APPROCHE BILINGUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À MADAGASCAR

Fidy ANDRIANARIVONY[1]
Lycée Jean Ralaimongo Fianarantsoa, Madagascar

Jean-Jacques SALONE[2]
Centre Universitaire de Formation et de Recherche (CUFR) de Mayotte, France
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck - UMR 5149 - DEMa, France

Résumé. Cet article traite de l'enseignement des mathématiques dans un contexte bilingue français-malgache à Madagascar. L'étude se focalise autour des deux questions suivantes : comment les langues malgache et française s'articulent-elles dans une situation d'enseignement des mathématiques ? Quelles conceptualisations permet la langue malgache en regard de la langue française ? Pour répondre à la première question, nous avons conçu une expérimentation basée sur la théorie des situations didactiques avec des élèves en classe de première scientifique (16-17 ans). Puis, pour la deuxième question, nous nous focalisons sur les diverses traductions des concepts logiques en malgache.

Mots-clés. Bilinguisme français-malgache, conceptualisation en langue malgache, logique, situations didactiques.

Abstract. This paper deals with the teaching of mathematics in a bilingual French-Malagasy context in Madagascar. We study the following two questions: How do the Malagasy and French languages fit together in the teaching of mathematics? What conceptualizations are allowed by the Malagasy language compared to the French language? To answer the first question, we designed an experiment based on the theory of didactic situations with students in the first year of science (16-17 years old). Then, for the second question, we focus on the various translations of logical concepts in Malagasy.

Keywords. French-Malagasy bilingualism, conceptualization in Malagasy language, logic, didactic situations.

Introduction

Cette étude s'intéresse à l'enseignement des mathématiques dans le contexte bilingue de Madagascar où le français est la langue d'enseignement alors que ce n'est pas la langue maternelle des élèves et des enseignants. Elle adopte pour cadres théoriques principaux la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990) et la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1989). Elle essaie de répondre à une première question : *comment les langues malgache et française s'articulent-elles dans une situation d'enseignement des mathématiques ?* Nous examinerons ainsi dans quelles situations didactiques elles sont employées par les élèves ou par l'enseignant, et avec quelles fonctions. Cette première question sera prolongée par une deuxième question connexe relative à la formation des concepts en mathématiques, en particulier ceux issus de la logique : *quelles conceptualisations permet la langue malgache en regard de la langue française ?* Un regard particulier sera ainsi porté sur le lexique mathématique malgache et sur les registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) mis en œuvre par les élèves et l'enseignant.

Nous allons montrer que *le français et le malgache sont utilisés alternativement mais avec un*

[1] fidy-heritiana.andrianarivony@etu.umontpellier.fr

[2] jean-jacques.salone@univ-mayotte.fr

lexique mathématique en français privilégié par rapport à celui en malgache, que les langues malgache et française permettent des conceptualisations différentes mais qui peuvent se compléter et que ces mêmes langues interfèrent avec les registres symboliques plus spécifiques des mathématiques.

Pour exposer cette recherche, nous décrirons dans un premier temps les contextes scolaire et linguistique de Madagascar. Puis nous préciserons les éléments théoriques mentionnés ci-dessus ainsi que les concepts logiques abordés lors de l'expérimentation en classe dont nous rendons compte. Une partie méthodologique suivra qui reviendra sur l'organisation de la séquence en situations didactiques et qui explicitera les natures et les méthodes d'analyse de nos données brutes. Ensuite les résultats seront présentés et interprétés avant d'être discutés et prolongés par de nouvelles perspectives de recherche.

1. Cadre de référence

1.1. Contextes historique, scolaire et linguistique

En nous appuyant sur les travaux de Ranaivo (2007) et Razanavao (2009) nous présentons brièvement les choix linguistiques dans le système éducatif malgache depuis la période de la colonisation (1896-1960) qui voit la création des premières écoles avec un enseignement en français. À l'époque, le système éducatif malgache mis en place est similaire à celui existant en France : organisation de l'enseignement sur plusieurs niveaux, séparation des disciplines scolaires. Cependant, les instituteurs, pendant cette période, avaient déjà constaté des difficultés d'apprentissage pour des élèves qui ne comprenaient pas le français et qui avaient deux efforts à fournir : la compréhension de la langue d'enseignement et la compréhension des savoirs enseignés.

Pendant les années 70, des jeunes intellectuels et des militants politiques malgaches se sont réunis pour trouver une solution à ce problème d'enseignement. C'est ainsi que la *« malgachisation »* a été établie sur l'île en 1972 : un enseignement des matières scolaires tout en malgache. Les jeunes réformateurs disaient :

> *Pour nous libérer de cet asservissement total, il est inutile d'écouter les anciens colonisés jusqu'à la moelle des os ; nous devons lutter et malgachiser notre enseignement et nos principes d'éducation, il faut que cette lutte soit radicale, surtout la lutte contre la langue française qui est l'instrument par excellence de lavage de cerveaux et de destruction de l'identité culturelle malgache. (Razanavao, 2009, section Le changement radical de système scolaire malgache).*

Plusieurs personnes n'étaient pas d'accord avec ce point de vue. Les responsables de l'enseignement étaient divisés. Ceux des provinces périphériques, surtout du nord, ne voulaient pas en entendre parler car le malgache officiel utilisé était celui du centre (le *Merina*). Pour eux, c'était la langue des dominateurs d'avant la colonisation. Il fallait donc chercher et pratiquement inventer un malgache commun. Cela était une tâche bien difficile à entreprendre, surtout sans aucun principe méthodologique directeur. Puis il a fallu créer, à partir du malgache commun encore à inventer, le malgache technique et scientifique (pour les mathématiques, les sciences de la vie et de la Terre, la physique, la chimie...). Qui plus est, les accès à l'enseignement supérieur et aux études à l'étranger étaient devenus impossibles pour les bacheliers malgaches qui souhaitaient continuer leurs études. Ainsi, la malgachisation fût un échec. Le gouvernement malgache a donc décidé en 1991 de revenir en arrière avec un enseignement qui utilise à nouveau la langue française.

Zeny (1983) rapporte que, suite à la malgachisation de l'enseignement de 1972 à 1991, date du retour du français comme langue principale d'enseignement, les élèves et les enseignants malgaches ont subi une perte énorme dans leur maîtrise de cette langue. En outre, les mots techniques utilisés dans les matières scientifiques ont perdu leurs sens, autant dans leurs formulations en malgache qu'en français :

> *Les nouveaux termes mathématiques ont semé la terreur et le désarroi chez les parents et les instituteurs malgaches. Les mots ordinaires devenaient incompréhensibles. [...]. Les parents et maîtres traditionnels en sont déroutés. (Zeny, 1983, p. 222).*

Aujourd'hui, la langue française est la deuxième langue nationale à Madagascar après la langue malgache, elle est aussi une langue officielle d'enseignement. Suivant les recommandations du ministère de l'éducation nationale, les deux langues sont utilisées séparément ou conjointement selon les niveaux de classe concernés et selon les disciplines scolaires en jeu (tableau 1).

Niveaux		**Langue d'enseignement**
Primaire	CP1	Toutes les matières sont enseignées en malgache avec une initiation au français en malgache.
	CP2	Toutes les matières sont enseignées en malgache avec un enseignement progressif du français en malgache.
	CE, CM1, CM2	Math, SVT, Géographie, Français sont enseignés en français ; Malagasy et Histoire en malgache.
Collège et lycée		Enseignement bilingue de toutes les matières sauf les matières linguistiques.
Enseignement supérieur		Uniquement en français.

Tableau 1 *: Utilisation des langues à l'école publique.*

Le tableau 1 nous montre que les deux premières années de l'école primaire sont enseignées uniquement en langue malgache, avec un enseignement progressif de la langue française en malgache. C'est à partir de la troisième année de l'école primaire que les enseignants doivent utiliser pour la première fois le français comme langue d'enseignement. Et c'est à partir de la classe de sixième (première année du collège) que l'enseignement devient officiellement bilingue : traces écrites dans toutes les matières en français et communications orales dans les deux langues, sauf pour les disciplines linguistiques. Le français est ensuite utilisé seul pour enseigner dans le supérieur.

Mais cette discontinuité institutionnelle relative à l'introduction du français comme langue d'enseignement est encore source de difficultés : *« Il y a une entorse, un déboîtement des os. Il n'y a pas une bonne continuation parce qu'on fait du malgache puis brusquement à l'université on fait du français »* (Stuby, 2014, p. 26). Même si l'enseignement doit être fait en français ou en mode bilingue, il arrive souvent qu'il ne soit fait qu'en malgache puisque les enseignants eux-mêmes n'ont pas toujours un niveau suffisant en langue française. D'où la baisse du niveau général des élèves en français qui se poursuit et leurs difficultés dans les apprentissages qui perdurent, en mathématiques en particulier.

1.2. Aperçu du potentiel de conceptualisation de la langue malgache

Avant d'exposer les cadres théoriques que nous allons utiliser dans cette recherche, un bref aperçu de la langue malgache nous permettra d'appréhender son potentiel de conceptualisation en mathématiques.

