ajustement de type quantitatif** puisque l'écart quantitatif est utilisé pour déduire, possiblement **en une fois**, la bonne réponse.

Ces trois manières d'ajuster sont envisageables à partir d'un essai qui est défini comme un assortiment de cartes, quel que soit le registre de représentation sémiotique adopté. Une difficulté relative à la manière d'ajuster peut émerger dans le cas d'un essai défini à partir de la répétition d'un motif. En effet, imaginons un élève qui propose l'essai composé de la répétition du motif « 2 triangles et 2 carrés ». Il teste cet essai et trouve donc 52 côtés. Il est possible que l'élève ajuste au niveau du motif en proposant par exemple le motif « 3 triangles et 1 carré » avec une diminution du nombre de carrés puisqu'il y a trop de côtés. Dans ce cas, l'ajustement est contraint par le mode de génération de l'essai — que nous avons appelé le motif — et peut limiter la découverte de la solution.

Les stratégies décrites jusqu'à présent prennent appui sur des essais dont le nombre de cartes correspond aux données du problème et dont les ajustements sont pilotés par le nombre de côtés. Nous allons à présent considérer des stratégies prenant appui sur des essais qui respectent le

nombre de côtés donné dans l'énoncé et dont les ajustements sont pilotés par le nombre de cartes carré ou triangle. Ainsi, nous pourrions imaginer que les élèves comptabilisent le nombre de côtés au fur et à mesure de l'élaboration de l'essai pour arrêter lorsque le nombre total de côtés correspond à celui de l'énoncé. Les élèves qui oublieraient de vérifier le nombre de cartes seraient ainsi amenés à terminer leur recherche d'une manière qu'ils pourraient juger triomphale. Les autres devront interpréter l'écart entre le nombre de figures de leur essai et celui imposé par l'énoncé. Illustrons ceci à partir de l'exemple suivant : un essai totalisant 49 côtés est constitué de 14 figures réparties en 7 carrés et 7 triangles. Pour que le nombre de côtés soit conservé, il s'agit de remplacer un nombre n de cartes ayant au total p côtés par un nombre $n+1$ de cartes ayant aussi p côtés au total. Dans cet exemple, nous mettons toutes les chances de notre côté si nous remplaçons n carrés par $n+1$ triangles. Ceci se traduit par l'équation : $4n = 3(n+1)$ soit $n=3$. Ainsi ce sont 3 carrés qu'il faut remplacer par 4 triangles. Les élèves n'auront pas recours à un tel raisonnement algébrique. Ils sont susceptibles d'y parvenir à partir du dessin des figures s'ils enlèvent un côté à plusieurs carrés (car on ne peut pas les enlever aux triangles) pour constituer une figure supplémentaire. Ils pourraient aussi déterminer ce nombre en procédant par ajustements (organisés de manière systématique ou non) en testant le remplacement de 1 carré par 2 triangles, 2 carrés par 3 triangles, 3 carrés par 4 triangles. Ce type de stratégie impose des exploitations pertinentes de l'écart au but révélé par l'essai c'est-à-dire a minima une interprétation de type qualitatif de la rétroaction.

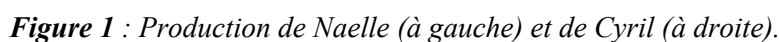
Pour compléter la liste des stratégies basées sur des ajustements d'essais successifs, nous pouvons envisager des stratégies qui reposent sur des essais qui respectent soit le nombre de côtés, soit le nombre de cartes et ce, d'une manière qui ne présente pas de régularité apparente ou qui se passerait du respect d'une contrainte à l'autre. De plus, un enchaînement d'essais qui serait le fruit du hasard est une manière de résoudre le problème imaginable mais forcément peu efficace.

Un autre type de stratégies s'appuie sur la décomposition additive des 49 côtés qui permette de déduire une collection de carrés et triangles. Cette stratégie implique de vérifier ensuite si le nombre de termes correspond bien à celui présent dans l'énoncé. Illustrons cette stratégie à partir d'une des décompositions les plus évidentes à savoir celle mobilisant les propriétés de la numération décimale et qui repose sur la décomposition $49 = 10 + 10 + 10 + 10 + 9$. Ainsi pour obtenir 9, il n'y a pas d'autre choix que de prendre 3 triangles et pour obtenir 10, la seule collection possible est composée de 2 triangles et 1 carré. Il se trouve que cette décomposition amène à une réponse correcte parce qu'elle aboutit à une décomposition additive en 15 termes. D'autres décompositions sont envisageables bien qu'elles ne mènent pas directement à la solution. Par exemple, on peut envisager que : $49 = 40 + 9$ en considérant cette fois-ci 40 comme 10 fois 4 côtés (10 carrés) et 9 comme 3 fois 3 côtés (3 triangles). Cet essai ne comportant que 13 figures n'est donc pas solution du problème. Enfin une autre décomposition peut être proposée : $49 = 7 \times 7$ et comme $7 = 4 + 3$, on en déduit que 49 peut s'obtenir comme 7 fois (1 carré + 1 triangle). Cette décomposition est intéressante pour trouver un essai qui vérifie les 49 côtés mais elle n'est pas solution du problème car elle ne comporte que 14 cartes.

