ACTIVITÉ DU N° 113

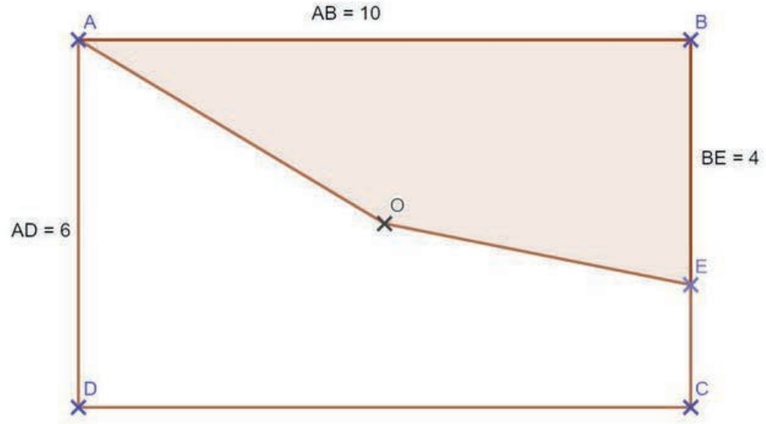
UNE PORTION DE RECTANGLE
SOLUTIONS

Georges SALIBA[1]
Collège Aliénor d'Aquitaine, Bordeaux

Jean-Christophe SALMON[2]
Collège G. Anthonioz - de Gaulle, Cluses
IREM de Grenoble - Groupe de Haute-Savoie

Énoncé

ABCD est un rectangle de centre *O*.



À l'aide des informations fournies par la figure, calculer l'aire du quadrilatère *ABEO*.

Justifier votre réponse.

Solutions

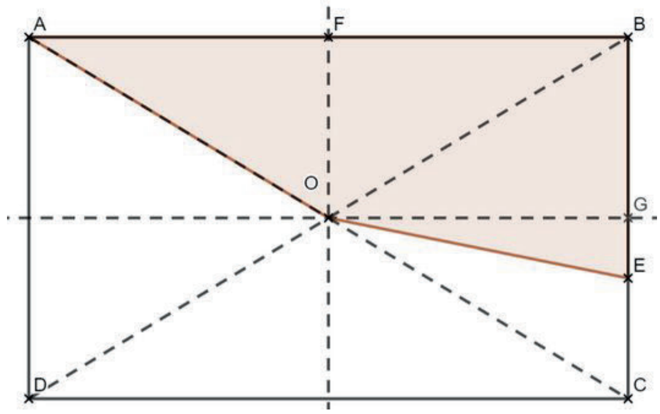
Le calcul de l'aire du quadrilatère *ABEO* nécessite de choisir un découpage de la figure en sous-figures (triangles, rectangles, trapèzes).

Les divers découpages possibles font intervenir les diagonales du rectangle et/ou ses axes de symétrie pour faire apparaître des triangles dont une base et la hauteur associée sont simples à déterminer.

---

[1] georges.saliba@gmail.com

[2] jean-christophe.salmon@univ-grenoble-alpes.fr



Les résolutions possibles du problème sont diverses, nous en proposons quelques unes :

Découpage en deux triangles, avec une somme

L'aire de $ABEO$ est la somme des aires des triangles ABO et BEO, dont les hauteurs sont respectivement $OF=\frac{6}{2}=3$ et $OG=\frac{10}{2}=5$.

$A_{ABO}=\frac{AB\times OF}{2}=\frac{10\times 3}{2}=15$ et $A_{BEO}=\frac{BE\times OG}{2}=\frac{4\times 5}{2}=10$. Donc $A_{ABEO}=15+10=25$.

Découpage en deux triangles, avec une différence

L'aire de $ABEO$ est la différence de l'aire de ABC et de ECO.

$A_{ECO}=\frac{EC\times OG}{2}=\frac{(6-4)\times 5}{2}=5$ et $A_{ABC}=\frac{10\times 6}{2}=30$. Donc $A_{ABEO}=30-5=25$.

Découpages en un rectangle et deux triangles

L'aire de $ABEO$ est la somme des aires du rectangle $FBGO$ et des triangles rectangles AFO et EGO.

