
PLACER 9, POUR APPRENDRE LA DROITE GRADUÉE

Sophie TÉROUANNE¹

Université Grenoble Alpes, IREMI de Grenoble

Danielly KASPARY²

Université Grenoble Alpes, LIG

Pierre ESCLAFIT³

Université Grenoble Alpes, IREMI de Grenoble

Résumé. Dans cet article, nous présentons la situation *Placer 9*, caractéristique de la nécessité d'étude de la droite graduée en tant qu'objet mathématique. Nous présentons ensuite un parcours d'étude qui cherche à donner du sens aux concepts autour de cet objet, ainsi qu'à créer des moments propices à leurs institutionnalisations. Ce parcours est décrit et analysé par un ensemble de variables didactiques associées à trois types de tâches. Les réflexions et analyses s'appuient principalement sur l'articulation de deux modèles didactiques, celui de praxéologie de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999) et la dialectique outil-objet (Douady, 1986).

Mots-clés. Les nombres, outil-objet, graduation, partage, manipulation.

Introduction

On observe actuellement, dans la noosphère française, l'apparition de la droite graduée dans les programmes, les manuels scolaires et les documents officiels d'accompagnement. On peut expliquer ce phénomène par des arguments didactiques et épistémologiques, tels que la valeur sémiotique et instrumentale de la droite graduée dans la construction des nombres et leurs propriétés, notamment grâce à la matérialisation de la notion d'unité par la grandeur longueur. La droite graduée s'intègre et traverse en effet l'étude des mathématiques en tant qu'outil puissant pour d'autres œuvres de cette discipline. Cependant, nous observons qu'elle est très peu travaillée en tant qu'objet en soi, comme nous le montrerons plus loin. La transparence institutionnelle qu'on lui accorde, notamment à l'école primaire, nous semble discutable en vue de son usage futur en analyse et en géométrie et de celui possible, dès l'enseignement élémentaire, pour l'étude des nombres.

Dans le cadre du projet PEGASE, le groupe de l'IREMI de Grenoble *Le nombre au cycle 3* a élaboré une ingénierie didactique structurée autour de l'objet droite graduée.

¹ sophie.terouanne@univ-grenoble-alpes.fr

² danielly.kaspary@univ-grenoble-alpes.fr

³ pierre.esclafit@univ-grenoble-alpes.fr

Le travail de conception a fait émerger un ensemble de tâches mathématiques qui nous a permis de structurer une situation didactique pour l'apprentissage de la droite graduée en tant qu'objet mathématique. Cette situation, *Placer 9*, sera présentée dans la partie 2. Elle réclame l'apparition d'une série de concepts et techniques propres à la droite graduée : l'origine, le pas, la longueur unité, le repérage d'un nombre, la notion de graduation d'une part, le report et le partage de longueur, la recherche et la construction d'une graduation d'autre part. L'identification et l'étude de l'ensemble des variables didactiques de cette situation engendre un ensemble de tâches, ce qui nous conduit à un parcours d'étude ayant pour objectif de faire travailler et consolider ces concepts et ces techniques. La description de ce parcours est l'objet de la partie 3. La discussion sur les choix réalisés et les valeurs de variables ignorées sont l'objet de la partie 4.

Dans un premier temps, nous proposons dans la partie 1 une brève présentation des concepts didactiques qui sont au cœur de notre réflexion.

1. Cadre didactique et épistémologique

Tout comme le proposent Kaspary *et al.* (2021), les réflexions présentées dans ce texte s'appuient sur l'articulation de deux modèles didactiques : celui des *praxéologies* (Chevallard, 1999) et celui de la *dialectique outil-objet* (Douady, 1986). La notion de praxéologie nous sert à décrire une activité donnée qui permet de faire vivre une ou plusieurs *œuvres mathématiques*⁴. Le statut outil et le statut objet nous servent en ce qui les concernent à identifier l'utilité et l'intention didactique d'une œuvre mathématique au sein de l'activité.

Une *praxéologie* est constituée de quatre éléments $[T/\tau/\theta/\Theta]$: un *ensemble de tâches* T ; une *technique* τ qui permet d'accomplir des tâches de T ; un *environnement technologique* θ qui rend intelligible, produit et justifie la *technique* τ ; puis d'un *cadre théorique* Θ où l'environnement technologique θ est également justifié et produit.

Pour ce qui concerne le statut *outil* d'une œuvre, selon Douady (1986), nous faisons référence à son usage dans la résolution d'un problème donné. Pour Kaspary *et al.* (2021), cela signifie dire

qu'une œuvre a un statut d'outil au sein d'une institution lorsqu'elle peut intervenir dans une technique, soit à partir des gestes que cette œuvre convoque à faire, soit comme élément technologique qui justifie et rend intelligible la technique (Kaspary *et al.*, 2021, p. 395).

À propos du statut *objet*, « [...] nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement » (Douady, 1986, p. 9). Dans ce sens, au sein d'une institution, une œuvre donnée est étudiée pour elle-même, identifiable par un ensemble d'*ostensifs* : par un nom qui la désigne, par un lexique convoquant des concepts adjacents et par des représentations graphiques et symboliques propres. L'étude de ces ostensifs fait partie de l'étude de l'œuvre.

Nous considérons l'œuvre *droite graduée* issue de la bijection $a \mapsto M_a$ de l'ensemble des nombres réels avec une droite géométrique correspondant au choix d'un repère affine $(O; I)$: à tout nombre réel a , on associe le point M_a de la droite ayant pour abscisse ce nombre a dans le repère considéré. En particulier, $O = M_0$ et $I = M_1$.

Ce choix de repère affine entraîne l'existence d'une unité de longueur (correspondant à la longueur du segment $[OI]$) telle que, pour tout réel $a > 0$, la mesure longueur du segment $[M_0 M_a]$ est égale à a . Cette unité de longueur sera nommée « longueur unité ». Quel que soit le

⁴ « produit intentionnel de l'activité humaine » (Chevallard, 2003).

nombre réel $e > 0$, l'ensemble des points dont l'abscisse est un multiple entier de e , soit $\{M_a, a \in e\mathbb{Z}\}$ définit la *graduation régulière* de pas e . On appelle *origine* de la droite graduée l'image $M_0 = O$ du nombre 0. Pour distinguer l'antécédent d'un point de la mesure de longueur, on parlera dans le premier cas de l'*abscisse* a et dans le second cas du *pas* a .

Notons que d'autres bijections entre une droite et l'ensemble des réels existent, mais nous réserverons le terme de « droite graduée » à celles-ci, pour lesquelles la graduation donne lieu à une représentation de propriétés cardinales par la grandeur longueur (Cerclé *et al.*, 2020).

Nous nous intéressons à la transposition didactique (Chevallard, 1982) de cette œuvre dans l'enseignement, notamment aux praxéologies qui permettent de la faire vivre en tant qu'objet, ce qui consiste à travailler son environnement technologico-théorique. Nous faisons l'hypothèse qu'il est constitué des notions d'unité, de pas et de graduation pour lesquelles nous identifions trois types de tâches que nous préciserons en partie 3.

Dans le contexte de l'enseignement, *graduer* signifie « rendre visibles » les points de la graduation que l'on peut représenter. Par ailleurs, étant donné une droite graduée, nous dirons que la graduation régulière de pas e *attrape* un nombre (Adjage & Pluvinaige, 2000) si celui-ci appartient à $e\mathbb{Z}$. Enfin, *placer un nombre* consiste à repérer le point dont ce nombre est l'abscisse.

2. Présentation de la situation *Placer 9*

La situation *Placer 9* a été conçue pour être utilisée en cycle 2 dans le cadre d'une progression de travail sur la droite graduée dans le contexte des nombres entiers naturels. Elle peut également servir de diagnostic en début de cycle 3. Il s'agit d'une tâche pour laquelle les abscisses 2 et 6 sont données et dont la consigne est « placer 9 ».