Bien entendu, ces stratégies sont présentées de manière structurée mais les procédures des élèves seront sans doute une combinaison de ces différentes stratégies. Étudions à présent les productions de deux groupes d'élèves.

Ces deux groupes ont été retenus car, d'une part, ils sont représentatifs des difficultés rencontrées par bon nombre d'autres groupes. D'autre part, un autre intérêt réside dans le fait que ces deux groupes ne sont pas restés englués dans ces difficultés. En effet, les analyses montrent qu'ils ont investi différentes connaissances en acte qui leur ont permis d'élaborer un lien entre le remplacement d'une figure par une autre et son effet sur le nombre total de côtés.

Bien que ce ne soit pas le support principal analysé, nous présentons, à titre indicatif, les productions écrites rendues par les élèves à l'issue de leur résolution. Elles permettent de mettre en évidence que ce que les élèves donnent à voir sur leur production reste bien pauvre par rapport à la richesse de leur activité dont nous allons décrire une grande partie dans cette section.



⁷ Repère temporel depuis le début de la résolution.

La production de ce premier essai de Naelle (cf. figure 3) n'a pas été enregistrée. Nous faisons l'hypothèse que Naelle a dessiné une figure de chaque catégorie en comptant au fur et à mesure le nombre de côtés, et en s'arrêtant à 49 côtés.

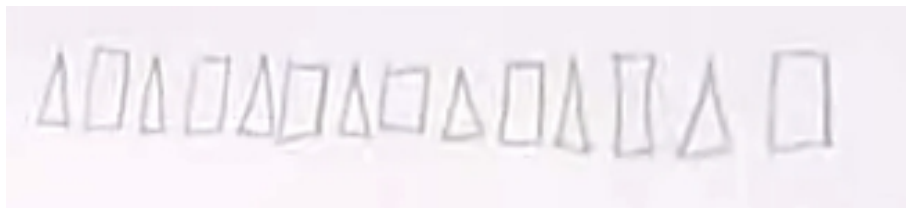


Figure 3 : *Essai 1bis (Naelle seule, 4:45).*

À l'issue de ce premier temps de travail individuel, l'enseignante demande aux élèves de travailler en groupe. Étant donné que Naelle annonce à Cyril qu'elle a trouvé la solution, Cyril compte les côtés de l'essai de Naelle (cf. figure 3). Il en trouve 50 au lieu des 49 que comptent réellement cet essai et propose directement de remplacer le dernier carré par un triangle « parce que là c'est 4 et là 3 ça va faire 49 ». Il ressort clairement que l'interprétation de la rétroaction proposée par Cyril est adéquate, c'est-à-dire qu'il a bien identifié qu'il y a un côté en trop. De plus, il verbalise explicitement ce qui lui permet d'effectuer un tel ajustement quantitatif (tout à fait pertinent s'il y avait effectivement 50 côtés).

Naelle ne tient pas compte de cette idée et recompte les côtés (49). Cyril recompte et trouve la même réponse que Naelle (49). Naelle applaudit et Cyril dit « je dois recopier », ce qui révèle qu'ils valident tous deux cette réponse. C'est durant la copie qu'ils se rendront compte que cet essai ne présente que 14 figures.

Naelle produit ensuite un nouvel essai en remplaçant le dernier carré par un triangle (entouré sur la figure 4).



Figure 4 : *Essai 2 (8:28).*

Elle compte tous les côtés (48) et fait un geste rageur du poing, avant de déclarer « peut-être qu'il faut remplacer aussi un triangle par un carré ». L'invalidation porte sur le nombre total de côtés. L'ajustement proposé n'est pas pertinent puisqu'il ramène à la situation de départ. Cette idée du remplacement d'un triangle par un carré est évoquée en désignant un triangle à remplacer. Cyril surcompte de 4 (les 4 côtés du carré) à partir de 48 et trouve donc 52 ce qui le conduit à invalider ce troisième essai. Par la suite, Naelle efface un carré et dessine un triangle à la place (entouré sur la figure 5). L'ajustement proposé n'est pas pertinent puisqu'il éloigne les élèves de la solution. Contrairement à Cyril précédemment, Naelle ne semble pas disposer des connaissances qui lui permettent de mettre en lien le remplacement d'une figure et son effet sur le nombre total de côtés.



Figure 5 : Essai 4 (9:20).

La recherche de validation de cet essai concerne le nombre total de figures puisque Naelle compte les figures. Elle en trouve 14 et s'exclame « ah ce travail il m'énerve » avant de dessiner un triangle supplémentaire (entouré sur la figure 6).