$A_{FBGO}=OF\times OG=5\times 3=15$; $A_{AFO}=\frac{AF\times OF}{2}=\frac{5\times 3}{2}=7{,}5$; $A_{EGO}=\frac{EG\times OG}{2}=\frac{(4-3)\times 5}{2}=2{,}5$.

Donc $A_{ABEO}=15+7{,}5+2{,}5=25$.

Découpage utilisant quatre triangles rectangles

L'aire de $ABEO$ est la somme des aires des triangles rectangles AFO, BFO, BGO[3] et EGO.

$A_{AFO}=A_{BFO}=A_{BGO}=\frac{5\times 3}{2}=7{,}5$ et $A_{EGO}=\frac{EG\times OG}{2}=\frac{(4-3)\times 5}{2}=2{,}5$.

Donc $A_{AEBO}=3\times 7{,}5+2{,}5=25$.

Découpages utilisant des trapèzes

• L'aire de $ABEO$ est la somme des aires du trapèze $ABGO$ et du triangle rectangle EGO.

[3] Nous laissons au lecteur le soin de justifier que ces trois triangles sont isométriques.

$A_{ABGO}=\frac{(AB+OG)\times BG}{2}=\frac{(10+5)\times 3}{2}=22{,}5$ et $A_{EGO}=\frac{EG\times OG}{2}=\frac{(4-3)\times 5}{2}=2{,}5$.

Donc $A_{AEBO}=22{,}5+2{,}5=25$.

• L'aire de *ABEO* est la somme des aires du trapèze *EBFO* et du triangle rectangle *AFO*.

$A_{EBFO}=\frac{(BE+OF)\times BF}{2}=\frac{(4+3)\times 5}{2}=17{,}5$ et $A_{AFO}=\frac{5\times 3}{2}=7{,}5$.

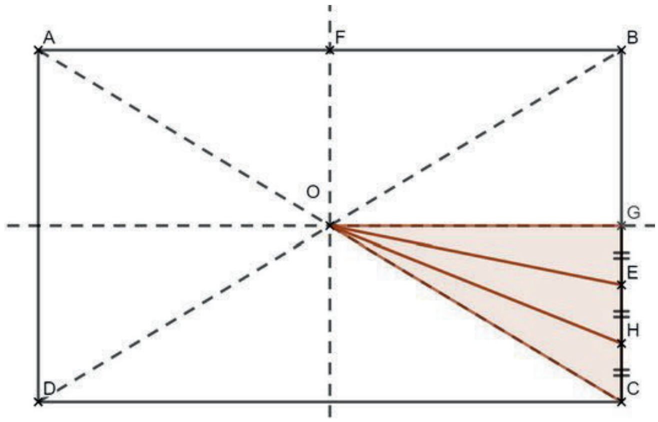
Donc $A_{ABEO}=17{,}5+7{,}5=25$.

En utilisant des fractions de l'aire du rectangle ABCD

D'autres solutions, moins attendues dans ce cadre, mais qui peuvent être reprises durant l'étude des fractions en 5e. L'aire du triangle *ABCD* est $A_{ABCD}=10\times 6=60$.

L'aire de *AEBO* est la somme des aires de triangles rectangles *AFO*, *BFO*, *BGO* et *EGO*.

Compte tenu des données : $GC=3$ et $EG=1=\frac{1}{3}GC$, on peut faire intervenir les triangles ci-dessous (qui ont même base et même hauteur).



Nous obtenons $A_{ABEO}=10\times A_{EGO}$, or $A_{EGO}=\frac{1}{24}A_{ABCD}$.

Donc $A_{ABEO}=\frac{10}{24}\times A_{ABCD}=\frac{10}{24}\times 60=25$.

D'autres expressions utilisant les fractions sont possibles, comme :

- $\left(3\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\right)\times A_{ABCD}$, avec $3\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}+\frac{1}{24}=\frac{9}{24}+\frac{1}{24}=\frac{10}{24}$;
- $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)\times A_{ABCD}$, avec $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{6}{24}+\frac{3}{24}+\frac{1}{24}=\frac{10}{24}$;
- $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{24}\right)\times A_{ABCD}$, avec $\frac{1}{2}-\frac{2}{24}=\frac{12}{24}-\frac{2}{24}=\frac{10}{24}$.

On retrouve dans chaque cas $A_{ABEO}=\frac{10}{24}\times A_{ABCD}=\frac{10}{24}\times 60=25$.