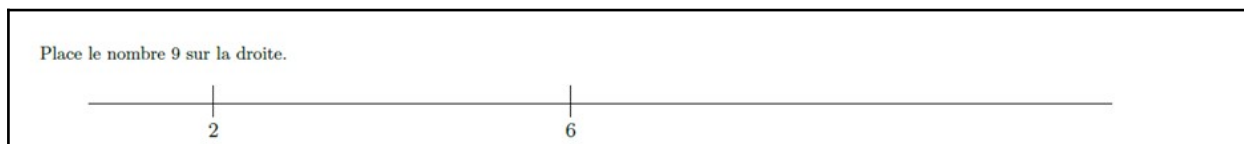


Figure 1 : Consigne élève de la situation *Placer 9*.

2.1. Les choix

Les choix concernant la droite graduée sont :

- seules deux abscisses non consécutives sont représentées : 2 et 6 (pour toute graduation attrapant 2, 6 et 9, les abscisses 2 et 6 sont non consécutives) ;
- aucun autre point n'est représenté ;
- pour chacune des abscisses données (2 et 6), l'écart entre le nombre à placer (9) et cette abscisse ($9 - 6 = 3$ et $9 - 2 = 7$) n'est pas multiple de l'écart entre celles-ci ($6 - 2 = 4$, et ni 3 ni 7 ne sont des multiples de 4) ;
- l'origine n'est pas repérable sur le segment fourni ;
- la distance entre les points présents est choisie telle que l'utilisation de la règle graduée ne soit pas aisée (l'unité mesure 8,7 mm).

Notons que la consigne ne précise pas que la droite est graduée, pour autant il s'agit d'un implicite qui doit être objet de discussion avec la classe afin d'écarter les réponses qui ne vérifient pas les contraintes de régularité d'une droite graduée.

Pour accomplir la tâche, le partage du segment correspondant à l'intervalle $[2; 6]$ et le report de longueur sont nécessaires. Pour cela, nous nous intéressons aux différents instruments utilisables.

2.2. Les instruments

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux instruments de la situation *Placer 9*.

Le compas

Dans cette situation, un compas permet :

- de reporter des longueurs sur la droite ;
- de déterminer un milieu, et donc de partager un segment en deux segments de longueurs égales par la construction d'une médiatrice à la règle non graduée et au compas : il ne s'agit pas d'une procédure attendue des élèves de l'école primaire ; de nos jours, elle est prévue pour être rencontrée au niveau de la sixième.

Pour le partage, un avantage de l'utilisation d'un compas est le lien avec la géométrie ; cependant, la mobilisation de cette procédure géométrique experte peut provoquer l'éloignement du domaine étudié. Une autre limitation de cette procédure est qu'elle est limitée aux partages dyadiques (puissances de 2).

La bande de papier outil

Une bande de papier de longueur au moins égale à la distance entre les deux points présents permet :

- de repérer et reporter des longueurs ;
- de repérer et partager des intervalles de longueurs égales, par pliage.

Pour le partage, l'avantage de cette méthode est la praticité et le lien avec les partages de surfaces. L'inconvénient est le manque de précision lors de nombreux pliages successifs ou lors de certains partages.

Le guide-âne

Un *guide-âne*⁵ peut être utilisé directement sur la droite fournie, ou avec une bande de papier outil et il permet de partager un segment en segments de longueurs égales.

Il a pour intérêt d'être *universel*, au sens où il admet de nombreux partages, et pour inconvénient d'être difficile à manier pour certains élèves. Voici deux exemples de difficultés rencontrées :

- les bords de la bande (ou points repérés sur la droite) sont difficiles à placer simultanément et à maintenir sur deux lignes différentes du guide-âne ;
- le report des lignes de partage se trouvent en biais (non perpendiculaires) par rapport à la ligne ou à la bande à partager.

⁵ Outil de partage consistant en une feuille de papier sur laquelle est tracée un réseau de droites parallèles équidistantes.

Le gradue-tout

Le *gradue-tout* est un instrument de partage développé par le groupe IREMI *Le nombre au cycle 3* de Grenoble ; il permet de partager un segment donné en segments de même longueurs (cf. annexe 1).

L'avantage de cet instrument par rapport au guide-âne est la facilité d'utilisation (il n'y a pas à « pencher » la ligne, les traits à reporter pour représenter les points de la graduation sont exactement identiques à ceux présents sur le *gradue-tout*). Cet instrument n'est pas adaptable au partage d'un segment de longueur quelconque. Pour cette raison, dans le cadre du parcours d'étude présenté en partie 3 de cet article, les dimensions sont très importantes : les supports de ressources proposés sont tous compatibles avec le *gradue-tout*, pourvu qu'ils soient imprimés à la même échelle.

2.3. Les techniques attendues

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux techniques de la situation *Placer 9*.

Les gestes employés dans la mise en œuvre de ces techniques sont liés aux instruments de partage décrits ci-avant. Nous ne nous attarderons pas ci-après sur les possibilités d'apparition de certaines erreurs de manipulation et d'interprétation, comme :

- croire que l'origine correspond à l'extrémité gauche de la ligne tracée ;
- proposer une réponse qui ignore certaines données (points déplacés par exemple) ;
- confondre la bande-outil (celle de longueur quelconque fournie pour reporter des longueurs) et la « bande-unité » (celle de longueur égale à l'unité) ;
- ignorer la nécessité de représenter graphiquement par une même longueur des écarts numériques égaux.

Dans le cadre d'une analyse correcte des données et de la tâche à effectuer, nous décrivons ci-après trois techniques possibles.

Construction de la longueur unité (τ_1)

La graduation de pas égal à 1 est particulière, car elle attrape tous les nombres entiers naturels. Pour placer 9, les élèves peuvent donc être amenés à chercher la longueur unité en partageant en 4 parties égales le segment $[M_2 M_6]$ correspondant à l'intervalle $[2;6]$. La construction de la graduation de pas 1 permet de placer 9 en utilisant un report de la longueur unité.

Construction et report d'une longueur quelconque (τ_2)

Par exploration, les élèves peuvent être amenés à réaliser des reports de longueurs différentes de 1. Par exemple, ces longueurs peuvent être construites en repérant des points obtenus par milieux. Voici deux mises en œuvre de cette technique :

• Trouver le milieu du segment d'extrémités les points d'abscisses 2 et 6. • Repérer la longueur du pas égal à 2. • Placer les points d'abscisses 8 et 10 par report de longueur de pas 2. • Trouver le milieu du segment d'extrémités d'abscisses 8 et 10 et placer le point d'abscisse 9.	• Trouver le milieu du segment d'extrémités les points d'abscisses 2 et 6. • Repérer la longueur du pas égal à 2. • Placer le point d'abscisse 8 par report de longueur de pas 2. • Trouver le milieu du segment d'extrémités d'abscisses 6 et 8. • Repérer la longueur du pas égal à 1. • Placer le point d'abscisse 9 par report de longueur de pas 1.
--	---

Tableau 1 : Exemples d'utilisations de pas différents de 1.

Recherche d'une graduation adaptée (τ_3)

Dans les deux techniques précédentes, ce sont les pas qui motivent les gestes employés ; les éventuelles graduations produites sont le résultat de l'ensemble des points construits tout au long de la technique. Avec des instruments comme le guide-âne ou le gradue-tout, l'élève peut se concentrer sur l'ensemble des traits afin de chercher une graduation permettant d'accomplir la tâche : sa compatibilité avec les 2 points représentés produit simultanément l'ensemble des points de la graduation pouvant être représentés. Le pas, dans ce cas-là, dérive de la graduation ainsi choisie.