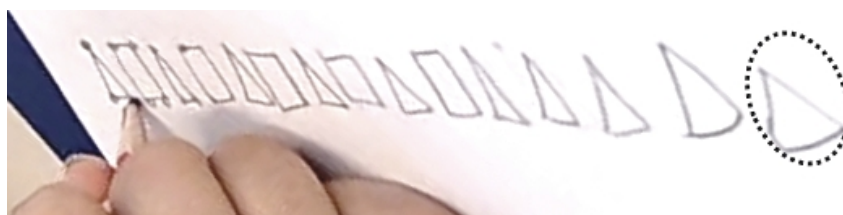


Figure 6 : Essai 5 (9:40).

Cet ajustement est pertinent et s'appuie sur une connaissance beaucoup plus évidente que nous pourrions énoncer de la manière suivante : s'il manque une figure, je dessine une figure supplémentaire. D'ailleurs dans ce cas, Naelle ne recompte pas les figures ce qui laisse penser qu'elle est certaine de l'effet de ce remplacement. Elle compte directement les côtés pour en trouver 50. L'invalidation de cet essai porte là aussi sur le nombre total de côtés. L'ajustement suivant proposé par Naelle consiste à barrer un carré et dessiner un triangle supplémentaire (cf. figure 7).

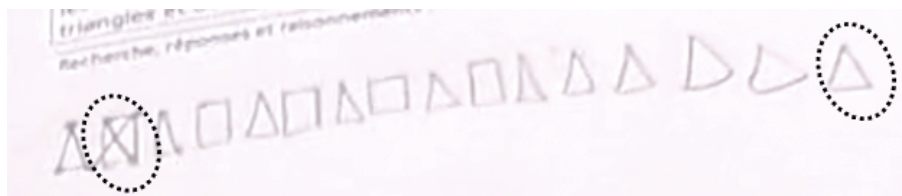


Figure 7 : Essai 6 (10:22).

Cet ajustement est tout à fait pertinent du point de vue du nombre de côtés et permet même de trouver la réponse. Pourtant, Naelle, comptant tous les côtés, en trouve 47. À deux reprises au cours du dénombrement, elle pointe deux sommets pour un seul mot nombre. Cet épisode confirme que Naelle ne met pas en lien un remplacement et son effet sur le nombre total de côtés. Même si l'ajustement est pertinent du point de vue qualitatif, il n'embarque pas la dimension quantitative.

Ensuite, les essais 7, 8 et 9 sont des suggestions évoquées à l'oral seulement. Ils ne sont pas dessinés ni testés. Puis la recherche prend un nouveau point de départ à l'appui de l'essai proposé par Cyril (cf. figure 8).

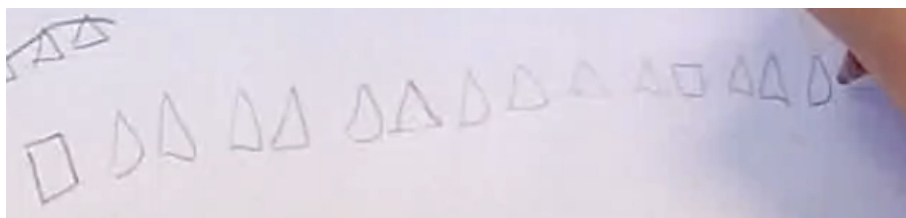


Figure 8 : Essai 10 (22:44).

Les élèves comptent tous les côtés (47). Naelle surcompte de 3 côtés sur ses doigts pour arriver à 50 puis fait un geste de rage, puis elle compte jusqu'à 4 en pointant le dernier triangle et, après un temps de réflexion de quelques secondes, annonce : « je crois que j'ai trouvé ». Elle dessine alors un carré sur le dernier triangle (entouré sur la figure 9).



Figure 9 : Essai 11 (24:46).

Naelle compte tous les côtés (48) et fait encore un geste de rage qui marque l'invalidation de cet essai. Elle compte à nouveau, trouve encore 48 et propose de remplacer un autre triangle par un carré (cf. figure 10).

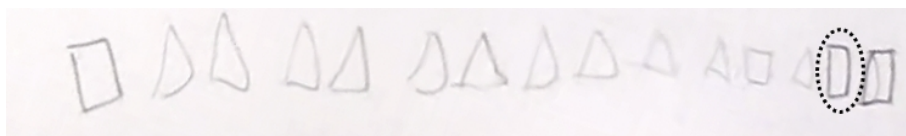


Figure 10 : Essai 12 (26:20).

Elle compte tous les côtés (49) et s'exclame « quarante-neuf j'ai trouvé ». Puis Cyril compte les figures (15) et ils applaudissent. L'essai est validé du point de vue des deux grandeurs en jeu.

Faisons la synthèse de cette description :

Pour les essais 2, 3 et 4, Naelle ajuste en mettant en œuvre le même mode d'action que celui proposé par Cyril (remplacement d'une figure par une autre) mais à partir d'essais où ce n'est pas forcément pertinent. À ce stade nous faisons l'hypothèse que, sur le début de la recherche, Naelle ne met pas en lien le remplacement de figures et l'effet qu'il peut avoir.

