LE REPÉRAGE AU COLLÈGE ET AU LYCÉE : DES ENJEUX D'APPRENTISSAGE AU CROISEMENT DES CADRES NUMÉRIQUE, GÉOMÉTRIQUE, ALGÉBRIQUE ET FONCTIONNEL (DEUXIÈME PARTIE)

Véronique CERCLÉ[1]
Lycée de Pézenas, IREM de Montpellier

Aurélie CHESNAIS[2]
Université de Montpellier, Laboratoire LIRDEF, IREM de Montpellier

Aurélien DESTRIBATS[3]
Collège Les Garrigues, Montpellier, IREM de Montpellier

Sophie DUTAUT[4]
Lycée Louis Feuillade, Lunel, IREM de Montpellier

Émeric GOSSELIN[5], **Jérôme LEBERRE**[6]
Lycée Dhuodat, Nîmes, IREM de Montpellier

Louise NYSSEN[7]
Université de Montpellier, laboratoire IMAG, IREM De Montpellier

Résumé. La première partie de cet article (Cerclé *et al.*, 2020) a permis de développer une analyse des contenus mathématiques associés au repérage et des enjeux didactiques qui en découlent. Cette deuxième partie vise à montrer comment ces analyses peuvent permettre de mieux identifier certains choix faits dans les programmes et alimenter la réflexion sur l'enseignement des notions associées (en particulier la réflexion sur la construction et la mise en œuvre de progressions et situations pour la classe), au collège comme au lycée. Nous proposons donc ici tout d'abord quelques éléments d'analyse des programmes de collège et de lycée concernant la question du repérage, du plan cartésien et des notions associées, au regard des enjeux identifiés dans la première partie. Puis, nous proposons des situations pour le collège et le lycée qui permettent de prendre en charge en partie ces enjeux d'apprentissage dans les classes.

Mots-clés. Droite graduée, repérage, plan cartésien, cadres et registres de représentation.

Abstract. The first part of this article developed an analysis of the mathematical contents associated with cartesian coordinate systems and the didactic issues that arise from it. This second part aims at showing how these analyses

1 veronique.cercle@ac-montpellier.fr

2 aurelie.chesnais@umontpellier.fr

3 aurelien.destribats@ac-montpellier.fr

4 sophiedutaut@yahoo.fr

5 emeric.gosselin@ac-montpellier.fr

6 jerome.leberre@gmail.com

7 louise.nyssen@umontpellier.fr

can help identify certain choices made in the official instructions for teaching and feed the reflection on the teaching of the associated notions (in particular the reflection on the construction and the implementation of progressions and situations for the class), in high school. We therefore propose here some elements of analysis of the middle school and high school official instructions concerning the question of cartesian coordinate systems, the Cartesian plane and the associated notions, with regard to the issues identified in the first part. Then, we propose situations for middle school and high school that allow to take care of some of these learning issues in the classroom.

Keywords. Systems of coordinates, graduate lines and scales, cartesian plan, settings and registers of representation.

Introduction

La première partie de cet article (Cerclé *et al.*, 2020) a permis de développer une analyse des contenus mathématiques associés au repérage et des enjeux didactiques qui en découlent. Il s'agit dans cette deuxième partie de montrer comment ces analyses peuvent éclairer les choix faits par l'institution dans les programmes ainsi qu'alimenter la réflexion sur la construction de situations pour les classes (et pour la formation des enseignants) afin de prendre en charge ces enjeux.

Nous proposons ainsi, tout d'abord, une synthèse reprenant les enjeux didactiques identifiés dans la première partie de l'article. Nous montrons ensuite comment ces enjeux sont traités dans les programmes. Enfin, nous présentons des situations d'enseignement pour le collège et pour le lycée qui permettront d'exemplifier et de préciser les enjeux didactiques présentés précédemment, tout en proposant des moyens de les travailler dans les classes et/ou en formation d'enseignant.

1. Les enjeux didactiques de l'enseignement et l'apprentissage du repérage, du collège au lycée

La première partie de l'article (Cerclé *et al.*, 2020) a permis d'identifier des enjeux d'apprentissage et d'enseignement associés au repérage, sur la base d'une analyse mathématique, épistémologique et didactique des contenus.

Le premier enjeu concerne le fait que la construction de la droite graduée et du repère cartésien articule plusieurs cadres et registres de représentation sémiotique au sens de Duval (1995). Cela nous a amenés à défendre l'idée qu'il s'agit d'un cadre à part entière, avec des objets mathématiques spécifiques. Ces objets, comme la droite numérique, le point repéré ou encore le repère cartésien, sont complexes. Leur construction ne peut pas être considérée comme évidente ni réduite à une problématique de représentation des objets et doit faire l'objet d'un travail avec les élèves. En outre, le travail dans le repère cartésien nécessite de distinguer et de mettre en relation les objets et leurs propriétés avec leurs représentations (en particulier dans le registre graphique qui est amené à jouer un rôle central dans ce travail), ou, pour reprendre les termes de Parzysz (1988) ou Laborde et Capponi (1994), la distinction entre les figures et leurs dessins.

Le deuxième enjeu est lié au fait que construire ces objets mathématiques complexes nécessite de questionner les notions de longueur, mesure et distance sans se contenter d'une approche trop élémentaire, « intuitive » de ces objets.

Enfin, nous avons identifié comme troisième enjeu d'apprentissage crucial le travail sur la mise en lien des nombres et des objets géométriques via la mise en bijection des ensembles de (couples de) nombres et des ensembles de points (notamment la mise en bijection de la droite avec l'ensemble des réels ou (de sous-ensembles) du plan avec (des sous-ensembles de) $\mathbb{R}^2$).

Cette construction est en outre liée à la notion de continuité dans le cas de la droite numérique.

Un travail sur ces enjeux doit s'appuyer, pour donner du sens à ces notions, sur les « potentialités » de ces objets (c'est-à-dire sur ce qu'ils permettent de faire) identifiées par l'étude épistémologique et didactique. Ces potentialités articulent là encore différents cadres (numérique, fonctionnel et géométrique) :

- la représentation des nombres sur une droite avec des enjeux autour de la notion et de la nature des nombres, ou encore la conception de la droite réelle comme un ensemble de points, avec une propriété de continuité ;
- la représentation des relations, notamment la covariation de grandeurs, avec des enjeux autour des fonctions qui permettent d'articuler différents cadres et registres de représentations sémiotiques de ces relations (numérique, algébrique, fonctionnel, graphique).
- l'algébrisation de la géométrie avec des enjeux autour du rôle des longueurs et mesures dans la construction du repère cartésien ainsi que la caractérisation algébrique des objets géométriques par des équations.

2. Quelle prise en charge de ces enjeux dans les programmes ?

Les programmes ayant été modifiés entre le début et la fin de notre étude, autant pour le collège que pour le lycée, nous en présentons une synthèse, évoquant les différentes versions. Au regard de nos questions, il apparaît surtout des convergences entre les différents programmes, voire une tendance commune. Nous préciserons toutefois les exceptions notables.

La lecture des programmes de collège, ainsi que des programmes précédents du lycée (MEN, 1999, 2009) montre que le repérage est très peu présenté explicitement comme objet d'apprentissage. Il apparaît essentiellement au prisme des enjeux de représentation[8] dans le cadre du travail sur différentes notions. Même si on peut trouver des occasions de le travailler, ce n'est jamais présenté comme un objectif essentiel, c'est toujours à l'occasion du travail sur d'autres notions, en particulier liées aux nombres au collège : nombres décimaux et fractions au cycle 3, nombres relatifs en cinquième et quatrième, fonction ou gestion de données, puis, en seconde, les réels et la droite numérique, ainsi que la géométrie repérée, la trigonométrie, etc.

Nous verrons que les derniers programmes de seconde (MEN, 2019a) et de terminale spécialité (MEN, 2019b), peuvent nuancer ce constat, avec le retour explicite de la droite numérique et de la définition de repérage associé à une base de vecteurs.

2.1. Le repère cartésien dans les programmes du collège

L'étude des programmes des cycles 3 et 4 montre qu'ils ne contiennent qu'une seule référence au repère, dans la section *« Se repérer dans le plan et l'espace »* (Chesnais *et al.*, 2016 ; Chesnais & Destribats, à paraître) et la locution « repère cartésien » n'apparaît pas. Celui-ci apparaît alors en lien avec la capacité à *« se repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal, dans un parallélépipède rectangle ou sur une sphère » (MEN, 2015, p. 377)*, à laquelle sont associées les notions d'abscisse, ordonnée et altitude. Toutefois, ces notions sont

[8] Dans un sens assez faible, comparé au sens que prend ce terme dans les travaux de didactique, en particulier de Duval, même si le fait de parler de « registres de représentation » pourrait faire penser à une référence à cet auteur, mais celle-ci n'est jamais explicitée.

présentées plutôt en lien avec l'idée de « coordonnées géographiques »[9] qu'en tant qu'objets mathématiques, comme l'indique l'extrait ci-après :

Représenter l'espace	
(Se) repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal, dans un parallélépipède rectangle ou sur une sphère. » Abscisse, ordonnée, altitude. » Latitude, longitude. Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales. Développer sa vision de l'espace.	Repérer une position sur carte à partir de ses coordonnées géographiques. Mettre en relation diverses représentations de solides (par exemple, vue en perspective, vue de face, vue de dessus, vue en coupe) ou de situations spatiales (par exemple schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques). Utiliser des solides concrets (en carton par exemple) pour illustrer certaines propriétés. Utiliser un logiciel de géométrie pour visualiser des solides et leurs sections planes afin de développer la vision dans l'espace. Faire le lien avec les courbes de niveau sur une carte.

***Tableau 1** : Extrait du programme de cycle 4 (MEN, 2015, p. 377).*

En outre, la (demi-)droite graduée apparaît essentiellement comme mode de « représentation » des nombres (MEN, 2015, p. 202 pour le cycle 3, ou par exemple p. 77 à propos des relatifs au cycle 4) parmi d'autres et non pas vraiment, là encore, comme un objet mathématique dont certaines propriétés seraient à construire. Le programme du cycle 4 évoque ainsi, dans la partie *« Nombres et Calculs »* le fait d'*« Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) »* (*ibid.*, p. 371).

Enfin, même si les programmes du cycle 3 insistent sur le fait que les nombres sont des mesures[10] (en particulier à propos des fractions et des nombres décimaux) et qu'ils permettent de repérer des points sur une droite graduée, les éléments figurant dans les anciens programmes, qui faisaient explicitement le lien entre l'abscisse et la mesure d'une grandeur par la distance à l'origine, ont été supprimés dans les programmes de 2015 : ont ainsi disparu les mentions *« Déterminer la distance entre deux points d'abscisses données »* et *« Interpréter l'abscisse d'un point d'une droite graduée en termes de distance et de position par rapport à l'origine »* (MEN, 2008, p. 20) qui figuraient dans les programmes précédents de la classe de cinquième. Ces éléments contribuaient selon nous à prendre en charge en partie les enjeux 2 et 3 pointés dans la section précédente, en visant la construction de la droite numérique via la mise en bijection de l'ensemble des points avec l'ensemble des nombres.

Cependant, même si les enjeux que nous avons pointés depuis le début de cet article ne sont pas présents explicitement, il nous semble qu'ils sont pour une part sous-jacents à certains éléments des programmes, et surtout nécessaires dans certains items, comme le fait de savoir *« Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite »* ou encore, *« En 3e, [...] faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès*

9 Notons qu'il s'agit de la seule occurrence du mot « coordonnées » dans le programme du cycle 4.

10 « Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi−droite graduée » (MEN, 2015, p. 201).

et homothéties [...] » (MEN, 2015, p. 374). On peut en effet supposer que traiter ces items nécessite d'articuler différents cadres en mettant en lien les objets géométriques (en particulier les droites), les grandeurs et leurs mesures, ainsi que les fonctions et leurs expressions algébriques. Le travail sur les fonctions est en outre présenté dans le document d'accompagnement intitulé *« Organisation et gestion de données, fonctions »* (MEN, 2016a) comme se prêtant particulièrement à un travail sur les compétences « représenter » et « modéliser » pour lequel il est pertinent de proposer des situations permettant des changements de cadre : tableau/graphique, formule/graphique, etc.

Pour finir, il faut noter l'insistance de ces programmes sur les enjeux associés à la « représentation » des objets mathématiques (en lien avec la compétence « représenter »), en mentionnant l'idée de « registres de représentation »[11]. Toutefois, cela reste bien vague au regard des enjeux qui nous intéressent dans cet article : en particulier, la question de la nature des objets géométriques lorsqu'ils sont convoqués dans le cadre de la géométrie repérée (*cf.* enjeu 1), ne semble pas identifiée comme un enjeu d'apprentissage.

La (demi-)droite graduée et le repère cartésien n'apparaissent donc pas explicitement, dans les programmes, comme des objets mathématiques dont les propriétés sont à construire pour elles-mêmes, mais celles-ci restent néanmoins nécessaires au travail sur certains items. Nous avons ainsi identifié un certain nombre de « niches »[12] au sein du programme de collège où les propriétés mathématiques de la droite graduée et du repère cartésien peuvent être travaillées avec profit. Ces niches nous servent de support pour les situations d'enseignement que nous proposons dans la partie suivante et qui permettent selon nous de contribuer à la (nécessaire) construction de certaines propriétés de la droite graduée et du repère cartésien au collège en prévision du lycée. Par ailleurs, nous renvoyons le lecteur à Chesnais et Destribats (à paraître) pour la description d'autres niches et la manière dont les propriétés de la droite graduée et du repère cartésien y sont travaillées, en comparant leur prise en charge entre des exercices issus de manuels scolaires et des situations élaborées par le groupe *IREM Didactique* de Montpellier.

2.2. Le repère cartésien dans les programmes du lycée

Le repérage cartésien

Dans l'article précédent, nous avons insisté sur le fait que le repère cartésien est un moyen de mettre en bijection le plan (un ensemble de points) et $\mathbb{R}^2$ (un ensemble de couples de nombres). Nous avons montré que le plan cartésien concrétise cette bijection, à partir de deux axes gradués, la graduation s'appuyant sur la mesure de la longueur : deux points O et I étant choisis, un point M a pour abscisse x lorsque la mesure de OM est x fois celle de OI. En langage vectoriel, le repérage cartésien revient donc à choisir trois points O, I et J (ou un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$), les coordonnées étant définies par l'égalité $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$ (ou $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$).