Le registre de la langue malgache présente un premier obstacle : il est incomplet pour traduire les différents concepts mathématiques existants. Par exemple, les deux concepts *carré* et *rectangle* sont traduits de la même manière en malgache : *efa-joro*, c'est-à-dire quatre côtés. Ceci peut entraîner parfois une confusion entre ces concepts et une perte des significations, mais cela peut aussi renforcer leurs liens, à savoir l'inclusion des carrés dans les rectangles.

Le travail de thèse de Zeny (1983) souligne un autre obstacle inhérent à la langue malgache. En fait, il trouve que les mots utilisés sont souvent très pratiques et concrets :

> *Les malgaches semblaient ne pas être arrivés au niveau d'abstraction qu'avaient les Égyptiens, les Chinois ou les Européens. Pour les Malgaches traditionnels, les nombres étaient toujours des entiers positifs. Il n'y avait de notion ni de zéro ni de nombre irrationnel. Les rapports qui existaient entre les nombres étaient des rapports d'addition, de soustraction et de division mais peu de multiplication. Dans leur énumération, les nombres s'arrêtaient à un million dans le système décimal (folo=10, zato=100, arivo=1000, alina=10000, hetsy=100000, tapitrisa = 1 000 000 tapitrisa=1000000). Ils avaient l'idée de l'infinité des nombres qui pourrait être désignée par l'expression « alin-kisa » (innombrable). Ils avaient des notions géométriques limitées à la droite, à la rondeur et à l'angle, mais dans le sens pratique (Zeny, 1983, p. 221).*

Pourtant, certains concepts traduits en langue malgache participent beaucoup à la conceptualisation. Comme le montre le travail de Poisard *et al.* (2018), la pluralité des langues pour enseigner un concept mathématique peut-être un avantage à condition d'organiser les situations d'enseignement et d'apprentissage qui prennent en compte explicitement ces potentialités. Par exemple, en numération entière, l'appellation des nombres permet de retrouver *a priori* certaines de leurs propriétés algébriques. Ainsi, en français, dix-huit évoque dix plus huit unités ; quatre-vingts évoque quatre fois le nombre vingt. En malgache, 18 se dit *valo ambin'ny folo*, littéralement huit et encore dix. Puisque 8 vient avant 10, contrairement en français où 10 est avant 8, cette différence d'ordre des opérandes dans la décomposition renvoie à la commutativité de l'addition et permet de conclure que $10+8=8+10$.

De même, pour les nombres 20, 30, 40, ..., l'appellation de ces nombres en malgache fait intervenir des structures multiplicatives :

- 20 : *roa im-polo* ↔ *2 fois 10* ,
- 30 : *telo im-polo* ↔ *3 fois 10* ,
- 40 : *efatra im-polo* ↔ *4 fois 10*.

Plusieurs appellations des concepts géométriques en malgache contribuent aussi à leur conceptualisation car ils expriment certaines propriétés. Par exemple, sans revenir sur le cas du rectangle et du carré évoqué précédemment, triangle est traduit par *telo-zoro*, *trois angles*, et équilatéral par *mira-lafy*, *côtés égaux*. Il y a ici congruence entre les conceptualisations permises en français et en malgache. Autre exemple, le mot *parallèle* se traduit par *mira-zotra*, c'est-à-dire *même direction* ou *directions égales*, sa conceptualisation en malgache peut donc déjà interférer avec le concept de vecteur qui possède cet élément caractéristique. Le mot *vecteur* est d'ailleurs très concret en malgache, *tsilo*, c'est-à-dire *flèche*, ce qui permet déjà d'imaginer le *sens*.

La plupart des mots malgaches pour désigner un concept mathématique ont un potentiel de conceptualisation. Mais leur transmission d'une génération à l'autre n'est pas toujours aisée dans un contexte scolaire où les enseignants eux-mêmes ont oublié une partie de leur culture et de leur langue. Nous faisons l'hypothèse que dans une perspective d'enseignement, il peut être intéressant de les redécouvrir.

1.3. Cadres théoriques

Le premier cadre théorique auquel nous nous référons dans cet article est la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990). C'est une théorie cognitiviste qui nous fournira un arrière-plan cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des connaissances complexes. Vergnaud a montré en particulier que, bien que les mathématiques ne soient pas un langage, mais une connaissance, les questions d'énonciation et de compréhension jouent un rôle important (Vergnaud, 2002). Les contextes scolaire et linguistique à Madagascar comportant officiellement l'existence de deux langues pour enseigner les mathématiques, le français et le malgache, les différences entre les conceptualisations permises par l'une ou l'autre peuvent être alors une source de difficultés pour les élèves ou au contraire favoriser certains apprentissages (Barwell *et al.*, 2016).

Dans l'enseignement des mathématiques, les deux langues précédentes font en outre partie d'un ensemble plus vaste de registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) permettant de communiquer autour des objets et concepts étudiés :

> *On considère généralement les représentations sémiotiques comme un simple moyen d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communications, c'est-à-dire pour les rendre visibles ou accessibles à autrui (Duval, 1993, p. 39).*

Duval ajoute que les représentations ne sont pas nécessaires seulement à des fins de communication, elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée. En effet, elles jouent un rôle primordial dans le développement des représentations mentales. Dès lors, la maîtrise des règles et des signes utilisés dans ces représentations est indispensable pour apprendre. Ainsi, tout comme le registre du langage naturel, les registres symbolique et graphique et les tableaux suivent des règles grammaticales et syntaxiques qu'il est important de connaître en mathématiques. Cependant, l'identification et la coordination de plusieurs registres autour d'un même objet d'étude est un travail assez difficile pour les élèves qui peut entraîner une certaine confusion entre les objets et leurs représentations et par conséquent conduire à une perte de compréhension et à des connaissances qui deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage.

La théorie des situations didactiques de Brousseau (1989) constitue un autre cadre dans notre expérimentation, un cadre à la fois théorique et méthodologique. En effet, elle nous a permis d'une part de concevoir et de programmer la séquence d'enseignement proposée à la classe et, d'autre part, d'introduire une différenciation dans nos analyses linguistiques et sémiotiques en fonction des situations didactiques en jeu. Quatre types de situations ont été retenus : *action*, *formulation*, *validation* et *institutionnalisation*. Une séance d'évaluation sera aussi mise en place à la fin de la séquence d'enseignement. Nous examinerons également les fonctions du langage dans les phases de dévolution, c'est-à-dire lorsque l'enseignant essaie de rendre les élèves responsables de leurs activités de résolution de problème (Brousseau, 1989).

Enfin, rappelons quelques concepts spécifiques de la logique en mathématiques qui sont en jeu dans la séquence d'enseignement, notamment l'implication et la négation.

L'implication est un concept logique très utilisé dans toutes les activités mathématiques. Elle est exprimée dans le langage courant français par l'idiome « si ... alors ». Plus mathématiquement, si p et q sont deux propositions, alors l'expression en français « si p alors q » est représentée dans le registre symbolique de la logique propositionnelle par l'expression « $p \Rightarrow q$ ». p s'appelle l'antécédent et q la conséquence. Ce premier type d'implication s'appelle implication matérielle, c'est un connecteur de la logique des propositions. La réciproque d'une implication matérielle « $p \Rightarrow q$ » est l'implication inverse « $q \Rightarrow p$ ». Ces deux types d'implication ne sont pas égaux en mathématiques. Leurs interprétations dans un domaine mathématique donné n'ont pas la même valeur de vérité. Dans le cas où ces deux implications sont vraies, alors on a une équivalence qui correspond au connecteur logique « $p \Leftrightarrow q$ », c'est-à-dire que *p implique q* et *q implique p*.

La négation d'une proposition p est la proposition notée « $\neg p$ » (*non p*). *Non p* est une proposition vraie si et seulement si p est fausse (Tarski, 1960). On appelle contraposée d'une implication matérielle « $p \Rightarrow q$ », l'implication « $\neg q \Rightarrow \neg p$ » (*non q implique non p*). Ces deux implications sont logiquement équivalentes ; autrement dit, elles ont toujours la même valeur de vérité quel que soit le domaine d'interprétation considéré.

Le plus souvent, une implication matérielle de la logique des propositions ne suffit pas pour exprimer correctement de façon formelle un énoncé mathématique. Des variables et des quantificateurs sont très souvent indispensables. En effet, on ne peut pas déterminer la véracité ou la fausseté d'une phrase ouverte. Par exemple « n est pair » est une phrase ouverte. En quantifiant la variable libre n et en précisant son domaine, on obtiendra une proposition. Ainsi, si $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, on écrira la phrase ouverte précédente avec un quantificateur universel comme suit : « pour tout n élément de $\mathbb{N}$, n est pair », symboliquement « $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ } pair)$ » ou avec un quantificateur existentiel : « il existe n élément de $\mathbb{N}$, n est pair », symboliquement « $\exists n \in \mathbb{N}, (n \text{ } pair)$ ».