À l'essai 6, ce même mode d'action est pertinent et permet d'ailleurs d'obtenir la solution. L'ajustement se fait dans la bonne direction. L'erreur de dénombrement ne permet cependant pas à Naelle de valider cet essai. Le fait qu'elle ne décèle pas l'erreur révèle qu'elle n'a pas idée de l'effet sur le nombre total de côtés du remplacement d'un carré par un triangle. Ainsi, si l'effet du remplacement de figures commence à émerger, cet effet se limite à l'aspect qualitatif et ne concerne pas l'aspect quantitatif c'est-à-dire relativement au nombre total de côtés en plus ou en moins.

Les ajustements des essais 11 et 12 sont dans la bonne direction ce qui confirme que le remplacement de figures est utilisé de façon adéquate du point de vue qualitatif. Ceci étant, avant l'ajustement pertinent de l'essai 11, Naelle s'exclame « je crois que j'ai trouvé » et son geste de rage lorsque le test de l'essai donne 48 indique qu'elle s'attendait vraiment à obtenir la bonne réponse. Le remplacement de figures n'est toujours pas mis en relation quantitativement avec son effet précis sur le nombre total de côtés.

Au fil de ses essais, Naelle semble construire en acte un lien de type qualitatif entre la manière d'ajuster qui consiste à remplacer des figures et l'effet sur le nombre total de côtés. Néanmoins l'aspect quantitatif de ce lien ne semble pas compris, en tout cas, il n'est pas opérationnalisé chez cette élève.

Tout se passe comme si Naelle disposait d'un mode d'action, introduit dans le milieu par Cyril au début du travail de groupe, mais sans en connaître les effets sur le nombre total de côtés. Cela nous semble être en lien avec l'« effet structurant de l'action » dont parle Julo (1995, p. 55). À l'inverse, Cyril dispose à la fois du mode d'action et des connaissances relatives aux effets produits mais il ne les exploite plus après le 1^{er} essai.

Étudions à présent le travail d'un autre groupe d'élèves dont la recherche semble permettre la construction de l'aspect quantitatif.

4.2. Groupe de Solenne et Darell

De la même manière que pour le groupe précédent, la figure suivante présente les productions écrites de Solenne et Darell.

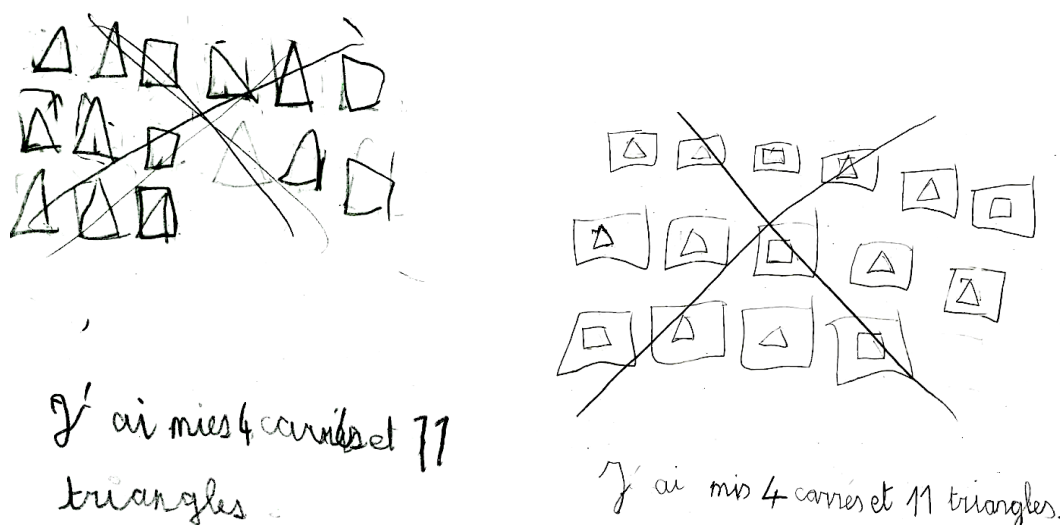


Figure 11 : Production de Darell (à gauche) et de Solenne (à droite).

La recherche effectuée par Solenne et Darell est composée de 23 essais organisés en trois principaux temps. Nous présentons rapidement les deux premiers temps avant de rentrer dans le détail des ajustements du troisième.

Tout d'abord, les essais 1 à 7 sont réalisés à partir du dessin des 15 cartes vierges qui sont chacune complétées par une des deux figures. Notons que ce dessin permet de prendre en charge une des deux données, en l'occurrence le fait d'avoir toujours 15 figures. Le point commun de ces différents essais est qu'ils sont réalisés en effaçant et en ré-écrivant sur l'essai précédent, ce

qui a pour conséquence que les élèves n'ont pas la mémoire des différents essais réalisés, seulement du dernier. Une autre caractéristique commune intéressante à relever est qu'ils sont tous construits à partir de la répétition d'un même motif de n triangles et p carrés. Par exemple, l'essai 3 est fondé sur la répétition de 3 triangles et 1 carré, comme le montre la figure 12.