2.4. Observations effectuées dans une classe de CM1-CM2

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer les techniques décrites ci-avant par des méthodes de résolutions par les élèves.

La situation a été mise en œuvre en dernière période de l'année 2021-2022 dans une classe de double niveau CM1-CM2 d'école urbaine. Les élèves sont de niveau moyen à bon en mathématiques selon l'enseignante. L'indice de position sociale de l'école (IPS) est de 110,3 pour une moyenne nationale de 102,87 en 2021-2022 (Plateforme ouverte des données Éducation, Sports et Jeunesse). La tâche a été proposée en *situation a-didactique*⁶ par groupes de deux. L'enseignante a communiqué la tâche de la façon suivante :

Vous voyez ici il n'y a que le 2 et le 6. Votre mission : placer le 9.

Ci-après, nous présentons nos observations de cette expérimentation. L'ordre de présentation ne suit aucune hiérarchie ni d'usage ni de fréquence.

Mises en œuvre de la technique τ_1

Utilisation d'un compas et recherche « à tâtons »

Un élève souhaite graduer « de un en un » le segment $[M_2M_6]$. Il procède alors par essais-erreurs : il met la pointe sèche au niveau du trait marquant le point d'abscisse 2, et ouvre son compas d'une certaine longueur dont il espère qu'elle est égale à 1. Il trace un arc de cercle qui coupe la ligne, à droite de ce trait, et verbalise : « Je compte combien je fais de moitié de cercle » (comprendre « arc de cercle »). En conservant l'ouverture de son compas, il reporte alors plusieurs fois cette longueur, et verbalise « Et là ça fait 3, 4, 5, 6, ... ». Le 6 ainsi repéré ne se trouve pas à la même position que celui initialement positionné, mais légèrement à gauche.

⁶ « [...] les élèves construisent leur rapport à l'objet de connaissance [...] comme réponse aux exigences du milieu et non au désir de l'enseignant. Une telle situation est une situation dans laquelle ce qu'on fait a un caractère de nécessité par rapport à des obligations qui ne sont ni arbitraires, ni didactiques, mais de l'ordre du savoir » (Bessot, 2004, p. 08).

L'élève verbalise « Ah, je dois faire plus grand ». Il gomme et tente d'ajuster l'écart pour que « ça tombe juste ».

On peut noter que cet élève mobilise l'aspect ordinal des nombres et l'itération, ce qui l'amène à une recherche de mise en œuvre de la technique τ_1 consistant à reporter la longueur unité. Ne disposant pas des bons gestes pour la mettre en œuvre, il ne dépasse pas la procédure d'essai-erreur.

Utilisation d'une bande et partage par dichotomie

Un groupe d'élève manipule une bande, et verbalise : « On coupe notre bande entre le 2 et le 6 » (comprendre « on coupe la bande distribuée pour que sa longueur soit la même que celle du segment entre le point d'abscisse 2 et celui d'abscisse 6 »). Puis, ils disent : « Il y a 4 écarts entre 2 et 6 car il y a 3, 4, 5. Donc on a plié en 2, ouvert et ensuite je replie de chaque côté. Ensuite je déplie tout. Comme ça, j'ai les 4 quarts ».



Figure 2 : Pliage d'une bande en 4 parties égales.

À l'aide de cette bande, ces élèves ont gradué le segment $[M_2 M_6]$ avec un pas de 1. Puis, ils ont gradué « de un en un » jusqu'à 9, ce qui correspond à une mise en œuvre de la technique τ_1 . On note néanmoins dans leur explication qu'ils utilisent le mot « quart » (pour quart de la bande) et non le mot « unité ».

Utilisation d'un guide-âne pour partager une bande en quatre parties égales

Avec la même intention d'appliquer la technique τ_1 , deux groupes d'élèves ont utilisé à la fois une bande de longueur 4, construite à partir du segment $[M_2 M_6]$, et le guide-âne. Ils ont pu ainsi construire la longueur unité, même si elle n'est pas explicitement évoquée dans leur texte d'explication :

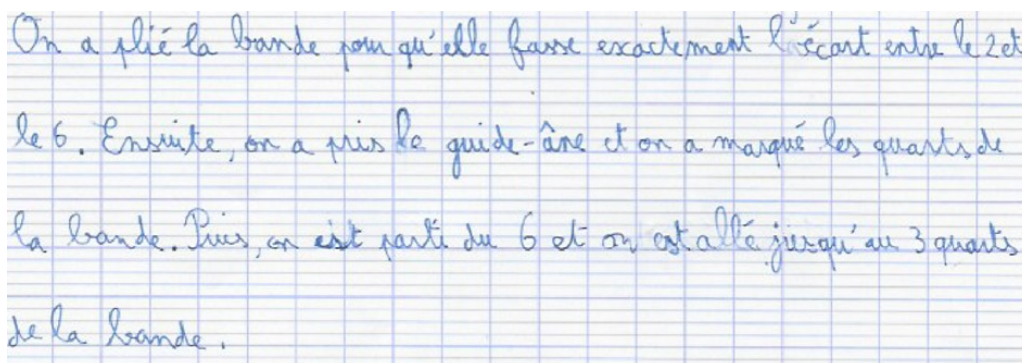


Figure 3 : Production d'élèves illustrant τ_1 .

Mises en œuvre de la technique τ_2

Utilisation d'un guide-âne pour graduer de 2 en 2 puis d'une bande pour reporter la longueur 1

Un élève utilise le guide-âne pour effectuer une graduation régulière de pas 2, puis crée une bande de longueur égale à celle du segment $[M_8 M_{10}]$, et détermine par pliage le milieu de ce segment. Voici comment il décrit sa procédure :

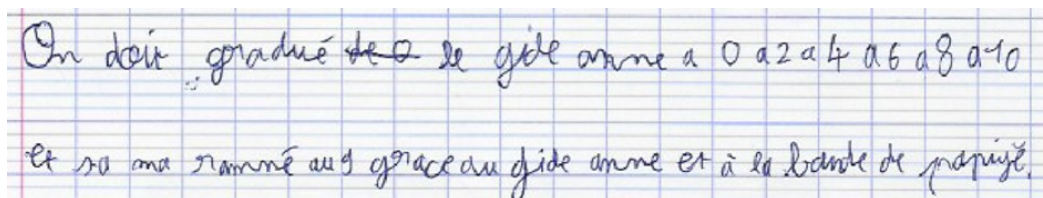


Figure 4 : Production d'élève illustrant τ_2 .

Observons que la graduation choisie ne permet pas d'attraper le nombre 9, ce qui conduit l'élève à mobiliser la technique τ_2 , c'est-à-dire reporter une longueur adaptée.

Utilisation du compas pour un report de longueur 4 puis d'une bande pour reporter la longueur 1

Un groupe d'élèves a tout d'abord utilisé un report de longueur 4 avec le compas, et ainsi obtenu le point d'abscisse 10 (6+4). Dans un second temps, le groupe a cherché à déterminer la longueur 1 en découpant, à l'aide du guide-âne, en deux parties égales une bande construite à partir de l'extrémité gauche de la ligne tracée et du point d'abscisse 2. Ils/elles verbalisent : « On a reporté la longueur entre 2 et 6 à partir de 6, et on a obtenu le 10. Ensuite on a pris l'écart entre le début de la ligne et le 2 et on l'a coupé en 2. On a reporté cette longueur à partir du 10 pour obtenir le 9 ».

Ces élèves ont mobilisé à deux reprises la technique τ_2 , d'abord pour reporter la longueur 4, puis pour reporter la longueur 1. Leur erreur est de croire que le début de la ligne tracée coïncide nécessairement avec l'origine (point d'abscisse 0).

Utilisation d'un guide-âne pour produire et reporter les longueurs 2 et 1.

