QUELQUES CONDITIONS POUR UN BON DÉPART EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE *LE CHAÎNON MANQUANT*

Magali HERSANT[1]
INSPÉ Académie de Nantes, CREN, Nantes Université

Yves THOMAS[2]
Ancien formateur à l'IUFM des Pays de la Loire

Résumé. Cet article fait suite à celui paru dans le n° 114 de *Grand N*. Nous proposons des repères et des outils pour permettre aux élèves de traduire mathématiquement un problème arithmétique et d'effectuer les calculs nécessaires dès le début du CP. Nous développons en particulier trois idées : élargir la palette des problèmes proposés pour éviter que résoudre un problème ne se ramène à deviner la bonne opération ; élargir la palettes des procédures de calcul pour que, dès le début du CP, les élèves disposent d'alternatives au dénombrement ; utiliser des schémas « discrets discrets » qui évoquent le cardinal de la collection sans le montrer pour reformuler les problèmes et les modéliser.

Mots-clés. Résolution de problèmes, cycle 2, calcul, comptage, schéma, reformulation, modélisation.

Introduction

Nous observons depuis une dizaine d'années les difficultés des élèves et des enseignants dans le domaine de la résolution de problèmes au cycle 2 et menons une réflexion dans le but de formuler des propositions pour la classe dans ce domaine. Cela nous a conduit.e.s à porter un regard critique sur l'usage actuel de certaines recherches didactiques. Sans être dans une démarche d'application de travaux de recherche, nous souhaitons fournir aux enseignants des repères et des outils compatibles avec les résultats de la recherche. Ainsi, l'article paru dans le numéro 114 de cette revue (Hersant, Thomas, 2024) présente des propositions pour installer un contrat didactique sain, dès le début du cycle 2 : effectuer une validation matérielle ; permettre de répondre « je ne sais pas » ; proposer des problèmes sans énoncé écrit ou presque, avec un contexte récurrent ; demander de calculer sans compter/dénombrer.

Mais installer un contrat didactique sain ne suffit pas. Comment aider les élèves à se représenter un problème ou à calculer sans dénombrer alors qu'ils ne disposent d'aucune opération arithmétique ? Le présent article propose quelques pistes pour répondre à ces questions. La première partie élargit la conception de ce qu'est un problème et propose des exemples de problèmes atypiques et simples. La deuxième partie décrit des procédures de calcul utilisables dès le début du CP, avant même l'introduction des signes arithmétiques, pour éviter le recours au comptage. Dans la troisième partie, nous proposons des schémas que nous qualifions de

[1] magali.hersant@univ-nantes.fr

[2] primaths-yves-thomas@orange.fr

« discrets discrets » : ils évoquent le cardinal des collections en jeu sans les montrer et aident ainsi les élèves à se représenter le problème sans recourir à des catégories préétablies, ni à des schémas standardisés, tout en empêchant le dénombrement. Dans la dernière partie nous proposons un commentaire critique des programmes en vigueur.

Deux annexes complètent le corps de l'article. La première décrit les supports matériels utilisés dans les schémas « discrets discrets » (cartes à points et bandes quadrillées). La seconde contient treize « récits » présentant chacun l'énoncé d'un problème et les discours et actions par lesquels l'enseignant reconstruit *a posteriori* une ou plusieurs procédures, en appui sur ce qu'il a observé dans la classe. Il ne s'agit pas de transcriptions d'enregistrements ; nous avons construit, en nous appuyant sur notre expérience, un échantillon de moments fictifs détaillés et écrits au style direct. Le style direct nous semble de nature à aider les enseignants qui pourront reprendre à l'identique les formulations proposées ou les modifier.

1. Élargir la palette des problèmes proposés en CP

Au cycle élémentaire, il nous semble souhaitable de proposer des problèmes qui ne relèvent ni des problèmes ternaires étudiés par Vergnaud (1990a), ni des problèmes « basiques » au sens de Houdement (2017). En effet, se limiter à ces problèmes conduit les élèves à devoir choisir seulement entre l'addition et la soustraction. Une telle situation favorise un comportement pragmatique et opportuniste : un élève qui sait résoudre la moitié des problèmes qui lui sont proposés et qui choisit au hasard l'opération pour l'autre moitié réussira dans environ trois quart des cas, ce qui peut parfaitement le satisfaire, voire satisfaire son enseignant. Mais alors : que peut être un problème numérique pour un élève de CP ? Que peuvent apporter d'autres problèmes ? Et qu'en est-il alors de l'idée de classe de problèmes au CP ?

I.1. Certains problèmes proposés en annexe 2 en sont-ils vraiment ?

Cette question n'est pas rhétorique. Des enseignants avec qui nous avons discuté de nos propositions considèrent que les problèmes suivants associés aux récits 1, 2 et 3 n'en sont pas.

- *J'ai des cubes tous de la même taille. Je vais faire deux tours : une tour rouge avec 6 cubes, une tour bleue avec 8 cubes. Quelle tour sera la plus grande ?*
- *Anne a deux paquets de bonbons, un paquet de 9 bonbons et un autre de 8 bonbons. Cécile a deux paquets de bonbons, un paquet de 7 bonbons et un autre de 9 bonbons. Qui a le plus de bonbons, Anne ou Cécile ?*
- *Dans cette boîte, j'ai mis 14 billes rouges et 18 billes bleues. Je prends 18 billes dans la boîte. Maintenant, je vais compter les billes qui restent dans la boîte, combien vais-je en trouver ?*

Pour ces enseignants, la réponse à un problème numérique est nécessairement un nombre qui doit être trouvé à l'aide d'une ou plusieurs opérations. C'est également le point de vue des nouveaux programmes puisqu'ils indiquent que *« la phase « Modéliser » conduit l'élève à identifier la ou les opérations qu'il va devoir effectuer pour trouver le résultat cherché »* (MEN, 2024, p. 8). Cette vision est conforme à une tradition scolaire ancienne, mais a trouvé une nouvelle force dans un usage détourné de travaux scientifiques, en particulier ceux de Vergnaud (1990a). La diffusion de sa classification des problèmes arithmétiques a donné lieu à deux dérives. D'une part de nombreuses ressources pédagogiques ont proposé d'enseigner aux élèves cette classification des problèmes additifs, ce que Vergnaud n'a jamais proposé. D'autre part, il est devenu presque impensable d'envisager au cycle 2 des problèmes extérieurs à sa classification ou à celle de Houdement (2017) : « un problème » est devenu synonyme de « un problème appartenant à une des catégories étudiées par G. Vergnaud ou C. Houdement ».

De ce point de vue, les problèmes associés aux cinq premiers récits n'en sont pas. Ils échappent à la classification de Vergnaud et à celle de Houdement, soit parce que la réponse attendue n'est pas un nombre, soit parce que le problème n'est pas posé par un énoncé verbal, soit parce qu'aucune opération arithmétique n'est nécessaire pour répondre. Comme selon nous ils apportent beaucoup aux élèves (c'est ce que nous détaillons par la suite), nous proposons d'adopter une définition qui les inclut, par exemple :

> *Un problème numérique est une question où interviennent des nombres et des relations entre les nombres à laquelle on peut répondre sans dénombrer, en utilisant ce qu'on sait sur les nombres et une réflexion rationnelle.*

I.2. Qu'apportent ces problèmes ?

Détaillons les apports qu'on peut attendre des problèmes ainsi réintégrés. Tout d'abord, certains peuvent être résolus dès le début de l'année de CP sans recourir au dénombrement par comptage. Ainsi, résoudre le problème du récit 1 suppose seulement de savoir dire la suite des nombres et d'avoir compris que quand un mot-nombre est plus loin dans la comptine, il désigne une quantité plus grande. Il n'empêche que, du point de vue des élèves, un petit exploit a été accompli : ils ont réussi à comparer la hauteur des tours sans que les tours soient construites, en ayant recours aux connaissances dont ils disposent. Résoudre le problème du récit 2 suppose quelques connaissances supplémentaires. L'une des procédures décrites s'appuie sur une décomposition (8 vient juste après 7, c'est donc 7 et encore 1) pour faire apparaître que la collection de Cécile est identique à une partie de celle d'Anne. Anne a autant que Cécile et encore quelque chose, donc elle a plus. L'autre procédure mobilise les connaissances suivantes : « 8 vient après 7 dans la comptine, alors 8 c'est plus que 7 », « sept et encore 9, c'est autant que 9 et encore 7 » puis « comme 8 c'est plus que 7, 9 et encore 8 c'est plus que 9 et encore 7 ». Ces deux démarches permettent aux élèves d'accomplir un exploit du même ordre que le précédent. Par ailleurs, il nous semble intéressant que, même pour répondre à une question aussi élémentaire, plusieurs procédures soient possibles, ce qui encourage à prendre des initiatives. Enfin, résoudre le problème du récit 5 s'appuie sur la connaissance « si une bande est faite de plusieurs morceaux, la longueur ne change pas quand on change l'ordre des morceaux ».

Proposer dès le début de l'année de CP ces problèmes pouvant être résolus sans recours au comptage aide les élèves à prendre confiance en leur capacité à résoudre des problèmes. Bien sûr, des problèmes tels que celui du récit 6 y contribuent également (à condition de s'appuyer sur la reconnaissance du dé 6, et non sur le comptage), mais ceux des récits 2, 7 et 11 enrichissent le répertoire disponible. La fréquentation régulière de problèmes comme ceux-ci (et d'autres venant plus tard dans l'année comme celui du récit 4) nous semble de nature à limiter le risque que l'élève cherche seulement à deviner la « bonne » opération. Dans une période où les élèves ne disposent que de deux opérations, l'addition et la soustraction (et pire encore s'ils ne disposent que de l'addition), cette stratégie pragmatique et opportuniste permet de répondre correctement à une bonne partie des problèmes. Certains élèves peuvent s'en satisfaire. La présence de problèmes où la réponse attendue n'est pas un nombre, et d'autres où il existe au moins une procédure beaucoup plus économique que le calcul supposé « expert » rend moins attrayante cette stratégie.

Intégrer de tels problèmes à la palette des problèmes de CP présente selon nous également un avantage du côté de l'enseignant : si une partie des problèmes que l'on rencontre se résolvent sans poser d'opération, il est vain d'enseigner une méthode dont le but est de déterminer la bonne opération, que ce soit en reconnaissant une catégorie de problèmes, en renseignant les cases d'un schéma en barre standardisé, ou par un autre procédé. Il faut alors rechercher d'autres approches.