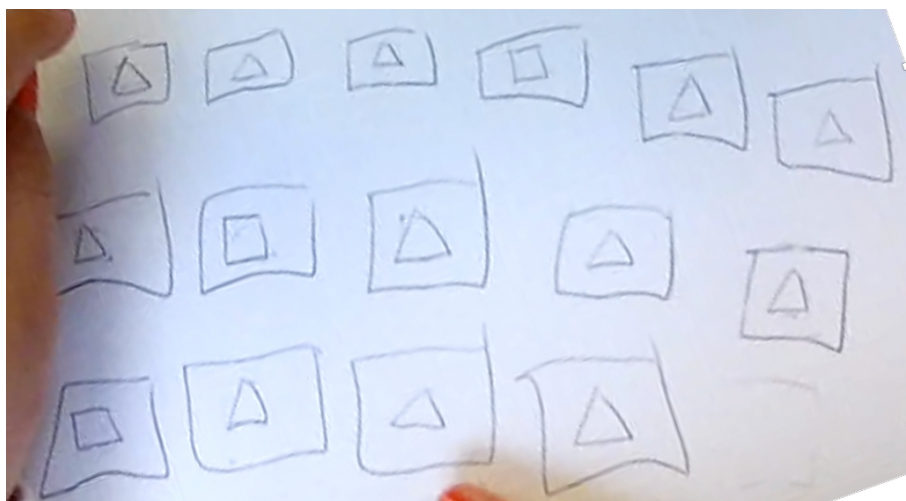


Figure 12 : Essai 3 (8:31).

Les essais sont invalidés sur le nombre de côtés et l'interprétation de la rétroaction ne concerne que l'invalidation, aucune interprétation quantitative ou qualitative n'est proposée par les élèves. D'ailleurs, à la suite du test de l'essai 6 (fondé sur la répétition de 2 triangles et 1 carré), les deux élèves ne comptabilisent pas le même nombre de côtés et Solenne conclut : « c'est pas grave de toutes façons c'est plus ». Cette remarque montre que, pour ces élèves, le fait que la valeur de l'écart au but puisse être exploitée pour proposer un autre essai plus proche de la solution n'est pas acquis ou au moins n'est pas un élément important à prendre en considération pour résoudre ce problème. Sur cette première phase, les ajustements entre chacun des essais portent sur la composition du motif qui est répété. Par exemple, après l'essai 6, les élèves proposent un essai avec la répétition de 2 triangles et 3 carrés. La limite de cette contrainte du respect d'un motif que s'imposent ces deux élèves est indéniable puisque le motif de l'essai 3 aurait pu permettre d'obtenir la bonne réponse à condition de commencer par le carré.

Ensuite, pour les essais 8 à 14, les élèves décident de compter oralement de 4 en 4 jusqu'à un certain nombre puis de 3 en 3 (sans prendre appui sur les cartes vierges dessinées précédemment). Ils effectuent ainsi un double comptage, des figures et des côtés, à l'appui de leurs doigts. Solenne tente tout d'abord de gérer seule le double comptage puis demande l'aide de son camarade. Darell compte les côtés tandis que Solenne compte les figures. Les ajustements portent sur le nombre de carrés, plus exactement, le nombre de côtés correspondants qui est tour à tour de 40, 36, 20 puis 30. La manière de compléter l'essai évolue à l'essai 14 puisque les élèves ajoutent 4 triangles puis à nouveau 1 carré. L'obstacle — ou plutôt la limite — de cette manière d'effectuer les essais est perçue par Solenne qui déclare : « attends je suis perdue mais il faut qu'on écrive combien il y a de carrés et combien de triangles du coup pendant que je compte on sait pas les carrés ni les triangles ». Leur manière d'agir à l'appui des doigts ne leur permet pas de retrouver le nombre de triangles et de carrés de l'essai qu'ils testent dès lors qu'ils ajoutent tantôt des triangles tantôt des carrés.

Enfin, les élèves ont l'idée d'utiliser des jetons pour conserver la mémoire de la composition de l'essai testé. Les essais 15 à 23 sont ainsi réalisés avec des jetons bleus représentant les carrés et

des jetons rouges pour les triangles. Durant les essais 15 à 17, les élèves tentent d'obtenir 49 sans tenir compte de la donnée des 15 cartes, donc de 15 jetons.

Un premier ajustement à relever est celui qui a lieu entre les essais 16 (cf. figure 13) et 17 (cf. figure 14).