Un groupe d'élèves a cherché à approcher le nombre cible sans le dépasser. Pour cela, il a utilisé le guide-âne pour déterminer des milieux afin de produire des longueurs à reporter. Ils verbalisent : « On a coupé en 2 avec le guide-âne, et on a obtenu le 4. On a fait pareil, ça a donné le 8 » (comprendre « on a reporté la longueur obtenue entre le 2 et le 4 à partir du 6 et on a ainsi obtenu le 8 »). Puis, « ensuite on a fait pareil entre le début et 2 et on a reporté pour obtenir le 9 » Ici, comme pour le groupe précédent, le « pareil » consiste à déterminer le milieu du segment entre l'extrémité gauche de la ligne tracée (considéré comme l'origine) et le point d'abscisse 2. Les élèves pensent ainsi avoir obtenu la longueur 1. La discrimination visuelle, ou un report de la longueur ainsi obtenue, leur aurait permis de remettre ce résultat en question.

Dans ces deux derniers groupes, les élèves savent obtenir la longueur 1 en partageant en deux le segment $[M_0 M_2]$. Il semble qu'ils aient le besoin de placer le point d'abscisse 1 pour avoir accès à la longueur unité, et n'est pas certain qu'ils aient un moyen de déterminer la longueur unité à partir de points d'abscisses a et $a+2$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

Mises en œuvre de la technique τ_3

Utilisation d'un guide-âne pour placer tous les nombres

Une élève utilise la bande-outil et le guide-âne pour essayer de placer tous les nombres entiers entre 1 et 9. Elle explique : « J'ai mis la petite bande sur le Guide-âne. Puis la fin de la petite bande je l'ai mise sur le 2 j'ai trouvé le trois, puis j'ai trouvé 4, puis [...] j'ai trouvé 9 ».



Figure 5 : Production d'élève illustrant τ_3 .

La description de l'élève semble correspondre à une technique d'utilisation du guide-âne pour graduer la bande fournie, ce qui correspond à la technique τ_3 de recherche d'une graduation adaptée. Cependant, la longueur de la bande ainsi graduée n'a pas de lien avec le segment fourni, de sorte que cette technique ne permet pas de résoudre le problème posé. Il semble que des points soient ajoutés afin de pouvoir tous les placer en respectant l'ordre, mais le principe de régularité de la graduation n'est pas respecté dans le produit final.

3. Proposition d'un parcours d'étude pour étudier la droite graduée en tant qu'objet

La situation *Placer 9* nous a avertis sur le besoin de travailler l'environnement technologique autour de la droite graduée en outillant l'élève avec des techniques efficaces et pérennes.

Trois types de tâches ont été identifiés en ce sens :

- T_{Coder} : Coder une position sur une droite graduée ;
- $T_{\text{Décoder}}$: Décoder une écriture chiffrée de nombre par une position sur une droite graduée ;
- T_{Graduer} : (Re)Graduer une droite graduée.

Notons que les types de tâches T_{Coder} et $T_{\text{Décoder}}$ sont réciproques l'une de l'autre au sens où la première consiste à passer de la représentation d'un nombre par une position sur une droite graduée à la représentation en code arabe (écriture chiffrée du nombre), et la seconde de la représentation en code arabe à la représentation par une position sur une droite graduée.

Nous décrivons ci-après un parcours d'étude appuyé sur ces types de tâches proposé par le groupe IREMI *Le nombre au cycle 3* de Grenoble⁷. Ce parcours se limite aux entiers de manière à s'appropriier l'objet mathématique de la droite graduée en cycle 2 ou 3. La plupart des activités proposées peuvent être déclinées en cycle 3 avec les nombres rationnels et en particulier le placement des décimaux. Les activités, ainsi qu'un guide de mise en œuvre et des propositions de traces écrites sont disponibles en annexe de la fiche *Placer 9*, disponible sur le site de l'IREMI de Grenoble (un exemple de trace écrite concernant le pas est donné en annexe 2 de cet article).

⁷ <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/le-nombre-au-cycle-3-1035406.kjsp?RH=1542928022022>

3.1. Attentes institutionnelles

L'arrêté du 22 octobre 2024 publié au journal officiel du 25 octobre 2024 (MEN, 2024) définit les nouveaux programmes de cycle 2 pour une entrée en vigueur à la rentrée 2025. La lecture du programme de mathématiques au regard des types de tâches (T_{Coder} , $T_{\text{Décoder}}$, T_{Grader}) nous conduit aux objectifs suivants, relevant de l'objet droite graduée :

- En lien avec les nombres entiers : les types de tâches T_{Coder} et $T_{\text{Décoder}}$ apparaissent avec des demi-droites graduées « de un en un », « de dix en dix », « de cent en cent » ou « de mille en mille ». Pour le type de tâches T_{Grader} , il n'apparaît aucune occurrence de la tâche avec des nombres entiers. L'attendu se rapprochant le plus de ce type de tâches figure en CP dans le domaine Grandeurs et mesures, sous domaine longueur : « *L'élève compare les longueurs de deux segments en les mesurant par report d'un étalon [...]* ».
- En lien avec les nombres rationnels : en CE2, le type de tâches T_{Grader} est abordé en le restreignant à la graduation d'une bande unité et dans un objectif de mesurage, et construction d'un segment d'une longueur donnée : « *l'élève sait construire par pliage une règle graduée en quarts d'unité* », « *une unité de longueur étant donnée, l'élève sait construire une règle graduée en dixièmes d'unité, en s'appuyant sur un quadrillage* ».

On remarque que, en comparaison avec les deux autres types de tâches, le type de tâches T_{Grader} reste peu mobilisé en cycle 2 et réduit à un partage de l'unité dans le cadre de l'étude des fractions. Notons que les objectifs ici formulés sont ceux que l'on retrouve depuis quelques années dans les évaluations nationales⁸. La définition de la notion de pas d'une graduation ne semble pas être un attendu.

Le parcours d'étude présenté ci-après est une proposition pour travailler l'ensemble des types de tâches associé à la droite graduée, y compris celles actuellement implicites dans les programmes et les pratiques.

Afin de faciliter l'extension des techniques associées aux nombres rationnels, nous proposons de commencer par travailler ces types de tâches avec les nombres entiers.

3.2. Comprendre les notions de graduation et de pas

Introduction du vocabulaire

Le parcours d'étude commence par une tâche de T_{Coder} avec une droite sur laquelle tous les traits de la graduation sont présents et les premiers sont codés (y compris le 0).

Exercice préliminaire

La graduation est régulière sur cette droite graduée. Que signifie le mot "régulier" ? Comment savoir à quel nombre correspond chaque trait ?

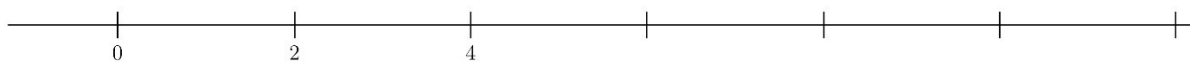


Figure 6 : Exercice préliminaire.

L'objectif de cette activité est d'*institutionnaliser*, au sens de « *convertir une connaissance chez l'élève en un savoir réutilisable* » (Bessot, 2004, p. 21), les notions de graduation régulière, de pas et d'abscisse. On peut également identifier d'autres objectifs plus opérationnels. Par exemple, portant sur la somme ou la différence des abscisses en jeu.

⁸ <https://eduscol.education.fr/2304/les-evaluations-nationales-de-sixieme>

Entraînement

Quelques exercices d'entraînement (cf. figure 7) permettent de remobiliser le vocabulaire ainsi introduit et sensibiliser à la diversité de pas et d'unités de longueur.