Nous allons voir comment les différents programmes prennent en charge cette définition.

Dans le programme de seconde de 1999 (MEN, 1999), la notion de repère était questionnée (types de repérage, dimension), et le lien entre le calcul vectoriel et le repérage des points, clairement souligné, semble bien faire référence à la définition $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$, qui n'est pourtant pas mentionnée :

---

[11] Que nous référons à Duval (1995), même si cette référence n'est pas explicite dans les programmes.

[12] Au sens de l'étude écologique des savoirs (Artaud, 1998).

Repérage dans le plan. Multiplication d'un vecteur par un réel.	Repérer des points d'un plan, des cases d'un réseau carré ou rectangulaire ; interpréter les cartes et les plans. Un repère étant fixé, exprimer la colinéarité de deux vecteurs ou l'alignement de trois points.	On pourra réfléchir aux avantages des divers types de repérage. On évoquera, en comparant les repérages sur la droite, dans le plan (voire sur la sphère ou dans l'espace), la notion de dimension. On n'utilisera le calcul vectoriel que pour faciliter le repérage des points, justifier le calcul de coordonnées et caractériser des alignements.

***Tableau 2** : Extrait du programme de seconde de 1999 (MEN, 1999, p. 33).*

Dans le programme de seconde de 2009 (MEN, 2009, p. 33), la notion de coordonnées constituait un des items du programme. Toutefois, le repère cartésien semblait considéré comme construit, comme le laisse penser l'extrait suivant :

Coordonnées d'un point du plan Abscisse et ordonnée d'un point dans le plan rapporté à un repère orthonormé.	• Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées.	Un repère orthonormé du plan est défini par trois points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet *O*. À l'occasion de certains travaux, on pourra utiliser des repères non orthonormés.

***Tableau 3** : Extrait du programme de seconde de 2009 (MEN, 2009a, p. 6).*

On notera qu'il n'était pas proposé de définition (ni formelle ni opérationnelle) des coordonnées d'un point, la notion de repère est présentée d'un point de vue purement géométrique (un triangle isocèle rectangle), sans renvoyer à la définition vectorielle. Ce programme évoque également les coordonnées d'un vecteur dans un repère, mais sans donner davantage d'éléments. Les programmes de terminale S en 2011 (MEN, 2011) évoquaient à nouveau le repérage dans le cadre de la géométrie dans l'espace : *« Le repérage permet à la fois de placer des objets dans l'espace et de se donner un moyen de traiter des problèmes d'intersection d'un point de vue algébrique »* (*ibid.*, p. 10). Mais l'égalité $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ n'y apparaît pas.

En revanche, le programme de seconde actuel (MEN, 2019a) indique clairement la définition des coordonnées d'un vecteur dans un repère : *« la relation $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ est mise en évidence »* (*ibid.*, p. 9), qu'on peut retrouver dans les contenus *« Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur »* (*ibid.*, p. 9) et dans les capacités attendues *« Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur »* (*ibid.*, page), voire aussi *« Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel »* (*ibid.*, p. 9). La notion de coordonnées d'un point n'est toutefois pas évoquée : on peut supposer que les programmes la considèrent comme construite dans une première acception au collège (mais rappelons que la seule mention de la notion de « coordonnées » dans le programme du cycle 4 évoque les « coordonnées géographiques »), et qu'elle devra être reliée aux coordonnées d'un vecteur en faisant apparaître le lien entre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et celles du point *M*.

On trouve le même souci de revenir à une définition plus explicite dans le programme de spécialité de terminale paru en 2019 (MEN, 2019b) : il mentionne l'idée de *« Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace »*, *« Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base »* (*ibid.*, p. 7) ; plus loin, on trouve encore *« Base orthonormée. Repère orthonormé. Coordonnées d'un vecteur sur une base orthonormée »* (*ibid.*, p. 8). Ces préconisations impliquent de travailler sur l'égalité $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, même si elle n'est pas explicitement citée.

La droite numérique

Dans les aménagements du programme de seconde proposés en 2017 pour tenir compte de la réforme des programmes du collège (MEN, 2017), les nombres réels sont évoqués dans le préambule de la partie *« Fonctions »* :

> *Au cycle 4, les élèves ont étudié des nombres rationnels ou irrationnels. En seconde, c'est la première fois qu'ils rencontrent l'ensemble des nombres réels. Aucun formalisme n'est attendu à ce niveau, mais on pourra définir brièvement les ensembles de nombres vus au lycée (MEN, 2017, p. 5).*

Seul le contenu *« Trigonométrie »*, évoquant l'enroulement de la *« droite numérique »*, pouvait être l'occasion de réinvestir la mise en bijection de $\mathbb{R}$ avec l'ensemble des points de la droite, puisque l'enroulement va nécessiter de placer sur la droite graduée les points d'abscisses π et 2π, qui correspondent aux points remarquables du cercle. Toutefois, les travaux de Vergnac et Durand-Guerrier (2014) ou Vergnac (2018), montrent bien que

> *La seule approche que propose l'institution [pour la construction de l'ensemble des réels] consiste à mettre en bijection l'ensemble des nombres réels et la droite numérique : elle repose sur l'intuition géométrique qui est en partie à l'origine de la construction de Dedekind. Nous avons vu que la poser comme allant de soi ne suffit pas à la faire vivre pour un élève de lycée (Vergnac, 2018, p. 7).*

Dans les nouveaux programmes de seconde (MEN, 2019a) le travail sur la droite réelle est davantage explicité. Il est rappelé le lien entre la droite graduée et les grandeurs : *« Les élèves rencontrent les nombres réels comme abscisses des points d'une droite graduée, et plus largement comme nombres permettant de mesurer des grandeurs »* et *« La notation de la valeur absolue est introduite pour exprimer la distance entre deux nombres »* (*ibid.*, p. 5). Le travail sur les ensembles $\mathbb{D}$ (décimaux relatifs) et $\mathbb{R}$ semble lui aussi s'articuler avec la droite numérique : *« Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près »* ; *« Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π »* (*ibid.*, p. 6). La référence à la bijection est d'ailleurs manifeste : *« Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement »* (*ibid.*, p. 6). Ces points du dernier programme prennent bien en charge les trois enjeux évoqués, puisqu'ils invitent à articuler cadres et registres, à revenir sur la notion de mesure et distance, et à mettre en évidence la droite numérique comme support de la bijection entre les points et les nombres. Ce que nous proposons dans cet article s'associe tout à fait à ces préconisations.

Courbe représentative d'une fonction

En ce qui concerne plus spécifiquement la question des courbes représentatives de fonctions, notons que le document *« Ressources pour la classe de seconde - Fonctions »* (MEN, 2009b) souligne l'importance d'un travail autour de cette notion. Il suggère de ne pas *« pass[er] trop vite sur le passage du nuage de points à une courbe »* (*ibid.*, p. 11). Il propose *« des questions de fond [qui] gagnent à être cultivées : peut-on joindre deux points du nuage par un segment ? Si non pourquoi ne peut-on pas le faire ou comment le prouver ? »* (*ibid.*,p. 11) Le passage du nuage de points à une courbe conduit ainsi en effet à penser la courbe comme ensemble de points « agglutinés », ce qui correspond d'ailleurs à la représentation donnée par la calculatrice : elle construit les courbes « point par point », mais ils sont « collés ». Le travail sur un algorithme de construction de courbe point par point donne l'idée de la façon dont on peut passer de points isolés à une ligne continue mais la question de la densité *vs* la continuité n'est pas si simple (Vergnac & Durand-Guerrier, 2014), comme nous l'évoquerons plus loin, à propos d'une des situations pour la classe que nous proposons dans cet article.

Le programme de seconde de 2009 (MEN, 2009a) cherche en outre à attirer l'attention sur certains aspects problématiques liés à la question de la courbe représentative d'une fonction : *« Il s'agit également d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur ou comme représentation de quelques données »* (*ibid.*, p. 3). Cet extrait de programme semble inviter à différencier « la courbe représentative » (dans notre vocabulaire, la figure, qui correspond, mathématiquement parlant, au graphe de la fonction) de ses « représentations graphiques » (les dessins), ce qui est effectivement un des enjeux que nous proposons de travailler.

Équation d'un objet géométrique

Enfin, le programme de seconde de 2019 (MEN, 2019a) va également dans le sens des enjeux que nous avons pointés en rappelant l'articulation des cadres associée à la géométrie repérée : *« Poursuivre l'étude de la géométrie repérée, qui relie nombres, calculs algébriques, fonctions et géométrie et constitue un outil utile à d'autres disciplines »* (*ibid.*, p. 8). La notion d'équation d'un objet géométrique est explicitement mentionnée dans les objectifs de géométrie : *« En particulier, introduire la notion d'ensemble de points du plan décrit par une équation, en explicitant le cas des équations de droites »* (*ibid.*, p. 8) et dans les contenus visés autour des fonctions : *« La courbe d'équation $y=f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient $y=f(x)$ »* (*ibid.*, p. 11). L'articulation entre ces domaines est soulignée : « *Ils étudient les équations de droite, font le lien entre représentations géométrique, algébrique, et fonctionnelle »* (*ibid.*, p. 8).

2.3. Conclusion concernant les programmes

L'analyse des programmes scolaires montre que les enjeux et difficultés liés à la construction des objets (demi-)droite graduée ou droite réelle et repère du plan pointés dans la partie précédente peuvent être travaillés au regard de ce qui est attendu des élèves dans leur utilisation en lien avec la géométrie repérée ou les fonctions. C'est pourquoi nous proposons des situations qui permettent réellement un tel travail.

Nous proposons dans les deux parties suivantes des exemples de situations d'apprentissage pour le collège (partie 3.1.) et le lycée (partie 3.2.) pouvant permettre de prendre en charge en partie la construction du plan cartésien comme objet mathématique.

3. Des situations d'enseignement pour contribuer à prendre en charge ces enjeux

Les situations proposées pour le collège visent plus particulièrement la construction mathématique du plan cartésien et de la notion de repérage, notamment en considérant de façon centrale l'abscisse comme correspondant à une mesure de distance. La situation C1 travaille la mise en relation des nombres avec les points de la droite. La situation C2 travaille l'articulation des cadres géométrique et numérique, via les grandeurs. Dans ces situations, on s'intéresse à l'usage « naturalisé » du repère cartésien et aux difficultés qu'un tel usage pourrait engendrer, notamment concernant ce qui a trait aux distinctions et aux liens entre nombres et grandeurs qui ne seraient pas traités dans cet usage.

Les situations proposées pour le lycée visent plus particulièrement à travailler les objets du plan cartésien : repère, droite, fonction, équation d'une courbe ou d'une droite, graphe d'une fonction. Toutes trois travaillent l'articulation géométrique/numérique, mais avec des objets et des questionnements différents. La situation L1 propose une introduction de la notion d'équation de droite qui vise à donner du sens, en tant qu'équation, à la relation obtenue. La situation L2 amène à interpréter la représentation du graphe d'une fonction comme un objet géométrique représenté dans un repère cartésien ; cette situation peut questionner la notion de repère orthonormé et l'articulation des cadres par la mobilisation, dans le cadre de la géométrie repérée, des connaissances de géométrie « à la Euclide » travaillées au collège. La situation L3 fait construire point par point la courbe d'équation $xy=10$, pour amener un questionnement sur la représentation des nombres sur la droite graduée en lien avec la question de la nature des nombres, ainsi que le rapport entre objet mathématique et représentation, la continuité d'un ensemble de points, enfin l'articulation des cadres numérique et géométrique en lien avec les fonctions.

3.1. Des situations d'enseignement pour le collège pour contribuer à construire les objets du plan cartésien[13]

Les exigences du lycée dans la manipulation des objets du plan cartésien montrent qu'un certain nombre d'objets mathématiques et de leurs propriétés doivent avoir été travaillés au collège. Ce qui nous semble particulièrement en jeu est la première articulation des cadres géométriques et numériques, via les grandeurs, dès l'introduction de la (demi-)droite graduée, mais aussi du repère cartésien. L'introduction de ces objets embarque ainsi des évolutions des conceptions des nombres, mais aussi des objets géométriques en jeu, ce qui constitue à la fois une opportunité et une difficulté à prendre en considération.

Des travaux précédents nous ont permis de recenser différents moments ou thèmes potentiellement favorables à ce travail (Chesnais & Destribats, à paraître) : le travail sur les graphiques dans le domaine « Gestion de données », le travail sur les nombres (décimaux, relatifs et fractions) en lien avec la demi-droite, puis la droite graduée, le repérage, la proportionnalité, les fonctions et les équations et inéquations[14].

Nous proposons ci-dessous de détailler deux exemples de situations d'apprentissage, dont nous pensons qu'elles sont susceptibles de permettre la prise en charge de ces enjeux dans les classes. Il s'agit notamment de travailler la notion de coordonnées comme liée à des mesures de grandeurs (question qui mobilise l'aspect cardinal du nombre et non seulement l'aspect ordinal mobilisé dans l'idée de « nombre-repère ») ; ou encore la question de la mobilisation des connaissances de géométrie euclidienne « classique » dans le cadre de la géométrie repérée. La première concerne, en sixième, l'introduction de la demi-droite graduée en lien avec le travail sur les fractions, et permet de travailler le rôle du nombre dans le repère dans ses aspects ordinal et cardinal — *i.e.* comme *repère* et *mesure d'une grandeur* (une longueur) : abscisse comme distance à l'origine, c'est-à-dire comme quantité d'unités, et écart entre deux valeurs comme distance en lien avec la soustraction des abscisses. La seconde est proposée pour des classes de

[13] Les exercices proposés dans cette partie sont également présentés dans Chesnais et Destribats (à paraître), avec l'objectif de montrer ce qu'ils permettent de travailler (en lien avec les enjeux pointés dans cet article), par rapport à d'autres exercices, issus de manuels scolaires, sur le même thème. La lecture de cet autre article peut donc paraître complémentaire à celui-ci.

[14] Le thème des transformations ainsi que l'algorithmique nous semblent éventuellement aussi des occasions possibles de travail sur ces enjeux, mais nous ne nous y sommes pas intéressés pour le moment.

quatrième ou troisième en introduction des fonctions affines et permet de travailler l'articulation des cadres, en plus de remobiliser les autres enjeux.