Dans le cas de la logique des prédicats, une implication avec un quantificateur universel s'appelle implication formelle. En général, on peut présenter ce type d'implication comme suit : « $\forall x \in E, (p(x) \Rightarrow q(x))$ ». Cette proposition est fausse si ne serait-ce qu'une seule valeur de E ne vérifie pas l'implication ouverte. L'expression de la négation de cette implication formelle est la suivante : « $\exists x \in E, (p(x) \text{ et } \neg q(x))$ » (il existe au moins un élément x de E tel que *p(x)* est vraie et *q(x)* est fausse) (Tarski, 1960). En revenant sur notre exemple de la parité d'un nombre entier, on peut affirmer la proposition suivante : « $\forall n \in N, (n \text{ pair} \Rightarrow n \text{ divisible par } 2)$ » ; sa négation est « $\exists n \in \mathbb{N}, (n \text{ pair et } n \text{ non divisible par } 2)$ », qui est fausse.

Nos questions de recherches avec ce cadre théorique sont alors :

- *Comment les différents registres sémiotiques, et en particulier les langues malgache et française, sont-ils utilisés par les enseignants et les élèves dans les diverses situations didactiques mises en œuvre dans une séquence d'enseignement en mathématiques au lycée à Madagascar ?*

Il est à souligner que cette première question de recherche à laquelle nous allons répondre touche deux dimensions : quand et dans quel but les langues sont-elles utilisées ? Autrement dit, nous allons tenter de décrire les fonctions spécifiques de ces langues dans les situations didactiques.

- *Quelle formation des concepts logiques permet la langue malgache ?*

Nous allons montrer que différents registres sémiotiques, qu'ils soient langagiers ou symboliques, sont utilisés alternativement par les enseignants et les élèves mais avec des fonctions didactiques différentes, et que les langues malgache et française se complètent pour contribuer à la formation des concepts mathématiques, logiques en particulier.

2. Cadre méthodologique

Pour répondre à ces questions, nous avons mis en œuvre une expérimentation dans une classe de première scientifique, qui compte 42 élèves, au lycée Jean Ralaimongo de Fianarantsoa (Madagascar). Afin de situer chaque élève, nous avons pris le codage E_i, E signifie l'élève, et i son numéro. L'expérimentation repose sur une séquence d'enseignement autour de la résolution d'un problème de géométrie algébrique qui présente la particularité de se conclure par une séance d'évaluation incluant un test de logique. Dans le déroulement de l'expérimentation, l'enseignant est le chercheur. L'objectif est d'apporter des éléments de réponses à nos questions de recherche. La programmation de la séquence en suivant la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1989) nous a permis de voir les fonctions spécifiques des langues française et malgache, et aussi les différentes verbalisations des concepts logiques en malgache lors des débat dans un groupe et entre groupes d'élèves.

Le problème proposé à la classe est le suivant :

On donne, sur un axe $(x'Ox)$, deux points A et B tels que $\overline{OA}=a$ et $\overline{OB}=-2a$, avec $a>0$.

Représenter sur l'axe $(x'Ox)$ les points O, A et B.

Discuter suivant les valeurs de m l'existence de points M sur l'axe, tels que : $OM^2=m\,\overline{MA}\,.\,\overline{MB}$, où m désigne un réel fixé.

La première question demande explicitement aux élèves d'effectuer le passage d'un registre symbolique à un registre graphique. Le fait que les abscisses des points soient données sous la forme de mesures algébriques abstraites, sans valeurs numériques effectives, est un obstacle didactique identifiable *a priori*. Plus précisément, la notion de mesure algébrique peut être confondue avec celle de distance et l'usage d'un paramètre nécessite d'anticiper sur les positions relatives des points *A* et *B* par rapport à l'origine *O*. La représentation graphique attendue est ainsi du type proposé sur la figure 1.

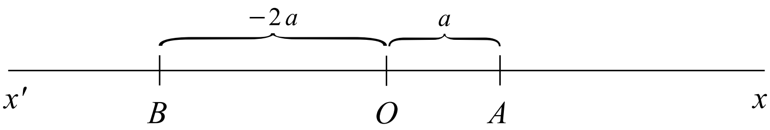


Figure 1 *: Réponse attendue à la question 1.*

Quant à la deuxième question, son traitement repose aussi sur la connaissance des règles de calcul qui régissent les mesures algébriques, ce qui constitue un nouvel obstacle pour les élèves. Autre obstacle, c'est une question qui introduit un paramètre qui entraînera des disjonctions de cas. Enfin, et cela fera l'objet des tests logiques en fin de séquence, répondre à la question 2 nécessite une certaine maîtrise des concepts logiques et de leurs notations symboliques. Voici une rédaction possible d'une réponse à cette question :

Notons x l'abscisse du point M. La procédure pour une détermination du point M est équivalente à la résolution d'une équation en x. Il faut faire alors une algébrisation de $OM^2=m\,\overline{MA}\,.\,\overline{MB}$, ce qui nous conduit à une équation en x : $(m-1)x^2+m\,.\,a\,.\,x-2\,m\,.\,a^2=0$.

- *Si $m=1$, l'équation est du premier degré. Dans ce cas, l'équation devient $ax-2a^2=0$, d'où $x=2a$.*
- *Si $m\neq 1$, elle est du second degré donc il faut calculer le discriminant Δ pour discuter le nombre de solutions. $\Delta=(ma)^2-4(m-1)(-2ma^2)$, c'est-à-dire $\Delta=9m^2a^2-8ma^2$, ou encore $\Delta=ma^2(9m-8)$ en mettant ma^2 en facteur. Le discriminant Δ est donc strictement négatif quand $m\in\left]0\,;\frac{8}{9}\right[$, et positif ou nul ailleurs.*

Nous avons alors les différents cas suivants :

1. Si $m=1$*, il existe un point M avec* $\overline{OM}=2a$ *;*

2. Si $m\in]-\infty;0[\cup]\frac{8}{9};+\infty[$*, il existe deux points M différents avec* $\overline{OM}=\frac{-ma\pm\sqrt{ma^2(9m-8)}}{2(m-1)}$ *;*

3. Si $m\in]0;\frac{8}{9}[$*, il n'existe pas de point M ;*

4. Si $m=0$*, il existe deux points M confondus au point d'origine O ;*

5. Si $m=\frac{8}{9}$*, il existe deux points M confondus, avec* $\overline{OM}=4a$*.*

La résolution du problème est suivie dans l'expérimentation par un test de logique autour de la compréhension de la réponse à la question 2. Il est constitué de deux questions qui ne seront traitées que pendant la séance d'évaluation. Ce questionnaire a été imprimé sur une feuille et distribué aux élèves :

Soit l'équation (E) : $(m-1)x^2+m.a.x-2m.a^2=0$*, avec* $a>0$*.*

1) Veuillez répondre par vrai (V) ou faux (F) aux deux phrases conditionnelles suivantes :

(1) Si $m=2$*, alors l'équation (E) admet deux solutions différentes.*

(2) Si l'équation (E) admet deux solutions différentes, alors $m=2$*.*

2) Traduisez en langage naturel l'expression symbolique suivante :

$\forall m\in]-\infty;0[, \exists\alpha\in\mathbb{R}\ /\ f(\alpha)=0$

La question 1) a pour objectif d'évaluer la perception de la notion d'implication au travers de la compréhension des réponses formelles et symboliques de la question 2 du problème. Deux assertions à valider ou invalider sont proposées. Elles expriment deux implications liant le paramètre et l'ensemble des solutions, avec la particularité que ces deux implications sont réciproques l'une de l'autre. Nous attendons alors quatre types de réponses :

1. type VV : les deux propositions sont jugées vraies. Le registre symbolique semble maîtrisé par le répondant mais il y a une confusion entre implication directe et réciproque. Ce type d'erreur peut provenir d'une fausse interprétation du contexte mathématique ;
2. type VF : la première proposition est vraie tandis que la deuxième est fausse. C'est la réponse exacte, qui reflète *a priori* une bonne maîtrise du concept d'implication et des écritures symboliques logiques associées ;
3. type FV : la première proposition est fausse tandis que la deuxième est vraie. Il n'y a pas de confusion entre implication directe et réciproque mais l'élève répondant ne maîtrise pas le registre symbolique logique et il peut y avoir une fausse interprétation du contexte mathématique ;
4. type FF : les deux propositions sont fausses. Il y a une confusion entre les deux types d'implication et des difficultés avec le registre symbolique et il peut y avoir une fausse interprétation du contexte mathématique.

Le but de la question 2) est de voir la manière dont les élèves verbalisent dans le langage naturel les deux quantificateurs logiques universel et existentiel. Donc, nous ne nous soucions plus de la dépendance entre les nombres α et m. Cela pourrait être un autre objet d'étude. Dans cette analyse, nous nous intéresserons plus particulièrement aux traductions en malgache données par les élèves.