I.3. Au CP, est-il possible de résoudre un problème en le rattachant à une classe plus générale ?

On lit dans les principes énoncés en début des programmes que :

> *pour être en capacité de résoudre des problèmes, il faut savoir prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer. Un moyen pour y parvenir consiste à procéder par analogie en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes* (MEN, 2024, p. 3).

L'idée de résoudre un problème particulier en le rattachant à une classe plus générale est parfois justifiée en évoquant les travaux de Vergnaud dont nous avons déjà parlé et ceux de Julo (1995, 2002), qui parle d'une mémoire des problèmes. Cependant, la mémoire des problèmes selon Julo est une mémoire personnelle que l'élève construit au fur et à mesure qu'il résout par lui-même et avec succès des problèmes. Elle n'a rien a voir avec des catégories déterminées *a priori* qu'il faudrait enseigner aux élèves.

Cela dit, est-il pertinent, plus tard dans la scolarité, d'inviter les élèves à rattacher un problème particulier à une classe plus générale de problèmes ? Nous n'abordons pas ici cette question, mais il est clair que ce procédé n'est pas adapté à un élève qui aborde ses tous premiers problèmes arithmétiques : comment cet élève qui n'a encore pas rencontré de problème numérique pourrait-il concevoir une classe de problèmes ? De ce point de vue, le CP est le chaînon manquant des programmes de 2024. Ce point nous semble d'autant plus important à souligner que des travaux montrent par ailleurs que la structure des problèmes n'explique pas à elle seule la difficulté d'un problème (Sander, 2019). Et, même, s'il était nécessaire d'apprendre à reconnaître certaines catégories de problèmes, rencontrer aussi des contre-exemples, des problèmes n'appartenant pas à ces catégories, demeurerait indispensable.

Ainsi, au CP, proposer des problèmes tels que ceux des récits 1 à 5 et renoncer à rattacher un problème particulier à une classe plus générale évite de réduire la résolution de problèmes à l'application de quelques procédés, mais cela ne constitue pas en soi une aide pour résoudre les problèmes. De nouvelles questions se posent : que peut-on dire aux élèves, que peut-on leur proposer, qui ait un domaine de validité assez large pour mériter d'être retenu sans pour autant conduire à un procédé mécanique ? La suite de cet article aborde deux pistes pour aider les élèves de CP : le calcul avant de disposer des opérations, et un usage non standardisé des schémas.

2. Élargir la palette de procédures de calcul disponibles

Il est difficile de penser au calcul indépendamment des opérations arithmétiques, or au début du CP aucune opération arithmétique n'est disponible. C'est pourquoi, si l'on veut que les élèves résolvent des problèmes sans dénombrer dès le début du CP, il est nécessaire d'avoir une vision plus large du calcul.

2.1. Où se situe la difficulté ?

Considérons un élève de début de CP qui aurait réussi à dire que le problème des pommes de Zélie du récit 7, reproduit ci-dessous, est un problème de recherche du tout, ou bien qu'il relève du schéma en barres où l'on cherche la grande barre connaissant les deux parties, ou bien encore que le nombre de pommes de Zélie doit s'écrire 8+5.

> *Zélie a 8 pommes rouges et 5 pommes jaunes. Elle compte toutes ses pommes. Combien en a-t-elle ?*

L'adulte interprétera peut-être les choses de la façon suivante : l'élève a effectué la part la plus significative du travail, il a reconnu la structure additive du problème, il lui reste seulement une dernière étape à franchir : effectuer le calcul pour déterminer que 8+5, c'est 13.

Qu'en est-il du point de vue de l'élève ? Pour répondre à la question reformulée « 8+5, c'est combien ? » il a trois possibilités :

1) le fait numérique « 8 et encore 5, c'est 13 » est déjà présent et accessible en mémoire, la réponse est alors immédiate ;
2) ce fait n'est pas présent, mais l'élève connaît d'autres faits numériques plus simples et sait prendre l'initiative de représenter différemment « 8 et encore 5 ». Il peut penser que 8 et 5 c'est comme 8 et 2 et 3 et entamer une procédure de calcul analogue à celles que nous décrivons dans le récit 7 ;
3) l'élève n'est dans aucun des deux cas précédents, il ne lui reste que la possibilité de dénombrer en comptant. Que les objets comptés soient des pommes réelles, des objets représentant les pommes (doigts ou cubes par exemple) ou encore des traces graphiques (dessins de pommes, bâtons ou autre) n'a qu'une importance secondaire.

Les possibilités s'offrant à l'élève à ce moment sont exactement celles qu'il avait quand il a compris le sens de la question « combien Zélie a-t-elle de pommes en tout ? » avant de se demander quelle opération est pertinente, ou de quel type de problème cette question relève.

De ce fait, le travail visant à déterminer l'opération pertinente, le type de problème ou le schéma adéquat risque d'être perçu comme un rituel destiné à satisfaire l'enseignant, et non comme une étape significative dans la recherche de la vérité. De plus, ce travail préalable rend le problème plus abstrait et probablement plus difficile à comprendre pour une partie des élèves. On peut savoir ce que signifie « 8 pommes rouges et encore 5 pommes jaunes », et avoir des difficultés à interpréter « 8+5 » ou « On connaît les parties, il faut chercher le tout ».

Pour que les élèves soient le moins souvent possible dans le cas où leur seule ressource est de dénombrer en comptant, il faut développer les compétences de calcul relevant des deux autres cas, enrichir le répertoire de faits numériques et s'entraîner à utiliser ces connaissances pour inventer différentes décompositions de la même quantité.

2.2. Utiliser des cartes à points pour calculer par décomposition

En annexes, nous décrivons le matériel que nous utilisons (annexe 1) et certaines procédures de calcul à travers des « récits » (annexe 2). Dans certains cas, le calcul consiste simplement à évoquer un fait numérique connu (récits 1 et 6) ou à analyser un nombre en s'appuyant sur la numération orale ou écrite (récits 8 et 9). Développons ici les cas importants où l'élève doit déterminer ce qui, du point de vue de l'adulte, est une somme ou une différence ne relevant pas d'un fait déjà mémorisé.

Le nombre d'objets d'une collection ne change pas quand on la sépare en plusieurs parties. Il ne change pas non plus quand on regroupe deux de ces parties. Le mode de calcul que nous proposons consiste donc à scinder ou regrouper des collections représentées par des cartes à points jusqu'à trouver une présentation de la quantité qui permet de conclure.

Par exemple, si l'on cherche à déterminer combien il y a de points en tout derrière ces cartes :

$$\boxed{9}\quad \boxed{9}\quad \boxed{7}$$

on pourra remplacer les cartes par celles-ci :

$$\boxed{9}\quad \boxed{9}\quad \boxed{5}\quad \boxed{1}\quad \boxed{1}$$

puis les déplacer ainsi :

$$\boxed{9}\boxed{1}\qquad \boxed{9}\boxed{1}\qquad \boxed{5}$$

afin d'effectuer ces regroupements :

$$\boxed{10}\qquad \boxed{10}\qquad \boxed{5}$$

et conclure enfin qu'il y a 25 points en tout derrière les cartes.

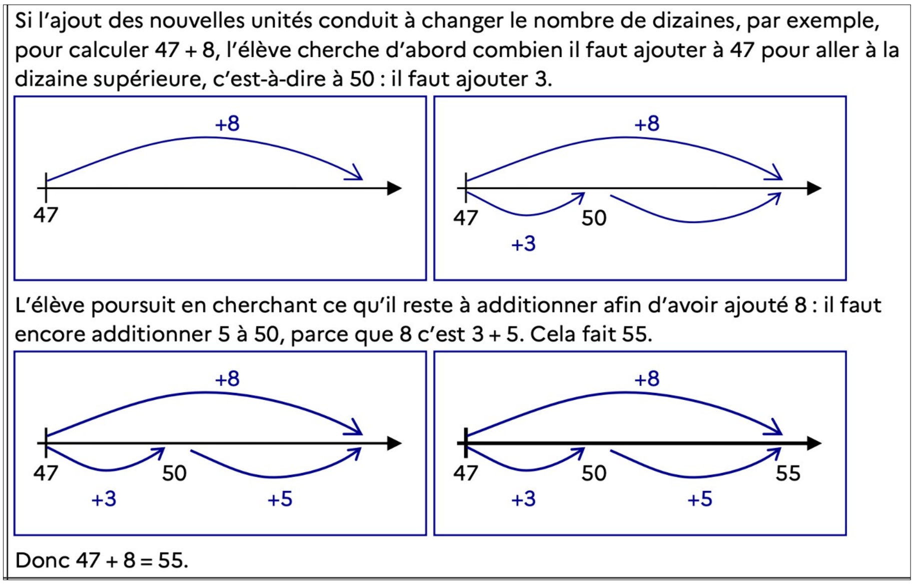
Dans ce mode de calcul, le calculateur doit effectuer deux types de contrôles. Il doit contrôler la validité des transformations effectuées en passant d'une étape à l'autre : si on a scindé ou regroupé des collections, le fait numérique utilisé est-il vrai ? A-t-on par inadvertance oublié une partie des éléments d'une étape à l'autre ? Il doit par ailleurs contrôler l'opportunité des transformations effectuées. Si un élève remplace les trois cartes de l'exemple ci-dessus par celles-ci, cela ne l'aidera probablement pas.

$$\boxed{7}\boxed{2}\qquad \boxed{7}\boxed{2}\qquad \boxed{7}$$

Cependant, prendre un chemin différent n'est pas grave, l'élève peut choisir de poursuivre en regroupant 7 et 7 pour obtenir 14, ou décomposer 7 en 5 et 2. Il peut aussi abandonner cette tentative et explorer une autre piste.