Situation C1 : Demi-droite graduée et fractions

La situation que nous proposons ici est pensée comme étant insérée dans une progression en sixième autour des fractions inspirée de la brochure de l'IREM de Lyon intitulée *La sixième entre fractions et décimaux* (Anselmo *et al.*, 1999[15]). La construction de la demi-droite graduée au cycle 3 constitue un premier pas vers la construction de l'objet droite réelle. Se jouent dans cette construction, à ce stade de la scolarité, des enjeux particulièrement importants en ce qui concerne d'une part les objets géométriques (la relation entre la droite et les points), d'autre part les nombres (entiers, décimaux et rationnels), ainsi que l'articulation des cadres numérique et géométrique dans l'optique de la construction de la bijection entre D (droite réelle) et $\mathbb{R}$ (*cf.* partie 2.2.).

La situation insérée dans une progression

Rappelons rapidement les étapes de la progression suggérée par Anselmo *et al.* (1999) qui présente la particularité (très pertinente selon nous) de retarder au maximum le moment de l'introduction des écritures décimales en sixième, après un travail déjà conséquent sur les fractions. Dans un premier temps, des bandes dites « bandes unité » sont partagées en demis, quarts, cinquièmes, etc. à l'aide de pliages et d'un guide-âne, et plusieurs écritures fractionnaires équivalentes de 1'unité sont rencontrées. Les mesures de segments sont codées en fractions de l'unité (mais peuvent être plus grandes qu'une unité). Toutes ces manipulations renforcent l'aspect *grandeur* du nombre par des représentations physiques et entretiennent les changements de registre de représentation en construisant une première association entre des segments et des nombres via leur longueur.

Le travail se poursuit ensuite par des constructions de « règles graduées » en fractions[16] à l'aide des bandes unités (placement du 0, du 1 et graduations régulières). Ces « règles » sont utilisées pour mesurer et à tracer des segments. C'est à ce moment qu'un « glissement » vers la demi-droite graduée s'opère : une demi-droite est ainsi graduée à l'aide des règles et la notion d'abscisse d'un point est institutionnalisée comme « nombre qui sert à repérer un point sur une demi-droite ; c'est la distance de ce point à l'origine de la demi-droite ». Des écritures équivalentes d'un même nombre (décompositions en entier et fractions) sont également rencontrées à cette occasion.

Voici l'exercice que nous proposons à ce stade de la progression :

[15] La date relativement ancienne de la publication n'en rend pas le contenu moins pertinent actuellement selon nous, malgré les divers changements de programmes.

[16] Le fait qu'il s'agisse de règles graduées en fractions est fondamental : l'idée que les élèves ont d'une règle graduée a l'avantage de donner rapidement du sens à l'idée d'origine et de régularité de la graduation en lien avec la notion d'unité mais il convient d'éviter que les élèves associent l'idée de mesure de longueur à un nombre décimal, voire à un décimal à une seule décimale, véhiculée par la règle graduée usuelle.

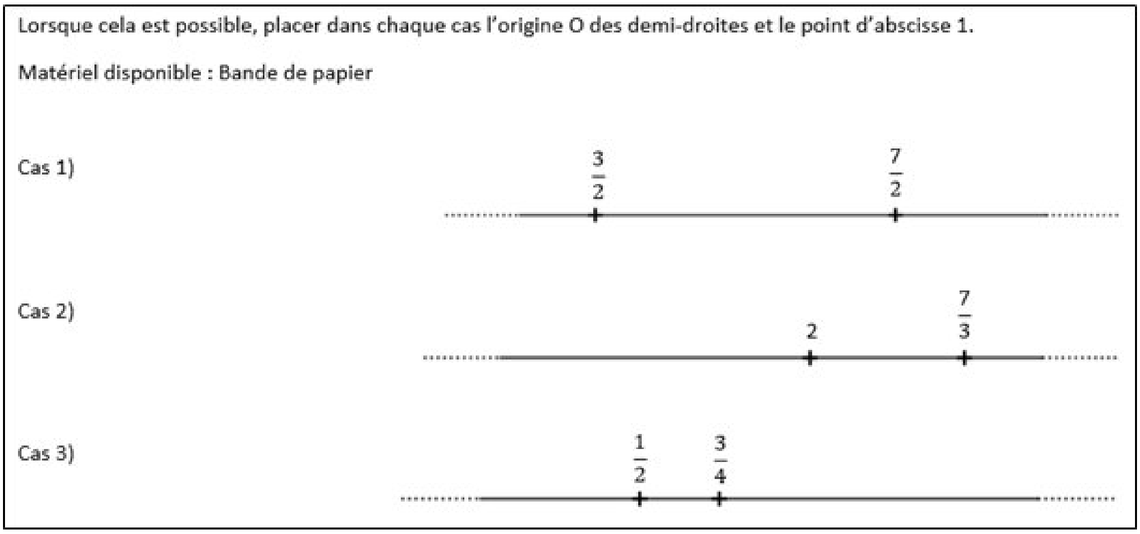


***Figure 1** : Un exercice en sixième sur le thème « fractions et demi-droite graduée ».*

Objectifs d'apprentissages et procédures attendues

La tâche proposée consiste, dans chaque cas, à retrouver l'origine de la demi-droite à partir des abscisses de deux points (codées en fractions de l'unité), à l'aide d'une bande de papier qui sert de règle informable[17]. Il faut pour cela exprimer, à partir des deux abscisses données, la différence sous forme fractionnaire afin de mettre en évidence l'unité dans chaque cas. Un report de mesure à l'aide de la bande unité permet ensuite de retrouver le point d'abscisse 1 et l'origine.

Détaillons rapidement les procédures attendues : dans le premier cas, la longueur donnée[18] correspond à quatre demis d'unité, soit deux unités complètes. Après avoir fait cette première déduction, l'élève peut utiliser cette longueur reportée sur sa bande de papier pour exprimer l'unité par pliage, puis une demi-unité par la même procédure. Par reports successifs de longueur un demi d'unité, l'élève retrouve l'origine de la demi-droite. Cette stratégie s'applique dans les deux cas suivants, « à la variable numérique près » : dans le deuxième cas, l'écart entre les deux abscisses se trouve en faisant intervenir le fait que deux unités correspondent à six tiers. Dans le dernier cas, les deux abscisses n'ont pas le même dénominateur ; cela nécessite de changer de représentant pour un demi par deux quarts afin de pouvoir exprimer la distance entre les deux abscisses.

Notons que dans le premier cas, le fait que le dénominateur des deux fractions soit le même pourrait amener certains élèves à graduer simplement « à l'œil » le segment en ajoutant 4, 5 et 6 entre 3 et 7, puis 2, 1 et 0 en respectant la régularité, ce qui ne suppose pas réellement de travailler sur des fractions, mais revient à raisonner sur des naturels en ne convoquant que l'aspect ordinal des nombres. Cette procédure est invalidée par le fait que les fractions n'ont pas

[17] La « règle informable » est définie par Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013) comme une « bande de papier rectiligne sur laquelle on peut écrire », c'est-à-dire indiquer des informations. Elle permet notamment de coder une longueur (en mettant deux marques correspondant aux extrémités d'un segment sur la bande) pour la reporter ailleurs.

[18] Rappelons que la mesure de cette longueur est l'écart entre les deux abscisses. On peut parler dans les deux cas de distance : entre des points et entre des nombres, mais sans oublier qu'il s'agit mathématiquement parlant de deux notions différentes (*cf.* la première partie de l'article, Cerclé *et al.* (2020).) : ne pas faire cette distinction contribue selon nous à amalgamer points et nombres de façon préjudiciable pour la conceptualisation de la bijection entre droite et nombres.

le même dénominateur dans les deux autres cas.

Ces procédures nécessitent de nombreuses « adaptations des connaissances ». Rappelons que Robert (2005) définit une *adaptation* d'une connaissance pour résoudre un exercice comme étant « ce qu'il faut faire » avec cette connaissance pour l'appliquer dans ce cas. Elle correspond grossièrement, de fait, à une « difficulté » pour les élèves, même si la connaissance en question a déjà été rencontrée auparavant. Les adaptations sont classées en six catégories :

(A1) les reconnaissances (partielles) des modalités d'application des notions — dont l'exemple typique est la reconnaissance d'une configuration qui n'est pas la configuration « de base » pour appliquer un théorème,

(A2) l'introduction d'intermédiaires tels que notations, points, expressions,

(A3) les mélanges de plusieurs cadres ou notions et les changements de points de vue,

(A4) l'introduction d'étapes,

(A5) l'utilisation de questions précédentes dans un problème,

(A6) l'existence de choix, forcés ou non.

Les adaptations des connaissances sont à la fois porteuses des enjeux d'apprentissage, mais aussi susceptibles de générer des difficultés que l'enseignant doit anticiper.

Les adaptations de connaissances suivantes sont présentes dans la situation :

- reconnaître la fraction comme codant des mesures de longueur (avec la fraction comme codant un partage de l'unité) : la reconnaissance (A1) de ce rôle des fractions doit avoir été travaillée en amont, ce qui est le cas dans le scénario auquel nous nous référons ;
- une difficulté peut venir de la nécessité de prolonger la demi-droite : cette adaptation de type (A2) peut avoir été travaillée en géométrie et est l'occasion de mobiliser les connaissances de géométrie dans un travail sur les nombres ;
- le fait que le raisonnement nécessite plusieurs étapes (adaptation (A4)) peut aussi constituer une difficulté ;
- de façon plus globale, on peut parler d'une adaptation de type (A3) pour le fait de mélanger des connaissances appartenant au cadre numérique et au cadre géométrique ; on peut également l'associer à la préconisation des programmes autour des différentes représentations d'un même nombre.

Objectifs liés aux enjeux identifiés précédemment

L'intérêt de cet exercice au regard des enjeux identifiés dans la première partie de l'article (Cerclé *et al.*, 2020) tient principalement au travail sur le lien entre le nombre servant de mesure (aspect cardinal) et le nombre servant de repère (aspect ordinal), renforcé par l'utilisation d'une bande de papier. En effet, le fait d'avoir deux repères numériques suppose d'interpréter l'écart entre les deux nombres (distance entre deux nombres) comme correspondant à la mesure d'une longueur (mesurant la distance entre deux points) pour retrouver l'unité ; retrouver l'origine suppose ensuite de concevoir l'abscisse d'un point comme indiquant la distance entre ce point et l'origine. Le sens de l'abscisse d'un point permet ainsi d'établir un lien entre le nombre comme repère d'un point et la distance de ce point à l'origine (en lien avec la distance à zéro d'un nombre), avec l'idée de mesure comme nombre d'unités. Cela correspond essentiellement aux enjeux 1 et 2 identifiés précédemment.

Les expérimentations de cette tâche (ou de versions approchantes) dans des classes de sixième ont montré qu'elle permet un réel travail sur la notion d'abscisse et d'unité en lien avec la mesure des longueurs (Cerclé *et al.*, 2016).

Il s'agit ainsi de travailler le lien entre les objets géométriques et les nombres, ce qui permet en outre de contribuer à la conceptualisation des fractions et des objets géométriques en jeu (points, droites et demi-droites).

Situation C2 : Une droite dans un repère pour travailler le lien entre géométrie, proportionnalité, fonctions et repère cartésien en troisième

Exercice n°1 :

Dans le repère graphique d'origine O :

- M est le point de coordonnées $(4\ ;\ 3)$.
- P est le point de la droite (OM) qui a pour abscisse 7.

a) Quelle est l'ordonnée du point P ?

b) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à la droite (OM) ?

- $C(8;6)$
- $D(2;1{,}6)$
- $E(9;7)$
- $F(-4;-3)$
- $G(-1;0{,}75)$
- $H(12;9)$

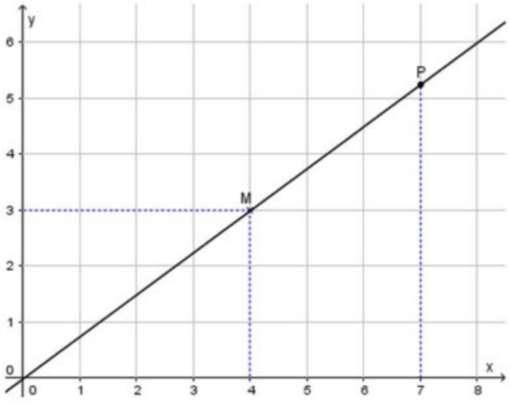


***Figure 2** : Énoncé de l'exercice de troisième.*

Nous proposons cet exercice en introduction au thème des fonctions linéaires et affines. Il s'agit de construire avec les élèves un premier lien entre fonctions linéaires, proportionnalité et théorème de Thalès, en amenant les élèves à justifier une partie de la caractérisation de l'appartenance des points à une droite par la relation entre abscisses et ordonnées (prémisses de l'équation de la droite comme relation algébrique caractéristique des coordonnées des points de la droite).

Objectifs liés aux programmes

Ce travail entrait tout à fait en résonance avec la préconisation des programmes en vigueur au moment de l'élaboration de la situation (programmes de 2008) : *« Connaître et utiliser la relation entre les coordonnées d'un point qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire »* (MEN, 2008). Précisons également que le choix de points appartenant ou n'appartenant pas à la droite permet de travailler les deux implications correspondant à la caractérisation de la droite par son équation. Ce travail s'inscrit aussi dans la préconisation des programmes de 2015 (*cf.* l'analyse des programmes développée ci-avant) de relier *« proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties »* même si nous n'avons pas inclus la notion d'homothétie dans notre proposition et si la notion de fonction reste implicite. Enfin, l'exercice n'aborde pas explicitement la question de la généralisation dans le registre algébrique du résultat observé dans un cas particulier. Cette généralisation est prévue dans le projet d'enseignement pour être abordée dans un exercice ultérieur.

Nous proposons dans Chesnais et Destribats (à paraître) une nouvelle version de cet exercice qui met davantage en avant la notion de fonction. En prolongement de ce qui est proposé ci-dessus, il s'agit d'établir que la droite est la courbe représentative de la fonction qui à x associe $0{,}75\,x$, ou encore de préparer l'idée d'équation de droite en caractérisant les points de la droite par le fait que leurs coordonnées vérifient la relation $3x-4y=0$ (ce qui fait écho aux enjeux qui seront travaillés plus précisément dans les situations proposées pour le lycée, notamment la première, voir plus loin).