Le déroulement de notre expérimentation est comme suit : la séquence mise en œuvre dans la classe est divisée en sept séances (tableau 2) qui ont été conçues à partir des différents types de situations et compléter par une séance d'évaluation.

Séances	**Déroulement de la séquence**
Séance 1	Situation d'action pour traiter la première question du problème.
Séance 2	Situation d'action pour traiter la deuxième question du problème.
Séance 3	Situation de formulation pour traiter la première question du problème.
Séance 4	Situation de formulation pour traiter la deuxième question du problème.
Séance 5	Situation de validation.
Séance 6	Situation d'institutionnalisation.
Séance 7	Séance d'évaluation : test de logique.

Tableau 2 *: Déroulement de la séquence.*

Dans la séance 1, une situation d'action conduit chaque élève dans un travail individuel dont le but est de traiter la première question du problème sans communiquer avec des pairs. L'enseignant donnera si nécessaire des explications aux mots, notions ou signes présents dans l'énoncé.

La séance 1 est prolongée par une deuxième séance avec les mêmes modalités mais dont le but est de traiter la deuxième question du problème. Comme l'enseignant a déjà donné des indications et des explications dans la première séance, il n'en donnera *a priori* plus dans celle-ci.

Les séances 3 et 4, respectivement sur les questions 1 et 2 du problème, correspondent à une situation de formulation au cours de laquelle le travail est réalisé en groupes de 4 ou 5 élèves. Il s'agit d'élaborer une réponse commune à la première question du problème. L'enseignant peut donner des indications dans ces séances si nécessaire.

Pendant la cinquième séance, les groupes exposent leurs résultats et un débat est animé par l'enseignant dans la classe. Il s'agit donc *a priori* d'une situation de validation au cours de laquelle des procédures et des réponses sont proposées publiquement et sont défendues. Le but de cette séance est de décider d'une réponse commune au problème.

Dans la séance 6 l'enseignant évalue la réponse commune et institutionnalise une réponse valide. Dans cette situation d'institutionnalisation, c'est aussi l'occasion pour lui de revenir sur des concepts ou des notations mal compris en donnant à nouveau des explications et des précisions.

En fin de séquence, la séance 7 est une phase d'évaluation individuelle au cours de laquelle les élèves répondent au test de logique présenté précédemment.

Durant toutes les séances de l'expérimentation, nous avons prélevé les traces écrites des élèves et réalisé des enregistrements vidéo, qui sont ensuite retranscrits, des échanges au sein de la classe entière ou dans des groupes d'élèves. Ces données seront traitées par une analyse directe de leurs contenus, c'est-à-dire par une approche qualitative.

Pour répondre à la question de l'articulation entre les différents registres sémiotiques, essentiellement les langues française et malgache, nous exploiterons les traces écrites des élèves et les transcriptions des échanges. Nous focaliserons nos analyses et interprétations sur les fonctions dans les différentes situations didactiques de ces registres langagiers. Une attention particulière sera portée aux phases de dévolution.

Pour la deuxième question de recherche, qui s'intéresse aux différentes conceptualisations offertes par la langue malgache en regard de la langue française, nous allons regarder dans les traces écrites (essentiellement les questions de l'épreuve de logique) et dans les transcriptions des échanges les différentes traductions proposées d'un point de vue à la fois lexical et sémantique. Le but sera alors de mettre en évidence des complémentarités entre les deux langues.

3. Résultats

3.1. Fonctions didactiques des registres sémiotiques langagiers et articulations avec les registres symboliques et graphiques

La première impression que nous avons pu avoir pendant la séquence d'expérimentation est la faiblesse des élèves sur le plan des connaissances mathématiques et plus particulièrement dans leur maîtrise des registres symbolique et graphique. Dès la situation d'action, nous avons remarqué que les élèves ont un manque de connaissance des diverses expressions symboliques et graphiques pourtant couramment utilisées au lycée. Par exemple, pendant le traitement de la première question du problème qui demande de représenter les trois points *O*, *A* et *B* sur un axe à partir des données de mesures algébriques avec un paramètre, plusieurs élèves ne sont pas arrivés à placer correctement ces points (figures 2 et 3).

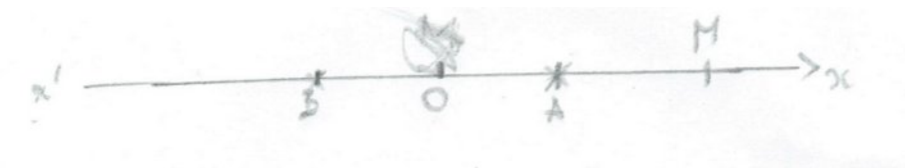


***Figure 2** : Figure de* E_{36}.

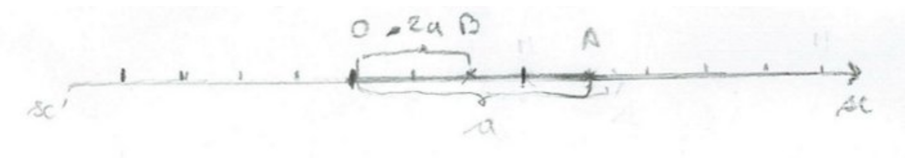


***Figure 3** : Figure de* E_{24}.

Dans ces deux figures, la difficulté des élèves relative au passage du registre symbolique algébrique au registre graphique sur un axe apparaît clairement. L'élève E_{36} a presque mis à égalité les deux distances *OA* et *OB* dans la figure 2 et, dans la figure 3, l'élève E_{24} pense que *OA* doit être plus long que *O*B. Ces erreurs viennent du fait que l'expression symbolique de la mesure algébrique est mal identifiée par les élèves. Une autre difficulté est survenue avec la notation « $a>0$ » : un nombre positif représenté par une lettre ! Les élèves n'arrivent pas à faire correspondre ce nombre avec une mesure géométrique, c'est pourquoi les points *A* et *B* sont mal placés dans les figures.

Cette difficulté avec les expressions symboliques est toujours présente chez les élèves pendant la situation d'action pour une détermination du point *M*. Les règles qui régissent les opérations sur les mesures algébriques sembles insuffisamment maîtrisées, comme on peut le voir avec les erreurs produites pendant la période de traitement (figure 4).

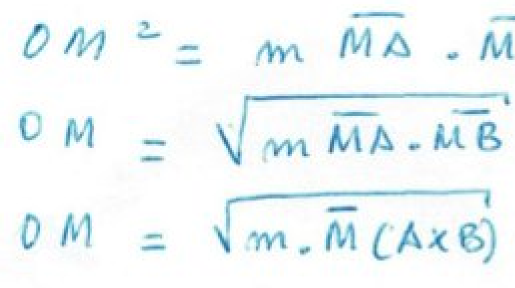


Figure 4 *: Copie de* E_{13}.

Dans ce calcul, l'élève E_{13} a factorisé par le point M à la troisième ligne, ce qui est totalement incohérent avec la nature même de l'objet M. C'est à ce niveau que les registres sémiotiques langagiers prennent toute leur importance dans les séances d'apprentissage. En effet, une explication de ces signes et de ces mots a rendu par la suite plus clairs les concepts qui leur sont associés et a facilité leur acquisition. Dans les dialogues qui suivent, le professeur est codifié par *Pro*, les traductions du malgache en français sont données entre parenthèses.

E_{13} : *Vecteur ve io* $\overline{OA}$ *io ?* (Est-ce que $\overline{OA}$ est un vecteur ?)

Pro : *Qui peut m'expliquer cette notation ?*

Pro : *Iza no afaka manazava anio* $\overline{OA}$ *io ?* (Qui peut m'expliquer la notation $\overline{OA}$?)

Pro : *Notation-na mesure algébrique io* $\overline{OA}$ *io. Izany hoe, mety ho négatif ary mety ho positif ny distance. Io tsipika eo ambony io milaza fa ny halavirana avy eny amin'ny O mankany amin'ny A dia a. Izany hoe raha A mankany amin'ny O dia firy izany ?* (C'est une notation de mesure algébrique. Algébrique veut dire que la mesure peut être négative ou positive. La barre au-dessus de *OA* indique que depuis *O* vers *A*, la distance est égale à *a*. Alors, si c'est depuis *A* vers *O*, la distance est de combien ?)

Pro : Est-ce que quelqu'un peut m'expliquer ? Levez la main et parlez.

E_{32} : *Izany hoe raha A mankany amin'ny O izany dia mivadika koa ny signe, izany hoe* $-a$. (Alors si c'est depuis *A* vers *O*, le signe doit-être opposé. C'est-à-dire $-a$.)

Dans ces échanges, l'enseignant essaie d'expliquer la notion de mesure algébrique à ses élèves. Nous avons remarqué que les élèves ont toujours une hésitation avant de répondre à une question posée en français : soit les élèves ne répondent pas, soit ils répondent en malgache. Par contre une question posée en malgache leur semble plus simple. Donc, dans cette situation d'action, *la langue malgache a une fonction d'explication pour l'enseignant et une fonction de compréhension pour les élèves*. Nous remarquons aussi que le discours en malgache de l'enseignant contient plusieurs mots en français, comme *notation*, *distance*, *algébrique*, *positif* et *négatif*. Cela vient du fait que les traductions malgaches de ces mots sont presque complètement oubliées par les enseignants et élèves de Madagascar aujourd'hui. Par conséquent, même si la langue malgache a ici une fonction explicative, un accompagnement de la langue française s'avère nécessaire.