2.3. Des procédures réfléchies plutôt que des procédés à appliquer

Comparons cette approche à une technique de calcul mental préconisée dans les programmes (MEN, 2024) :

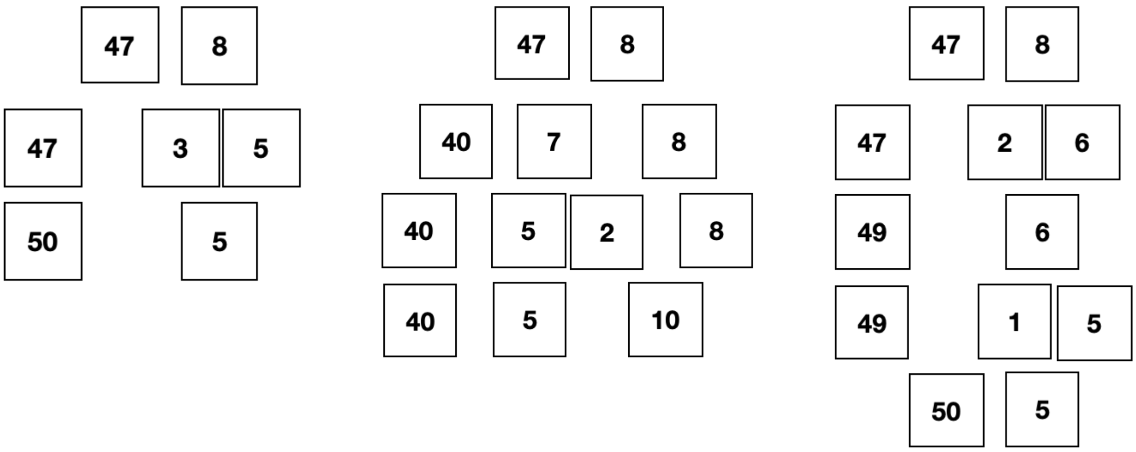

Si l'ajout des nouvelles unités conduit à changer le nombre de dizaines, par exemple, pour calculer 47 + 8, l'élève cherche d'abord combien il faut ajouter à 47 pour aller à la dizaine supérieure, c'est-à-dire à 50 : il faut ajouter 3.

L'élève poursuit en cherchant ce qu'il reste à additionner afin d'avoir ajouté 8 : il faut encore additionner 5 à 50, parce que 8 c'est 3 + 5. Cela fait 55.

Donc 47 + 8 = 55.

***Figure 1** : extrait des programmes de cycle 2 (MEN, 2024, p. 7).*

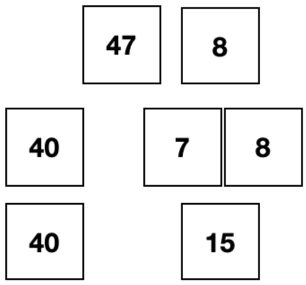
Voici trois procédures permettant de déterminer combien il y a de points en tout derrière une carte 47 et une carte 8.



La première procédure est équivalente à celle du texte officiel, mais l'usage des cartes nous semble beaucoup plus facile à comprendre. Les nombres écrits sur les cartes représentent toujours la même chose : la quantité de points au dos de la carte, alors que dans la procédure des programmes, certains nombres indiquent des positions sur la droite numérique (ce qui est déjà moins simple à concevoir qu'une quantité), d'autres indiquent des déplacements. La deuxième procédure s'appuie sur la décomposition de 47, ce qui n'est pas envisageable dans la technique proposée dans les programmes. Pourtant, si on l'affine un peu, en décomposant directement 47 en 45 et 2, on obtient un calcul rapide et élégant. La troisième procédure illustre une différence importante entre un algorithme comme celui de la figure 1 et l'approche que nous proposons, qui relève du calcul réfléchi : l'élève qui commence par décomposer 8 en 6 et 2 ne choisit pas le chemin le plus simple, mais tant qu'il conserve la quantité totale, ce n'est pas grave, son calcul sera seulement un peu plus long.

Notons par ailleurs une différence importante entre l'usage de cartes à points et le schéma présenté figure 1. Si le texte officiel utilise quatre schémas pour expliquer la procédure, dans la pratique il n'y a en qu'un seul qui se complète progressivement et où la chronologie n'est pas visible. En revanche, dans les procédures à l'aide des cartes à points les étapes peuvent rester visibles : pour contrôler la validité du calcul il suffit de s'assurer que les groupements ou séparations effectués à chaque étape sont corrects.

Enfin, la procédure du texte officiel a une portée très limitée, elle s'applique mal au calcul de $47+18$, et pour celui de $47+9$, une autre technique est proposée. Enseigner une accumulation d'algorithmes adaptés chacun à un petit nombre de situations nous semble une impasse. En revanche, plus les élèves disposent de faits numériques connus, plus les possibilités sont nombreuses. On pourrait craindre qu'ils finissent par être perdus devant un trop grand nombre de possibilités mais, en réalité, connaître plus de faits numériques augmente les chances de disposer d'un fait pertinent qui nous approche rapidement du résultat souhaité. Durant l'année, l'enseignant pourra inciter à choisir les procédures les plus efficaces (par exemple en donnant une contrainte de temps). Il pourra aussi s'appuyer sur certaines procédures quand il voudra introduire et justifier les algorithmes du calcul posé. Par exemple, un élève qui sait que 8 et encore 7 c'est 15 pourra procéder ainsi, ce qui est à la fois rapide et proche de la technique d'addition posée.



Quand le calcul à effectuer est (du point de vue de l'adulte) une différence, il arrive également que l'évocation d'un fait numérique ou d'un principe de numération suffise à répondre (récit 9). Si ce n'est pas le cas, on peut procéder comme dans les récits 10 et 11. Voici, en figure 2, dans le même esprit, deux des nombreuses procédures possibles pour déterminer ce qui reste d'une collection de 43 éléments dont on a enlevé 16 éléments.

« Comme je ne sais pas immédiatement partager 43 en 16 et encore autre chose, j'effectue un autre partage de 43 puis je le transforme pour faire apparaître un morceau qui vaut 16 ».

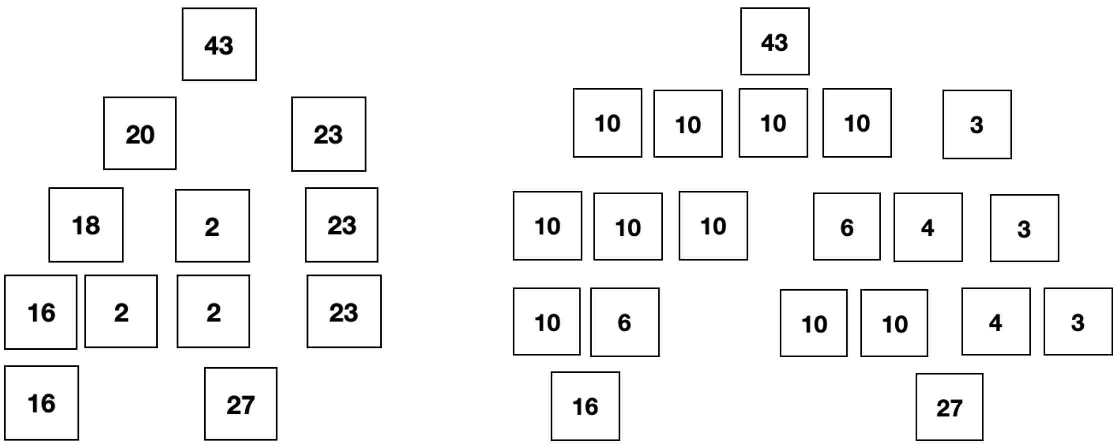


Figure 2 *: Calculer $43-16$ avec des cartes à points.*

Les étapes successives de transformation du nombre 43 permettent d'établir que 43, c'est 16 et encore 27 et de dire ce qui reste de 43 quand on a enlevé 16, ou ce qu'il faut ajouter à 16 pour obtenir 43.

On pourrait envisager de décrire les mêmes procédures à l'aide de bandes, ce que nous faisons par exemple dans le récit 11. Nous avons choisi de privilégier l'usage des cartes pour deux raisons. D'abord, quand les nombres grandissent, la longueur des bandes est problématique, ensuite, la volonté de respecter une proportionnalité même approximative entre le nombre représenté et la longueur de la bande peut entraîner des difficultés.

Cependant, l'usage des cartes à points a aussi des limites. La préparation et la gestion matérielle seraient très lourdes s'il fallait prévoir en plusieurs exemplaires les cartes de 1 à 100 et dessiner au dos les constellations de points correspondantes. Mais, une telle abondance de cartes n'est pas nécessaire. Il est essentiel au tout début que les cartes comportent effectivement des points au dos, pour que les élèves sachent de quoi l'on parle et pour permettre une validation par comptage en cas de doute sur la validité d'un calcul, mais le retournement des cartes est aussi rare que possible. On peut donc rapidement se contenter de dessiner un rectangle dans lequel est écrit un nombre et d'imaginer que ce rectangle représente une carte avec des points au verso… quitte à fabriquer la carte *a posteriori* si, par exception, une vérification par comptage semble nécessaire. Cette phase de dessin des cartes peut d'ailleurs être considérée comme une étape intermédiaire vers l'écriture arithmétique des calculs effectués.

Par ailleurs, dès le début du travail, seules les cartes destinées à un usage collectif au tableau comportent réellement des points, celles utilisées par les élèves n'en ont pas. Enfin, la présence du matériel « cartes à points » ne signifie pas que nous accordons des vertus particulières à la manipulation, les cartes que nous proposons ne sont pas des objets à dénombrer, elles constituent une représentation matérielle d'idées abstraites.

2.4. Remarques d'ordre mathématique sur cet usage des cartes à points

Dans l'usage des cartes à points que nous proposons, chaque ligne représente le même nombre que la précédente et la suivante. Cela conduit les élèves à se poser une question fondamentale en mathématiques pour contrôler la validité de leur procédure : ces deux écritures représentent-elles le même nombre ?

Par ailleurs, dans les procédures que nous proposons, qu'il s'agisse de calculer une somme ou une différence, on commence par représenter le tout avant de le transformer. La nécessité d'utiliser pour cela une seule carte ou plusieurs selon les données du problème contribue à l'analyse du problème.

Répétons ici que les calculs que nous donnons en exemple ne sont des additions ou des soustractions que du point de vue de l'adulte. L'élève à qui on demande combien on trouvera de points si on retourne les cartes 9, 9 et 7 n'a pas besoin de penser qu'il s'agit d'une somme pour agir sur les nombres et effectuer des remplacements tels que ceux écrits plus hauts. Si les cartes représentent les données d'un problème verbal, par exemple « dans cette boîte, il y a 9 billes rouges, 9 billes bleues et 7 billes jaunes (et rien d'autre), combien y a-t-il de billes dans la boîte ? » Il n'est pas nécessaire d'expliciter l'idée de somme. On s'assure seulement qu'avec les cartes choisies, aucune bille n'est oubliée ni représentée deux fois.