Objectifs liés aux enjeux identifiés précédemment

Cet exercice a principalement pour but de lier l'objet *droite* dans un repère cartésien à la proportionnalité, puisqu'on sera amené à caractériser l'appartenance d'un point par une relation de proportionnalité entre les coordonnées et d'en proposer une justification reposant sur un raisonnement géométrique. En particulier, il s'agit de faire intervenir les connaissances de géométrie « à la Euclide » (en l'occurrence le théorème de Thalès) dans un cadre repéré (*cf.* enjeu 1) ; en outre, s'inscrivant dans l'enjeu 2, il s'agit de remobiliser le fait que les abscisses et ordonnées, dans le repère cartésien, correspondent à des mesures de grandeurs et non seulement à des « repères » (aspect « ordinal » des coordonnées), en poussant les élèves à les interpréter comme des mesures de longueurs (aspect « mesure » de la coordonnée).

Cela suppose d'articuler divers domaines : géométrique, grandeurs et mesures, numérique et fonctionnel, même si ce dernier peut rester plus implicite.

Les prérequis sont, dans le cadre numérique, la notion de proportionnalité ; dans le cadre géométrique (classique), la notion de point appartenant à une droite et le théorème de Thalès dans une configuration simple. En ce qui concerne le repère cartésien, les élèves doivent savoir lire des coordonnées (abscisse et ordonnée) et savoir que tout point du plan est représenté par un unique couple de nombres (de fait, réels, même si cela n'est pas encore formalisé pour les élèves), ce qui renvoie à l'enjeu 3.

Procédures possibles

La première question peut donner lieu à trois procédures distinctes :

1) La procédure la plus probable est selon nous lecture graphique directe des coordonnées des points, dans la mesure où il s'agit d'un type de tâche bien connu des élèves à ce niveau et typique du travail proposé autour du repérage. L'incertitude de mesure implique que l'on peut s'attendre à une variété de réponses de la part des élèves qui peut être discutée en termes de précision. Une variante pourrait consister à essayer de mesurer « le plus précisément possible » (ou ce que les élèves considèrent comme tel), par exemple en mesurant à la règle et en utilisant une échelle, etc.
2) Une autre procédure est l'utilisation de la propriété vue en quatrième reliant l'alignement de points et de l'origine du repère avec la proportionnalité des grandeurs représentées en abscisse et en ordonnée. Le coefficient $\frac{3}{4}$ est un nombre identifiable et manipulable par les élèves à la fois en valeur fractionnaire et décimale, sans être un entier. Cette procédure est certainement moins facilement mobilisable spontanément par les élèves que la précédente, d'autant plus qu'il est peu probable que ce type d'énoncé la leur évoque. Toutefois, elle peut émerger suite à la mise en évidence des limites de la procédure précédente.
3) Une procédure plus élaborée encore consiste à justifier, en utilisant le théorème de Thalès, le théorème de proportionnalité mobilisé dans la procédure précédente. Cela suppose de « convertir » le problème en une tâche de géométrie « classique ». Cette procédure comporte toutefois des adaptations de taille :
   - il faut reconnaître la configuration géométrique (adaptation (A1)) malgré le fait qu'elle est présentée dans un repère cartésien, puis nommer les points de cette figure (adaptation (A2)) ;
   - la condition de parallélisme des droites est à déduire des propriétés du repère orthonormé

(adaptations (A1), (A4), (A2) et (A3)), de même que les angles droits que les élèves peuvent identifier.

- les abscisses et ordonnées sont à considérer non pas seulement comme des repères mais comme des mesures longueurs (adaptations (A3) et (A2)), ce qui n'est pas *a priori* très fréquent dans les tâches de collège.

Compte tenu des nombreuses adaptations qu'elle comporte, nous pensons que cette dernière procédure ne sera pas mobilisée spontanément par les élèves mais nous considérons qu'elle peut néanmoins être visée, avec une intervention du professeur. En effet, d'une part, elle permet de donner une justification du théorème admis en quatrième, et, d'autre part, les adaptations qu'elle contient permettent précisément de faire travailler aux élèves l'articulation des différents cadres dans le repère cartésien et préparent ainsi à la géométrie repérée.

Remarquons que le coefficient de proportionnalité qui émerge de l'application du théorème de Thalès (qui peut être interprété comme un agrandissement — ou une réduction, selon le rapport considéré), ne correspond pas au coefficient de proportionnalité entre les abscisses et les ordonnées des points ; il ne correspond donc pas au coefficient directeur de la droite. En effet, le raisonnement mobilisant le théorème de Thalès relie les abscisses (et ordonnées) de deux points donnés sur la droite par un coefficient multiplicatif alors que l'équation de droite exprime le lien direct entre l'abscisse d'un point appartenant à la droite et son ordonnée par un autre coefficient multiplicatif[19]. Cela complique le passage à la formule générale de caractérisation des points de la droite, mais nous n'aborderons pas ici cette question, reportée dans notre scénario à une étape ultérieure.

La seconde question vise la caractérisation d'un point appartenant à la droite par application du coefficient de proportionnalité à l'abscisse du point pour comparer ce produit à l'ordonnée proposée. En effet si une procédure appuyée sur le graphique peut suffire pour les points $C(8;6)$ et $G(-1;0{,}75)$, il n'en est pas de même pour le point $D(2;1{,}6)$ compte tenu de l'imprécision inhérente au cadre graphique, ou pour les points $E(9;7)$, $F(-4;-3)$ et $H(12;9)$ compte tenu de la fenêtre ; une procédure théorique (numérique ou géométrique) est nécessaire pour lever l'incertitude.

Le cadre numérique utilisant la proportionnalité peut être mobilisé pour les points *C*, *D* et *E* : on peut remarquer que les coordonnées du point *C* sont le double de celles du point *M*. Les calculs $2\times0{,}75=1{,}5$ et $9\times0{,}75=6{,}75$ permettent de conclure que les points *D* et *E* n'appartiennent pas à la droite et qu'ils se situent « au-dessus » de cette dernière.

Enfin pour les points $F(-4;-3)$ et $H(12;9)$, la procédure de lecture graphique n'offre pas, de prime abord, la possibilité de valider et conclure. La procédure attendue est de type numérique, soit par le calcul, soit en utilisant la linéarité de la proportionnalité, ou encore la réciproque du théorème de Thalès, à condition d'identifier les mesures de longueurs en négligeant le fait qu'il s'agit de nombres négatifs. Notons qu'un raisonnement géométrique s'appuyant sur la symétrie de la droite par rapport à l'origine permet de conclure. Nous pensons que cette procédure ne sera pas mobilisée par les élèves, mais offre à l'enseignant la possibilité d'évoquer la mobilisation, au sein du repère cartésien, de connaissances géométriques.

Quelques retours sur des expérimentations de cette situation, en troisième et en formation

La situation a été mise en œuvre dans deux classes de troisième par un des enseignants membre du groupe IREM. Elle a par ailleurs été utilisée comme support dans une séance de formation de

[19] Ce qui correspond à la distinction entre rapport scalaire et rapport fonction dans la situation de proportionnalité.

professeurs de mathématiques débutants (T1-T2[20]).

En troisième

Le déroulement observé confirme, pour la première question, une grande diversité des procédures employées par les élèves. Ainsi, la lecture graphique reste largement majoritaire dans les deux classes, le recours à la proportionnalité apparaît chez environ un élève sur huit, et la mobilisation de connaissances géométriques a été observée chez un seul élève, sans arriver à la mener à terme (identification d'une configuration de Pythagore, calcul de OM dans la question 1). Le questionnement concernant la précision de la lecture graphique a été fortement présent dans plusieurs raisonnements d'élèves, allant jusqu'à des techniques s'appuyant sur la régularité des « pointillés » sur le dessin ; et les élèves ont donné une variété de réponses approchées sans qu'une réponse en particulier ne soit validée collectivement. Ce fut l'occasion pour l'enseignant d'aborder l'imprécision engendrée par des lectures graphiques en lien avec la distinction entre les figures géométriques et leur représentation. En ce qui concerne les réponses s'appuyant sur la proportionnalité, l'enseignant a exigé des élèves une justification. Le déroulement montre que les connaissances nécessaires à la résolution, si elles sont mobilisables, ne sont pas disponibles, c'est-à-dire que l'enseignant doit soutenir l'élaboration du raisonnement. Ainsi, les élèves n'ont pas reconnu spontanément une configuration de Thalès[21] et certains n'ont pas non plus identifié que le fait de connaître les coordonnées des points fournissait les mesures des longueurs des segments.

La seconde question a montré que les élèves, pour confirmer l'appartenance des points à la droite, avaient recours à un procédé calculatoire dans le cadre numérique (mobilisant la proportionnalité) plutôt qu'à la représentation de la droite dans le registre graphique. Ils articulent ainsi les cadres en mobilisant implicitement la bijection entre les points du plan et les couples de nombres correspondant à leurs coordonnées. La caractérisation de l'appartenance à la droite par une relation numérique (de proportionnalité) satisfaite par les coordonnées apparaît alors.

En conclusion, cette situation possède un potentiel certain par rapport aux enjeux d'enseignement qui nous intéressent dans cet article comme nous l'avons détaillé tout au long de l'analyse. Elle nécessite toutefois une certaine expertise enseignante, car elle présente quelques difficultés de mise en œuvre. La gestion de la variété des procédures et l'invalidation des procédures par lecture graphique, notamment, présente certaines difficultés, de même que le fait d'amener la nécessité de la justification de la proportionnalité à l'aide du théorème de Thalès. Les expérimentations ont toutefois montré qu'elle permet de mettre en évidence pour les élèves la mobilisation des connaissances de géométrie classique dans le cadre repéré ainsi que le fait d'identifier les abscisses comme codant des mesures de longueurs. Cette situation nous semble pouvoir être reprise avec profit en seconde, avec davantage d'autonomie pour les élèves dans la mobilisation des connaissances.

En formation d'enseignants de mathématiques débutants

Sans entrer dans les détails, il nous semble intéressant de mentionner dans cet article que, lorsque des enseignants débutants ont été confrontés à l'exercice, la lecture graphique a bien entendu été

[20] T1 et T2 désignent respectivement les enseignants dans leur première année ou deuxième année en tant que professeur titulaire.

[21] Les deux triangles emboîtés ont été repassés au feutre sur l'énoncé projeté au tableau, puis le vidéoprojecteur a été éteint afin de faire apparaître la figure géométrique dans le registre plus classique de la feuille blanche en faisant « disparaître » le repère.

identifiée comme n'étant pas une procédure valable, mais la hiérarchie des procédures entre la mobilisation de la proportionnalité et celle du théorème de Thalès n'est pas apparue comme évidente. Ils ont en effet considéré ces deux procédures comme équivalentes du point de vue de leur valeur mathématique et de leur difficulté pour les élèves, ne pointant que le fait qu'il s'agissait de deux procédures différentes, l'une géométrique et l'autre numérique.

Les enseignants n'identifient pas non plus les adaptations pointées dans l'analyse *a priori* et qui constituent selon nous des enjeux importants. Ainsi, le fait de mobiliser des connaissances de géométrie dans le repère ou encore d'interpréter les coordonnées comme des mesures de longueurs semblent pour eux aller de soi et ils n'identifient pas les difficultés confirmées lors dans les expérimentations que cela pose aux élèves. Cela confirme pour nous l'importance d'un travail sur les enjeux identifiés dans cet article en formation d'enseignants.

3.2. Des situations d'enseignement pour le lycée

Nous nous sommes intéressés aux contenus qui constituent une part importante du programme de seconde et mettent en jeu le repère cartésien : la géométrie repérée, la notion d'équation de droite et la représentation graphique des fonctions. Au collège, les mathématiques comportent de la géométrie euclidienne et du repérage (représentation de données et fonctions), mais dans des « mondes » généralement séparés (les situations mentionnées dans la partie précédente constituent, de ce point de vue, des propositions d'alternatives). En seconde, l'entrée dans la géométrie repérée et l'étude des fonctions supposent, comme nous l'avons montré dans la première partie de cet article (Cerclé *et al.*, 2020), la construction du plan cartésien comme incluant de nouveaux objets mathématiques (le repère, le point repéré, l'équation de courbe). Ce travail dans le plan cartésien articule des objets issus de différents cadres (algébrique, fonctionnel, numérique, géométrique), permettant d'approfondir la notion d'équation, de fonctions, les questions liées à la nature des nombres et des objets géométriques. Il introduit également de nouveaux outils pour résoudre des problèmes géométriques (de longueurs, d'alignement ou d'appartenance à une courbe) ou fonctionnels (variations) basés sur la « traduction » de ces notions en termes numériques par l'intermédiaire des coordonnées cartésiennes.

Le repère cartésien est aussi associé à l'idée d'une représentation (au sens des registres de représentation sémiotiques) des objets mathématiques (nombres, courbes, fonctions) : on représente ces objets dans le registre graphique sur lequel on dessine un repère. Vont donc se poser des difficultés liées à la représentation : la distinction entre dessin et figure, qui se concrétise dans la distinction entre représentation graphique (le dessin, dans le registre graphique) et courbe représentative pour une fonction, par exemple (la figure étant le graphe de la fonction comme objet géométrique « théorique », caractérisé comme un ensemble de points) et dans la distinction entre valeur exacte et valeur approchée pour ce qui concerne les mesures.

Nos travaux précédents (Cerclé *et al.*, 2016) nous ont enfin permis d'identifier que la notion d'équation de droite (ou de courbe) est souvent construite comme une écriture formelle où le lien avec la notion algébrique d'équation (et typiquement avec le mot « solution ») n'est que peu ou pas mis en lumière. Il nous semble important de donner du sens à des locutions comme « équation de droite », « ensemble de points » ou encore « caractérisation cartésienne de cet ensemble » utilisés dans ce contexte.

Nous présentons ici trois situations qui permettent de contribuer à travailler ces questions au lycée. Pour chacune des situations, la consigne initiale (telle qu'elle est peut être donnée aux élèves et qui constitue le « but » de la situation, c'est-à-dire ce que les élèves doivent obtenir), ne laisse pas forcément deviner les objectifs d'apprentissage visés par l'enseignant (ses intentions). Nous détaillerons des objectifs d'apprentissage possibles pour chaque situation, pour montrer comment celle-ci permet de prendre en charge une partie des enjeux pointés précédemment. Nous donnerons enfin quelques éléments de retours sur les expérimentations des situations que nous avons réalisées dans des classes.