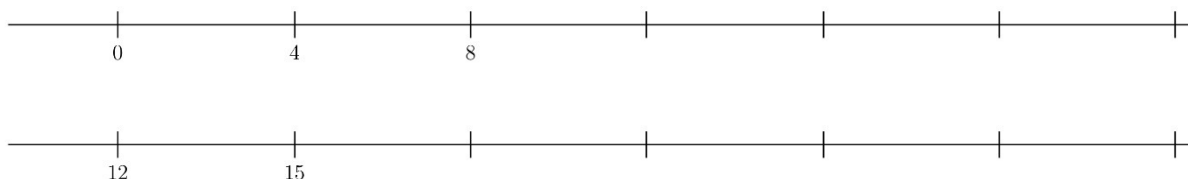
Dans ces exercices, l'origine n'est pas toujours visible, même si, par définition, le nombre zéro est attrapé par toutes les graduations. Cela permet de montrer à l'élève que l'on peut s'intéresser à un « morceau » de la droite graduée sans avoir besoin de l'ostensivité de l'origine.

Il est à la charge de l'enseignant de veiller à ce que les droites proposées soient régulièrement graduées, même si les traits de la graduation ne sont pas visibles. Notons que le marquage de points de la figure 8 ne peut pas correspondre à une graduation de pas 2. Selon notre définition, la régularité des écarts entre deux abscisses consécutives ne suffit pas pour déterminer la graduation d'une droite. En effet, il est nécessaire que l'ensemble des abscisses soit égal à $e\mathbb{Z}$, où e est le pas de la graduation. Dans l'exemple de la figure 8, l'origine ne serait pas attrapée par la poursuite de marquage de points à partir d'un pas égal à 2, ce n'est donc pas une graduation⁹.

Exercice 1. La graduation est régulière sur cette droite. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.



Exercice 2. La graduation est régulière sur chacune de ces droites. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.



Exercice 3. La graduation est régulière sur cette droite. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.

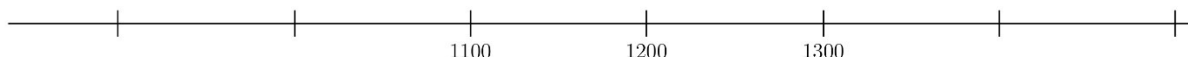


Figure 7 : Exercices 1, 2 et 3.



Figure 8 : Zéro non attrapé.

3.3. Déterminer le pas à partir de deux abscisses non consécutives

Une fois introduite la notion de pas, il est demandé (cf. figure 9) de compléter des graduations dans le cas où les nombres déjà placés ne correspondent pas à deux abscisses consécutives (pour la graduation « principale »). Ici, les tâches de T_{Coder} convoquent aussi les opérations de multiplication et division.

⁹ La seule graduation attrapant les nombres 3, 5, 7, 9 est la graduation de pas 1.

Exercice 4. La graduation est régulière sur chacune de ces droites. Indique à quel nombre correspond chaque trait de la graduation.

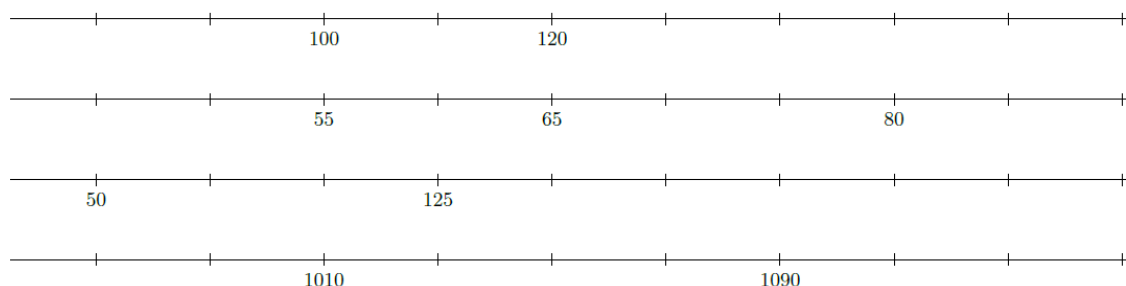


Figure 9 : Exercice 4.

L'étape suivante consiste à demander (cf. figure 10) de coder certaines abscisses choisies.

Dans ces cas, l'élève peut remobiliser la technique précédente, consistant à coder toutes les positions ou optimiser la résolution en développant de nouvelles techniques ; Il pourra notamment s'appuyer sur la technologie ci-après : étant donnés trois nombres réels a , b et c avec $b > a$, le report, à partir du point d'abscisse c , de la longueur du segment $[M_a M_b]$ dans le sens défini par le vecteur de la base $\vec{OI}$ permet de repérer le point d'abscisse $c + (b - a)$.

Exercice 5. Ci-après, la graduation de chaque droite est régulière. Indique à quel nombre correspond chaque point repérée par une flèche.

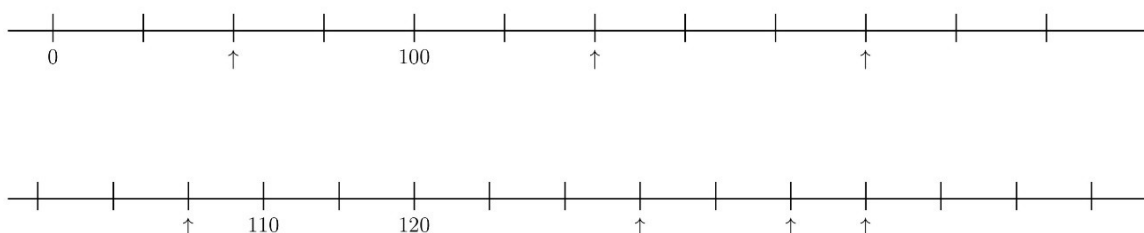


Figure 10 : Exercice 5.

3.4. Graduer une droite

Tout en remobilisant le vocabulaire ainsi introduit et sensibilisant à la diversité de pas et d'unités de longueur, on amène alors l'élève à expérimenter un nouveau type de tâche.

Les concepts de pas et de graduation sont travaillés en « retirant » des traits de manière à amener l'élève à graduer lui-même la droite (cf. figure 11). Ainsi les exercices suivants relèvent du type de tâches T_{Graduer} qui consiste à travailler le geste de report de longueur pour graduer de façon régulière :

Exercice 6. Reporte la longueur unité pour graduer la droite de 1 en 1.

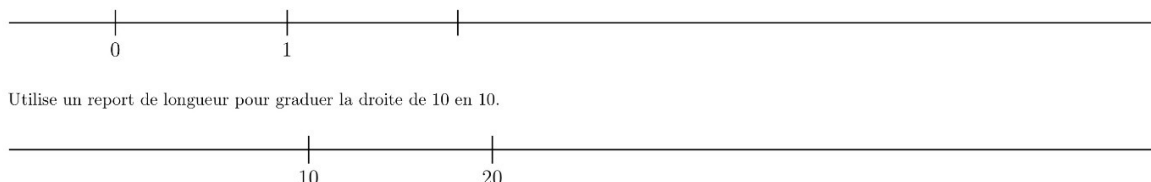
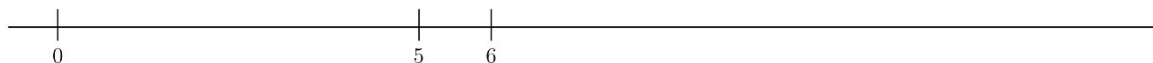


Figure 11 : Exercice 6.

3.5. Reporter des longueurs pour placer des nombres

Sans chercher à graduer tout le segment représenté, on propose alors des tâches de $T_{\text{Décoder}}$ plus complexes : placements de nombres obtenus comme sommes ou différences des nombres déjà placés (cf. figure 12).

Exercice 7. Place le nombre 11 sur la droite.



Place les nombres 45, 150 et 165 sur la droite.