Le lecteur s'étonnera peut-être de l'absence totale de signes arithmétiques dans les exemples ci-dessus. Nous avons fait ce choix pour montrer qu'il est possible de calculer au lieu de dénombrer dès le début de l'année de CP et mettre en évidence que calculer est indépendant de l'usage de signes arithmétiques. Avant la fin de l'année de CP (dans le meilleur des cas), nous pensons que le calcul posé n'est ni plus efficace ni plus économique que le calcul réfléchi que nous décrivons ici. Il nécessite entre autres choses d'avoir en mémoire la totalité des sommes de deux nombres inférieurs à 10, alors que les procédures de calcul réfléchi s'accommodent d'une connaissance partielle de ces résultats. Pour autant, nous pensons que les signes arithmétiques peuvent et doivent être utilisés très tôt en CP, mais pour traduire des affirmations (faits numériques mémorisés ou résultats établis par calcul), pas pour noter des opération qu'il faudra ensuite effectuer. Ainsi, quand les écritures arithmétiques sont introduites, elles sont utilisées dans notre proposition *a posteriori*, après résolution du problème. On écrira par exemple $43=16+27$ ou $43-16=27$ pour traduire le résultat auquel on est parvenu par les procédures décrites plus haut. Nous ne détaillons pas ici le travail sur les écritures arithmétiques en CP (nous envisageons un troisième article pour le faire), mais signalons tout de même que, si les écritures arithmétiques sont utilisées comme nous le proposons pour traduire une affirmation, et non pour indiquer l'opération à effectuer, on utilise les signes « + », « − » « = » d'emblée dans leur sens mathématique véritable :

- « $27+16=43$ » signifie que si on réunit deux collections disjointes, l'une de 27 éléments et l'autre de 16 éléments, on obtient une collection de 43 éléments. Cette affirmation est vraie.
- « $27+16=40$ » est une affirmation du même type, mais fausse.

À l'école élémentaire, les signes opératoires sont au contraire principalement utilisés comme déclencheurs d'un calcul à effectuer. Paradoxalement, cette vision appauvrit les capacités de calcul. Imagions un élève de cycle 3 qui a à effectuer le calcul suivant : $167+2458-67-2458$. S'il est habitué à raisonner sur des égalités, des équivalences entre plusieurs écritures du même nombre, il songera peut-être que ce nombre peut aussi s'écrire $167-67+2458-2458$, ce qui permet de voir facilement qu'il vaut 100. Si cet élève ne voit dans $167+2458-67-2458$ qu'une suite de consignes, il effectuera les opérations dans l'ordre où elles sont écrites.

3. Des éléments « discrets discrets » au service d'une schématisation non ambiguë

Dans les récits présentés en annexe 2, la fonction des bandes quadrillées et des cartes à points varie : elles peuvent être les objets à propos desquels le problème est posé (récits 4, 5 et 6) ou des représentations d'autres objets, des éléments de schémas (récits 2, 7, 10, 11). Nous détaillons dans notre précédent article (Hersant, Thomas, 2024) leur intérêt pour poser des problèmes sans énoncé écrit. Intéressons nous maintenant à leurs utilisations et propriétés pour représenter les quantités et schématiser leurs relations.

Dans le déroulement d'une année de CP, nous suggérons d'utiliser les bandes et les cartes d'abord comme support de problème (Combien de points au dos de cette carte ? Quelle bande sera la plus longue ?…). Ainsi, quand le même matériel est utilisé plus tard pour représenter d'autres objets, certaines actions et certaines propriétés sont déjà familières : il est légitime, et souvent utile, de remplacer plusieurs cartes (ou bandes) par une seule, à condition de s'assurer qu'il y a toujours autant de points ou de cases en tout. Sous la même condition, on peut aussi remplacer une seule carte (ou bande) par plusieurs.

3.1. Évoquer le cardinal de la collection…

La caractéristique essentielle des supports que nous utilisons est la présence d'éléments discrets, c'est à dire susceptibles d'être désignés un à un et dénombrés (les points ou les cases) au dos des cartes et des bandes. Ce sont ces éléments qui permettent aux élèves de comprendre réellement les schémas et les actions que l'on effectue sur eux.

Avec ce matériel, quand un problème parle de 10 billes, on peut imaginer une bille dans chaque case au dos d'une bande de 10 cases. S'il est question ensuite de 4 billes rouges, il faudra décider, selon ce que stipule l'énoncé, si les 4 billes rouges sont déjà dessinées ou s'il faut introduire une nouvelle bande. On saisit mieux ainsi les relations entre les différentes données, ce qui joue un rôle important pour la représentation du problème. *A contrario*, en l'absence des cases, l'expression « représenter les 10 billes » risque d'être comprise comme une sorte d'étiquetage : à chaque nombre de l'énoncé on associe une étiquette, ce qui n'aide pas à expliciter les relations entre les nombres d'éléments des collections dont il est question. Ainsi, par exemple, pour le problème du récit 10, les élèves qui considèrent les schémas comme des étiquettes ne verront pas d'inconvénient à produire un des schémas de la figure 3. Or ces dessins n'aident pas à comprendre que les 5 billes rouges sont une partie des 13 billes, ce qui est précisément ce qu'on attend d'un schéma.

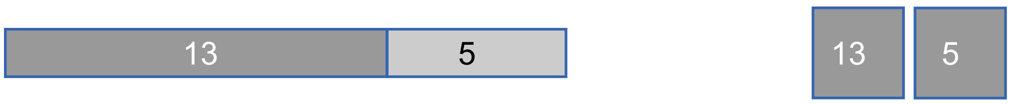


Figure 3 *: Schémas construits avec une conception « étiquettes » des bandes et cartes.*

La présence de ces éléments discrets au dos des cartes et bandes rend plus claires les actions faites sur le schéma. Par exemple, si je coupe une bande de 10 en deux bandes[3], le fait que le nombre de cases n'a pas changé, qu'il doit toujours y avoir 10 cases en tout possède un haut degré d'évidence. De la même façon, si je partage une bande quadrillée représentant dix billes, il est évident que la partie de gauche après le découpage ne contient plus 10 cases, puisqu'une partie des cases se situe dans l'autre morceau, et qu'il faut donc modifier l'écriture. En revanche, le découpage d'une bande non quadrillée au dos est beaucoup plus difficile à interpréter. Ainsi, partager en deux parties une bande « représentant » 10 billes n'a pas du tout le même sens selon que la bande est ou non munie de 10 cases au dos.

Par ailleurs, la présence de ces éléments discrets au dos des cartes et bandes clarifie les critères de validité des actions effectuées avec ce matériel : s'il y a dix points au dos d'une carte « 10 », la règle décidant s'il est légitime ou non de la remplacer par plusieurs autres est claire : le changement est valide s'il y a toujours exactement dix points en tout au dos des nouvelles cartes.

3.2. …sans permettre le dénombrement

Cependant, il est également important que ces éléments discrets soient discrets. Autrement dit, les cases ou les points sont indispensables pour savoir de quoi l'on parle mais doivent être cachés au verso des bandes ou des cartes pour empêcher le comptage.

Empêcher le comptage impose également que le matériel collectif utilisé au tableau par l'enseignant soit différent du matériel individuel des élèves. Tous les exemples de calculs à l'aide de cartes à points donnés dans la partie précédente, s'ils sont montrés au tableau, sont effectués (au moins au début de l'année) à l'aide de cartes comportant réellement le nombre

[3] Évidemment, il s'agit de couper sur un trait séparant deux cases.

voulu de points au verso. Cela permet de retourner les cartes pour compter *a posteriori* afin de vérifier un calcul. En revanche, quand les élèves calculent ils le font avec des cartes dont le verso est vide, ce qui empêche de recourir au comptage. Chaque élève doit donc disposer d'une réserve de cartes avec deux ou trois exemplaires des nombres les plus couramment utilisés plus quelques cartes vierges sur lesquelles il peut inscrire les nombres dont il pense avoir besoin et qui ne sont pas déjà dans sa réserve. Dès que possible, ces cartons seront remplacés par des rectangles dessinés sur l'ardoise ou le cahier.

Si on choisit de travailler avec des bandes plutôt qu'avec des cartes à points, une précaution supplémentaire est nécessaire. Les élèves doivent dessiner les bandes à main levée sur leur cahier ou leur ardoise, et non manipuler des bandes d'une réserve individuelle. En effet, s'ils disposent de bandes, pour savoir combien de cases il y a en tout derrière une bande 5 et une bande 6, il suffit de chercher dans sa réserve la bande aussi longue que la bande 5 et la bande 6 placées bout à bout et de lire qu'il s'agit de la bande 11. Ce biais permet, comme le comptage, de contourner le calcul. De de ce point de vue, l'usage des bandes de papier que nous faisons est très différent de celui proposé par Rinaldi (Bayle *et al.*, 2021 ; Rinaldi, 2024). En effet, ces auteurs utilisent des bandes semblables à celles que nous proposons d'utiliser (recto : un nombre, verso : le nombre de cases indiquées au recto) mais dans un autre but que le nôtre : il s'agit de construire, consolider et renforcer le répertoire additif sous vingt au CE en utilisant l'appui sur 10 quand nous travaillons plus largement sur le développement de procédures de calcul variées dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques dès le CP. De plus, pour ces auteurs, la longueur des bandes de papier est toujours respectée car elle permet de valider les réponses proposées par les élèves dans le cadre d'un jeu à deux (*cf.* par exemple Rinaldi, 2024, p. 65).

3.3. Schématiser pour reformuler et non se ramener à un modèle standard.

La forme privilégiée par certains manuels pour représenter par des barres les problèmes basiques additifs n'est pas compatible avec l'idée d'un schéma « discret discret ». Prenons par exemple le problème du récit 10 rappelé ci-dessous.

> *Dans cette boite, il y a 13 billes. 5 billes sont rouges, les autres sont bleues. Je vais compter les billes bleues. Combien de billes bleues vais-je trouver ?*

Ces manuels proposeront le schéma de la figure 4 : les 5 billes rouges sont au dos de la barre 5 mais elles sont également au dos de la barre 13, ce qui n'est pas possible[4]. En réalité, ce schéma ne représente pas la situation du problème, il évoque une des catégories de la classification des problèmes du champ additif de Vergnaud… sans oser le dire.