***Situation L1 : L'équation* $3x-2y=5$**

L'intention essentielle de cette situation est de donner du sens à la locution « équation de droite » qui relie les notions d'« équation » et de « droite », et qui amène à regarder la droite comme ensemble de points dont les coordonnées sont solutions d'une équation. Un premier échange autour de l'écriture « $3x-2y=5$ », écrite au tableau sans autre consigne que « de quoi s'agit-il ? » (*cf.* le détail du scénario plus loin) permet de (re-)questionner le vocabulaire (équation, inconnues) pour définir ce qu'est une solution (« un couple de nombres pour lequel l'égalité est vraie ») et ce que signifie « résoudre une équation » (trouver toutes les solutions). Commence ensuite la recherche de couples-solutions qui conduit rapidement à l'idée qu'il y en a « beaucoup » (on peut relancer régulièrement la recherche en annonçant le nombre de solutions trouvées par tel ou tel élève). L'enseignant propose ensuite aux élèves de chercher un procédé qui permette de les trouver toutes. Les élèves pourront proposer une méthode fonctionnelle (je choisis x et je calcule le y correspondant), exploiter une régularité (quand on augmente x de 1, y augmente de 1,5) ou autre (voir plus loin). L'idée de représenter graphiquement les couples obtenus par des points dans un repère, éventuellement introduite par l'enseignant, permet de conjecturer que l'ensemble des solutions forme une droite : ceci justifie qu'une telle équation est dite « équation de droite ».

Objectifs liés aux programmes

Cette activité peut être proposée en introduction de la notion d'équation de droite, plutôt en deuxième partie de la progression de l'année de seconde. Elle s'inscrit dans la partie *« Représenter et caractériser les droites du plan »* (MEN, 2019a, p. 10) qui précise *« Au cycle 4, les élèves ont rencontré les équations de droite pour représenter les fonctions affines. En seconde, ils étendent l'étude à la forme générale des équations de droite »* (*ibid.*, p. 10). L'élève devra savoir, à l'issue de la seconde, *« Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente »* (*ibid.*, p. 10).

L'analyse des manuels montre que le travail sur l'équation de droite se concentre généralement sur la compréhension de la démonstration, censée donner à la fois du sens à l'équation obtenue (comme condition nécessaire et suffisante pour qu'un point appartienne à la droite) et un moyen pour déterminer une équation d'une droite à partir de données. Or cet article montre que l'équation de droite relève d'enjeux cruciaux plus larges. Notre objectif est de privilégier le sens de l'expression « équation de droite » en mettant en évidence qu'il s'agit bien d'une équation (au sens où nous nous intéressons à ses solutions) et que ses couples de nombres solutions sont les coordonnées de points qui forment une droite. Cette compréhension pourra alors se généraliser à la notion d'équation de courbe et être utile pour définir la courbe représentative d'une fonction.

Cette situation fait écho à un exemple proposé dans le document *Ressources pour la classe de seconde - Notations et raisonnement mathématiques* (MEN, 2009c) :

1.1. Notion d'ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion

Exemple 1

Soit (O, I, J) un repère orthonormal d'unité 1 cm. On considère les points suivants :

A(2 ; 5,5), B(1,1 ; 1,21), C$(\sqrt{3};2\sqrt{3})$, D$(\frac{2}{3};\frac{3}{2})$, E(–1,21 ; –1,1) et F$(-\frac{5}{3};-8)$.

Parmi ces points, quels sont ceux dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 = 25$?

Placer dans le repère d'autres points dont les coordonnées vérifient cette relation.

L'objectif de cet exemple est de faire comprendre la notion d'appartenance à un ensemble, ici un ensemble de points défini analytiquement. Cet exemple unique est insuffisant. Un scénario possible d'exploitation dans la classe peut être de grouper les élèves et de proposer différentes relations du type : $3x - 2y + 5 = 0$; $xy = 1$; $y = x^2$; $x = y^2$; $3x + 5 = 0$… chaque groupe choisissant une relation différente.

À cette occasion, la définition de la courbe représentative d'une fonction peut être travaillée ou reprise.

Figure 3 *: Extrait du document : Ressources pour la classe de seconde - Notations et raisonnement mathématiques (MEN, 2009, p. 2).*

Notre situation peut permettre de répondre à la suggestion en fin de cet extrait. En effet la transformation de l'équation sous la forme $y=1{,}5x-2{,}5$ (forme réduite/affine de l'équation de départ) s'interprètera comme la caractérisation de la courbe représentative de f : $y=f(x)$ appliquée à l'expression de la fonction affine sous-jacente : $f : x \longmapsto 1{,}5x-2{,}5$.

Mais cette transformation permet aussi d'interpréter les égalités $3x-2y=5$ ou $y=1{,}5x-2{,}5$, d'une part comme relation entre x et y et d'autre part comme équation. Dans le document cité ci-dessus, l'égalité $3x-2y=5$ est vue comme une relation. Elle peut aussi être présentée comme une équation au sens de « phrase ouverte » (Durand-Guerrier, 1999 ; Cerclé, 2019), définie par le document *Ressources collège Calcul littéral* (MEN, 2016b) à propos des différentes significations du signe égal :

> *en rupture avec chacune de ces significations [du signe égal] qui sous-entendent qu'une certaine propriété est vraie (même si c'est dans des conditions différentes), le signe « = » acquiert un statut tout autre dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, le signe « = » apparaît alors dans des énoncés dans lesquels, en remplaçant la lettre par un nombre, on obtient une égalité qui, selon la valeur de ce nombre, est soit vraie, soit fausse (MEN, 2016b, p. 5).*

Ce point de vue définit donc l'équation comme une égalité qui met en jeu des lettres (appelées inconnues) et qui est vraie ou fausse selon la valeur attribuée aux lettres. Il définit aussi clairement la notion de solution : « Le but de la résolution est de trouver toutes les valeurs (et rien qu'elles) qui, substituées à l'inconnue, rendent l'égalité vraie ». La forme $y=1{,}5x-2{,}5$ (donnée au départ ou obtenue par transformation) fait faire le lien entre les phrases « les coordonnées vérifient la relation » et « les coordonnées sont solutions de l'équation », et consolide la compréhension de l'écriture $y=f(x)$ à la fois comme relation (fonction) et comme équation.

Objectifs liés aux enjeux identifiés précédemment

Les cadres algébrique, fonctionnel, numérique et géométrique s'articulent et se croisent dans cette situation ainsi que les changements de registres associés (numérique/algébrique, numérique/graphique, algébrique/graphique).

Le but pour les élèves est d'établir un procédé qui permette de résoudre l'équation, c'est-à-dire d'en « donner toutes les solutions » (même si le procédé ne les donne qu'en extension et ne permet pas de les écrire toutes, ce qui constitue en soi un des objectifs d'apprentissage). Pendant cette séance, le passage du registre algébrique (dans lequel est écrite l'équation initiale) au registre graphique (dans lequel sont représentés les points dont les coordonnées sont solutions de l'équation) se fait par l'intermédiaire du registre numérique (les listes de couples de nombres solutions). On conjecturera ainsi que l'ensemble des points associés aux couples-solutions forme une droite, ce qui permet de (re-)travailler la droite comme un ensemble de points en bijection avec un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. On pourra alors vouloir rechercher un lien direct entre le registre algébrique (l'équation) et le registre graphique (une représentation de l'ensemble des solutions) sans passer par le registre numérique, par exemple en interprétant graphiquement les coefficients de la fonction affine.

Cette situation est donc en lien avec les potentialités du repère cartésien identifiées dans la première partie de cet article (Cerclé *et al.*, 2020) :

- algébrisation de la géométrie (ici, l'alignement, la caractérisation de la droite par une relation algébrique),
- représentation des relations et caractérisation algébrique des ensembles de points (ici, transformation de la relation symétrique en relation fonctionnelle, notion de courbe représentative).

Cette situation répond aussi particulièrement au troisième enjeu en permettant de revenir sur la droite comme ensemble de points, et sa mise en bijection avec les réels par le choix d'une des variables.

Scénario proposé

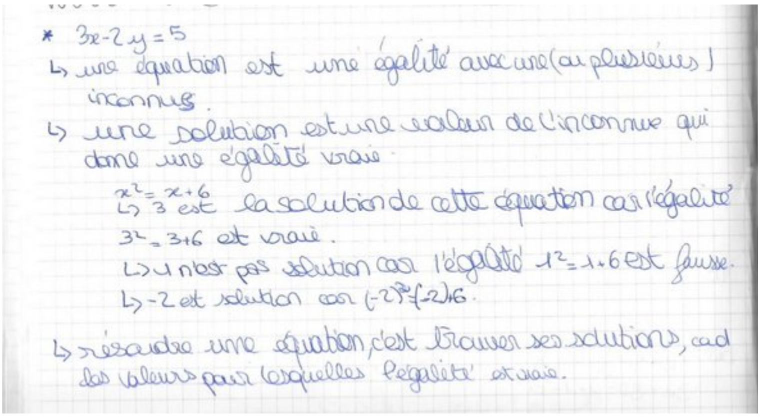
Cette situation a été testée dans de nombreuses classes de seconde par des membres du groupe. Elle a aussi été reprise par d'autres enseignants (collègues expérimentés ou enseignants stagiaires) avec qui elle avait été préparée. Ces expérimentations nous conduisent à conseiller le scénario suivant, dans lequel l'énoncé donné aux élèves est évolutif : les consignes ne sont pas données dans leur totalité au début, mais sont complétées lors de chacune des phases.

Phase 1 : questionnement de la consigne « résoudre l'équation $3x-2y=5$ » (10 *min*)

On écrit d'abord l'équation $3x-2y=5$ au tableau. Le questionnement, initié par exemple à partir de la simple interrogation « qu'est-ce que c'est ? », doit permettre de faire émerger l'équation comme égalité ouverte, et d'évoquer les notions d'inconnues, de solutions et de résolution. Ces rappels sur les équations et le(s) solution(s) d'une équation peuvent faire l'objet d'une institutionnalisation grâce à des définitions et des exemples d'équations à une inconnue, un exemple de solution ou de non-solution, comme par exemple le texte suivant :

> *Une équation est une égalité qui comporte une (ou des) variables (appelées inconnues). Une solution est une valeur de l'inconnue (ou un couple de valeurs) pour laquelle l'égalité est vraie. Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions.*

ou encore la trace écrite issue d'un cahier d'élève présentée en figure 4.



* $3x-2y=5$
↳ une équation est une égalité avec une (ou plusieurs) inconnus.
↳ une solution est une valeur de l'inconnue qui donne une égalité vraie.
$x^2=x+6$
↳ 3 est la solution de cette équation car l'égalité $3^2=3+6$ est vraie.
↳ 1 n'est pas solution car l'égalité $1^2=1+6$ est fausse.
↳ -2 est solution car $(-2)^2=(-2)+6$.
↳ résoudre une équation, c'est trouver ses solutions, cad les valeurs pour lesquelles l'égalité est vraie.

Figure 4 *: Trace écrite dans un cahier d'élève de seconde.*

Ce travail préalable doit aussi permettre aux élèves de « dénaturaliser » leur conception de la résolution d'une équation comme étant « résoudre, c'est utiliser un algorithme », pour la recentrer sur « résoudre, c'est trouver toutes les solutions ». Un algorithme de résolution algébrique est un moyen de trouver les solutions, mais il y a d'autres moyens : on peut par exemple vérifier qu'une valeur est solution, et démontrer que c'est la seule en s'appuyant sur les variations de la fonction associée. L'enjeu devient alors d'élaborer une méthode pour résoudre les équations de ce type, c'est-à-dire pour en trouver toutes les solutions.

Phase 2 : « trouver des solutions »

Le travail fait dans la phase 1 permet alors que les élèves établissent rapidement que des solutions sont des *couples de nombres* qui rendent l'égalité vraie. Il convient alors de s'assurer que tous comprennent bien ce qu'est un « couple-solution » ; cela peut se faire en testant ensemble quelques premiers couples proposés par certains élèves. Signalons qu'ici la façon de présenter ces différents couples peut avoir de l'influence sur la suite : on peut penser qu'une présentation sous forme d'une liste de couples (en utilisant la notation habituelle pour les coordonnées de points) pourra donner l'idée du tableau de valeurs ou faire penser à des coordonnées de points dans un repère, et mettre ainsi sur la piste d'une représentation graphique dans un repère cartésien. Le questionnement sur la possibilité d'en obtenir davantage est naturel, la mise en activité des élèves porte sur la recherche d'un maximum de solutions.

Dans cette phase, l'accent est davantage mis sur le nombre de couples-solutions que sur les méthodes utilisées. La consigne peut être : « trouver un maximum de solutions (et les écrire toutes) ».

Quelques élèves transformeront rapidement l'équation sous la forme $y=1{,}5\,x-2{,}5$. C'est évidemment la forme que nous exploiterons pour boucler la recherche puisqu'elle permet de décrire l'ensemble des solutions et donc de trouver autant de solutions que l'on veut par un procédé algébrique (choisir x et calculer le y correspondant) ou géométrique (on reconnaît l'expression d'une fonction affine donc l'ensemble des points associés aux couples-solutions forme une droite). Mais une exploitation collective trop précoce de cette expression appauvrirait les possibilités de cette situation, en la ramenant trop vite à un travail formel. On peut rappeler à ces élèves la consigne « trouver des solutions (et les donner explicitement) ». Le plus difficile pour les élèves ayant identifié la forme algébrique sera sans doute de patienter...

Plusieurs autres procédures peuvent être mises en œuvre par les élèves, peut-être successivement :

- considérer que $x = y$ et de résoudre une équation à une seule inconnue ; cette idée ne donne qu'un couple solution, on doit rappeler que rien ne dit que les deux inconnues prennent des valeurs égales ;
- tenter la résolution par des techniques habituellement employées lors de la résolution de systèmes à deux équations ; ils obtiennent ainsi une deuxième équation (équivalente à la première) qui les amène à la même impasse ;
- choisir « au hasard » une valeur pour une variable et en déduire la valeur de la deuxième ; arriver ainsi à l'idée qu'à chaque valeur choisie pour x correspond une valeur de y (et réciproquement) ; cette procédure permet aux élèves d'envisager l'infinité de couples solutions de cette équation.

Il nous semble bénéfique de laisser les élèves faire l'expérience du fait que ces méthodes n'aboutissent pas forcément, tout en les aiguillant pour relancer la recherche.

