ACTIVITÉ DU N° 114

LES PARTICULES
SOLUTIONS ET PROLONGEMENTS

Julien BERNAT[1]
Groupe IREM de Lorraine

Sébastien LOZANO[2]
Groupe IREM de Lorraine

Énoncé

On dispose d'un certain nombre de particules qui peuvent être de trois couleurs différentes : il y en a des rouges, des vertes et des bleues.

On souhaite obtenir un ensemble de particules qui soient toutes de la même couleur. Pour cela, on peut fusionner des particules : cela consiste à prendre deux particules qui sont de couleurs différentes et à les remplacer par une particule de la troisième couleur (par exemple, on remplace une particule rouge et une particule verte par une particule bleue). Si plusieurs fusions sont possibles, on choisit librement celle que l'on veut. On doit réaliser des fusions jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule couleur.

Le but de l'activité est de savoir si, pour une répartition initiale donnée, la couleur finale peut être n'importe laquelle des trois couleurs ou non.

1. Déterminer la ou les couleurs finales possibles à partir de la répartition initiale suivante :

- 4 particules rouges, 2 particules vertes et 4 particules bleues (répartition A).

2. Reprendre l'étude du problème pour chacune des répartitions initiales suivantes :

- répartition B : 4 particules rouges, 3 particules vertes et 4 particules bleues ;
- répartition C : 5 particules rouges, 3 particules vertes et 4 particules bleues ;
- répartition D : 5 particules rouges, 2 particules vertes et 4 particules bleues ;
- répartition E : 5 particules rouges, 1 particule verte et 3 particules bleues.

3. Déterminer sous quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et/ou suffisante(s) une répartition initiale donnée peut mener à n'importe quelle couleur finale.

1. Solutions de l'activité et considérations pratiques

L'activité des particules que nous présentons est tirée du livre *Problem Solving Strategies* (Engel, 1998 ; problème 6 de fin du chapitre 1). Afin d'être menée sous la forme de manipulation

[1] julien.bernat@univ-lorraine.fr

[2] sebastien.lozano@ac-nancy-metz.fr

de jetons, elle nécessite trois collections d'objets qui sont présentées de façon contextualisée comme les particules d'une expérience de physique, de couleurs différentes. Pour des raisons pratiques, il est nécessaire de prévoir des collections plus importantes que celles utilisées dans une répartition initiale, l'application de règles faisant augmenter le cardinal d'au moins une collection au-delà de la quantité de départ ; on peut utiliser pour cela une réserve (pioche) de particules.

Les réponses attendues aux questions posées sont les suivantes :

- pour la première question (répartition A) : en disposant initialement de 4 particules rouges, 2 particules vertes et 4 particules bleues, il est possible d'obtenir n'importe quelle couleur comme couleur finale ;
- pour la deuxième question : toute expérimentation à partir de la répartition B doit mener à la couleur verte comme seule couleur finale possible ; pour la répartition C, la couleur bleue est la seule couleur finale possible ; pour la répartition D, la couleur rouge est la seule couleur finale possible ; pour la répartition E, n'importe quelle couleur peut être obtenue comme couleur finale ;
- pour la dernière question, une répartition initiale non unicolore peut mener à n'importe quelle couleur finale si et seulement si les parités des collections de chaque couleur sont les mêmes ; si ce n'est pas le cas, il n'y a qu'une seule couleur finale possible qui est celle dont la parité du nombre de particules diffère des deux autres parités.

Le choix de la présentation de cette activité avec les 5 situations de départ étiquetées de A jusqu'à E répond aux objectifs suivants :

- permettre, par une première situation convenablement choisie (répartition A), de vérifier que les règles et l'objectif sont correctement compris, sans présenter dans un premier temps d'impossibilité quant à une couleur finale souhaitée puisque toutes les couleurs peuvent être obtenues ; il doit être constaté en cours de manipulation que l'application des règles qui définissent l'activité permet bien d'arriver obligatoirement à une situation dans laquelle toutes les particules sont de la même couleur ;
- illustrer que selon les situations de départ, les résultats obtenus ne sont pas toujours les mêmes ;
- permettre la formulation de conjectures (par exemple, conjecturer après l'étude de la situation B que la couleur finale verte pourrait être celle qui plus généralement correspond initialement à la collection de plus petit cardinal) ;
- identifier parmi ces situations retenues des contre-exemples pour invalider des conjectures (l'étude de la situation C invalide la conjecture précédemment formulée).