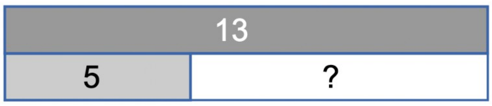


Figure 4 *: Schéma en barre du problème 10 selon certains manuels.*

C'est pourquoi, si l'on choisit le schéma en barres pour représenter le problème 10, nous préférons la présentation de la figure 5. Et, si l'on choisit de représenter le problème par des cartes, on peut envisager les dispositions de la figure 6.

[4] Dans notre article du n° 114 de la revue, nous proposons d'utiliser les bandes quadrillées pour poser des problèmes sans énoncé ou presque. La représentation utilisée ressemble à celle de la figure 7 mais il y a une différence essentielle : le premier niveau du schéma représente une bande et le second deux autres bandes qu'on assemble, chaque élément n'est représenter qu'une seule fois.

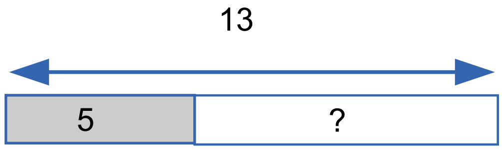


Figure 5 *: Schéma en barre du problème 10 que nous préférons.*

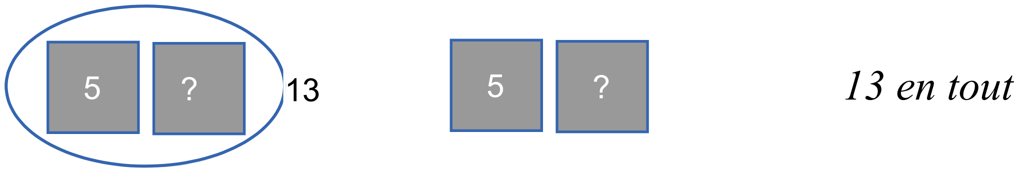


Figure 6 *: Représentation du problème 10 par des cartes.*

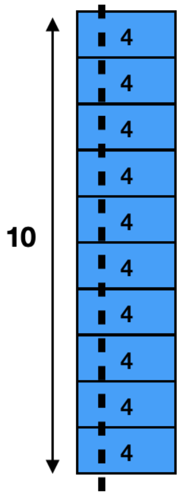
Tous ces schémas répondent à une règle implicite que l'on pourrait énoncer ainsi : tous les nombres de l'énoncé doivent être représentés dans le schéma. Cette règle qui découle de la conception selon laquelle la fonction du schéma est de mettre en évidence l'opération pertinente ne nous semble ni fondée, ni aidante pour résoudre le problème. Le récit 10 illustre une autre approche dans laquelle la solution s'élabore dans l'action visant à faire apparaître les 5 billes rouges dans un schéma qui évolue, approche que nous avons développée dans la partie consacrée aux procédures de calcul. Dans cette approche où le schéma comporte des éléments discrets discrets, la forme du schéma a peu d'importance, l'essentiel se situe dans les questions que l'on se pose en élaborant le schéma. Il peut d'ailleurs arriver que la réponse à ces questions rende inutile de terminer le schéma. Ainsi, dans le problème du récit 12, un élève qui commence par dessiner une barre représentant les 23 billes et se demande où il faut dessiner les billes perdues remarquera peut-être que les 12 billes perdues ne sont pas dans celles qui restent : elles sont à côté et constituent avec les billes qui restent l'ensemble des billes que Zélie avait au début. Il n'est pas sûr que cet élève ait alors besoin de terminer le schéma. Par ailleurs, un usage stéréotypé des schémas peut parfois empêcher de voir une solution simple. Un élève qui veut absolument représenter le problème du récit 13 par un schéma standard à trois barres risque d'être mis en difficulté par le fait qu'il dispose de trois nombres. Finalement, enseigner une forme standardisée de schéma est préjudiciable parce que cela appauvrit les questions que l'on peut se poser. Dans un schéma parties-tout standardisé à trois barres, il suffit de se demander quel est le plus grand nombre en jeu pour placer les nombres… souvent correctement puisque, comme le remarque Conne (1987), on opère avec des nombres positifs. Mais ce « raisonnement » peut s'appliquer au problème de l'âge du capitaine. *A contrario*, une pratique réfléchie et créative de la schématisation peut aider à progresser en calcul. Considérons par exemple le problème suivant :

> *Voici 10 enveloppes. Dans chaque enveloppe, il y a 4 jetons. Je vais sortir tous les jetons et les compter. Combien y aura-t-il de jetons ?*

Représentons chaque enveloppe par une barre (on imagine donc qu'il y a quatre cases au dos, contenant chacune un jeton). On peut représenter le problème ainsi, ce qui n'aide guère.

Il serait dommage que l'enseignant ne montre pas qu'une disposition différente des barres fournit une solution élégante. En plaçant les 10 barres les unes sous les autres et non bout à bout, on obtient un rectangle que l'on peut partager en 4 colonnes identiques, comme cela est amorcé sur le dessin ci-dessous. Au lieu d'ajouter 10 fois le nombre 4, on peut donc ajouter 4 fois le nombre

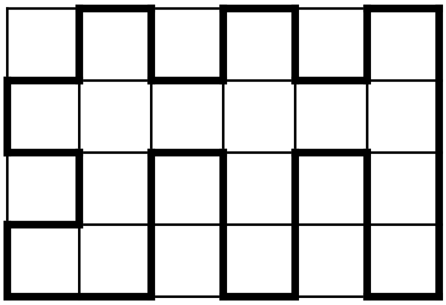
10. La reformulation du problème à l'aide du schéma fournit ainsi une belle occasion d'introduire la multiplication et une de ses propriétés essentielles, la commutativité.



La façon d'utiliser les schémas que nous décrivons ici permet de reformuler un problème, mais la reformulation ne nécessite pas obligatoirement un schéma, elle peut être purement verbale. Par exemple, pour le problème du récit 12, si on imagine que les autres enfants redonnent à Zélie les billes qu'elle a perdues, Zélie retrouvera alors ce qu'elle avait au début. Selon Sander (2018), la reformulation verbale du problème permet la construction d'une interprétation alternative susceptible d'aider l'élève à résoudre le problème en provoquant des phénomènes de re-catégorisation. Dans cet exemple, l'énoncé initial évoque une perte donc une soustraction ($?-12=23$) alors que le calcul final correspond à une addition ($23+12=?$). La reformulation lève la dissonance présente dans l'énoncé initial puisque l'idée de « redonner » correspond à une addition. Mais, pour nous, s'autoriser à reformuler le problème verbalement ou par un schéma est aussi une façon de mettre le texte initial à distance : puisque l'histoire peut être racontée de plusieurs façons, les mots choisis ne sont pas essentiels et les procédures basées sur des indices de surface deviennent moins probables. Cela rejoint finalement l'idée de modèle : à plusieurs reformulations du problème (y compris en ne considérant pas des billes mais d'autres objets) correspondent un même calcul.

Cependant, reformuler un énoncé n'est pas habituel dans les classes. Dans beaucoup d'exercices scolaires, l'élève doit seulement comprendre et appliquer la consigne, il n'a pas à agir sur l'énoncé, à le transformer comme nous venons d'en donner un exemple : mets au présent la phrase suivante ; range ces nombres du plus petit au plus grand ; entoure les images d'animaux qui pondent des œufs. Les problèmes arithmétiques sont de ce point de vue des exercices particuliers, ils ont un caractère impératif, puisqu'il s'agit de répondre à la question posée, mais sont également un objet sur lequel il convient d'agir. Si cela n'est pas rapidement clair pour les élèves, les injonctions à bien lire l'énoncé, ce qui est évidemment nécessaire, peuvent renforcer le caractère indiscutable de la consigne et décourager par avance toute tentative de « jouer » avec l'énoncé du problème, de l'envisager sous un angle nouveau et potentiellement plus favorable. Le calcul à l'aide des cartes à points peut également être considéré comme une suite de reformulations, chaque étape étant une nouvelle façon de présenter le même nombre.

Reformuler un problème arithmétique aide souvent à le résoudre, mais la pertinence de la reformulation en mathématiques ne s'arrête pas à la résolution des problèmes arithmétiques de l'école élémentaire, c'est un élément clé de la résolution de tout type de problèmes. Donnons ici un exemple simple de la puissance de la reformulation, sortant du cadre arithmétique : on cherche à tracer en suivant les lignes d'une grille de 6×4 cases un polygone dont le périmètre est le plus grand possible. Il est facile d'obtenir un polygone de périmètre 34 (l'unité de longueur étant le côté d'un carreau) par exemple comme ci-dessus, mais peut-on faire mieux ? Une reformulation du problème permet de répondre partiellement à cette question. En effectuant le tour d'une figure tracée en suivant les lignes du quadrillage, on passe alternativement sur un côté de carreau et sur un nœud. Le nombre de nœuds situés sur la ligne est donc égal au périmètre de la figure. Or la grille ne comporte que 35 nœuds, le périmètre ne pourra donc pas dépasser 35. Le périmètre ne peut pas non plus être égal à 35, nous laissons au lecteur le plaisir de découvrir un autre changement de point de vue qui permet de le montrer simplement.



Pour finir, il ne suffit pas de dire aux élèves qu'il faut reformuler un problème pour les aider. L'usage souple des schémas « discrets discrets », comme la pratique d'une forme de calcul encourageant la variété des procédures nous semblent pouvoir contribuer à favoriser l'usage de la reformulation.

4. le CP, chaînon manquant de la résolution de problèmes dans les programmes

Notre réflexion a débuté bien avant la publication des programmes de 2024, notre intention initiale n'était donc pas faire des propositions alternatives à ces programmes[5]. Toutefois, sur la base de l'identification de points critiques dans les programmes, il nous nous semble utile d'expliciter en quoi le CP nous apparaît comme le chaînon manquant de la résolution de problème et de situer nos propositions par rapport à ces textes officiels.

4.1. Points critiques dans les programmes

Premièrement, on lit dans les principes de ces programmes que les élèves :

> *doivent disposer de stratégies et d'outils efficaces permettant de les (NDL : problèmes additifs en une étape, problèmes de partie-tout, problèmes de comparaison) résoudre : problèmes de référence, schémas pour soutenir la modélisation, etc.* (MEN, 2024, p. 3).