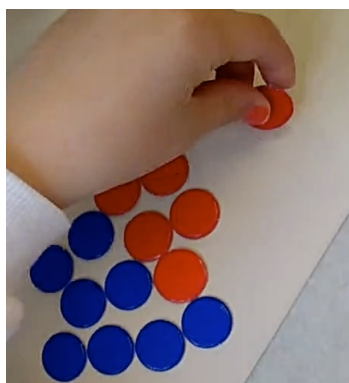


Figure 13 : Essai 16 (30:32).

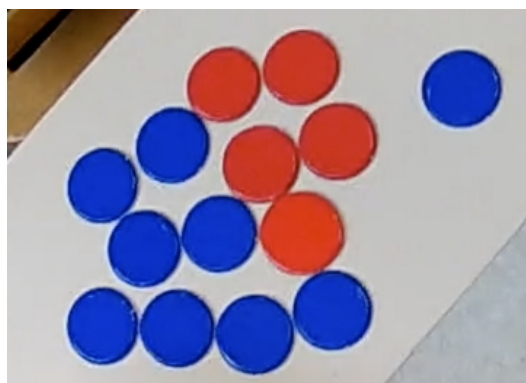


Figure 14 : Essai 17 (31:02).

Après avoir produit l'essai 16, Darell compte les côtés correspondants. Il en trouve 50, ce qui l'amène à invalider cet essai. Puis il propose d'enlever un jeton rouge et de mettre un bleu à la place (autrement dit remplacer un triangle par un carré). Cet ajustement n'est pas pertinent puisqu'il éloigne de la solution d'autant que le nombre total de figures n'est pas vérifié par la suite.

Ils y parviennent, et c'est l'enseignante qui les aide à invalider leur essai en indiquant notamment qu'il ne comporte pas 15 cartes. À la suite de cet épisode, les élèves vont constituer un essai composé de 15 jetons puis ajuster de manière à conserver ces 15 jetons tout en essayant d'obtenir les 49 côtés. La conservation des 15 jetons les amène, de manière assez naturelle, à ajuster en proposant des échanges de jetons.

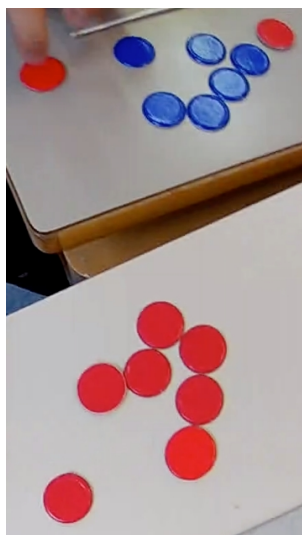


Figure 15 : Essai 21 (38:50).



Figure 16 : Essai 22 (41:04).



Figure 17 : Essai 23 (41:38).

Après avoir constitué l'essai 21 (cf. figure 15), Solenne compte les côtés. Elle en trouve 51. Elle ajuste en remplaçant un jeton bleu par un jeton rouge (cf. figure 16). Elle compte et obtient

50 côtés. Elle procède alors au même échange (*cf.* figure 17) et s'exclame, avant de dénombrer les côtés : « attends ça fait 49 regarde ». Elle confirme son anticipation par le comptage des côtés. Ils comptent ensuite les figures et valident leur réponse.

Les ajustements sont à chaque fois pertinents sur le plan qualitatif. L'effet quantitatif de l'ajustement se construit dans l'enchaînement de ces derniers essais car cela permet à Solenne d'anticiper le nombre total de côtés. La régularité des effets des ajustements des derniers essais semble être repérée par Solenne qui en induit une règle d'action que nous pourrions formuler ainsi : « si je remplace un carré par un triangle, le nombre total de côtés diminue de un ». La question qui demeure est : est-ce qu'après une telle recherche, ces élèves auraient été en mesure de formuler une telle règle ? Cette mise en lien s'exprime ici en acte et l'on perçoit bien l'importance et l'utilité de la formuler.

En synthèse, nous avons constaté qu'au fil de la production de ce groupe, il ressort clairement que la manière d'ajuster évolue. Les ajustements entre chacun de ces essais concernent d'abord la composition d'un motif qui est répété, puis un certain nombre de carrés considérés avant de compléter avec des triangles et finalement les échanges de figures matérialisées par des jetons. Ces manières d'ajuster nous semblent surtout liées aux différentes structurations par lesquelles passe la construction de la représentation du problème (Julo, 1995). Néanmoins, aucune interprétation n'est proposée par ces élèves, seule l'invalidation est l'objet des rétroactions.

Nous faisons l'hypothèse que la répétition du même échange et l'observation du nombre total de côtés correspondant a permis de mettre en lien un remplacement de figures avec son effet sur le nombre total de côtés.

5. Vers des apprentissages potentiels

Si le travail de ces deux groupes est emblématique par sa richesse et par les difficultés que les élèves peuvent rencontrer, il est aussi représentatif du travail d'autres groupes d'élèves, et même d'élèves plus âgées (Favier, 2022).