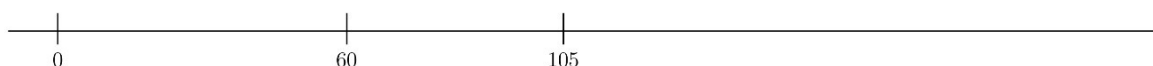


Figure 12 : Exercice 7.

La limitation du nombre de reports (cf. figure 13) incite à trouver une alternative au recours à la stratégie de graduer tout le segment.

Exercice 8. En utilisant deux reports de longueurs, place le nombre 6 sur la droite.

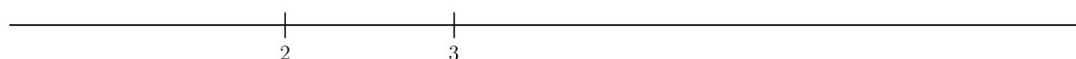


Figure 13 : Exercice 8.

Ces exercices offrent l'occasion d'institutionnaliser des stratégies optimales pour le type de tâches en question : en analysant la relation entre les nombres, on peut réduire le nombre de reports de longueurs.

Les exercices ci-après (cf. figure 14) ont pour objectif d'entraîner ces techniques :

Exercice 9. Pour chaque droite ci-dessous, indique à quel nombre correspond chaque point repéré par une flèche.

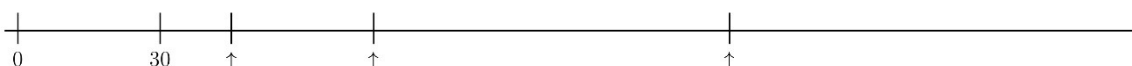
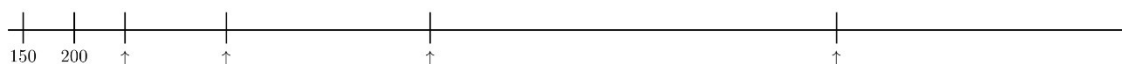


Figure 14 : Exercice 9.

3.6. Partager un intervalle pour obtenir un pas de 1 afin de graduer ou placer des nombres

Après avoir appris à graduer, à reporter des longueurs, le parcours d'étude propose des activités nécessitant des partages de longueurs (cf. figure 15). L'objectif de ces exercices est d'obtenir une graduation plus fine pouvant attraper plus de nombres. Les instruments de partage seront donc mobilisés.

Exercice 10. Gradue la droite de 1 en 1.

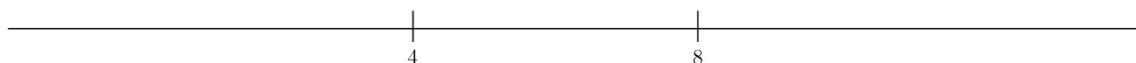
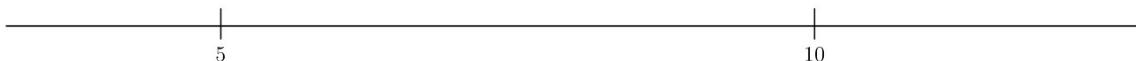


Figure 15 : Exercice 10.

Des exercices du type de *Placer 9* (cf. figure 16) arrivent alors en application de l'ensemble des types de tâches préalablement introduites (partages de longueurs, et reports de longueurs pour placer des nombres).

Exercice 11. Place les nombres entre 5 et 10 sur la droite.



Exercice 12. Place le nombre 8 sur la droite.



Place le nombre 9 sur la droite.

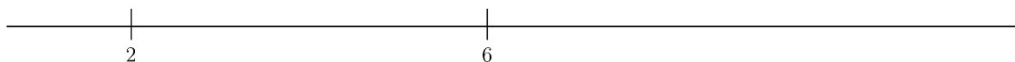
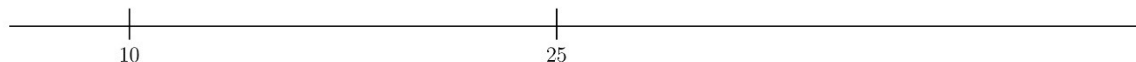


Figure 16 : Exercices 11 et 12.

3.7. Partager un intervalle pour obtenir un pas autre que 1

Afin d'éprouver la portée des techniques travaillées, de nouvelles situations sont proposées avec un soin particulier sur le choix des nombres en jeu. L'exposition à de nombreux cas permet de gagner en flexibilité et aisance avec les praxéologies autour de la droite graduée.

Exercice 13. Place le nombre 35 sur la droite.



Place les nombres 100 et 130 sur la droite.



Exercice 14. Place les nombres 12, 24, 28 et 34 sur la droite.



Exercice 15. Indique à quel nombre correspond chaque point repéré par une flèche.



Figure 17 : Exercices 13, 14 et 15.

4. Analyse didactique du parcours d'étude

Nous proposons par la suite une analyse didactique dans l'objectif de modéliser le parcours d'étude présenté dans la partie 3. Cette modélisation cherche à rendre explicites les choix didactiques réalisés, et à spécifier les éléments essentiels de la ressource afin qu'elle soit adaptable aux différentes réalités et besoins. Avec ces éléments l'enseignant pourra, par exemple, enrichir le parcours d'étude par des tâches mathématiques similaires (en conservant les valeurs de variables choisies dans le parcours) ou par des tâches différentes qu'il juge important de travailler (en choisissant des valeurs de variables ignorées dans le parcours, mais identifiées dans notre analyse).

Dans un premier temps, le parcours d'étude en question peut être décrit par une dialectique entre T_{Coder} , $T_{\text{Décoder}}$ et T_{Graduer} . Des moments précis sont réservés pour que ces trois types de tâches soient travaillés en tant qu'objets. Le principe des allers-retours sur un même type de tâches relève de la volonté de rendre l'étude spiralaire. De plus, T_{Graduer} acquiert le statut d'outil en faisant partie des techniques pour accomplir des tâches de T_{Coder} et $T_{\text{Décoder}}$.

Ex.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T_{objet}	T_{Coder}				T_{Coder}	T_{Graduer}	$T_{\text{Décoder}}$	T_{Coder}	T_{Graduer}		$T_{\text{Décoder}}$				T_{Coder}
T_{outil}							T_{Graduer}	T_{Graduer}			T_{Graduer}				T_{Graduer}

Tableau 2 : Dialectique entre les types de tâches.

Toutes les tâches proposées ont dans leurs énoncés une droite graduée au sens défini en partie 1, graphiquement représentée par une ligne rectiligne. L'évolution praxéologique de ces trois types de tâches est également le résultat de changements et non-changements de valeurs de variables didactiques intrinsèques à l'œuvre « droite graduée » fournie à l'élève. Ces variables didactiques sont décrites ci-dessous et leurs valeurs sont listées en annexe 3 ainsi que les valeurs qu'elles assument tout au long du parcours d'étude (cf. annexe 4).

Variables	Description
V1 : Graduation – ostensivité-point	Sur la représentation graphique d'une droite graduée, on peut, pour une même graduation, faire varier la quantité de points fournis. Ici, les points sont marqués par des traits.
V2 : Graduation – pas	Pour une droite graduée, une infinité de graduations est possible. On définit une graduation par son pas.
V3 : Graduation – ostensivité-abscisse/nombre	Sur la représentation graphique d'une droite graduée, on peut, pour une même graduation, faire varier la quantité des abscisses fournies.
V4 : Origine	L'origine de la droite graduée est l'image du nombre zéro, qui peut être aperçue ostensivement ou pas sur la représentation graphique de la droite graduée.

Tableau 3 : Variables intrinsèques à l'œuvre « droite graduée ».

En ce qui concerne V1, nous observons que la progression est marquée par une réduction ostensive. Au début du parcours d'étude, tous les traits de la graduation sont présents, ce qui facilite l'accomplissement des tâches en jeu. Dans un deuxième temps, c'est la disparition des traits qui amènent à l'usage de T_{Graduer} comme outil. La rapidité avec laquelle cette réduction est provoquée peut-être ajustée par l'enseignant par l'ajout ou par l'élimination de tâches pour lesquelles tous les traits de la graduation sont visibles.