Phase 3 : « comment obtenir des solutions ? »

Une phase de mise en commun doit suivre la phase 2 afin de recentrer vers l'objectif, qui est d'introduire la notion d'équation de droite. En effet, les procédures qui ont permis aux élèves de trouver de nombreux couples amènent de très nombreuses conjectures, pas toutes pertinentes. Il est indispensable d'accepter de laisser de côté des remarques non pertinentes (concernant par exemple la parité des solutions).

Une mise en commun des divers couples trouvés permet à certains élèves de conjecturer qu'il existe une infinité de solutions (mais que tous les couples de réels ne sont pas solution). Nous avons remarqué que le constat qu'il y a beaucoup de solutions / qu'on peut en trouver autant qu'on veut / donc une infinité de solutions n'est pas forcément déstabilisant pour les élèves et leur paraît évident après la phase de bilan précédente. Le plus compliqué est d'accepter de ne pouvoir les écrire toutes.

La consigne va alors être complétée en demandant d'expliciter une ou des méthodes qui permette(nt) d'obtenir des solutions, l'objectif étant de favoriser la mise en commun de procédés efficaces qui permettent de déterminer des solutions. Plusieurs procédés de calcul permettent de déterminer autant de solutions qu'on veut. Certains sont maladroits (« je prends un multiple de 3, je cherche un nombre pair à lui soustraire pour faire 5 »). L'observation des couples-solutions obtenus peut faire conjecturer un lien de passage d'un couple solution à un autre « Quand x augmente de 1, y augmente de 1,5. ». On peut aussi formuler des méthodes pour calculer y à partir d'un choix de valeur pour x : soit au cas par cas (je choisis un x, je le remplace dans l'équation $3x-2y=5$ et je résous l'équation d'inconnue y), soit en transformant l'équation $3x-2y=5$ sous la forme $y=1{,}5x-2{,}5$ dans laquelle il n'y a plus qu'à calculer y avec la formule $1{,}5x-2{,}5$.

Ces procédures sont pertinentes, et il faudra y revenir ultérieurement avec les élèves, ne serait-ce que pour faire le lien avec fonction affine et vecteur directeur de la droite. Cette activité vise à introduire la notion d'équation de droite et il s'agit à ce moment, si aucun élève ne l'a fait, de demander aux élèves de placer les points sur un graphique en faisant remarquer que des couples de nombres peuvent être interprétés comme des coordonnées de points dans un repère. Ils conjecturent que les solutions correspondent à des points alignés, ce qui leur donne un procédé graphique pour trouver des solutions.

Phase 4 : validation de la conjecture graphique et mise en lien avec les autres procédés

L'obtention dans le registre graphique d'autant de points que l'on souhaite et qui semblent tous être alignés permet de soulever la question de la droite *qui passe par* tous ces points. Deux conjectures sont alors à démontrer : en notant (*d*) la droite passant par deux points A et B fixés (par exemple $A(1;-1)$ et $B(3;2)$, on doit démontrer que « tous les points de la droite (*d*) ont des coordonnées qui sont solutions de l'équation » et réciproquement « tous les couples solutions sont les coordonnées de points qui appartiennent à la droite (*d*) ».

Cette phase de validation dépend des outils disponibles. La plus simple est de réinvestir les connaissances sur les fonctions affines (étudiées au collège, à approfondir en seconde). La fonction affine sous-jacente peut être déterminée à l'aide du graphique et/ou de l'équation transformée y en fonction de x. On peut alors se contenter de la démonstration suivante : « les solutions sont associées à des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient $y=f(x)$, où f est la fonction affine définie par $f(x)=1{,}5x-2{,}5$. L'ensemble des points-solutions est donc la courbe représentative de cette fonction (*cf.* la définition de la « courbe représentative d'une fonction, qui est une droite dans le cas d'une fonction affine »). On peut aussi proposer la démonstration de l'équivalence entre « le point appartient à la droite » et « les coordonnées sont solutions de l'équation ». Cette démonstration est d'ailleurs exigible dans le programme de seconde « en utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite ». Mais la démonstration à ce moment risque de faire perdre de vue les enjeux de l'exercice.

On peut ainsi valider les conjectures précédentes, en faisant le lien entre les différents cadres et registres, et le procédé graphique (lié à la droite) devient un mode de représentation de toutes les solutions.

Phase 5 : institutionnalisation

Plusieurs institutionnalisations sont possibles, qui devront être ajustées au déroulement réel. Néanmoins, un certain nombre d'éléments nous semblent essentiels. D'abord on doit signaler l'enrichissement de la notion de droite par le cadre algébrique et l'on peut mettre en avant que l'on a ainsi trois points de vue sur la droite :

- la droite comme ensemble de points alignés (point de vue géométrique) ;
- la droite comme courbe représentative d'une fonction affine (point de vue fonctionnel) ;
- la droite comme ensemble de points dont les coordonnées sont solutions d'une équation (point de vue algébrique).

Ensuite, nous pensons important de souligner que l'écriture $3x-2y=5$ est bien une équation :

> *L'équation $3x-2y=5$ est une équation dont les solutions sont des couples de nombres réels $(x;y)$. On a une infinité de couples solutions : $(1;-1)$; $(3;2)$... L'ensemble des points dont les coordonnées sont ces couples de nombres solutions forme une droite (d). On dit que la droite (d) a pour équation $3x-2y=5$ pour traduire que la droite est associée à cette équation, puisque ses points correspondent aux solutions de l'équation.*

Enfin, en lien avec l'enjeu 1, on mettra en lumière l'articulation géométrie/numérique opérée par le repère cartésien :

> *On note $A(1;-1)$ et $B(3;2)$; soit $M(x_M;y_M)$ un point du plan repéré. On a l'équivalence : M appartient à la droite (AB) si et seulement si le couple $(x_M;y_M)$ est solution de l'équation $3x-2y=5$.*

Quelques retours sur l'expérimentation de cette situation dans des classes de seconde

L'énoncé avec l'équation $3x-2y=5$ peut avoir tendance à amener les élèves à chercher la transformation en $y=1{,}5x-2{,}5$, ce qui redirige les élèves vers un procédé syntaxique (la transformation algébrique de la forme générale à la forme réduite) et peut fait perdre de vue l'objectif permis par le travail sémantique (trouver des solutions). D'autres équations sont possibles : $y=2x-3$, $xy=10$, $x(y-3)=10$..., qui permettent également d'amener sur la recherche de solutions par test numérique. Notre choix initial présente l'avantage d'être déjà une forme générale d'équation de droite mais le plus intéressant est, si on en a le temps, de traiter les deux situations, leur mise en rapport étant productive pour les élèves.

Le travail sur la notion d'équation doit être envisagé comme un des objectifs importants de la situation, dans la mesure où la conception que les élèves arrivant en seconde ont de la notion d'équation est en général trop restreinte par rapport au sens qu'elle prend ici, du fait qu'il s'agit d'une équation à deux inconnues (donc les solutions ne sont pas des nombres mais des couples de nombres) et qu'elle possède une infinité de solutions qu'il est donc impossible de lister explicitement (*cf.* Cerclé *et al.*, 2016).

Outre cette mise au point sur les équations, la mise en œuvre par les élèves nécessite des prérequis élémentaires (mener des calculs numériques simples, être capable de représenter un point de coordonnées données, de lire les coordonnées d'un point). Si l'on souhaite faire le lien avec les fonctions affines, la maîtrise de certains prérequis moins élémentaires par les élèves est également nécessaire (représentation graphique...).

Il ne semble pas raisonnable d'envisager de traiter cet exercice en une seule séance d'une heure. Il est important de prendre du temps pour la recherche individuelle de solutions et pour les phases de débat et de mise en commun. Un premier bilan peut être effectué à la fin de la première heure (il y a un grand nombre/une infinité de solutions) ; et le graphique donné à réaliser à la maison.

L'énoncé est très court, mais cette situation est riche et ouverte. Nous conseillons donc une modalité qui permette à l'enseignant de conserver le contrôle du cheminement des élèves vers l'objectif à atteindre, tout en laissant des temps de travail conséquents aux élèves.

Conclusion sur la situation L1

L'enjeu de cette activité est le lien entre équation, droite et fonction affine. Les élèves savent déjà qu'une fonction correspond à une courbe (donc à un objet géométrique, même si c'est encore peu maîtrisé, probablement). Nous montrons ici que l'on peut associer une équation à deux inconnues à une courbe (la représentation graphique des couples-solutions) et que l'on peut associer une équation à deux inconnues à une fonction (ou plutôt qu'on se sert d'une fonction pour donner les solutions).

Il s'agit ainsi de consolider le sens des différentes égalités et surtout leurs liens : $f(x)=ax+b$ qui définit une fonction affine ; $y=f(x)$ (qui aura pu être travaillé comme équation de la courbe représentative d'une fonction, dans les généralités sur les fonctions mais qui nécessite d'y revenir car elle est complexe pour les élèves) ; enfin $y=ax+b$ qui constitue de fait l'équation de la droite.

Il s'agit donc de prendre en charge l'articulation des objets issus de différents cadres dans le plan cartésien.

Situation L2 : La représentation graphique de la fonction $f : t \longmapsto \sqrt{25-t^2}$

On donne pour seule consigne, écrite au tableau : « Construire, dans un repère orthonormé, la représentation graphique de la fonction $f : t \longmapsto \sqrt{25-t^2}$ ». L'observation de la courbe obtenue amène les élèves à conjecturer que cette courbe est un demi-cercle. On démontre finalement que tous les points de la courbe sont à égale distance de l'origine ; pour cela, on prend un point quelconque de la courbe et calculer sa distance au point *O*. On conjecture ainsi, puis on démontre que les points appartiennent au demi-cercle.

Cette situation mobilise des connaissances de géométrie (la caractérisation d'un cercle comme ensemble des points équidistants d'un point donné, le centre) dans un cadre fonctionnel, et exploite la relation $y=f(x)$ et la notion de courbe comme ensemble de points.

Objectifs liés aux programmes

Cette situation peut être utilisée assez tôt dans la progression annuelle sur les fonctions. Le prérequis principal est le calcul de l'image d'un nombre par une fonction définie par une expression algébrique déjà travaillé au cycle 4. Le calcul de longueur peut se faire soit en utilisant le théorème de Pythagore (cycle 4), soit par la formule du calcul de distance dans un repère orthonormé au programme de seconde.

Cette situation répond à un des objectifs de la partie *Fonctions* du programme de seconde : *« Exploiter divers registres, notamment le registre algébrique et le registre graphique »* (MEN, 2019a, p. 11). Elle s'inscrit dans le thème *« Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions »* (*ibid.*, p. 11). Les élèves peuvent en effet mobiliser des capacités élémentaires autour des fonctions : faire représenter graphiquement la courbe d'une fonction par la calculatrice, calculer des images pour obtenir des coordonnées de points de la courbe, placer ces points dans un repère, chercher « assez de points » pour conjecturer l'allure de la courbe. On aborde également la notion d'ensemble de définition d'une fonction en constatant que le calcul de l'image de *t* n'est pas possible pour certaines valeurs de *t*.

Cette situation permet également de travailler la notion de « courbe représentative » et sa définition du programme *« la courbe d'équation $y=f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient $y=f(x)$ »* (*ibid.*, p. 11). En effet, pour prendre un point quelconque de la courbe, on doit penser au fait que l'ordonnée *y* est l'image de l'abscisse *x* de ce point.

Objectifs liés aux enjeux identifiés précédemment

Cette situation permet d'articuler le cadre fonctionnel numérique (calcul d'image) au cadre géométrique (cercle, longueur). Elle est aussi l'occasion de travailler les enjeux 1 et 2 rappelés en introduction.

Enjeu 1 : questionner la différence entre dessin et figure

Cette situation soulève l'ambiguïté des locutions « représentation graphique » et « courbe représentative » d'une fonction, qui masque la distinction faite par Chauvat entre la *« représentation théorique »* (qui correspond à un changement de cadre en associant un objet algébrique avec un objet géométrique) et la *« représentation matérielle »* (qui correspond une représentation de la courbe dans le registre graphique). En effet, on peut parler d'une courbe comme objet théorique, comme figure : « la courbe représentative de *f* », que Chauvat (1998-1999) qualifie de *« graphe géométrique »* ; mais on peut parler d'une courbe comme objet matériel, comme dessin : « une courbe pouvant représenter *f* », ou encore comme *« l'ostensif représentant ce graphe dans le registre graphique, un repère étant fixé »* et *« représenté sur un support matériel »* (donc avec une fenêtre).

En particulier, favoriser l'utilisation de la calculatrice pour représenter la courbe permet que des élèves obtiennent la représentation ci-dessous, à propos de laquelle il faut répondre à la question : ceci est-il un demi-cercle ?

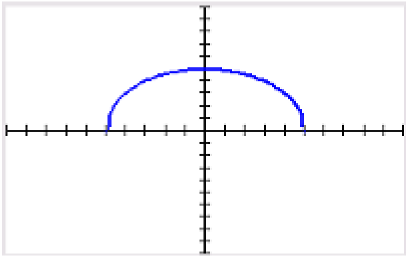


Figure 5 *: Représentation possible de la courbe de la fonction f sur la calculatrice.*

Cette question fait écho à la question *« Ceci est-il un carré ? »* dont Chesnais et Mathé (2016) ont montré que la clé tient dans la confusion entre « un carré » (objet théorique) et « une représentation d'un carré » (l'ostensif). Elles montrent en particulier que cette confusion est un abus de langage à la fois utile (facilitant la communication) mais aussi source de difficultés (ce qui en fait un enjeu d'apprentissage pour passer de la géométrie perceptive ou instrumentée à la géométrie théorique).

Enjeu 2 : questionner les notions de longueur mesure

Le calcul d'une distance d'un point M de la courbe (particulier ou général) à l'origine peut se faire soit en appliquant le théorème de Pythagore, soit en appliquant la formule de calcul donnant la distance entre deux points dans un repère orthonormé. Une question se pose, concernant le moment auquel on peut proposer cette situation : faut-il avoir vu auparavant la formule de distance dans un repère orthonormé ? Nous avons vu que l'utilisation du théorème de Pythagore demande de donner à la coordonnée un statut de distance, plutôt qu'un statut de graduation, d'associer abscisses et ordonnées à des distances à 0 (donc distance entre l'origine et les projections du point sur l'axe des abscisses et des ordonnées). Abscisse et ordonnée ne sont plus seulement un « endroit » (un « repère ») sur un axe. Or l'utilisation de la formule de distance, si elle est faite « mécaniquement », ne mobilise pas ce changement de point de vue, ce qui nous semble une occasion perdue de travailler cet enjeu 2.