Mais dans la partie consacrée au CP, rien de plus n'est indiqué sur ces outils. Alors, comme nous l'avons déjà mentionné dans la partie 1, comment l'élève de CP résout-il des premiers problèmes avant de disposer des problèmes de référence ? Des questions se posent aussi pour l'enseignant : comment explicite-t-il aux élèves l'analogie entre le problème qui leur est posé et l'un des problèmes de référence ? Que peut-il dire au CP à propos des schémas ?

[5] Cet article était en cours d'écriture lorsque l'arrêté du 22 octobre 2024 fixant entre autres les programmes de mathématiques pour le cycle 2 est paru et celui paru dans le n° 114 était déjà écrit.

Deuxièmement, les programmes affirment que *« la maîtrise de ces compétences spécifiques renforce la confiance des élèves en leur capacité de résoudre des problèmes »* (MEN, 2024, p. 3). Cette affirmation nous semble inquiétante parce que cela relève de la croyance en l'existence de sous-compétences qu'il suffirait d'enseigner pour que les élèves sachent résoudre les problèmes. De notre point de vue, ce n'est pas la maîtrise de compétences spécifiques qui renforce la confiance des élèves en leur capacité de résoudre des problèmes, mais le fait de résoudre effectivement des problèmes. Et, si l'on revient aux travaux de Vergnaud (1990b), réussir à résoudre des problèmes permet de développer des schèmes qui sont générateurs de compétences. C'est pourquoi il convient de résoudre réellement des problèmes dès le CP.

Troisièmement, dans les programmes, la résolution de problèmes s'appuie sur un modèle en quatre phases qui détermine les phases de l'enseignement (*cf.* figure 7) et *« constitue (…) un outil utile à l'enseignant pour identifier l'étape de la résolution sur laquelle un élève est en difficulté »* (MEN, 2024, p. 8). Le texte officiel indique par ailleurs :

> *Au CP, la phase « Calculer » peut se limiter à réunir deux collections ou à identifier la quantité à retirer d'une collection, puis à dénombrer les éléments restants, sans effectuer réellement de calculs* (MEN, 2024, p. 9).

Ce texte ne propose pour le CP aucune démarche qui ne se ramène pas *in fine* à du comptage. Autrement dit, si l'on suit ces préconisations, il n'y pas réellement de résolution de problème en classe de CP.

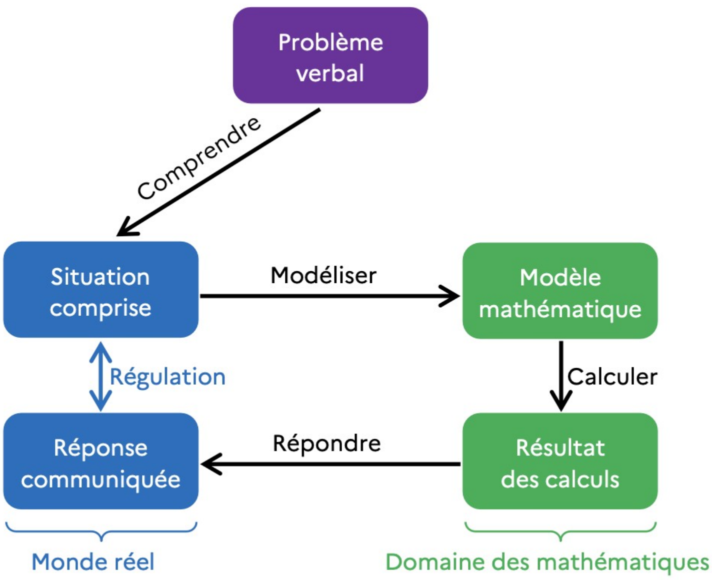


***Figure** 7 : Extrait des programmes pour le cycle 2, p. 8.*

En résumé, nous identifions dans les programmes actuels plusieurs points critiques qui nous conduisent à penser que le CP est le chaînon manquant pour résolution de problème. Concernant le point de vue des élèves, il semble en effet que pour résoudre ses premiers problèmes arithmétiques, un élève de CP est supposé reconnaître qu'un problème particulier relève d'une catégorie plus vaste dont il n'a aucune idée, en déduire l'opération (qui ne peut à ce stade être qu'une addition) permettant de résoudre le problème puis recourir au comptage parce qu'il ne sait pas effectuer cette opération. Et concernant l'enseignant, nous ne trouvons aucune indication crédible pour enseigner la résolution de problèmes au CP.

4.2. Il est possible de résoudre des problèmes dès le CP

Or nous défendons l'idée que, dès le CP, les élèves peuvent et doivent résoudre des problèmes.

Notre précédent article (Hersant, Thomas, 2024) apporte quelques propositions concrètes en rapport avec les liens « comprendre » « répondre » et « régulation » du schéma de la figure 7 : poser des problèmes à propos d'objets présents dans la classe afin de confronter les solutions trouvées à la réalité, toujours permettre de répondre « je ne sais pas » pour ne pas inciter à répondre au hasard, poser des problèmes sans texte ou avec très peu de texte pour ne pas pénaliser les petits lecteurs. Ces propositions ne s'opposent pas aux préconisations officielles. En revanche, la partie du même article en rapport avec le lien « calculer » du schéma de la figure 7 s'écarte notablement de ces préconisations : nous recommandons de calculer et non de dénombrer dès le début du CP.

Dans le présent article, nous montrons comment, en approfondissant la question du calcul précoce (avant de disposer d'opérations) et en proposant d'utiliser des schémas « discrets discrets ». En soutenant un questionnement et des reformulations du problème ces schémas conduisent à identifier les relations arithmétiques entre les grandeurs, ce qui est le propre du processus de modélisation comme le note Cabassut (2020). Ainsi, le questionnement mené dans le récit 12 met en évidence que les billes qu'avait Zélie avant la récréation correspondent à celles qu'elle avait avant et à celles qu'elle a perdues. Aucune écriture mathématique n'est mentionnée mais pour autant les relations entre les grandeurs sont clarifiées par le jeu de questions sur les cartes à utiliser et le schéma réalisé avec le matériel « discret discret » rend compte du modèle établi. Cette idée de la modélisation est plus large que celle proposée dans les programmes qui est entièrement orientée par la recherche de la « bonne » opération (MEN, 2024, p. 8) :

> *La phase « Modéliser » conduit l'élève à identifier la ou les opérations qu'il va devoir effectuer pour trouver le résultat cherché.*

Conclusion

Nous pensons avoir montré en quoi la résolution de problèmes arithmétiques au CP relève pour une part importante d'une bonne connaissance des nombres et de certaines propriétés arithmétiques, ainsi que de la capacité à prendre des initiatives pour transformer les nombres en mobilisant ces connaissances, et en respectant les relations entre les grandeurs de la situation. Dans cette optique, les savoirs à expliciter concernent les nombres et les propriétés arithmétiques (et pour ces dernières, toujours de façon contextualisée), et non des méthodes qu'il conviendrait d'appliquer pour résoudre à coup sûr les problèmes.

Le rôle majeur du calcul réfléchi dans la capacité à résoudre un problème ne s'arrête pas à l'entrée en CE1. C'est sans doute pourquoi, dans les classes ultérieures, la pratique du calcul mental améliore les résultats en résolution de problèmes, même sans travail spécifique sur les problèmes (Butlen, 2007).

De notre point de vue, progresser en résolution de problème suppose de progresser simultanément dans deux domaines complémentaires :

- élargir et consolider les connaissances disponibles sur les nombres, leurs propriétés et les systèmes de numération pour qu'en fin de CP des affirmations comme « 8 et encore 5 c'est 13 », ou « 30 et 20 c'est autant que 50 » soient des évidences pour la plupart des élèves ;

• cultiver la souplesse de pensée, la prise d'initiative, pour la mise en œuvre des savoirs précédents.

Le travail sur l'enrichissement des connaissances numériques n'est pas simple, mais le but à atteindre est facile à décrire et peut être découpé, sans être dénaturé, en sous-objectifs quasi indépendants. Ces caractéristiques rendent ce travail plutôt aisé à concevoir et à organiser, ce qui est rassurant pour l'enseignant.

En revanche, cultiver la souplesse de pensée ne se découpe pas en unités élémentaires, c'est par une pratique accompagnée, des expériences réussies, la cohérence et la continuité dans le temps des interventions de l'enseignant que ce mode de pensée peut devenir habituel. De ce point de vue, l'idée de reformulation nous semble centrale en résolution de problème.

Une amélioration significative des performances des élèves français en résolution de problème suppose de parier sur l'intelligence des élèves et celle des enseignants. Pour que les élèves exercent et développent leur intelligence, il faut la solliciter, cesser de leur faire croire que pour résoudre un problème il suffit de choisir la bonne opération. Pour que les enseignants exercent leur intelligence, il faut qu'ils puissent s'appuyer sur des textes officiels stables, réalistes et ouverts or aucune de ces conditions n'est actuellement réunie. Les préconisations officielles sont trop fluctuantes, par exemple le guide de 2020 prône l'usage quasi exclusif d'une forme standardisée de schéma en barre dont il n'est plus question dans les programmes de 2024. Les programmes ne sont pas réalistes quand ils demandent que des élèves ne disposant d'aucune technique opératoire résolvent les problèmes arithmétiques en commençant par déterminer l'opération à effectuer. Ils ne sont pas ouverts, et limitent le développement d'une pensée agile, quand ils remplacent la pratique du calcul réfléchi par une accumulation de procédés à portée limitée comme la méthode pour calculer 47+8 citée plus haut. Nous pensons, au contraire, à la suite de Julo (2002), que pour aider les élèves de CP à (apprendre) à résoudre des problèmes il faut favoriser la réussite par l'invention d'une procédure de résolution, sans donner d'indice sur la solution, sans orienter vers une procédure de résolution, sans suggérer une modélisation du problème. Les propositions que nous faisons dans cet article sont des alternatives qui soutiennent ce projet.

Références bibliographiques

Bayle, S., Gastal, S., Moreau, A. & Rinaldi, A.-M. (2021). *Calcul sous vingt : un dispositif innovant d'enseignement et d'apprentissage au CE1*. IREM Montpellier.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche-Comté.

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : « ni cet excès d'honneur, ni cette indignité ». *Au fil des maths*.
https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/les-representations-en-barres-ni-cet-exces-dhonneur-ni-cette-indignite/

Conne, F. (1987). Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 38*(1), 1-15.