Le deuxième extrait des échanges qui suit nous montre comment l'enseignant donne des indications pour une procédure de traitement pendant la situation de formulation.

Pro : *Vous allez déterminer le point M, puis le représenter. Qu'est-ce qu'il fallait faire alors ?*

Pro : *Hitady ny point M ianareo ary hapetraka eo amin'ny axe io avy eo, inona izany no tokony hataonareo ?* (Vous allez déterminer le point *M* puis le placer sur un axe, qu'est-ce qu'il fallait faire alors ?)

Pro : *Amin'ny alalan'ny inona no nahafahana nametraka ny point A sy B teo amin'ny axe ?* (Par quel moyen nous avons pu placer les points *A* et *B* sur l'axe ?)

E_{04} : *Amin'ny alalan'ny coordonné-ny*. (Par ses coordonnées.)

Pro : *Oui, bravo* E_{04}*, alors si on veut chercher le point M, qu'est-ce qu'il fallait faire alors ?*

E_{04} : *Tadiavina izany ny coordonné ny point M*. (Il faut alors chercher les coordonnées du point *M*.)

Pro : *Oui c'est ça ! Et puisqu'on ne connaît pas encore les coordonnées du point M, qu'est-ce qu'il faut faire ?*

E_{19} : *Atao aloha izany ko !* (On passe par *x* alors !)

Pro : *C'est ça* E_{19}*, il faut passer par une variable x, et il faut déterminer x, comme dans une équation. Est-ce que vous comprenez ce qu'il fallait faire maintenant ?*

Pour faire vivre un univers mathématique à ses élèves, l'enseignant pousse ces derniers à exprimer leurs idées. Ainsi, le fait de donner des indications implique de poser plusieurs questions aux élèves : *pourquoi ceci*, *d'où vient cela*, *comment*, *par quel moyen ?* Les questions posées étant fondées sur une procédure déjà connue, le but est d'amener les élèves à repenser la procédure qui pourra conduire à la résolution du problème.

Nous faisons la même remarque que pour le dialogue précédent : dans l'utilisation des langues, le malgache reste toujours la langue d'explication pour l'enseignant. *C'est aussi plus largement celle de la communication entre l'enseignant et ses élèves, ces derniers y ayant systématiquement recours pour répondre dans l'ensemble des séances observées*.

Le dernier extrait que nous présentons ci-dessous concerne des échanges au sein d'un groupe pendant la situation de formulation. Les élèves doivent se mettre d'accord sur une procédure de traitement valide.

E_{32} : *Angamba tokony ho factirise-na ny m, tsy mety ? Ary raha omena valeur ny m ?* (Peut-être qu'il faut factoriser *m*, non ? Et si on essaie de donner une valeur à *m* ?)

(E_{07} a essayé avec $m=1$, et il a trouvé l'équation $x^2=x^2+ax-2a^2$).

E_{07} : *Raha* $m=1$*, dia* $x=2a$. (Si $m=1$, alors j'ai trouvé $x=2a$.)

E_{32} : *Ary raha 2 indray ary ny m ?* (Et si $m=2$?)

(E_{07} essaie $m=2$, alors il a trouvé $x^2=2x^2+2ax-4a^2$).

E_{32} : *Tokony afindra membre iray izany ireo. Lasa équation du second degré ilay izy*. (Il faut qu'on les mette dans un membre. L'équation devient du second degré.)

E_{10} : *Tokony mitade* Δ *izany*. (Il faut calculer Δ alors.)

Nous avons ici une négociation entre élèves pour élaborer une procédure de résolution du problème. Dans l'extrait, nous observons l'utilisation répétée de l'idiome *« raha ... dia »* (si... alors) et de l'expression *« tokony »* (il faut). L'idiome *« raha ... dia »* est utilisé pour tenter une nouvelle procédure (ex : si $m=1$, alors qu'est-ce qu'on a ?) et le mot *« tokony »* pour valider la procédure (ex : il faut changer de membre !). Ces expressions vont être étudiées plus en détail dans la suite de cet article. Ainsi, les élèves ont pensé en malgache et construit leur réponse dans cette langue. Il est important de souligner que même si les élèves pensent et discutent en malgache, leurs productions écrites restent en français. *La langue malgache apparaît ainsi avec une fonction cognitive forte, c'est la langue de formation des concepts, c'est celle dans laquelle on argumente entre pairs*.

Ces différents extraits nous montrent donc une utilisation fréquente de la langue malgache en appui du français pour la résolution du problème dans les trois situations didactiques précédemment étudiées, avec des fonctions diverses :

- pour l'enseignant, la langue malgache permet de reformuler des consignes et d'aider les élèves à franchir les obstacles qu'ils rencontrent en donnant des explications ou des indications lors des situations d'action ou de formulation ;
- pour les élèves, c'est la langue dans laquelle ils débattent et argumentent pendant les situations de formulation et de validation, c'est la langue avec laquelle ils construisent leurs réponses.

La langue française, quant à elle, reste, pour les enseignants comme pour les élèves, la langue de scolarisation, celle dans laquelle non seulement on s'exprime officiellement mais aussi celle dans laquelle les mathématiques sont écrites et qu'il faut donc maîtriser pour réussir. En outre, même si nous ne développerons pas ce point ici, il a pu être observé que durant l'institutionnalisation, l'enseignant donnait oralement ses explications en malgache, alors qu'il écrivait au tableau le bilan correspondant en français. Des phénomènes similaires ont pu être observés avec d'autres enseignants de mathématiques. Ceci nous amène à postuler que la langue malgache est la langue de communication orale en classe et le français, une langue pour la formalisation écrite des cours.

En reprenant Duval (1993) :

> *On ne peut pas faire comme si les représentations sémiotiques étaient simplement subordonnées aux représentations mentales, puisque le développement des secondes dépend d'une intériorisation des premières et que seules les représentations sémiotiques permettent de remplir certaines fonctions cognitives essentielles, comme celles de traitement (Duval, 1993, p. 39).*

Ainsi, les élèves élaborent une représentation mentale en malgache à partir de représentations sémiotiques symbolique et graphique encapsulées dans des consignes en langue française. Il y a donc un passage brusque d'un registre langagier à un autre avec des élèves qui lisent les consignes en français, pensent en malgache, et transcrivent leurs résultats en français. Ce passage est rendu plus difficile si la consigne contient en plus une expression symbolique ou graphique car les élèves vont devoir lire les symboles, les interpréter en malgache, puis transcrire les résultats en français et les modifier finalement pour les exprimer à nouveau dans le registre symbolique. Ainsi, la réussite d'un élève repose grandement sur ses capacités linguistiques en plus de ses compétences mathématiques. La langue malgache apparaît alors comme un pont qui traverse les situations didactiques, soutenant les élèves dans leur passage d'un énoncé mathématique en français pas toujours facile à comprendre à une réponse valide formulée elle aussi en français et à l'écrit généralement. Le travail de Millon-Fauré (2010) à fait la même observation pour des élèves allophones, dont beaucoup d'entre eux ont besoin, au moins pendant un temps, de manipuler à la fois leur langue première et la langue de scolarisation pour pouvoir, une fois arrivés dans le pays d'accueil, transférer les notions construites dans la langue d'origine.

3.2. La langue malgache et les concepts logiques

Pour poursuivre dans l'identification du potentiel de conceptualisation de la langue malgache, nous allons nous focaliser dans ce paragraphe sur les différents concepts logiques tels qu'ils sont énoncés dans cette langue. Il s'agit en fait d'analyser les formulations utilisées dans les séances étudiées, pour désigner certains concepts logiques.

Le premier concept auquel nous nous intéressons est celui d'implication. Nous avons relevé les différentes manières de dire l'idiome *« si... alors »* en malgache, dans les productions des étudiants et dans les expressions d'usage courant. La manière de dire la plus fréquente est *« raha... dia »*. C'est celle qui nous semble être la plus syntaxiquement correcte et qui est par exemple utilisée par un élève dans la phrase suivante : « *Raha* $m=1$, *dia* $x=2a$ » (Si $m=1$, alors $x=2a$). Sa correspondance avec l'implication mathématique reste encore à déterminer, et d'autres phrases de la vie quotidienne nous permettent d'en appréhender un peu mieux le sens :

(1) phrase 1 : « *Raha izaho ianao*, *dia hataoko izay* » (Si j'étais toi, alors je le ferais) ;

(2) phrase 2 : « *Raha mianatra tsara ianao dia hanana fiainana tsara* » (Si tu travailles bien à l'école alors tu auras une belle vie) ;

(3) phrase 3 : « *Raha manana* 10.000 *Ar*[3] *ianao dia omeko an'io* » (Si tu as 10 000 *Ar* alors je te donne ceci).