Toutefois, l'utilisation de la formule dans le cas général libère des considérations de signe, et est une bonne occasion de l'utiliser dans une situation où son application n'est ni isolée ni simple — points de coordonnées $(x\,;\sqrt{25-x^2})$. En outre, l'utilisation de l'expression algébrique de la fonction pour le calcul des coordonnées des points se solde souvent chez les élèves par le calcul de valeurs approchées, ce qui peut amener les élèves à mettre en défaut la conjecture. On retrouve ici des enjeux liés à la nature des nombres. Dans l'idéal, on fera donc cette activité après avoir vu la formule de distance, mais suffisamment longtemps après pour que certains privilégient le théorème de Pythagore.

Cette situation permet de questionner cette formule de distance entre deux points, censée s'appliquer dans un repère orthonormé. On peut alors se demander, concernant l'énoncé donné aux élèves, s'il faut préciser de choisir un repère orthonormé. Mais on peut aussi revenir sur cette formule : dans le cursus scolaire, cette formule est présentée comme découlant du théorème de Pythagore. Néanmoins, du point de vue mathématique, quel que soit le repère choisi, on peut y définir la norme associée au produit scalaire « naturel » $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$, pour lequel le repère est de fait automatiquement orthonormé (puisque $\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=1$ et $\vec{i}.\vec{j}=0$). Cerclé et Nyssen (à paraître) attirent l'attention, comme nous l'avons déjà évoqué dans la première partie de cet article (Cerclé *et al.*, 2020), sur le fait que pour introduire la notion de repère orthonormé on s'appuie généralement sur une notion « physique » de longueurs égales et d'angle droit, en lien avec une géométrie « euclidienne » fondée sur la notion de superposition : ce que les auteurs appellent la « géométrie de la feuille de papier ».

D'ailleurs, un repère orthogonal non normé (pour la distance usuelle) donne une courbe qui ressemble à une demi-ellipse (*cf.* figure 5), et non à un demi-cercle. Comme nous l'avons déjà évoqué, ceci peut engendrer une confrontation et un débat collectif, dont le dénouement tient dans le fait que c'est seulement dans un repère orthonormé que la distance calculée par la formule coïncide avec la distance physique, au sens ou des distances égales correspondent à des segments superposables (Cerclé & Nyssen, à paraître). On peut ainsi attirer l'attention des élèves sur le fait que c'est seulement lorsque le repère est orthonormé pour la distance de la géométrie usuelle (celle de la feuille de papier) que la formule de calcul de distance correspond à la distance usuelle (celle de la feuille de papier). Cet argument semble peu disponible pour être mobilisé par les élèves de seconde eux-mêmes, mais cette activité peut être l'occasion d'en rappeler l'importance.

Scénario proposé

Cette situation est issue du mémoire de Master 2 en didactique des mathématiques de Michel Bourguet, réalisé à Montpellier et soutenu en 2017. Elle a été retravaillée et expérimentée dans des classes de seconde par des membres du groupe IREM. Elle a également été le support d'un atelier au colloque de la CORFEM[22] en 2017.

Dans ces expérimentations, deux modalités ont été testées : le travail en petits groupes et le travail en grand groupe (où alternent les temps de travail individuel ou en binôme et les moments de synthèse collective pour formuler la conjecture et institutionnaliser quelques remarques). Dans les deux cas, le rôle du professeur consiste à adapter ses consignes, ses questions et ses indications pour amener les élèves vers la conjecture puis sa démonstration. Dans les deux cas, le cheminement des élèves suit à peu près le scénario qui suit.

Phase 1 : conjecture

Dans un premier temps, certains élèves utilisent le traceur de leur calculatrice, tandis que d'autres placent des points dans un repère papier (orthonormé) en calculant, valeur après valeur, des images. Dans cette phase peut apparaître le fait que certains nombres n'ont pas d'image par la fonction. Ce peut être l'occasion de (re)donner du sens à la notion de domaine de définition.

Le tracé obtenu à l'écran de la calculatrice peut interroger. D'une part il peut être incomplet, selon le pas choisi : la courbe semble alors ne pas couper l'axe des abscisses. Ce tracé peut par ailleurs apparaître « déformé » par rapport à celui qu'on obtient sur papier, le repère du traceur n'étant pas nécessairement normé (ce qui peut donner lieu à un débat sur la signification de la notion de repère orthonormé, *cf.* supra et Cerclé et Nyssen, *op. cit.*). Ce peut être l'occasion de rappeler comment la calculatrice trace une courbe (pixel, fenêtre). Quand les élèves ont obtenu une courbe sur l'écran de leur calculatrice, on peut les inciter à produire une courbe sur papier, à la fois pour travailler le tracé « à la main » et pour les confronter à plusieurs représentations : en général, la courbe obtenue sur l'écran de la calculatrice est une portion d'ellipse, alors que celle obtenue sur le papier ressemble davantage à un demi-cercle. Le questionnement doit amener à relier cette différence au caractère orthonormé (ou non) du repère.

---

[22] La CORFEM est la COmission inter-IREM de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques. Elle organise un colloque annuel s'adressant aux formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire.

Phase 2 : démonstration

Certains élèves conjecturent rapidement que la courbe obtenue dans un repère orthonormé est un demi-cercle ; pour d'autre, cela prend un peu plus de temps. On les incite alors à démontrer leur conjecture. La mobilisation de la caractérisation des points du cercle par leur distance au centre n'est pas évidente pour tous les élèves, de même que le recours à un outil de calcul de distance (formule des distances dans un repère orthonormé ou théorème de Pythagore), d'autant plus que les coordonnées des points ne sont pas explicitement disponibles. On pourra d'abord calculer des longueurs sur des cas particuliers, avant d'envisager le cas général.

Plusieurs élèves démontrent que quelques-uns des points de la courbe à coordonnées entières positives, $(3;4)$ et $(4;3)$, par exemple, sont à la même distance de l'origine. En les incitant à généraliser leur raisonnement, on engage les élèves vers une démonstration de la conjecture. C'est l'occasion de travailler une connaissance autour de la démonstration, à savoir l'utilisation d'un élément générique (on choisit un point quelconque dont les coordonnées sont indiquées par des lettres) pour démontrer une propriété universelle. En effet, à la fin du cheminement, pour parvenir à généraliser les résultats obtenus sur des exemples, il faut prouver la propriété *pour tous* les points de la courbe, ce qui se fait en choisissant un point indéterminé et quelconque. On se contente de montrer que c'est vrai pour « n'importe lequel » et que le choix du point n'influe pas sur la véracité de la propriété. On notera que ce point de vue (« pour tout » = « pour n'importe lequel ») est également à l'œuvre dans le travail sur les équations de droite : lorsqu'on définit une droite par une équation, on donne une relation entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point indéterminé de la droite.

Conclusion sur la situation L2

Lors de cette séance, nous espérons construire ou consolider un certain nombre de notions. D'abord il est clair que des connaissances sur les fonctions sont en jeu : on demande aux élèves de construire point par point une représentation graphique. Cette tâche fait intervenir des calculs d'images et soulève la question du domaine de définition, elle nécessite d'interroger la définition d'une représentation graphique d'une fonction, elle demande une assez bonne maîtrise du traceur ou du tableur de la calculatrice, elle fait aussi travailler le placement de points dans un repère. On travaille aussi l'utilisation d'un élément générique pour démontrer un cas général. Bref, on noue des liens entre les registres numérique, algébrique et graphique, et entre les cadres numérique, algébrique, fonctionnel et géométrique.

Mais surtout, on peut lister des objectifs qui joueront un rôle important vis-à-vis du travail sur les enjeux d'apprentissage pointés dans cet article :

- Dès le départ, il faut mobiliser la conception de la courbe comme un ensemble de points dont les coordonnées vérifient une certaine relation. Tout au long de la réflexion, il faut à la fois construire la courbe à partir de points isolés, en plaçant « assez de points » pour pouvoir relier les points, et transformer un ensemble discret en ensemble continu. Inversement, une fois la courbe tracée, il faut être capable d'en extraire un point, soit un point singulier (le point de coordonnées $(3;4)$ par exemple) ou un point générique de coordonnées $(x; f(x))$. Or il s'agit là d'un des obstacles sur lequel nous reviendrons dans la situation suivante, pour expliquer certaines des difficultés posées par la notion de courbe : la ligne fait disparaître les points.
- Pour justifier que les points appartiennent au demi-cercle, les élèves doivent mobiliser des connaissances de géométrie « classique ». En les incitant à calculer les longueurs avec le théorème de Pythagore, on les amène à renforcer le point de vue sur les

coordonnées non seulement comme positions mais aussi comme mesures de distances.

Situation L3 : Les rectangles d'aire 10 cm²

L'énoncé :

On se donne deux demi-droites d'origine commune O et perpendiculaires entre elles. Construire un rectangle OMPN tel que M appartient à la première demi-droite, N appartient à la seconde demi-droite et l'aire de OMPN est 10 cm².

On ajoutera ensuite la consigne : « Y en a-t-il d'autres ? », et on relancera régulièrement la recherche, avec des questions du type : « Y en a-t-il encore d'autres ? », « Un autre élève en a trouvé plus que toi », « Continue jusqu'à observer quelque chose », de sorte que les élèves aient le plus de rectangles possibles. Le but est de se persuader que l'ensemble des points *P* forme une ligne. Il s'agit ensuite de caractériser cette courbe par une équation qu'on mettra en lien avec une fonction.

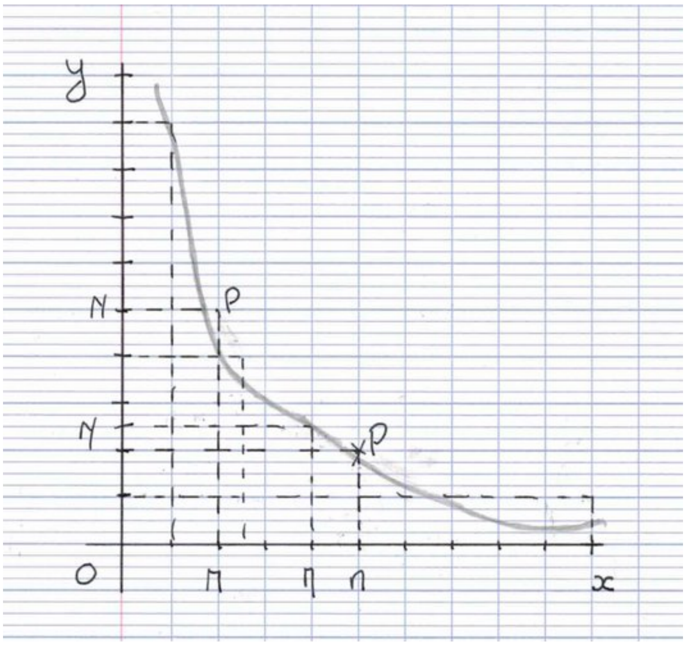


Figure 6 *: Production d'un élève sur la situation des rectangles d'aire 10.*

Objectifs liés aux programmes

Cette situation peut être donnée à tout moment de l'année de seconde, pour travailler la notion de courbe représentative d'une fonction. Elle répond à un des objectifs de la partie *Fonctions* du programme : *« Consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre »* (MEN, 2019a, p. 10). Elle peut par exemple se situer en introduction de la fonction inverse, puisqu'elle débouche sur un tracé d'une branche d'hyperbole. On peut poursuivre cette activité par l'étude des propriétés géométriques de cette courbe (conjecturer des propriétés de symétrie de l'hyperbole, les variations de la fonction, l'existence de branches infinies/asymptotes). Mais nos expérimentations montrent qu'elle permet aussi de faire travailler d'autres enjeux évoqués dans cet article, en particulier la droite réelle.

Objectifs liés aux enjeux identifiés précédemment

Cette situation s'inscrit dans plusieurs des enjeux développés dans la première partie (Cerclé *et al.*, 2020). La question posée et le plan cartésien induit par les deux demi-droites amènent à croiser les cadres de la géométrie (rectangle, aire), de l'algèbre (équation $xy=10$), du numérique (les dimensions possibles) et des fonctions, ici $f: x \longmapsto \frac{10}{x}$). Les nombres y sont vus à la fois comme couples de dimensions du rectangle, couples-solutions de l'équation $xy=10$, couples de coordonnées du sommet P, couples image-antécédent de la fonction. Elle permet également de mêler différents registres de représentation des fonctions : registre graphique (la courbe), dans la mise en équation algébrique (l'équation $y=\frac{10}{x}$), fonctionnel $f(x)=\frac{10}{x}$. On vise que l'élève mobilise l'idée de repère (en identifiant les dimensions avec l'abscisse et l'ordonnée de P) et l'idée de fonction (une dimension est fonction de l'autre).

Comme nous le montrons dans la suite, cette situation fait également travailler la courbe comme ensemble de points (sous réserve de retarder le tracé de la courbe car celle-ci fait « disparaître » les points), travailler la notion d'équation de courbe (en complément de la situation 1), ou encore le rapport entre l'objet géométrique et sa représentation (rapport entre figure et dessin), enfin la nature des nombres en lien avec la question de la bijection entre ensembles de points et de nombres.

Scénario proposé

Cette situation a été expérimentée dans des classes de seconde par des membres du groupe IREM. Elle a également été évoquée par Chesnais et Mathé (2018). Notons qu'une situation similaire avait déjà été proposée par Perrin-Glorian (2004) pour travailler les nombres rationnels au cycle 3.

Nous distinguons deux moments dans le déroulement : la recherche de rectangles solutions et la caractérisation de la forme (courbe) engendrée par les sommets.