Le choix des situations permet de faire apparaître la variété des réponses possibles. Les valeurs numériques (nombre de particules de chaque couleur d'une répartition) sont déterminées de sorte que le nombre de possibilités soit suffisamment important pour ne pas pouvoir traiter exhaustivement l'ensemble des expérimentations possibles (ce qui réduirait l'intérêt de cette activité de recherche), sans mettre en jeu un nombre trop important de particules, afin de minimiser le risque d'erreur de manipulation et de ne pas rendre celle-ci inutilement longue. D'autres paramètres de l'activité peuvent également être discutés et modifiés, comme le fait de présenter l'ensemble des questions, de guider l'avancement dans l'étude de l'activité par le biais de questions ouvertes ou fermées, ou encore de caractériser uniquement des répartitions d'une certaine forme (par exemple, étudier plus spécifiquement les répartitions contenant 1 particule rouge, 1 particule verte et un nombre b quelconque de particules bleues).

L'activité des particules cible comme compétences mathématiques du socle commun : chercher, communiquer, modéliser et raisonner ; elle correspond aux objectifs d'apprentissages du cycle 4.

2. Modélisation de l'activité des particules

On code par la suite R, V et B pour représenter respectivement une particule rouge, verte et bleue. Les trois règles (fusions) qui définissent comment les collections peuvent évoluer sont :

- règle (B) : à tout moment, on peut remplacer R et V par B,
- règle (R) : à tout moment, on peut remplacer V et B par R,
- règle (V) : à tout moment, on peut remplacer B et R par V.

Chaque répartition initiale peut être codée par le triplet dont les éléments sont les cardinaux de chaque collection, donc sous la forme $(r\,;v\,;b)$ avec r, v et b des entiers naturels pour signifier que l'on dispose de r jetons rouges, v jetons verts et b jetons bleus.

Le domaine mathématique permettant d'étudier l'activité des particules est la théorie des graphes. On peut représenter l'évolution à partir de n'importe quelle répartition initiale comme un chemin dans un graphe dont les sommets possibles sont les éléments de $\mathbb{N}^3$, les arcs étant ceux qui relient un sommet $(r\,;v\,;b)$ à un sommet pouvant être $(r-1\,;v-1\,;b+1)$ ou $(r-1\,;v+1\,;b-1)$ ou $(r+1\,;v-1\,;b-1)$ lorsque ces sommets sont également dans $\mathbb{N}^3$; ce sont les translations possibles à partir des arcs : $\big((1\,;1\,;0),(0\,;0\,;1)\big)$; $\big((1\,;0\,;1),(0\,;1\,;0)\big)$ et $\big((0\,;1\,;1),(1\,;0\,;0)\big)$ en utilisant la notation habituelle des arcs comme des couples dont les éléments sont respectivement un état initial et un état final. On pourrait interpréter le graphe de l'activité comme un automate en étiquetant l'arc selon le type de règle appliqué.

On désigne par expérimentation de l'activité des particules la donnée d'une répartition initiale et de la suite des règles appliquées dans un certain ordre jusqu'à obtenir une couleur finale ; une expérimentation se modélise ainsi par un chemin dans le graphe. Puisque la situation impose de réaliser une fusion tant qu'il reste au moins deux couleurs différentes de particules, les états terminaux de ce graphe sont ceux de la forme $(r\,;0\,;0)$ ou $(0\,;v\,;0)$ ou $(0\,;0\,;b)$, le paramètre entier r, v ou b étant non nul (car le nombre total de particules ne peut pas être nul). L'objectif de l'activité est de déterminer si, un état initial étant donné, une seule de ces formes est nécessairement atteinte au cours d'une expérimentation, ou bien si plusieurs formes sont possibles.

On constate qu'une expérimentation se termine toujours. Cette propriété est une conséquence du fait que l'application de n'importe quelle règle fait diminuer de 1 le nombre total de particules, aussi tout chemin dans le graphe partant de n'importe quel état initial est fini et le nombre de règles appliquées est majoré par le nombre initial de particules moins 1. La modification de l'ensemble des règles pourrait invalider cette propriété et créer des chemins infinis, avec ou sans boucle.

3. Étude mathématique de l'activité des particules

La résolution de cette activité repose essentiellement sur l'utilisation de la parité. Nous allons montrer le résultat suivant pour toute répartition initiale :

- si les trois collections ne sont pas vides et ont même parité, alors il est possible d'obtenir n'importe quelle couleur finale,

• si les trois collections n'ont pas même parité, alors la seule couleur finale possible est celle dont la parité diffère des deux autres.