Hersant, M. & Thomas, Y. (2024). Quelques conditions pour un bon départ en résolution de problèmes à l'école élémentaire. Primum non nocere. *Grand N, 114*, 26-43.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. PUR.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N, 69*, 31-52.

Rinaldi, A.-M. (2024). Décomposer et composer les nombres sous vingt : une opportunité pour introduire l'équivalence quantitative. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 35-65.
https://revues.ulaval.ca/ojs/index.php/rqdm/article/download/53840/1865/100189

Sander, E. (2019). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : Le cadre A-S3. Dans J. Pilet, C. Vandeira, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques l'ARDM 2018* (pp. 122-141). IREM Paris 7, Association pour la Recherche en didactique des mathématiques

Vergnaud, G. (1990a). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (1990b). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. Dans G. Netchine-Grynberg, *Développement et fonctionnement cognitifs* (pp. 261-277). PUF.

Références institutionnelles

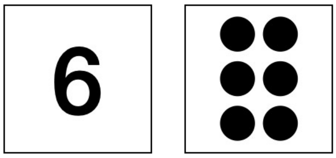
MEN (2021). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*.
https://eduscol.education.fr/3107/guides-fondamentaux-pour-l-enseignement

MEN (2024). Programmes de mathématiques pour le cycle 2.
https://www.education.gouv.fr/media/194205/download

Annexe 1
Présentation de deux supports matériels

Les cartes à points

Le matériel collectif utilisé au tableau par l'enseignant est un ensemble de cartes dont la face visible présente une écriture chiffrée et le verso une constellation de points correspondant à cette écriture, de préférence une constellation du dé ou une combinaison de constellations du dé.

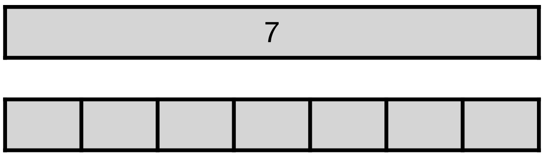


Le matériel individuel utilisé par les élèves pour effectuer leurs calculs ne comporte pas de points au verso.

Les bandes quadrillées

C'est un matériel exclusivement destiné à l'usage collectif au tableau.

Il s'agit de bandes dont le verso est constitué d'une suite de cases rectangulaires. Toutes les cases ont les mêmes dimensions sur toutes les bandes. Le nombre de cases est indiqué en écriture chiffrée sur la face visible sauf dans le cas où c'est ce nombre qu'on cherche, il est alors remplacé par un point d'interrogation.



Annexe 2
Quelques récits pour illustrer nos propositions

Chaque récit est relatif à un problème. Ces récits sont des discours et actions possibles de l'enseignant, des reconstructions *a posteriori* par l'enseignant d'une procédure possible pour résoudre le problème associé, en appui sur des procédures qu'il a observées dans la classe. Ils ne correspondent pas à des temps de recherche par les élèves. Le temps de recherche est plus complexe, il comporte des erreurs, des retours en arrière, des interactions entre élèves et entre l'enseignant et ses élèves. En ce sens, chaque séance de résolution de problèmes est unique. Les récits proposés ont au contraire une dimension universelle puisque les solutions exposées restent vraies dans une autre classe, même si la séance a été très différente. Cette présentation par des exemples détaillés met en évidence les savoirs en jeu ; elle illustre avec précision ce que nous proposons.

La présentation des problèmes ne respecte pas toujours certaines propositions formulées dans notre précédent article (Hersant, Thomas, 2024). Nous sommes toujours persuadés de l'importance de rendre possible une validation matérielle, de l'intérêt de poser un problème avec peu ou pas de texte, de la nécessité de rendre possible la réponse « je ne sais pas », mais décrire pour chaque problème les conditions pour qu'il en soit ainsi alourdirait excessivement cet article.

Les récits ci-dessous contribuent au processus d'institutionnalisation en mettant en évidence les savoirs immuables utilisés dans les procédures des élèves. En effet, ce sont ces vérités immuables et par conséquent réutilisables pour d'autres problèmes, que l'enseignant cherche à mettre en évidence. Ces savoirs peuvent être regroupés en trois catégories :

- des faits numériques comme « trois et encore deux, c'est cinq ».
- la compréhension des systèmes de numération orale et écrite, et particulièrement la convention régissant l'écriture des nombres supérieurs à neuf : dans un nombre à deux chiffres, le chiffre de droite réfère à des choses toutes seules, le chiffre de gauche à des groupes de dix choses : « 35 bonbons, c'est 3 paquets de dix bonbons et encore 5 bonbons ».
- des propriétés générales des nombres et des grandeurs comme « quand deux tours sont empilées, si on met en bas celle qui était en haut, la hauteur ne change pas » ou « partager une collection d'objets en plusieurs petites collections, ça ne change pas le nombre d'objets en tout ».

Nous invitons le lecteur à identifier à quelle(s) catégorie(s) renvoient chacun des récits.

Concernant les propriétés, dans nos récits, l'enseignant s'efforce d'expliciter de façon apparemment naïve certaines d'entre-elles, presque toujours utilisées de façon contextualisée. Nous n'avons pas cherché à inventorier les propriétés utilisées. Un catalogue de propriétés qu'il faudrait enseigner au préalable irait à l'encontre de notre proposition dans laquelle on apprend à résoudre des problèmes en résolvant des problèmes et non en travaillant de façon isolée des compétences supposées nécessaires. Nous craignons, aussi et surtout, que les propriétés sous-jacentes, si elles étaient explicitées, deviennent un nouvel objet d'enseignement, que l'on consacre du temps à les étudier plutôt qu'à résoudre des problèmes. Par ailleurs, une formulation générale de ces propriétés nous semble trop difficile en CP, donner une explicitation contextualisée dès que possible nous semble préférable.

Le caractère immuable des faits numériques et des propriétés n'empêche en rien la variété des procédures. Pour certains problèmes, deux procédures distinctes figurent dans le récit. Cette variété est un point délicat à gérer en classe. Se limiter systématiquement à une procédure n'incite pas à prendre des initiatives, à oser inventer, mais une trop grande variété rend les mises en commun longues et touffues, on risque alors que les élèves perdent le fil et qu'aucun point important ne se dégage.

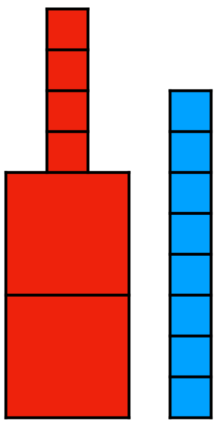
Par ailleurs, les conditions matérielles de la recherche et les règles données par l'enseignant ne sont pas abordées. Par exemple, pour un problème portant sur des bandes, celles-ci sont-elles simplement affichées au tableau, ou bien des modèles réduits sont-ils fournis aux élèves ? Rappelons que le cadre fourni par l'enseignant vise à empêcher de répondre en dénombrant. Si ce n'est pas le cas, les élèves seront peu disposés à s'intéresser à de nouvelles procédures couteuses puisqu'ils disposent déjà d'une méthode efficace, le comptage (voir partie 3. de l'article).

Récit 1

J'ai des cubes tous de la même taille. Je vais faire deux tours : une tour rouge avec 6 cubes, une tour bleue avec 8 cubes. Quelle tour sera la plus grande ?

Tout le monde a dit que la tour bleue serait plus haute parce que 8, c'est plus que 6 et c'est bien ce qu'on a vu en construisant les tours. Dans la chanson des nombres, on dit 6 avant 8, alors 8 cubes, c'est plus que 6 cubes. Il y a plus de cubes bleues que de rouges et les cubes ont tous la même taille, alors la tour bleue était plus grande.

Dans le problème, on dit que tous les cubes sont de la même taille, heureusement. Si tous les cubes n'étaient pas de la même taille, on ne pourrait pas prévoir quelle tour est la plus haute.



Récit 2

Anne a deux paquets de bonbons, un paquet de 9 bonbons et un autre de 8 bonbons. Cécile a deux paquets de bonbons, un paquet de 7 bonbons et un autre de 9 bonbons. Qui a le plus de bonbons, Anne ou Cécile ?

Certains élèves ont fait comme ça : ils ont imaginé qu'Anne sortait un bonbon de son paquet de 8 bonbons. Voici les bonbons d'Anne avec le bonbon sorti :

On voit qu'Anne a autant de bonbons que Cécile et encore un bonbon en plus. Anne a plus de bonbons que Cécile.

D'autres n'ont rien dessiné, ils ont dit à peu près ceci : 8, ça vient après 7 quand on dit les nombres, alors c'est plus que 7. Comme 8 c'est plus que 7, 9 et encore 8 c'est plus que 9 et encore 7, alors Anne a plus de bonbons.

Ensuite, nous avons fait les paquets de l'histoire et nous avons compté. Anne avait 17 bonbons et Cécile en avait seulement 16, nous avions bien prévu.

Récit 3

Dans cette boîte, j'ai mis 14 billes rouges et 18 billes bleues. Je prends 18 billes dans la boîte. Maintenant, je vais compter les billes qui restent dans la boîte, combien vais-je en trouver ?

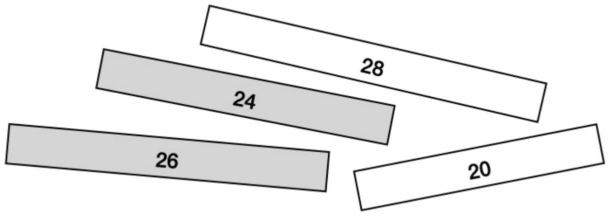
Certains ont répondu très vite « tu as pris les 18 billes bleues, alors il reste les 14 rouges. »

Rita, qui m'a vu faire, a dit que ce n'était pas vrai : j'ai pris 18 billes, mais pas que des bleues, j'ai pris un mélange de billes rouges et bleues.

Bédis a expliqué que la couleur n'a pas d'importance, il y avait 18 billes et encore 14 billes dans la boite, j'en ai enlevé 18, il en reste 14.

Récit 4

Avec ces bandes, je vais faire une grande bande blanche et une grande bande grise, quelle sera la plus longue ?



Certains ont pensé à décomposer les nombres de cases en dizaines et unités.