Le pas de la graduation, défini par V2, rend les calculs en jeu plus ou moins difficiles et peut donc avoir un impact sur la réussite des tâches proposées. À ce propos, la diversité de graduations proposée dans le parcours vise la stabilisation des techniques opératoires robustes adaptées aux différents cas de figure. Un autre objectif central de cette diversité consiste à étudier leur coexistence, puis la pertinence d'une graduation par rapport à une autre dans un contexte donné. Dans ce sens, on constate l'existence d'une graduation qui permet d'*attraper* tous les nombres entiers (*pas* $e=1$), mais qui n'est pas toujours la plus économique. Face à cette diversité, le choix judicieux de la « bonne » graduation est au cœur de l'étude, qui passe également par la compréhension qu'il y en a certaines qui ne conviennent pas pour accomplir la tâche.

L'évolution des techniques tout au long du parcours d'étude est aussi fortement motivée par les changements de la variable V3, plus précisément à travers une dialectique entre la présence d'abscisses consécutives et non-consécutives. Lorsque les abscisses données appartiennent à une graduation visée et sont consécutives, les opérations d'addition et de soustraction suffisent pour répondre aux tâches proposées. C'est avec les abscisses non-consécutives que le raisonnement multiplicatif lié au partage s'impose, en plus des opérations du champ additif qui restent toujours présentes.

Enfin, la variable didactique V4 concerne l'origine de la droite graduée. Avec la volonté que les techniques construites ne reposent pas sur cette abscisse, l'origine est délibérément absente sur une partie significative de tâches proposées. En revanche, il ne s'agit pas d'une abscisse pouvant être ignorée surtout au début de l'apprentissage : il s'agit d'un élément essentiel pour construire le rapport entre l'abscisse et la grandeur longueur.

D'autres caractéristiques du support graphique de la droite graduée ont été soulevées et ont participé de choix pris en compte lors de la conception du parcours d'étude. L'un de ces choix relève de la manière de représenter l'infinitude de la droite graduée sur le papier-crayon : le parti a été pris de ne jamais commencer ou finir le segment fourni par un point de la droite graduée, afin d'éviter le ressenti de finitude. En plus, le fait qu'elle n'a pas un « début » même en ayant une origine vise la continuité de cet objet au cycle 4, quand les nombres relatifs sont introduits. Pour favoriser la manipulation de la représentation rendant possible le prolongement du segment, les flèches parfois mises sur les bouts des segments n'ont pas été utilisées.

On observe aussi que la droite graduée est généralement tracée horizontalement. L'orientation peut être déduite des abscisses fournies et est donc, surtout au début de l'apprentissage, un résultat basé sur les connaissances des nombres. Le choix habituel de la droite horizontale orientée de gauche à droite est maintenu ici et pourrait être remis en question.

Conclusions

La situation *Placer 9*, combinée à la diversité des instruments de partage, peut motiver l'apparition de différentes techniques comme nous avons pu le constater dans la partie II de ce

texte. Notons que *Placer 9* peut être proposée en tant que situation de recherche, ou problème d'application en fonction du paradigme d'apprentissage et des objectifs de l'enseignant. Cette situation peut en effet introduire, évaluer ou tester la stabilité de compétences propres à la droite graduée.

Parce que nous pensons que l'environnement technologique propre de la droite graduée devrait être pris en charge par l'institution d'enseignement afin de construire des techniques efficaces et pérennes lors de son utilisation, nous avons construit le parcours d'étude présenté dans cet article.

Nous identifions trois types de tâches T_{Coder} , $T_{\text{Décoder}}$ et T_{Graduer} sur lesquels s'appuient ce parcours d'étude. Si les deux premiers sont présents dans les programmes et évaluations nationales récentes, il est rarement laissé à la charge de l'élève le fait de construire le trait associé à la position. Le troisième type de tâche T_{Graduer} reste également très discret dans les ressources institutionnelles, comme nous l'avons observé en préambule à la partie 3. Pourtant, les techniques permettant d'accomplir ce type de tâches sont porteuses de gestes évoquant les notions d'unité et de partage, indispensables dans l'apprentissage des nombres, surtout quand celui-ci est appuyé sur la grandeur longueur.

Plus qu'un parcours d'étude qui peut effectivement être une ressource exploitable par les enseignants, nous avons cherché à repérer les variables incontournables de nos choix afin qu'elles soient une source possible de création de séquences didactiques personnalisées aux différentes réalités. Le parcours d'étude présenté est finalement un exemple de jeu sur ces variables donnant lieu à une variété de techniques impliquées, afin d'apporter du sens à l'environnement technologico-théorique ciblé.

L'étude de la droite graduée, objet mathématique reconnaissable par sa forme graphique, requiert des conventions institutionnelles de signe et de manipulation. Dans ce sens, quelques conventions ont été déjà plus ou moins installées par les pratiques, comme l'habitude de la tracer en horizontale, le fait de repérer les points par des traits verticaux au-dessus desquels figure un nombre, dont le trait indique la position. D'autres sont moins harmonisées, comme la représentation de l'infini par une flèche. Dans tous les cas, ces conventions sont également à construire en classe et c'est à la charge de l'enseignant d'assurer la compréhension et le bon fonctionnement des ostensifs mis à disposition. Ces conventions peuvent, en revanche, être à l'origine de ruptures de contrats didactiques, afin qu'elles ne deviennent pas des obstacles didactiques avec le temps.

À propos de la manipulation et des techniques en jeu, les instruments de partage ont une place importante, puisque chacun de leurs usages relève de gestes et connaissances mathématiques propres. La diversité d'instruments de partage apporte de la richesse à l'étude, mais peut également décentraliser l'étude de son objet principal, la droite graduée. Il s'agit donc également d'un choix pédagogique et didactique à prendre. La culture de la classe quant aux instruments conventionnellement utilisés peut orienter cette prise de décision.

Notons enfin que les choix effectués dans la situation *Placer 9* comme dans le parcours d'étude sont liés à l'objectif d'étude de la droite graduée. En particulier, les choix de pas multiples d'une puissance de 10 ne sont pas travaillées spécifiquement. Ultérieurement, lorsque les objectifs d'apprentissage autour de la droite graduée ont été atteints, l'enseignant peut jouer avec cette variable pour travailler davantage les propriétés des nombres par le biais de la droite graduée. En effet, si le travail proposé par ce parcours porte sur les compétences concernant la droite graduée, l'objectif est bien d'ouvrir la possibilité d'utiliser un registre de représentation efficace, de sorte

que la droite graduée devienne un outil : aussi bien un outil pour l'enseignant qu'un outil pour les élèves dans d'autres praxéologies.

Références bibliographiques

- Adjage, R. & Pluvinaud, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(1), 41-88.
- Bessot, A. (2004). *Une introduction à la théorie des situations didactiques (Master « Mathématiques, Informatique » de Grenoble 2003-2004)*.
- Cerclé, V., Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S., Gosselin, E., Leberre, J. & Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : Des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel. *Petit x*, 113, 59-88.
- Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique ? *Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG* (pp. 167-194). Grenoble.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques, Dans S. Maury & M. Caillot (éds.), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104. Éditions Fabert.
- Douady, R. (1986). Jeux des cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Kaspary, D., Bittar, M. & Chaachoua, H. (2021). La Raison d'être des Propriétés D'opération D'addition à L'école Primaire : un Sujet Curriculaire Encore Controversé ? *Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática*, 14(4), 394-403.