Preuve du résultat : soit une répartition donnée $(r\,;v\,;b)$ n'étant pas un état terminal, autrement dit telle que parmi les quantités r, v et b, au moins deux ne soient pas nulles. On dénombre $(v+b)$ particules qui ne sont pas rouges, ainsi que $(r+b)$ particules qui ne sont pas vertes et $(r+v)$ particules qui ne sont pas bleues. Nous développons le raisonnement sur la couleur rouge, sachant qu'il est utilisé à l'identique pour les autres couleurs.

On vérifie que, quelle que soit la règle que l'on applique à cette répartition, le nombre de particules non rouges obtenu reste inchangé ou diminue de 2, autrement dit la parité du nombre de particules non rouges ne change pas. Aussi, si la quantité $(v+b)$ est impaire dans une répartition initiale, le nombre de particules non rouges reste toujours impair ; comme il n'est jamais égal à 0, cela signifie qu'à tout moment il reste toujours au moins une particule non rouge, et donc qu'il est impossible que la couleur finale soit rouge. On a ainsi prouvé l'implication :

si $(v+b)$ est impair, alors « rouge n'est pas une couleur finale possible ».

Afin de traiter tous les triplets de parités possibles pour les entiers $(r+v)$, $(r+b)$ et $(v+b)$, on considère l'ensemble des triplets de parités possibles pour les entiers r, v et b, ce qui nous donne 8 cas possibles à étudier.

r	v	b	$r+v$	$r+b$	$v+b$
pair	pair	pair	pair	pair	pair
pair	pair	impair	pair	impair	impair
pair	impair	pair	impair	pair	impair
pair	impair	impair	impair	impair	pair
impair	pair	pair	impair	impair	pair
impair	pair	impair	impair	pair	impair
impair	impair	pair	pair	impair	impair
impair	impair	impair	pair	pair	pair

Comme la somme des éléments du triplet $(r+v\,;r+b\,;v+b)$ est paire, elle contient un nombre pair d'entiers impairs, ce qui implique que ce nombre d'entiers impairs est soit 0, soit 2. On identifie 6 cas pour lesquels le triplet $(r+v\,;r+b\,;v+b)$ contient un entier pair et deux entiers impairs, ce qui correspond aux cas pour lesquels il y a deux interdictions pour la couleur finale. Cela impose la troisième couleur comme seule couleur finale possible puisque, comme nous l'avons mentionné précédemment, la décroissance stricte du nombre de particules en cours d'expérimentation implique l'arrivée sur un état terminal. Ces possibilités correspondent exactement aux triplets $(r\,;v\,;b)$ tels que deux entiers sont de même parité et un troisième entier est d'une parité différente.

Les deux derniers cas restant à étudier sont ceux pour lesquels les entiers $(r+v)$, $(r+b)$ et $(v+b)$ sont tous pairs, ce qui équivaut à ce que les entiers r, v et b soient de même parité. Il nous reste à voir pourquoi toute couleur peut alors être obtenue comme couleur finale (on rappelle que l'on a supposé que la répartition initiale n'était pas terminale : on peut appliquer au moins une règle).

On considère d'abord le cas pour lequel r, v et b sont trois entiers impairs. On suppose sans perte de généralité que l'on souhaite que la couleur finale soit rouge, autrement dit on souhaite obtenir un état de la forme $(n;0;0)$ avec n non nul. Si $v=b$, il suffit d'appliquer b fois la règle (R) et l'on obtient alors la répartition $(r+b;0;0)$ qui est de la forme souhaitée. Si $v\neq b$, on peut supposer que $v>b$ (sinon, on échange les rôles de ces deux quantités). Comme r, v et b sont trois entiers impairs, on peut appliquer au moins une fois la règle (B) et au moins une fois la règle (R), dans un ordre quelconque (il faut pour cela qu'il y ait au minimum une particule rouge, deux particules vertes et une particule bleue, ce qui est bien le cas puisque r, v et b sont impairs avec $v>b$). Le résultat de ces deux règles effectuées successivement laisse inchangées les quantités r et b et diminue de 2 la quantité v, et on itère autant de fois que nécessaire jusqu'à ce qu'il y ait autant de particules vertes que de particules bleues, ce cas ayant été traité auparavant.

Enfin, si les quantités dans la répartition initiale sont toutes paires, on applique une règle quelconque (cela est possible puisque cet état est supposé non final), ce qui change toutes les parités des entiers r, v et b ; on se ramène ainsi au cas où les trois quantités sont des nombres impairs que nous venons juste de traiter.