Quel sens véhiculent ces trois phrases ? La phrase 1 est écrite comme une implication « si p alors q » mais peut s'interpréter comme une proposition hypothétique non réalisée en pratique « puisque je ne suis pas toi, alors je ne peux pas le faire ». Elle correspond donc davantage à la contraposée de l'implication réciproque « si $\neg p$ alors $\neg q$ », proposition qui n'est pas équivalente à celle de départ (Beyssade, 2001). On pourrait aussi l'interpréter comme un conseil : « À ta place, je le ferais » qui fait disparaître l'implication. Syntaxe et sémantique ne semblent donc pas être congruentes ici.

Dans la phrase 2, l'implication s'apparente *a priori* davantage à une relation de causalité : le fait d'avoir une belle vie plus tard est vu comme la conséquence du fait de travailler bien à l'école. Ce type de phrase est utilisé pour motiver les élèves à apprendre et donc sa signification pourrait également correspondre à la contraposée de la réciproque « si tu ne travailles pas bien à l'école alors tu n'auras pas une belle vie ». La phrase 3 quant à elle utilise le « *raha... dia* » à propos d'un contrat dans une situation commerciale. Elle exprime une condition, « si p alors q » et semble donc être congruente avec l'implication logique. Mais la réciproque est sémantiquement présente dans cette phrase : la condition est nécessaire et suffisante. Donc, ici, l'idiome malgache se traduirait plutôt par « je te donne ceci *si et seulement si* tu as 10 000 *Ar* ». Le mot *raha* peut ainsi être traduit par *si* et par *si et seulement si*, d'où le risque de confusion entre une implication et une équivalence. Les mêmes ambiguïtés peuvent apparaître avec l'expression en français « si... alors » (Fabert & Grenier, 2011).

La deuxième traduction du « *si... alors* est « *rehefa... dia* ». On entend plutôt le mot « *quand* » que « *si* » par « *rehefa* ». Puisque le mot « *quand* » a une fonction temporelle, une implication dans la culture malgache contient donc aussi une certaine temporalité. Fabert et Grenier (2011) ont déjà fait la même remarque sur l'utilisation du « *si... alors* » dans la langue française. Autre exemple, dans la phrase suivante : « *rehefa tonga ny orana dia lena ny tany* » (quand la pluie tombe, alors la terre est mouillée), le mot rehefa est utilisé pour signifier simultanément une causalité et une temporalité, ce qui n'est pas congruent avec l'implication mathématique.

Nous pouvons donc conclure ici que la conceptualisation d'une implication dans la vie courante dans les langue et culture malgaches, comme dans les langue et culture françaises, est généralement associée à une relation de causalité qui est fortement intriquée avec une relation de temporalité (voir par exemple Deloustal-Jorrand, 2004 pour la langue française). Les sens vernaculaire et mathématique de ce concept logique ne sont donc pas congruents. Autant en malgache qu'en français, il y a un fort risque de confusion entre le concept d'implication et celui

[3] *Ar* ou *Ariary* : unité monétaire malgache.

d'équivalence. La première question de notre évaluation nous confirme ce dernier résultat : dans les deux implications qui sont réciproques l'une de l'autre, 72 % des élèves répondent par le type VV et 8 % répondent par le type FF. Donc 80 % des élèves interprètent une implication directe comme étant équivalente à sa réciproque. Néanmoins, on ne peut pas exclure que ces réponses soient pour partie liées à une mauvaise maîtrise du domaine mathématique. Par exemple, Durand-Guerrier (2003, p. 22) a montré que cette confusion entre implication et équivalence était dépendante des contextes. En effet, dans son échantillon qui comprenait 273 étudiants de première année d'université en octobre 1992, seuls trois étudiants confondaient systématiquement implication et équivalence.

Nous allons maintenant nous intéresser aux deux quantificateurs logiques. Le mot « *tout* » est traduit par « *rehetra* » en malgache. Voici trois exemples d'utilisation courante de ce mot :

- *Ianareo rehetra* (vous tous) ;
- *Ny olona rehetra faly dia mandihy* (Toute personne joyeuse danse) ;
- *Ireo mpianatra rehetra dia nifindra kilasy* (Tous les élèves sont admis en classe).

Le mot « *rehetra* » se construit ainsi avec un *déterminant* ou un groupe de mots placé avant et qui désigne ce sur quoi porte le quantificateur universel. Dans les exemples ci-dessus, « *ny* » (« *le* » ou « *la* ») et « *ireo* » ou « *izay* » (« *les* ») sont des déterminants associés aux noms « *olona* » (« *personne* ») et « *mpianatra* » (« *élèves* »). Ainsi, en malgache, le quantificateur universel est comme en français associé à un groupe nominal auquel il se rapporte, la différence entre les deux langues résidant dans les positions relatives de ces mots. Cette différence peut constituer un obstacle linguistique pour les élèves. Nous constatons également que « *rehetra* » est suivi dans les deux dernières phrases de « *dia* » (alors), le même mot que celui utilisé pour signifier une implication. Au niveau syntaxique, et par conséquent au niveau sémantique, il y a donc une interférence entre implication et quantification universelle qui peut elle aussi constituer une difficulté pour les élèves.

Dans un contexte plus mathématique, par exemple en géométrie, on retrouve la même construction de la phrase :

> *Ireo tsipika rehetra dia manana teboka tsy voatanisa* (Toutes les droites ont une infinité de points).

Même si cette phrase présente la même syntaxe que les deux précédentes, une difficulté sémantique supplémentaire apparaît cependant. En effet, dans son utilisation courante, le quantificateur universel n'est pas vraiment universel, il peut souffrir des exceptions. C'est qu'à Madagascar on a facilement tendance à faire du « *filaza masaka* » (à exagérer les choses) et par exemple pour dire que la fête était réussie, on dit que tous les gens ont dansé même s'il en existe beaucoup qui n'ont fait que manger. Cet aspect non universel du quantificateur est bien évidemment source d'erreurs en mathématiques. Dire que toutes les boules sont rouges alors qu'il en existe quelques-unes qui ne les sont pas est une proposition fausse. On retrouve le même aspect dans l'utilisation de « *raha ohatra ny rehetra* », comme dans l'exemple ci-après où l'on retrouve aussi la non universalité du quantificateur. La signification est ici « tout le monde en dehors de moi » :

> *Raha ohatra ny rehetra manaiky dia manaiky aho* (Si tout le monde (en dehors de moi) accepte cela alors je l'accepte).

Il existe cependant une autre structure idiomatique en langue malgache pour signifier la quantification universelle :

Ho an'izay mpianatra nahay rehetra dia nifindra kilasy (Tout élève intelligent est admis en classe).

Dans cette phrase, le groupe « *ho an'izay* » (ou « *ho an'ny* ») signifie littéralement « pour ». Il renforce en la précisant la portée du quantificateur « *rehetra »* qui dès lors s'applique à un ensemble bien précis d'éléments, ceux qui justement vérifient la propriété catégorisante énoncée en conclusion. En mathématiques, cela lève la dernière ambiguïté sémantique :

Ho an'ny n ankasa rehetra, $n=2k$ *ary* $k\in\mathbb{N}$ (Pour tout *n* pair, $n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$).

Une autre traduction, qui n'utilise pas le mot « *rehetra* », est encore utilisée par quelques élèves : « *na iza na iza* » (« quiconque », « quel que soit »).

Na iza na iza x ao anatin'ny $\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$ (Quel que soit *x* élément de $\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$).

Cette dernière façon de dire la quantification universelle nous semble être la plus mathématiquement correcte. Nous préconisons son utilisation dans l'enseignement des mathématiques, car non seulement le sens correspond bien à la signification du concept, mais aussi la syntaxe est plus proche de celle en français.

Quant au quantificateur existentiel, il est, la plupart du temps, éludé par les élèves. Quand ce n'est pas le cas, la traduction la plus fréquente est « *misy* » :

Raha $m=1$ *dia misy point M iray*, $\overline{OM}=2a$ (Si $m=1$ alors il existe un point *M*, $\overline{OM}=2a$).

Littéralement, « *misy* » est traduit par le mot « existe » en français, mais il peut se traduire aussi par « il existe ». Si on veut être encore plus précis, on ajoute « au moins » après « il existe », comme en français :

Misy tsipika farafahakeliny iray mandalo amin'ny teboka A (Il existe au moins une droite qui passe par le point *A*).

Le mot « *farafahakeliny* » est composé de deux racines « *farany* » (« dernier ») et « *kely* » (« petit »). Il signifie littéralement « le plus petit acceptable », ou « *a minima* ». D'autres traductions sont encore employées par les élèves qui ne diffèrent pas vraiment de ce que l'on trouve en langue française :

- *Raha* $m=1$ *dia ahitana point M iray* (Si $m=1$ alors on trouve un point *M*).
- *Raha* $m=1$ *dia afaka ahitana point M iray* (Si $m=1$ alors on peut trouver un point *M*).
- *Raha* $m=1$ *dia manana point M iray* (Si $m=1$ alors on a un point *M*).