Référence institutionnelle

- Ministère de l'Éducation Nationale (éds.). (2024). *Programme de mathématiques du cycle 2*.
https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/ensel135_annexe4.pdf

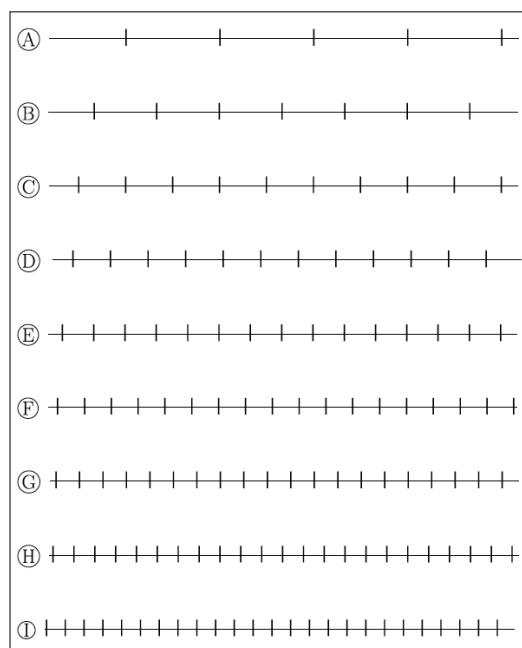
Annexe 1

Gradue-tout

Le *gradue-tout* est un instrument qui permet de diviser rapidement et sans mesure un segment en plusieurs segments de même longueur. Il sert notamment à faciliter les partages difficilement atteignables par pliage, tels que 3, 5, 7, ...

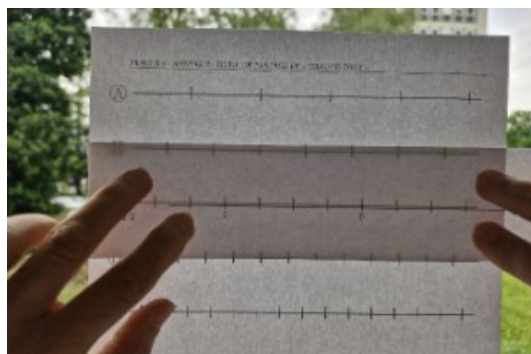
L'utilisation d'un *gradue-tout* entraîne des contraintes importantes pour l'enseignant quant à la longueur des segments à partager.

Le *gradue-tout* peut être fabriqué à partir d'une feuille de papier A4 blanche sur laquelle plusieurs lignes avec différents traits réguliers sont tracés, comme l'illustre la figure ci-dessous. Les lignes sont référencées par des lettres pour en faciliter la référence (« j'utilise la ligne C », par exemple).



Gradue-tout (version réduite).

Le partage peut être effectué en superposant les lignes du *gradue-tout* et le segment à partager, et en utilisant la transparence (comme ci-après) ; ou en utilisant une bande de papier sur laquelle les graduations peuvent être reportées.



Utilisation du gradue-tout par transparence.

Annexe 2

Extrait de la progression d'exercices pour travailler la droite graduée

Exercice préliminaire

La graduation est régulière sur cette droite graduée. Que signifie le mot "régulier" ? Comment savoir à quel nombre correspond chaque trait ?



Savez-vous à quoi correspond le mot « graduation » ?

On pourra indiquer (ou confirmer) que la graduation est l'ensemble des traits verticaux, régulièrement répartis ainsi que les nombres qui y sont associés. On pourra également indiquer que ces nombres s'appellent alors les abscisses.

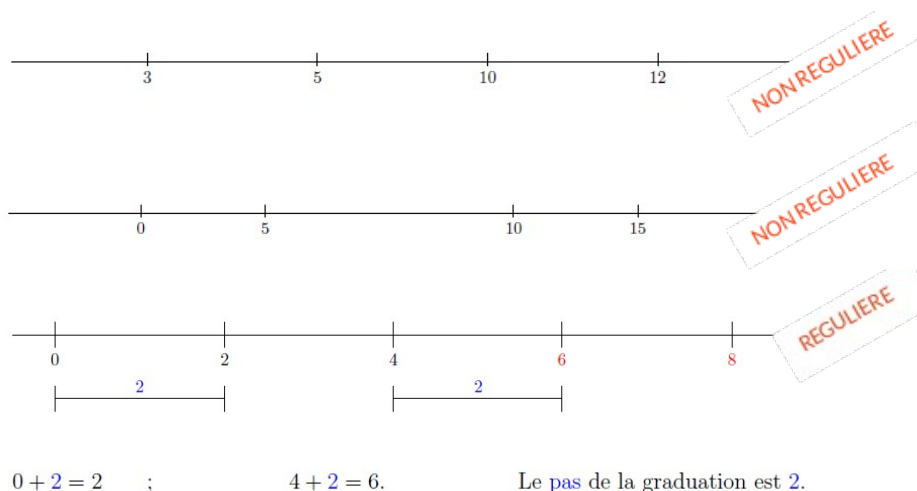
Après 2 minutes de réflexion individuelle et un échange avec les élèves, on pourra « corriger » cet exercice en insistant notamment sur les éléments suivants :

- comment le pas a été déterminé, puis vérifié ;
- comment on a déterminé le nombre qui doit être placé à chaque trait : il faut ajouter le pas à l'abscisse associée au trait précédent.

Bilan de l'activité : on dit que la graduation est régulière lorsque les traits sont réguliers, c'est-à-dire que la distance entre un trait et son successeur est toujours la même, et que l'écart entre deux nombres qui se suivent est toujours le même. On appelle cet écart le **pas** de la graduation.

On pourra proposer des droites avec des traits réguliers, mais les écarts entre les nombres ne sont pas réguliers. Et proposer des droites avec des traits répartis avec une distance non constante, pour spécifier qu'une graduation est régulière si elle vérifie les deux conditions de régularité (géométrique et numérique).

Trace écrite :



On formule à l'oral en complément : « Lorsque je connais le pas, je peux compléter la droite graduée en ajoutant le pas à un nombre déjà placé ».

Annexe 3

Variables didactiques et leurs valeurs

Variables	Valeurs
V1 : Graduation principale – ostensivité-trait	V1a : Aucun trait visible.
	V1b : Un trait visible.
	V1c : Deux traits visibles.
	V1d : Plus de deux traits visibles (mais pas tous).
	V1e : Tous les traits visibles (du <i>morceau</i> fourni).
V2 : Graduation – pas	V2a : Non régulière (valeur qui ne respecte pas la définition donnée de la droite graduée).
	V2b : Régulière de pas égal à 1.
	V2c : Régulière de pas entier différent de 10^k , $k \in \mathbb{N}$.
	V2d : Régulière de pas égal à 10^k , $k \in \mathbb{N}^*$.
V3 : Graduation – ostensivité-abscisse/nombre	V3a : Aucune abscisse visible.
	V3b : Une abscisse visible.
	V3c : Exactement deux abscisses visibles consécutives.
	V3c' : Plus de deux abscisses visibles consécutives (mais pas toutes).
	V3d : Au moins deux abscisses visibles, mais non consécutives.
	V3e : Toutes les abscisses visibles.
V4 : Origine (zéro)	V4a : Absente et position repérable sur le support.
	V4b : Absente et position non repérable sur le support.
	V4c : Présente.

Annexe 4

Évolution de valeurs de variables didactiques du parcours d'étude

	T _{Coder}				T _{Décoder}	T _{Graduer}	T _{Décoder}		T _{Coder}	T _{Graduer}	T _{Décoder}				T _{Coder}
Ex.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
V1	e	e	e	e	e	d c	d	c	d	c	c	c	c	c	d
V2	d	c	d	d c	c	b d	b c	b	c d	b	b c	b c	c d	c	c
V3	e	e c	f	d f	d	c	c	c	c d	d	d	d	c	c	d
V4	c	c b	b	c	c b	c a	c	a	b c	a	b	b	b	c	b