Remarque : l'ordre dans lequel les parités apparaissent n'est pas important ; aussi, on pourrait réduire le nombre de cas à considérer. Il serait également possible d'obtenir par cette étude une information sur la parité du nombre de règles à appliquer avant d'obtenir un état final. On peut par ailleurs constater avec cette étude qu'aucune répartition initiale ne permettrait d'obtenir exactement deux couleurs différentes possibles en fin de manipulation ; il aurait été possible de formuler cette problématique dans l'ensemble des questions du document de présentation.

4. Pour aller plus loin

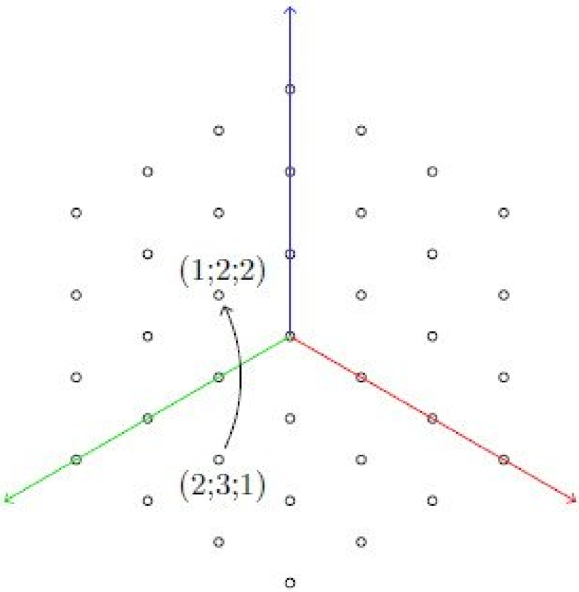
L'activité des particules est un cas particulier de situations pouvant se coder sous la forme d'un automate (S,T,I,F), où :

- S, l'ensemble des états, est $\mathbb{N}^d$, avec d un nombre entier supérieur ou égal à 2,
- T est l'ensemble des transitions sur S, une transition pouvant être notée comme un couple de $\mathbb{N}^d$,
- I est l'ensemble des états initiaux,
- F est l'ensemble des états terminaux.

La représentation graphique de l'automate, bien que théoriquement possible, est difficilement lisible puisque la présence de trois classes d'objets implique la représentation plane d'une partie de $\mathbb{N}^3$, ce qui surcharge très rapidement les schémas envisageables.

Dans le cas particulier initialement considéré, le rôle symétrique joué par les coordonnées rend possible de considérer une projection de cet ensemble sur le plan $\{(x;y;z),x+y+z=0\}$ selon la direction normale $(1;1;1)$. Cela nous fournit un réseau à maille triangulaire dans lequel les règles opératoires se traduisent par des déplacements de longueur 2 selon trois directions possibles.

Ce schéma présente l'application de la règle (B) à partir du représentant du triplet pour obtenir le représentant du triplet . Le déplacement correspond à la somme vectorielle d'un déplacement d'une unité en positif selon la direction définie par le demi-axe bleu (car il y a ajout d'une particule bleue) et d'un déplacement d'une unité en négatif selon chaque direction définie par les deux autres demi-axes (car il y a perte d'une particule rouge et d'une particule verte).



La direction de projection choisie fait que chaque élément de ce réseau représente en fait une infinité d'états de l'automate ; de même, à un chemin sur ce réseau correspond une infinité de chemins dans le graphe initialement construit. On montre alors que, en pouvant réaliser des « sauts » de deux cases, tout élément de ce réseau peut permettre d'atteindre soit un seul des trois demi-axes représentant les couleurs des particules, soit les trois demi-axes. En particulier, en considérant les chemins possibles en partant du triplet $(2;3;1)$, il est possible d'atteindre un seul des trois axes qui est celui contenant le triplet $(1;0;0)$, on retrouve bien une seule couleur finale possible qui est la couleur rouge.