Le mot « *ahitana* » (« on trouve ») affirme l'existence d'un unique point *M* bien déterminé. Dans « *afaka ahitana* » (« on peut trouver »), l'emploi du verbe *pouvoir* introduit l'idée que l'implication et l'existence dépendent de l'expérimentateur, des compétences de celui qui effectivement recherche le point *M*. C'est une nouvelle ambiguïté sémantique que l'on peut également retrouver dans la langue française. La dernière traduction « *manana* » (« on a ») est davantage correcte, comme « *misy* ».

La langue malgache comporte donc des faiblesses et des atouts en regard de la conceptualisation en logique mathématique. Les mots employés pour traduire l'implication et les quantificateurs sont nombreux et généralement teintés d'un sens emprunté à la vie courante. Cela induit des erreurs sémantiques fréquentes chez les élèves, des confusions de sens qui sont de surcroît exacerbées par des interférences syntaxiques entre idiomes. Les interprétations de « *raha... dia* » et « *rehefa... dia* » sont souvent confondues avec une équivalence. Plusieurs mots utilisés pour dire le quantificateur universel sont sources de malentendu, comme « *ny rehetra* », « *ireo* *rehetra* », « *raha ohatra ny rehetra* ». De même pour le quantificateur existentiel, des mots utilisés sont parfois sources d'erreur, par exemple « *afaka ahitana* ». Des expressions congruentes avec les significations logiques ont cependant été identifiés dans nos résultats, comme « *ho an'izay rehetra* » et « *na iza na iza* » pour traduire le quantificateur universel et « *misy farafahakeliny* » pour le quantificateur existentiel ; leur utilisation en classe serait selon nous à développer largement. Une étude approfondie du lexique mathématique en malgache nous paraît cependant encore nécessaire afin de compléter ces résultats.

4. Conclusion et perspectives

Les résultats de nos recherches permettent un premier état des lieux de ce qu'est l'approche bilingue français-malgache dans l'enseignement des mathématiques à Madagascar. Les deux langues se sont d'abord avérées très complémentaires dans la classe lors des différentes situations didactiques mises en œuvre. Leurs fonctions didactiques sont assez spécifiques, le français étant la langue des consignes, souvent écrite, celle dans laquelle on transmet le savoir, alors que le malgache, langue naturelle des élèves, est celle de la dévolution, des communications orales et des argumentations privées. Mais les difficultés linguistiques induites par les changements de registres langagiers ne sont pas les seules qui expliquent les difficultés de nos élèves en mathématiques : leur faible niveau scolaire général est lui aussi bien évidemment en jeu. Ce constat est d'autant plus vrai en mathématiques. Nos résultats sur la formulation des concepts logiques soulignent encore davantage ces obstacles linguistiques, avec une langue malgache qui très souvent amène à des ambiguïtés sémantiques et à des confusions entre concepts. Les résultats montrent aussi l'existence d'idiomes et de mots adéquats, congruents avec le sens logique des concepts, mais peu connus des élèves. Les ambiguïtés sémantiques en ce qui concerne l'implication logique sont également présentes en français (Deloustal-Jorrand, 2004 ; Durand-Guerrier, 1999 ; Fabert & Grenier, 2011). Ceci ne peut donc pas être un critère pour écarter la langue malgache de l'enseignement des mathématiques. Mais *est-ce que cela veut dire qu'il faut écarter la langue française ?* Nos résultats montrent que, dans la classe de mathématiques, les deux langues sont complémentaires et que leur articulation est susceptible de contribuer de manière significative à une véritable formation des concepts en mathématiques (Dumont, Rakotozanany & Ratsimbazafy, 1995).

Cependant, les enseignants de mathématiques à Madagascar sont faiblement avertis de l'avantage qu'apporterait le bilinguisme dans l'enseignement de leur discipline et il faut noter que le lexique malgache induit plusieurs ambiguïtés sémantiques supplémentaires par rapport au lexique français, le cas du quantificateur universel en est un exemple. Plusieurs mots malgaches pourraient en outre entraîner des ambiguïtés sémantiques si l'enseignant les utilise d'une manière non maîtrisée, comme le montre le cas des séances observées pendant l'expérimentation. Dans ce sens, il vaudrait mieux connaître les spécificités de la langue malgache.

À notre connaissance, il n'y a pas d'études approfondies sur la traduction des concepts mathématiques en malgache et aucun manuel ne prend réellement en compte ces spécificités. De ce fait, nous soulignons que les élèves entendent et utilisent durant leurs parcours scolaires des traductions multiples et différentes d'un même objet mathématique qui peuvent parfois être contradictoires.

En fait, à Madagascar dans nos classes, enseigner les mathématiques revient souvent en grande partie à enseigner comment traduire un raisonnement logique plus ou moins confus dans la tête de l'élève et à passer d'un langage naturel à un discours symbolique et formel qui, lui, doit s'efforcer d'être rigoureux, même si cela s'avère être difficile et parfois un peu illusoire (Dumont, Rakotozanany & Ratsimbazafy, 1995). Certes, le lexique de la langue malgache semble très riche pour construire le sens de plusieurs concepts mathématiques, particulièrement en logique, mais certains mots peuvent nuire à l'appropriation d'un sens correct. C'est un problème majeur dans l'enseignement des mathématiques à Madagascar car les enseignants sont le plus souvent peu conscients de l'influence potentielle des mots utilisés en classe par eux et par leurs élèves.

Une piste que nous souhaiterions explorer dans le cadre de la formation des enseignants de mathématiques à Madagascar consisterait donc à expliciter les relations de complémentarité entre les deux langues française et malgache dans la définition des objets mathématiques et dans leurs usages en résolution de problèmes. Cela constituerait sans doute une compétence linguistique spécifique. Tout en conservant la progressivité de l'introduction du français à l'école, les débats entre élèves ou entre enseignants et élèves pourraient alors mieux être conduits en bilingue : au début majoritairement en malgache, puis on pousserait petit à petit les élèves à discuter en français mais tout en conservant ou en introduisant des mots malgaches adaptés aux mathématiques. Une telle démarche permettrait aussi aux élèves de prendre davantage la parole en classe dans un contexte où l'enseignement magistral est trop souvent la seule modalité. Nous défendons donc l'idée que *le bilinguisme français-malgache favoriserait l'enseignement des mathématiques à Madagascar*. C'est une assertion que nous devrons encore conforter par de nouvelles recherches car il reste de nombreuses questions à mettre à l'étude, notamment :

> *Comment aider ou former les enseignants de mathématiques pour qu'ils puissent accroître l'efficacité de leurs enseignements ? Quelles techniques et quels dispositifs bilingues peut-on leur proposer ? Comment inclure l'enseignement des langues française et malgache dans l'enseignement des mathématiques ?*

Références bibliographiques

Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N., Setati Phakeng M., Valero, P. & Villavicencio Ubillus, M. (2016). Introduction: An ICMI study on language diversity in mathematics education. In Barwell et al. (éds.). *Mathematics education and language diversity*. Doit : 10.1007/978-3-319-14511-2_1.

Beyssade, C. (2001). Fiction et contrefactuels. *Littérature, 123*, 67-85.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz & C. Grenier (éds). *Construction des savoirs, obstacles et conflits*. Montréal : CIRADE Les éditions d'Arc inc, (pp. 41-63).

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique*. Thèse en didactique des mathématiques de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I.

Dumont, D., Rakotozanany, E. & Ratsimbazafy, A. (1995). L'IREM de Madagascar et le problème de la langue d'enseignement. *Repères-IREM, 18*, 43-60. IREM de Madagascar.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50*, 57-79.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 5-34.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 9*, 37-67.

Fabert, C. & Grenier, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments logiques de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x, 87*, 31-52.

Millon-Fauré, K. (2010). Un phénomène d'oubli au début du collège chez les élèves migrants : source de difficulté pour les apprentissages ? *Petit x, 83*, 5-26.

Poisard, C., Martine, K., Erwan, L.-P., Stéphane, A., Gueudet, G., Hili, H., Jeudy-Karakoç, N. & Larvol, G. (2018). Enseignement et apprentissage des mathématiques à l'école primaire dans un contexte bilingue breton-français. *Spirale - revue de recherches en éducation, 54*, 2014. Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques, 129-150. https://doi.org/10.3406/spira.2014.1040

Ranaivo, V. (2007). Le système éducatif de Madagascar. *Revue internationale d'éducation de Sèvres*.
http://journals.openedition.org/ries.778

Razanavao, N. (2009). La malgachisation de l'enseignement. *Cadres d'éducation*.
http://cadreeducation.over-blog.com/article-didactique-42928929/html

Stuby, P. (2014). *Les usages de la langue française à Madagascar*. Mémoire de Master de Haute école pédagogique, Lausanne.