Une difficulté rencontrée par les élèves consiste à ne pas prendre en compte toutes les données communiquées par l'énoncé du problème. Par exemple, dans son premier essai, Naelle pense avoir résolu le problème car elle compte bien 49 côtés, mais sans prendre en considération le nombre de figures de son essai. Cette difficulté est assez classique, nous n'en dirons pas plus ici.

Une autre difficulté plus intéressante à souligner car sans doute moins évidente à repérer tient au fait que les élèves embarquent des contraintes supplémentaires lorsqu'elles et ils sélectionnent et interprètent les données du problème. Ceci est en lien avec le processus de sélection et d'interprétation des données du problème identifié par Julo (1995). Cette difficulté est incarnée par la contrainte d'un ordre de tirage et même d'un motif à répéter pour élaborer un essai. Cette contrainte est tellement forte qu'elle conduit à structurer la résolution du problème tel le groupe de Solenne et Darell qui ajuste sur la nature du motif à répéter. Une piste à retenir pour les enseignant·es serait de chercher à identifier dans le travail des élèves qui sont bloqué·es si elles et ils s'imposent des contraintes supplémentaires.

Un autre aspect mis en lumière par l'analyse du travail de ces groupes, mais malheureusement non isolé (Favier, 2022), est le fait que l'interprétation de la rétroaction qui suit la réalisation d'un essai se limite trop souvent à la seule invalidation de l'essai. Les élèves ne produisent pas d'interprétation qualitative ni quantitative. La question qui se pose alors est : leur apprend-on à le faire ? donc on peut dégager ici un premier apprentissage potentiel. Cela vient relativiser l'idée

de Stacey (1991) selon laquelle « *guess and check is an intuitive strategy available to all* » (p. 6). C'est sans doute le cas pour une pesée avec une balance ou la mise de niveau d'un meuble par exemple car les ajustements sont moins complexes, du fait qu'ils n'impliquent qu'une seule grandeur. Les problèmes de mathématiques que l'on rencontre dans les classes renferment un niveau de difficulté supérieur car ils demandent de traiter simultanément plusieurs grandeurs. Selon nous, ce qui bloque de telles interprétations des rétroactions est que les élèves ne connaissent pas (tou·tes) *a priori* les relations qui lient les grandeurs qui sont en jeu. Dans le contexte de ce problème, cela correspond au lien entre le remplacement d'une figure par une autre et son effet sur le nombre total de côtés. Nous pensons qu'il est important de développer ce point en formation afin qu'ensuite les enseignant·es puissent anticiper de telles relations au cours de la préparation du problème. Ceci pourrait être précieux aussi pendant la séance, pour qu'elles et ils les exploitent pour permettre aux élèves de réguler leur travail et même pour les mettre en mot avec les élèves dans un processus d'institutionnalisation.

Un motif d'espoir est incarné par la richesse du travail de ces deux groupes. En effet, Naelle semble avoir construit en acte un lien de type qualitatif entre le remplacement des figures et l'effet sur le nombre total de côtés. De son côté, Solenne (et peut-être également Darell) a établi en acte un lien de type quantitatif entre le remplacement d'un carré par un triangle et l'effet sur le nombre total de côtés. Ces élèves ne disposent *a priori* pas de ces connaissances mais parviennent à les construire au fil de leur résolution. Ce qui a permis une telle réalisation est la mobilisation de certains processus inhérents au raisonnement mathématique (Jeannotte, 2015). En effet, cette chercheuse a proposé un modèle du raisonnement mathématique qui s'appuie notamment sur différents processus qu'elle a identifiés dans la littérature comme, par exemple : exemplifier, comparer, identifier une régularité, conjecturer, généraliser, justifier. L'enchaînement des derniers essais de ces deux groupes révèle, selon nous, la mobilisation de processus de comparaison (des ajustements réalisés et des effets obtenus) et de processus d'identification d'une régularité (les fameuses règles qui lient un ajustement et son effet). La régularité perçue est une connaissance en acte, néanmoins c'est bien la résolution du problème qui a créé des conditions favorables. On voit poindre la tâche qui va incomber aux enseignant·es pour ce qui est de favoriser l'explicitation de telles connaissances, ce qui est l'objet de la section suivante.

6. Des pistes pour les enseignant·es

Pour avoir une chance de favoriser les apprentissages potentiels mis en évidence précédemment à l'appui de la richesse du travail des élèves et des difficultés observées, il est indispensable, pour les enseignant·es, d'engager les élèves dans un processus d'institutionnalisation. Ce processus se réalise à un niveau local, **à l'échelle d'un problème**, en cherchant à mettre en mots les connaissances investies en acte au cours de la résolution. Dans le contexte du problème présenté ici, de telles connaissances peuvent prendre la forme de règles en lien notamment avec l'effet que peut avoir le remplacement d'une figure par une autre sur le nombre total de côtés et pourraient par exemple se formuler ainsi :

si je remplace un carré par un triangle, le nombre total de côtés de l'essai va diminuer (ce qui correspond à un lien de nature qualitative) ;

si je remplace un triangle par un carré, alors j'aurai un côté de plus au total dans mon essai (lien de nature quantitative).