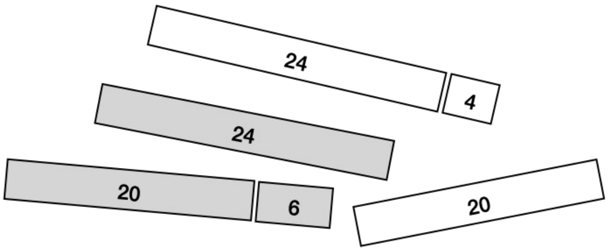
Dans les bandes blanches, il y a 2 dizaines de cases, encore 2 dizaines de cases et 8 cases. En tout il y a 4 dizaines de cases blanches et 8 cases blanches

Dans les bandes grises, il y a 2 dizaines de cases, 6 cases, encore 2 dizaines de cases et 4 cases. En tout il y a 4 dizaines de cases grises et encore 10 cases grises.

4 dizaines et 10, c'est plus que 4 dizaines et 8, la bande grise sera plus longue.

D'autres ont continué les calculs : 4 dizaines de cases blanches et 8 cases blanches, c'est 48 cases blanches. 4 dizaines de cases grises et 10 cases grises, c'est 5 dizaines de cases grises, c'est 50 cases grises. On trouve aussi que la bande grise sera plus longue.

D'autres encore ont pensé à découper les bandes comme ça :

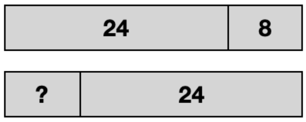


Il y a 24 et 20 et encore 4 cases blanches.

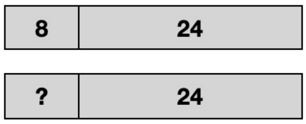
Il y a 24 et 20 et encore 6 cases grises.

La bande grise sera plus longue.

Récit 5[6]



Si on change la place des morceaux, il y a toujours le même nombre de cases.

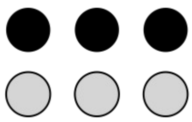


En déplaçant les morceaux de la bande du haut, on voit que la bande mystère a 8 carreaux.

Récit 6

Je vais retourner ces deux cartes et compter tous les points. Combien vais-je trouver de points ?

Quelques élèves ont dit tout de suite que c'était comme le 6 du dé, 3 points en haut et 3 points en bas, c'est 6 points.



D'autres ont fait remarquer que les points derrière les cartes ne sont pas forcément placés comme sur le dé, ils sont peut-être placés comme ça :

Mais si on bouge des points, sans en enlever ni en ajouter, il y en a toujours autant : 3 et encore 3, c'est toujours 6, même si les points ne sont pas placés comme sur le dé.

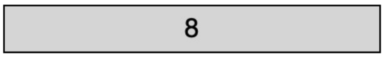
[6] Pour ces problèmes sans énoncé textuel, voir notre article paru dans le numéro 114 de la revue.

Il y a 6 points derrière les cartes.

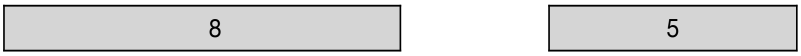
Récit 7

Zélie a 8 pommes rouges et 5 pommes jaunes. Elle compte toutes ses pommes. Combien en a-t-elle ?

On imagine une pomme rouge dans chaque case au dos de cette bande.

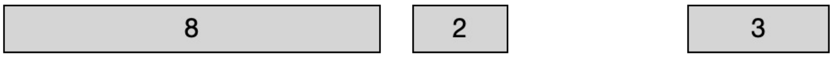


Les 5 pommes jaunes du problème ne sont pas dessinées, il faut une autre bande.



Ensuite, on peut découper une des bandes, comme ça :

Puis on peut regrouper les bandes d’une autre façon :

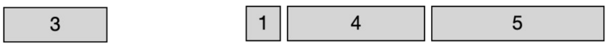


On sait que 8 et encore 2, c’est 10 et que 10 et 3, c’est 13, alors il y a 13 pommes en tout.

Dans la classe, tout le monde n’a pas fait de la même façon, certains élèves ont préféré découper la bande de 8 pommes comme ça :

puis comme ça :

ensuite, ils ont regroupé comme ça :



Pour finir, ils ont dit que 4 et 1 c’est 5, que 5 et 5 c’est 10 et que 10 et 3, c’est 13. Ces élèves ont trouvé 13 pommes comme les autres.

Récit 8

Dans cette boîte, il y a 20 billes rouges et 4 billes bleues. Je vais compter toutes les billes de la boîte. Combien de billes vais-je trouver ?

Quand je compterai les billes, il faudra que je compte les billes rouges et aussi les bleues. 20 et encore 4, c’est 24, il y a 24 billes dans la boîte.

D’autres élèves ont pensé que quand on écrit 20 billes, cela veut dire 2 paquets de 10 billes. En tout, il y a 2 paquets de 10 billes et encore 4 billes, ça s’écrit 24.

Ces élèves comme les autres ont trouvé qu’il y a 24 billes dans la boîte.

Récit 9

Dans cette boîte, il y a 24 billes. 4 billes sont rouges, les autres sont bleues.
Je vais compter les billes bleues. Combien de billes bleues vais-je trouver ?

Quand on dit « vingt-quatre », on dit « vingt » puis on dit encore « quatre ». 24 billes, c'est 20 billes et encore 4 billes

Quand on écrit en chiffres 24 billes, cela veut dire 2 dizaines de billes et encore 4 billes. Deux dizaines, c'est 20, alors 24 billes, c'est 20 billes et encore 4 billes

24, c'est 20 et encore 4. On peut aussi dire que 24 c'est 4 et encore 20.

Dans la boîte, il y a 4 billes rouges et encore 20 billes bleues.

Récit 10

Dans cette boîte, il y a 13 billes. 5 billes sont rouges, les autres sont bleues. Je vais compter les billes bleues. Combien de billes bleues vais-je trouver ?

On peut commencer par représenter les 13 billes :

$$\boxed{13}$$

Pour montrer les 5 billes rouges, je n'ai pas besoin d'une nouvelle carte, elles sont déjà derrière cette carte, avec les billes bleues.

Je vais essayer de partager les billes, de les mettre sur 2 cartes, les 5 rouges d'un côté, les bleues de l'autre… mais justement je ne sais pas combien il y a de billes bleues… alors je commence par partager 13 autrement, par exemple comme ça, 10 et encore 3 ça fait bien 13.

$$\boxed{10} \qquad \boxed{3}$$

Maintenant, c'est plus facile de montrer les 5 billes rouges, parce qu'on sait que 10, c'est 5 et encore 5.

$$\boxed{5}\ \boxed{5} \qquad \boxed{3}$$

Je déplace les cartes pour bien voir les 5 billes rouges d'un côté et les billes bleues de l'autre.

$$\boxed{5} \qquad \boxed{5}\,\boxed{3}$$

5 et encore 3, c'est 8, il y a 8 billes bleues.

Récit 11

Zélie sort en récréation avec 15 billes. Pendant la récréation, Zélie gagne des billes. À la fin de la récréation Zélie a 24 billes. Combien de billes Zélie a-elle gagnées ?

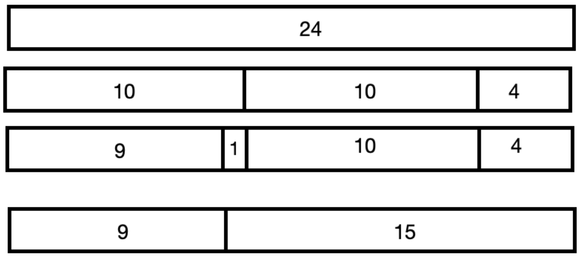
Certains ont commencé par faire ce schéma :

Ils ont vite vu que ça n'allait pas. Pensez à une bille qui est dans la poche de Zélie au début de la récréation. Il faut la mettre dans une case de la bande 15… Mais comme Zélie n'a pas perdu de billes, elle a encore cette bille à la fin, alors il faut placer la bille dans une case de la bande 24. Ça ne va pas, la bille jaune ne peut pas être à deux endroits.

D'autres ont représenté le problème comme ça :

C'est mieux parce que toutes les billes de l'histoire sont dessinées une seule fois, mais ça n'aide pas vraiment à trouver combien Zélie a gagné de billes.

Certains ont eu l'idée de commencer par partager les 24 billes en plusieurs parties, tant pis si il n'y a pas tout de suite une partie avec 15 billes. Ensuite, ils ont transformé leurs bandes pour avoir un morceau de 15 billes :



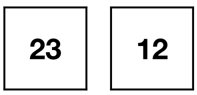
À la dernière étape, on voit les 15 billes que Zélie avait au début. Dans l'autre partie, il y a les billes que Zélie a gagnées. Zélie a gagné 9 billes.

Récit 12

Zélie sort en récréation avec des billes. Pendant la récréation, Zélie perd 12 billes. À la fin de la récréation, Zélie a 23 billes. Combien de billes Zélie avait-elle au début de la récréation ?

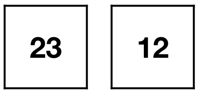
Au dos de cette carte, il y a les 23 billes de Zélie à la fin de la récréation.

Les 12 billes que Zélie a perdues sont-elles derrière cette carte ? Non, Zélie les a perdues, alors elle ne les a plus, il faut une autre carte pour les montrer.

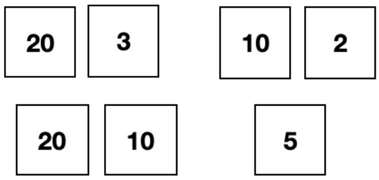


Les billes que Zélie avait au début sont-elles déjà dessinées, ou bien faut-il une autre carte ?

Une bille que Zélie avait au début de le récréation est forcément derrière une de ces deux cartes : ou Zélie l'a perdue, ou bien elle l'a encore. Ces deux cartes montrent toutes les billes que Zélie avait au début.



C'est comme



Zélie avait 35 billes au début de la récréation.

Récit 13

J'ai 40 € dans mon porte-monnaie. Puis-je acheter un objet qui coûte 17 € et un autre qui coûte 19 € ?

Certains ont pensé à chercher combien d'euros il faut en tout pour acheter les deux objets.

Des petits malins ont fait remarquer que 40, c'est 20 et encore 20. Avec le premier billet de 20 €, je peux acheter le premier objet. Avec le deuxième billet, je peux acheter le deuxième objet.

Je peux bien acheter les deux objets.