Tarski, A. (1960). *Introduction à la logique*. Paris-Louvain.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*, 10, 133-170.

Vergnaud, G. (2002). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. Portugais (éd.). La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation. *Actes du colloque GDM 2001* (pp. 6-27).

Zeny, C. (1983). *L'éducation de base à Madagascar, de 1960 à 1976 : motivations et contenus des changements*. Thèse de l'Université Lyon I.

Annexe 1
Quelques figures d'élèves

Figure de E7.

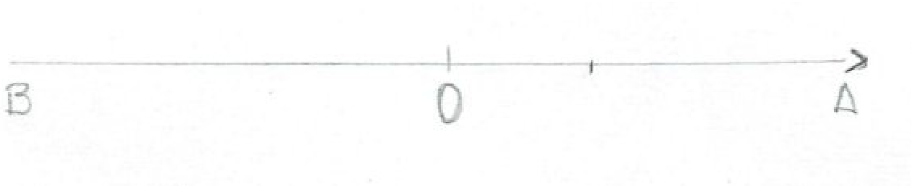


Figure de E15.

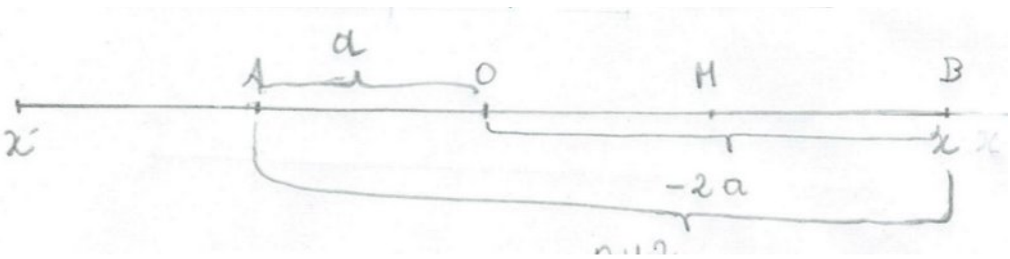


Figure de E27.

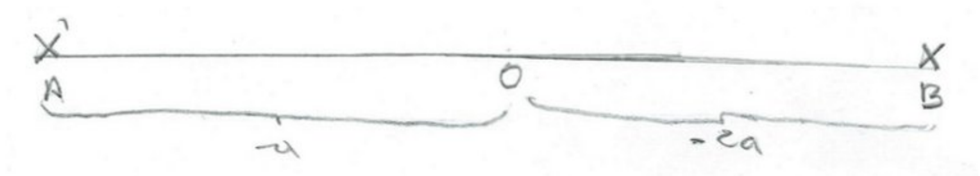
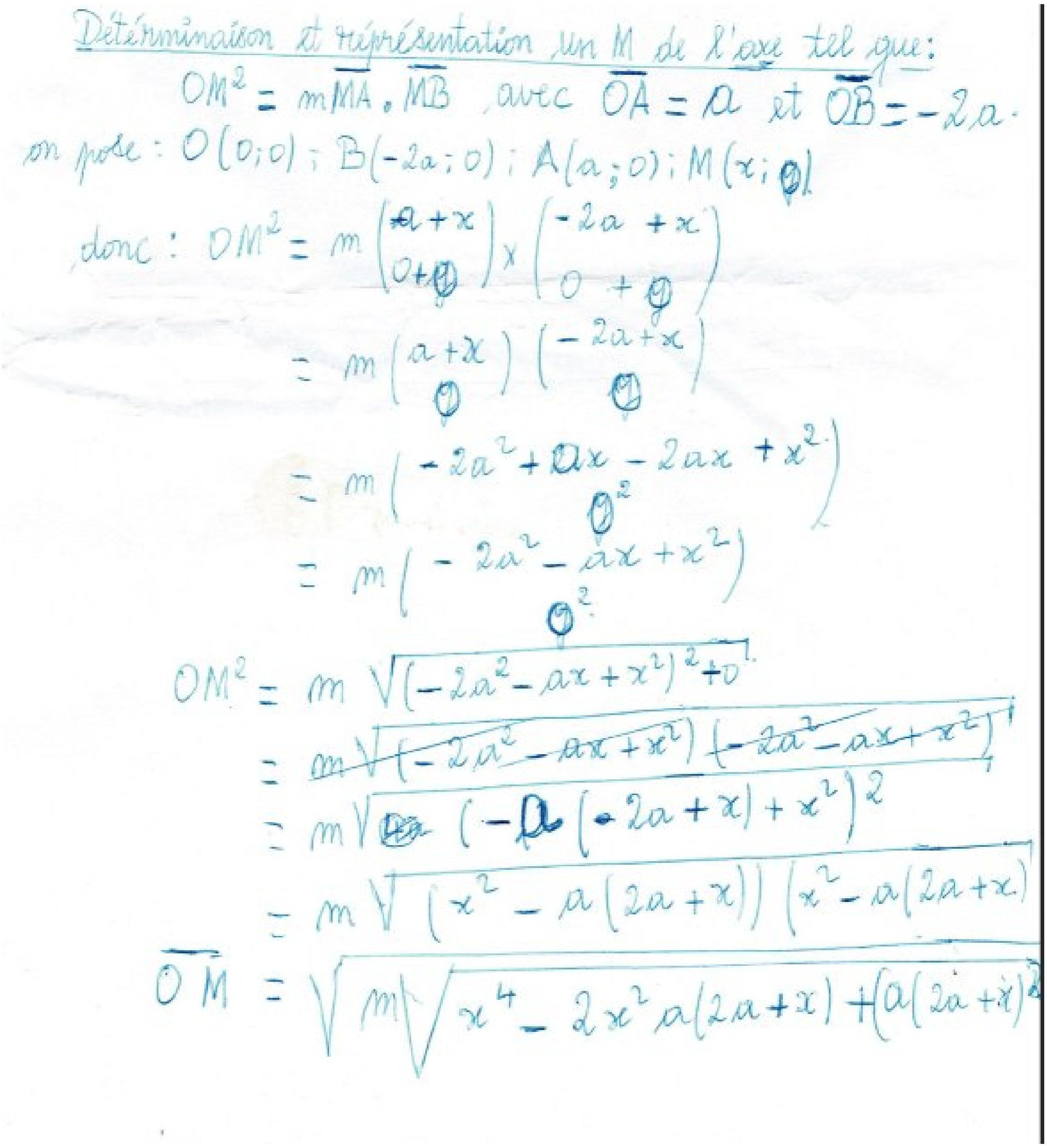


Figure de E18.

Annexe 1
Quelques productions d'élèves
pour discuter suivant les valeurs de *m* l'existence de points *M*



Détermination et représentation un M de l'axe tel que:

$OM^2 = m\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ avec $\overline{OA} = a$ et $\overline{OB} = -2a$.

on pose : $O(0;0)$; $B(-2a;0)$; $A(a;0)$; $M(x;0)$

donc : $OM^2 = m\begin{pmatrix} a+x \\ 0+0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2a+x \\ 0+0 \end{pmatrix}$

$= m\begin{pmatrix} a+x \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2a+x \\ 0 \end{pmatrix}$

$= m\begin{pmatrix} -2a^2+ax-2ax+x^2 \\ 0^2 \end{pmatrix}$

$= m\begin{pmatrix} -2a^2-ax+x^2 \\ 0^2 \end{pmatrix}$

$OM^2 = m\sqrt{(-2a^2-ax+x^2)^2+0^2}$

$= \cancel{m\sqrt{(-2a^2-ax+x^2)(-2a^2-ax+x^2)}}$

$= m\sqrt{(-a(-2a+x)+x^2)^2}$

$= m\sqrt{(x^2-a(2a+x))(x^2-a(2a+x))}$

$\overline{OM} = \sqrt{m\sqrt{x^4-2x^2a(2a+x)+(a(2a+x))^2}}$

Copie du groupe 7 (E07, E10, E24, E32).

$$OH^2 = mMA \cdot MB$$
$$mMA \cdot MB = OH^2$$
M sur l'axe, $OH^2 = mMA \cdot MB$
$$\sqrt{mMA \cdot MB} = \sqrt{OH^2}.$$
$$mMA \cdot MB = OM.$$
$$mMA = OM - MB$$
$$m = \frac{OM - MB}{MA}.$$

Copie de E21.

On détermine et représenter un poit M de l'axe, tel que
$$OM^2 = m\,\overline{MA} \cdot \overline{MB}$$
$$\frac{OM^2}{\overline{MB}} = m\,\overline{MA}$$
donc $m = \dfrac{\frac{OM^2}{\overline{MB}}}{\overline{MA}} \Leftrightarrow \boxed{m = \dfrac{OM^2}{\overline{MB} \cdot \overline{MA}}}$

Copie de E40.

$$OM = m \cdot \ldots$$
$$M = \frac{OM^2 - m}{AB} = \frac{ma - m}{-a}$$
$$\boxed{M = \frac{ma - m}{-a}}$$

Copie de E37.