Nous avons vu que de telles règles peuvent ne pas être à disposition des élèves mais construites au cours de la résolution. Si on fait preuve de régularité dans la manière d'ajuster, il sera possible

pour les élèves d'observer une régularité dans l'effet produit. Des conjectures pourront ainsi être formulées comme, par exemple :

j'ai fait plusieurs essais en remplaçant un triangle par un carré et j'obtiens à chaque fois un côté de plus au total.

Cette conjecture pourrait (devrait) être justifiée, ce qui permettrait d'engager les élèves dans une activité mathématique riche de recherche de preuve ou au moins de justification.

D'autres connaissances investies sont relatives à la nature de l'interprétation de la rétroaction. Des formulations pourraient être les suivantes :

après avoir proposé un essai, je teste s'il est solution du problème ; si le test de mon essai montre que ce n'est pas le bon nombre de côtés, je peux (dois) me demander s'il manque ou s'il y a trop de côtés. Je peux (dois) aussi me demander combien il manque de côtés ou combien sont en trop. Ceci me permettra de savoir comment mieux ajuster.

Ensuite intervient la question de la manière d'ajuster qui s'appuie sur des connaissances du même type que celles formulées dans les deux sections précédentes. Voici une proposition de formulation :

si je remarque que mon essai n'a pas assez de côtés, je vais devoir remplacer des triangles par des carrés,

pour tendre progressivement vers des formulations de nature quantitative :

mon essai a le bon nombre de figures mais deux côtés de trop, je peux remplacer deux carrés par deux triangles.

Par ailleurs, le processus d'institutionnalisation se déroule aussi **à l'échelle de plusieurs problèmes d'ajustements d'essais successifs** proposés dans des contextes différents afin de permettre un jeu de décontextualisation-recontextualisation (Allard, 2015) des différentes connaissances énoncées précédemment.

Conclusion

Nous espérons avoir montré, au travers de cet article, l'intérêt d'une analyse fine du travail privé des élèves, au sens de Coppé (1993), pour, d'une part, mettre en valeur la richesse de l'activité mathématique des élèves et, d'autre part, mieux voir et comprendre les difficultés qu'elles et ils peuvent rencontrer. Cette analyse fine a été indispensable pour mieux comprendre les enjeux d'apprentissages mathématiques de tels problèmes. Il nous paraît donc important d'outiller les enseignant·es pour leur permettre d'engager leurs élèves dans un travail sur les ajustements qui va au-delà de la seule résolution du problème. Ces pistes à destination des enseignant·es visent une analyse plus efficiente du problème afin de mieux interpréter et réguler le travail des élèves qui pourraient bloquer et également à soutenir les enseignant·es dans le processus d'institutionnalisation à l'échelle d'un problème et même de plusieurs dans lesquels ils vont pouvoir engager leurs élèves.

De telles analyses du travail des élèves sont nécessaires relativement à d'autres types de problèmes objets et semblent indispensables pour documenter le processus d'institutionnalisation qui reste une difficulté pour les enseignant·es et une question vive pour la recherche.

Références bibliographiques

- Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : Le cas de l'enseignement des fractions*. [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Paris Diderot].
- Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, 5, 101-104.
- Chanudet, M., & Favier, S. (2021). Les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes de « Recherche & stratégies » en 10H. *Revue de mathématiques pour l'école*, 235, 88-98.
<https://doi.org/10.26034/vd.rm.2021.1729>
- Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Claude Bernard].
- Coppé, S. & Dorier, J.-L. (2024). *La résolution de problème au cœur de l'activité mathématique. Quels enjeux pour l'apprentissage ?* EDP sciences UGA Éditions.
- Elia, I., Den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, 41(5), 605-618.
- Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève*. [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève].
<https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466>
- Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Paris 7 Diderot].
- Hersant, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. [Note de synthèse HDR, Université de Nantes].
- Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 31-59.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire*. [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université du Québec à Montréal].
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.
- Martinand, J. L. (1986). *Connaître et transformer la matière*. Peter Lang.

- Posamentier, A. S. & Krulik, S. (2009). *Problem solving in mathematics, grades 3-6: Powerful strategies to deepen understanding*. Corwin Press.
- Stacey, K. (1991). The effects on students' problem solving behaviour of long-term teaching through a problem solving approach. Dans F. Furinghetti (dir.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 3, p. 278-285). PME.
- Vlassis, J., Mancuso, G. & Poncelet, D. (2014). Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques : Analyse des croyances d'enseignants du primaire. *Cahiers des Sciences de l'Education*, 36, 143-175.
- Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. (2005). *Documents d'accompagnement des programmes*. Scéren Éditions.
- OECD. (2013). *PISA 2012 Unités Libérées - Mathématiques*.
https://pisa.educa.ch/sites/default/files/20161124/exercices_mathematiques_2012_avec_codification.pdf