Un premier temps (entre $15\,min$ et $1\,h$) est consacré à la recherche de rectangles. Cette recherche confronte les élèves à des « obstacles » qu'il nous semble important de mettre en évidence pour les discuter et les surmonter. Tout d'abord, pour trouver des couples, il faut rapidement passer de la « multiplication à trou » (chercher deux nombres dont le produit égale 10, chercher le nombre qui multiplié par 3 donne 10) à la division. Nos expérimentations ont montré que, même en seconde, ce passage est loin d'être immédiat pour certains élèves. Ensuite, la construction des rectangles s'apparente rapidement au placement de points sur des axes gradués de manière implicite avec pour origine *O* et unité le *cm*, mais sans que le repère soit explicité ; représenter les rectangles amène alors les élèves à se questionner sur le placement de points correspondant à des nombres décimaux ayant plus d'une décimale, des nombres non décimaux voire irrationnels, ce qui pose problème à beaucoup d'élèves (« a-t-on le droit ? » voire « on ne peut pas »). Par exemple ils s'autorisent à placer 3,2 et 3,125, mais résistent à placer $\frac{10}{3}$ ou $\sqrt{10}$, en expliquant que « ce n'est pas assez précis » ou que « c'est trop précis »[23]. Cette situation avait ainsi déjà été expérimentée avec le programme précédent, en lien avec l'enjeu 3, et le programme de 2019 nous a invités à la relier à la partie intitulée *« Manipuler les nombres réels »* (MEN, 2019a, p. 6), pour questionner la nature et l'écriture des nombres, en particulier l'existence de nombres décimaux et non-décimaux. Un bilan collectif de la recherche peut consister en une mise au point sur la droite numérique. En effet, la situation peut faire travailler la capacité de l'élève à *« associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement »* (*ibid.*, p. 6). Selon ce qui a été traité auparavant, c'est l'occasion de (re)venir sur la question du placement des nombres 3,125, $\frac{10}{3}$ ou $\sqrt{10}$; on peut (re)travailler sur la construction d'un point d'abscisse donnée (nombre constructible). Cette situation peut être l'occasion de rappeler le fait

[23] Faisant probablement référence au fait qu'il y a trop de chiffres après la virgule dans l'écriture décimale.

qu'un dessin n'est jamais « exact », voire la différence entre l'objet théorique (le point associé au nombre $\frac{10}{3}$) et sa représentation (le tracé de ce point sur la feuille). On peut aussi étendre ce bilan au statut du graphique : par exemple on peut faire le lien avec la dualité dessin/figure, en lien avec la distinction construire/tracer : le graphique est un dessin (où toute mesure est une valeur approchée) qui représente les objets théoriques (où la mesure est une valeur exacte). Cette situation peut être l'occasion d'évoquer en classe les différentes géométries (perceptive, instrumentée et théorique) pour en faire prendre conscience aux élèves. À ce titre, le fait de demander aux élèves de tracer les rectangles est une variable importante puisqu'on se place d'emblée dans la représentation, même si, de fait, elle génère cette difficulté.

Ce bilan effectué, on peut s'intéresser dans un deuxième temps à la conjecture effectuée par beaucoup d'élèves. En effet le tracé de quelques rectangles fait apparaître une certaine organisation de leurs sommets *P*, et les élèves constatent plus ou moins rapidement que ces sommets « s'alignent » le long d'une ligne courbe. Nous avons noté que dès que les élèves ont repéré cette régularité, ils le mettent en évidence en traçant la courbe, alors même que ce n'est pas demandé (or « la ligne fait oublier les points ») ; nous avons aussi constaté qu'une fois la courbe tracée, il devient difficile de les faire revenir aux points, les élèves ayant tendance à considérer que le problème est clos. L'activité risque donc de manquer un de ses objectifs, qui est de faire vivre la ligne comme ensemble de points. La grande difficulté de cette situation est donc de relancer régulièrement la recherche, de sorte que les élèves aient le plus de rectangles possibles, mais en retardant au maximum le moment où ils relient les points. On peut pour cela rappeler que la demande n'est pas d'obtenir une courbe mais des rectangles, et donc imposer de décrire les rectangles obtenus (en écrivant leurs dimensions ou les coordonnées des points *P*).

Quelques retours sur l'expérimentation de cette situation dans des classes de seconde, première et terminale

À l'issue de ces expérimentations, il apparaît que le choix de 10 permet qu'il y ait assez de points à coordonnées décimales pour démarrer, mais pas assez pour s'en satisfaire : on est obligé de passer assez rapidement sur les non-décimaux (le rectangle 3 sur $\frac{10}{3}$ par exemple). Par opposition, le choix de 12 donne trop de rectangles simples, sans confronter réellement à la question liée à la nature des nombres visée par cette situation.

Par ailleurs il est important de faire utiliser la totalité d'une feuille A4, en faisant tracer les deux demi-droites « en bas et à gauche » de la feuille). Ceci permet que les élèves puissent tracer suffisamment de rectangles. On pourra aussi conjecturer les comportements asymptotiques. On se donne une unité (le *cm*) pour éviter que le choix de l'unité soit un enjeu. En revanche, on ne parle pas d'emblée de repère, pour que le choix d'introduire un repère incombe à l'élève (ce qui favorise la dévolution). On veut une situation géométrique pour garder la courbe comme objet géométrique, afin de favoriser le changement de cadre, de la géométrie « à la Euclide » à la géométrie repérée, via le changement de registre, de la feuille blanche au repère cartésien.

Tracer précocement la courbe fait « disparaître les points » et la fonction en tant que procédé, comme Chauvat (1998-1999) le faisait déjà remarquer à propos de la représentation graphique de la fonction linéaire au collège :

> *Dès lors le procédé à représenter (l'application linéaire) disparaît dans la procédure de représentation (le tracé à la règle). Un point de la droite n'est pas vu comme un représentant, pour un certain x, de la correspondance $x \longmapsto ax$, mais comme un élément d'un objet géométrique familier, aligné (au sens de la perception sensible) avec deux points particuliers de la feuille. C'est le paradoxe de la représentation graphique de l'application linéaire : il est hors de question de*

tracer la droite point par point, mais l'instrument règle tue la relation entre les coordonnées (Chauvat, 1998-1999, p. 35).

La mise en œuvre de la situation dans des classes de seconde a ainsi montré que retarder le tracé d'une ligne reliant les points favorise la conception de la courbe comme ensemble de points, chaque point pouvant être « désanonymé » en explicitant ses coordonnées comme couple $(x\,;y)$ vérifiant l'égalité $xy=10$. Cette égalité, mise sous la forme $y=f(x)$ avec $f(x)=\frac{10}{x}$, permet de préciser que la courbe représentative de la fonction $x\longmapsto\frac{10}{x}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ avec $f(x)=\frac{10}{x}$; on peut alors le voir comme l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ produits par le procédé qui permet d'obtenir y à partir de x en appliquant la formule $y=\frac{10}{x}$ ou, comme l'ensemble des points dont le couple de coordonnées $(x\,;y)$ est solution de l'équation $y=\frac{10}{x}$.

La consigne qui demande de tracer des rectangles permet de masquer pendant assez longtemps le fait que les sommets M s'alignent au sens où ils forment une ligne courbe, les interventions du professeur accompagnant la recherche doivent viser à prolonger cet état de fait.

Conclusion sur la situation L3

Cette situation permet de prendre en charge une partie des divers enjeux autour du plan cartésien que nous avons pointés. L'un des éléments essentiels qui ressort des expérimentations est l'intérêt de cette situation pour travailler la question de la construction de la droite réelle, c'est-à-dire de la bijection entre points et nombres. Cette situation permet également de consolider le regard sur la notion de fonction, puisqu'on trouve ici associées la relation entre deux nombres : $xy=10$, l'expression de l'un en fonction de l'autre : $y=\frac{10}{x}$ et l'expression d'une fonction : $f(x)=\frac{10}{x}$. Enfin, on enrichit le regard sur la notion de courbe, la courbe obtenue étant vue comme l'ensemble des points produits par le procédé liant x et y, comme courbe représentative de la fonction et comme courbe d'équation $y=\frac{10}{x}$ (tout en distinguant la courbe et son dessin).

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés aux enjeux liés à l'enseignement du repérage et plus largement du plan cartésien pour montrer d'une part leur aspect crucial en lien avec de nombreux objets relevant de divers domaines (nombres et calculs, fonctions, géométrie), et d'autre part les difficultés associées à leur apprentissage et leur enseignement.

Une première partie (Cerclé *et al.*, 2020) avait ainsi permis de préciser, sur la base d'une analyse mathématique, épistémologique et didactique des contenus, les enjeux d'apprentissage et d'enseignement associés au repérage : l'articulation entre plusieurs cadres et registres de représentation sémiotique, la distinction entre les objets mathématiques et leurs représentations, la nécessité de questionner les notions de longueur, mesure et distance sans se contenter d'une approche « intuitive » de ces objets, et enfin la construction de la droite réelle et du plan cartésien comme objets mathématiques. Nous avons notamment identifié le rôle important joué par la notion d'équation d'un objet géométrique à l'articulation du numérique, du fonctionnel, de l'algébrique et du géométrique.

Cette deuxième partie vise la prise en charge de ces enjeux dans l'enseignement. Nous avons donc d'abord étudié leur présence dans les programmes et les conséquences qui en résultent pour l'enseignement, au collège et au lycée : les enjeux associés au repérage y apparaissent surtout lors du travail sur d'autres notions, sans être pointés comme des enjeux d'apprentissage en soi. Considérant qu'il est nécessaire de prendre davantage en compte ces enjeux pour eux-mêmes — sans pour autant les isoler du reste —, nous avons présenté des situations pour les classes. Les situations proposées pour le collège visent plus particulièrement la construction mathématique du plan cartésien à la croisée de différents cadres, notamment en considérant de façon centrale la notion d'abscisse comme correspondant à une mesure de distance. Les situations proposées pour le lycée visent plus particulièrement à travailler les objets du plan cartésien : repère, droite, fonction, équation d'une courbe ou d'une droite, graphe d'une fonction. Toutes trois travaillent l'articulation géométrique/numérique en lien avec les fonctions et l'algèbre, mais avec des objets et des questionnements différents.

Ces situations peuvent être exploitées en classe, mais aussi en formation, pour mettre en lumière des enjeux didactiques portant sur des notions spécifiques et fondamentales (la droite, les fonctions, les nombres), ainsi que sur des difficultés récurrentes dans le rapport des élèves aux mathématiques (dialectique dessin/figure, articulation des différents cadres et registres).

Références bibliographiques

Anselmo B., Bonnet, M., Colonna, A., Combier, G., Latour, J. & Planchette, P. (1999). *La sixième entre fractions et décimaux*. IREM de Lyon.

Bourguet, M. (2016). *Enjeux de langage dans le processus de conceptualisation en mathématique et secondarisation du discours : un exemple à propos de l'objet « équation cartésienne d'une droite » en première S*. Mémoire de master 2, Didactique Des Sciences (non publié). Université de Montpellier.

Chauvat, G. (1998-1999). Courbes et fonctions au collège. *Petit x, 51*, 23-44.

Cerclé, V., Chesnais, A., Gosselin, E., Leberre, J. & Nyssen, L. (2016). Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et registres à propos des équations de droites. *Actes du XXII^e^ colloque CORFEM*. Nîmes, 11 et 12 juin 2015. http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2015_06.pdf

Cerclé, V., Chesnais, A., Destribats, A., Gosselin, E., Leberre, J. & Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie), *Petit x, 113*, 59-88.

Cerclé, V. et Nyssen, L. (à paraître). Le repère cartésien comme enjeu de l'entrée de la géométrie repérée. *Actes du XXVI^e^ colloque CORFEM*. Bordeaux, 11 et 12 juin 2018.

Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S. & Herrmann, E. (2018). La géométrie dans le cadre repéré : une occasion de travailler les liens entre objets géométriques, grandeurs et nombres. *Atelier au XXIII^e^ colloque CORFEM*. Nîmes, 10 et 11 juin 2016. http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_01.pdf.

Chesnais, A. & Destribats, A., (à paraître). Construire le repère cartésien comme objet mathématique au collège. *Actes du XXVI^e^ colloque CORFEM*. Bordeaux, 11 et 12 juin 2018.

Chesnais, A. & Mathé, A.-C. (2016). Construire les objets élémentaires de la géométrie, de l'école au lycée : une cohérence possible ? *Conférence - Actes du XXVI^{e} colloque CORFEM*. Bordeaux, 11 et 12 juin 2018.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50*, 57-79.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Parzysz, B. (1988). Voir et savoir - la représentation du « perçu » et du « su » dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP, 364*, 339-350.

Perrin-Glorian, M.-J. (1989-1990). L'aire et la mesure. *Petit x, 24*, 5-36.

Perrin-Glorian, M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques : Cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 9*, 67-82.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.-C. & Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. R*epères-IREM, 90*, 5-41. [halshs-01103321].

Vergnac, M. & Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x, 96*, 7-29. [hal-02070144].

Vergnac, M. (2018). Les nombres réels au lycée. Quelle place ? Quels enjeux ? *Conférence au XXIII^{e} colloque CORFEM*. Nîmes, 10 et 11 juin 2016. http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_06.pdf.

Programmes et accompagnements :

MEN (1999). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *B.O. hors série n° 6 du 12 août 1999.*

MEN (2008). Programmes des enseignements de mathématiques, de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre, de technologie pour les classes de sixième, de cinquième, de quatrième et de troisième du collège. *B.O. spécial n° 6 du 28 août 2008*.

MEN (2009a). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *B.O. n° 30 du 23 juillet 2009*.

MEN (2009b). Document Ressources pour la classe de seconde, Fonctions, juillet 2009. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/1/Doc_ressource_fonctions_109181.pdf

MEN (2009c). Document Ressources pour la classe de seconde, Notations et raisonnement mathématique juillet 2009. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf

MEN (2011). Enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques de la série économique et sociale et enseignement de spécialité de mathématiques de la série littéraire - classe terminale. *B.O. spécial n° 8 du 13 octobre 2011*.

MEN (2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). *B.O. spécial n° 11 du 26 novembre 2015*.

MEN (2016a). Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4) : Organisation et gestion de données, Fonctions. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fonctions/03/3/RA16_C4_MATH_doc_maitre_comprendre_et_utiliser_fonctions_N.D_551033.pdf

MEN (2016b). Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4) : Ressources thématiques, Calcul littéral. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul_litteral/35/8/RA16_C4_MATH_nombres_calcul_calcul_litteral_doc_maitre_548358.pdf

MEN (2017). Proposition d'aménagement des programmes de mathématiques et de physique-chimie de la classe de 2nde générale et technologique. *B.O. n° 18 du 4 mai 2017*.

MEN (2019a). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *B.O. spécial n° 1 du 22 janvier 2019*.

MEN (2019b). Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe terminale de la voie générale. *B.O. spécial n° 8 du 25 juillet 2019*.