
SOLUTION DU POINT DE DÉPART DU N° 114

ÉCHANGE DE BILLES

D'après le Rallye mathématique transalpin

Solution proposée par Jean-Christophe SALMON

Rappel de l'énoncé

Élise arrive à l'école avec 76 petites billes.

Elle en échange le plus possible avec ses camarades contre des billes moyennes. Pour chaque bille moyenne, elle doit toujours donner, en échange, le même nombre de petites billes.

Ensuite, elle échange le plus possible des billes moyennes qu'elle a obtenues contre des grosses billes. Pour chaque grosse bille, elle doit toujours donner, en échange, le même nombre de billes moyennes.

À la fin des échanges, Élise a 3 grosses billes, 4 billes moyennes et 1 petite bille.

Combien de petites billes Élise a-t-elle donné en échange d'une bille moyenne ?

Combien de billes moyennes Élise a-t-elle donné en échange d'une grosse bille ?

Il faut bien entendu détailler le raisonnement...

Solution

Analyse

Soient • $p \in \mathbb{N}$ le nombre de petites billes données en échange d'une bille moyenne,

• $m \in \mathbb{N}$ le nombre de billes moyennes données en échange d'une grosse bille.

Il reste une petite bille et 4 billes moyennes qui ne peuvent être échangées, donc $p > 1$ et $m > 4$.

En effectuant les échanges, on obtient $76 = 3mp + 4p + 1$.

Donc $3mp + 4p = 75$, ou encore $(3m + 4)p = 75$, donc $3m + 4 \mid 75$.

Or $m > 4$, donc $3m + 4 > 16$, et $p > 1$, donc $3m + 4 < 75$.

$75 = 3 \times 5^2$, l'ensemble des diviseurs de 75 est donc $\{1; 3; 15; 25; 75\}$, et le seul diviseur de 75 compris entre 17 et 74 est 25, donc $3m + 4 = 25$.

Donc $m = 7$ d'une part, et $25p = 75$, donc $p = 3$ d'autre part.

Synthèse

En échangeant 3 petites billes contre une moyenne et 7 billes moyennes contre une grosse bille, Élise obtient tout d'abord 25 billes moyennes et 1 petite, puis 3 grosses billes, 4 moyennes et 1 petite, c'est bien correct.