Pour deux automates (S,T,I,F) et (S,T',I,F), on peut remarquer que si l'ensemble *T'* contient l'ensemble *T*, alors tout chemin dans l'automate (S,T,I,F) est encore un chemin dans l'automate (S,T',I,F). Il est possible que l'existence de chemins supplémentaires dans l'automate (S,T',I,F) ne modifie toutefois pas l'ensemble des états terminaux, ce qui n'est pas intuitif. Cette situation est facilement illustrée avec des exemples de jeux combinatoires qui reposent sur la possibilité de bicolorer le graphe qui les modélise. Dans le cas d'un cavalier se déplaçant sur un échiquier, on peut montrer que, partant de la case A1 et ayant le droit de réaliser exactement 20 déplacements, le cavalier pourrait terminer son parcours sur n'importe quelle case de même couleur que la case A1, qui est noire, et qu'en revanche il serait impossible de le voir alors sur une case blanche. Si l'on remplace maintenant le cavalier par une pièce qui, en plus des mouvements habituels du cavalier dispose de la possibilité supplémentaire de se déplacer sur une case adjacente horizontalement ou verticalement, alors le nombre de chemins possibles pour les 20 déplacements est plus important, sans que cela ne change le résultat concernant les cases d'arrivée puisque cette pièce continue de voir une alternance de couleur de case à chaque mouvement.

Dans le cas de l'activité des particules, de nouvelles règles peuvent être obtenues par combinaison des règles initiales. Ainsi :

- appliquer simultanément les règles (V) et (B) revient, lorsque l'on dispose de deux particules R, d'une particule V et d'une particule B, à remplacer toutes ces particules par une particule V et une particule B, donc cela revient à retirer deux particules R (de même pour les autres couleurs),

• appliquer simultanément chacune des trois règles (R), (V) et (B) revient à remplacer deux particules de chaque couleur par une particule de chaque couleur, donc, sous la condition de présence de deux particules de chaque couleur, à faire disparaître une particule de chaque couleur.

Comme nous venons de le mentionner, l'utilisation de ces combinaisons sous la forme de nouvelles règles additionnelles (avoir le droit d'éliminer deux particules de même couleur, avoir le droit d'éliminer trois particules des trois couleurs) peut sembler offrir de nouvelles possibilités et relancer une activité de recherche sur les répartitions initialement proposées, alors que cela n'affecte pas le résultat. Il est même possible d'introduire une règle réellement nouvelle (au sens où elle n'est pas obtenue par combinaison comme tel est le cas pour les deux précédentes) en pouvant remplacer trois particules d'une même couleur par deux particules, une de chacune des deux autres couleurs ; encore une fois, cela laisse inchangées l'étude et les possibilités offertes par la situation.

Une modification plus importante de la situation consiste à changer les règles initiales de sorte à préserver une propriété de conservation du nombre de particules, donc en remplaçant cette fois deux particules de deux couleurs différentes par deux particules qui sont toutes deux de la troisième couleur, ou inversement (même remarque que précédemment) : il s'agit du problème 7 de fin de chapitre 1 chez Engel (1998). Dans ce dernier cas, un changement est opéré dans la résolution de l'activité puisqu'il n'est plus question alors de parité mais de l'étude de restes modulo 3, ce qui enrichit le nombre de cas à considérer. Aussi, il n'y a plus dans ce cas de décroissance du nombre de particules après chaque application de règle ; il subsiste toutefois un nombre fini d'états pouvant être obtenus à partir de n'importe quel état initial puisque le nombre total de particules reste constant, et l'on trouve des boucles qui traduisent dans certains cas l'impossibilité de satisfaire la contrainte d'obtenir une seule couleur. Citons encore le problème 50 de fin de chapitre 1 chez Engel (1998), dont l'ensemble des règles opératoires correspond à la table d'addition sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, les classes étant alors les restes modulo 3. D'autres possibilités quant aux règles choisies ouvrent une activité de recherche dégagée de l'objectif d'identifier et d'étudier un invariant dans l'analyse mathématique de la situation.

Pour terminer avec des considérations théoriques, cette activité correspond à un cas particulier d'une problématique beaucoup plus large intéressant les mathématiques discrètes et l'informatique théorique, à savoir la description de classes d'équivalence entre mots à équations données. En effet, on peut coder les répartitions initiales comme des mots, par exemple RRRRVVBBBB pour la répartition donnée en exemple, et appliquer des règles de substitution qui remplacent des blocs de deux lettres différentes par un bloc d'une seule lettre qui est la lettre distincte des deux précédentes (l'activité des particules telle que décrite se place dans un cadre abélien et ne fait pas de différence entre les mots RRRRVVBBBB et RBBVRBBRRV). Dans le cas le plus général, il est connu que la question du calcul des classes d'équivalences n'est pas résoluble par procédure algorithmique (Durnev, 1974).

Références bibliographiques

Durnev, V. G. (1974). On equations in free semigroups and groups. Mat. *Zametki, 16*(5), 717-724 ; *Math. Notes 16*(5), 1024-1028.

Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies. Problem books in mathematics*. Springer, 403 p.