LE SCHÉMA SEGMENTAIRE, UN « BON » OUTIL POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ARITHMETIQUES ? UN EXEMPLE : INVERSER UNE FRACTION DE...

Nejib BELGUESMI[1]

Professeur principal Hors classes des écoles primaires,
LAB-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux

Lalina COULANGE[2]

Professeure des universités,
LAB-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux

Résumé. Dans notre recherche, nous nous intéressons aux connaissances et savoirs mathématiques relatifs à la résolution de problèmes arithmétiques outillée par un type de schémas particulier : le schéma « segmentaire » ou « modèle barre ». Nous nous penchons dans le cas présent sur un type de problèmes donné : correspondant à l'inversion d'une relation multiplicative fractionnaire entre deux grandeurs, autrement dit d'une « fraction de ». L'étude *a priori* de ce type de problèmes-schémas, puis l'analyse d'extraits de manuels et de productions d'élèves tunisiens et français d'âges équivalents (11-12 ans) permettent d'approfondir des questions relatives à la nature des connaissances mathématiques possiblement en jeu.

Mots-clés. Problème arithmétique, schéma, inversion « d'une fraction de », schéma segmentaire, modèle en barre, méthode Singapour.

Abstract. In our research, we are interested in the mathematical knowledge related to arithmetic problem solving by using a particular diagram: the "segmental" or "bar model" diagram. In the present case, we are interested in a specific problem: inversing a fractional multiplicative relationship between two quantities or inversing a "fraction of". *A priori* study of this problem-diagram and analysis of extracts from textbooks and productions of Tunisian and French pupils of equivalent ages (11-12 years old), allow us to deepen questions relating to mathematical knowledge possibly involved. Our study also highlights conditions for teaching and learning such a mathematical knowledge.

Keywords. Arithmetic problems, diagram, multiplicative inverse of "a fraction of", segmental diagram, bar model, Singapore method.

Introduction

Nous nous intéressons au rôle des schémas « segmentaires », présents dans l'arithmétique autrefois enseignée en France (Chevallard, 1984 ; Coulange, 2001 ; Julo, 1995, 2000)[3] et proches de ceux parfois actuellement plus connus sous le nom de « modèles barres »[4], pour résoudre des problèmes arithmétiques. La question des connaissances et des savoirs relatifs à la production et à l'interprétation de schémas — et de ce type de schémas en particulier — par les élèves dans la

[1] nejib.belguesmi@u-bordeaux.fr

[2] lalina.coulange@u-bordeaux.fr

[3] Julo parle d'une « schématisation de l'énoncé [de partage en parties inégales] sous forme de segments de droite », (*op. cit.*, p. 1).

[4] Nous préférons parler de schémas segmentaires que de schémas ou de modèles « barres », y compris lorsque la représentation graphique convoquée est une « bande », les actions convoquées dans le registre graphique, sur ce type de schémas relevant davantage de la grandeur longueur que de la grandeur aire (s'agissant d'actions de report d'une grandeur étalon par exemple).

résolution arithmétique de problèmes a été assez peu mise à l'étude à ce jour dans le domaine de la didactique des mathématiques.

Pour autant, c'est une question qui mérite toute notre attention, du fait notamment de l'actualité qui semble (re)mettre le « modèle barres » au goût du jour au sein de l'institution française. Dans le cadre de la recherche présentée, nous étudierons également plus avant ce qui se passe au sein d'une autre institution scolaire, l'école primaire tunisienne, au sein de laquelle un enseignement de la résolution de problèmes arithmétiques outillée par le schéma « segmentaire » n'a pas disparu des pratiques d'enseignement de mathématiques. Précisons d'ailleurs dès maintenant qu'il ne s'agira pas ici, de prendre parti « pour » ou « contre » les modèles barre ou les schémas segmentaires, mais plutôt de chercher à approfondir la question des connaissances mathématiques potentiellement mises en jeu dans la production et l'interprétation de tels schémas par des élèves des deux institutions, et d'interroger un ensemble de conditions relatives à l'apprentissage et l'enseignement de telles connaissances.

Nous avons choisi dans cet article de nous intéresser à un type de problèmes arithmétiques particulier, lié à sa résolution par un schéma « en barres » ou « segmentaire » : l'inversion d'une relation multiplicative fractionnaire entre deux grandeurs.

Dans un premier temps, nous exposerons les résultats d'une étude des connaissances et des savoirs mathématiques possiblement convoqués dans la résolution de ce type de problèmes, outillée par un schéma segmentaire. Partant de cette étude faite *a priori*, nous analyserons deux extraits de manuels (un manuel ancien d'arithmétique et un manuel contemporain) à même de soulever de nouvelles questions quant aux conditions de l'appropriation de telles connaissances, via un processus d'enseignement centré sur la production et l'utilisation de ce type de schémas. Enfin, nous analyserons des productions d'élèves français et tunisiens d'âges équivalents (11-12 ans, élèves de fin de primaire en Tunisie et de début de sixième en France) en lien avec la résolution d'un problème donné. Ainsi, en termes de connaissances mathématiques et de contrat didactique (Brousseau, 2001), nous essaierons de montrer qu'une réalité liée au schéma segmentaire, comme outil qui renforcerait la réussite dans la résolution de problème, peut en cacher une autre, celle relative aux connaissances mathématiques utilisées pour résoudre le problème en utilisant un tel schéma.

1. Résolution de problèmes et schémas

1.1. Une problématique peu investie...

La résolution de problèmes arithmétiques, parfois qualifiés d'énoncés verbaux (Feyfant, 2015) est une thématique « tout naturellement » au cœur de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques, et ce depuis plusieurs années. Cette thématique recouvre d'ailleurs une grande diversité d'approches théoriques (didactiques, psychologiques, etc.) et d'entrées possibles : champs conceptuels additif ou multiplicatif (Vergnaud, 1986), transition arithmétique et algèbre (Bednarz & Janvier, 1994), modélisation (Chevallard, 1989), problèmes complexes ou basiques (Houdement, 2017), etc. — pour n'en citer que quelques-unes parmi celles que nous avons eu l'occasion d'étudier de plus près.

Paradoxalement, la question de la schématisation et de l'usage de schémas dans la résolution de problèmes s'avère, quant elle, assez peu problématisée dans les recherches en didactique des mathématiques, comme le signalent d'ailleurs Laparra et Margolinas (2009) :

> *Néanmoins, malgré l'importance que la théorie accorde aux représentations et aux formulations,*

dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques, les travaux de recherche qui concernent spécifiquement le schéma et son intervention dans le processus de compréhension et de résolution de problèmes sont assez peu nombreux, malgré le travail pionnier de Bessot et Richard (1980) (Laparra et Margolinas, 2009, p. 53).

Les travaux anciens et pionniers, ceux de Bessot et Richard (1980), cités par Laparra et Margolinas (2009), ont porté sur l'usage d'un schéma particulier (le schéma de type arbre) par les élèves dans le cadre de la résolution de problèmes conçus par les auteur-e-s et d'autres. D'autres travaux plus récents comme ceux de Laparra et Margolinas (2009) ou, en amont, ceux de Novotna (2003), questionnent des usages de schémas par les élèves pour résoudre des problèmes à l'école primaire dans le cadre de l'enseignement ordinaire (en début et en fin d'école primaire en France et en République Tchèque). Les travaux de Julo (1995, 2000), davantage ancrés en psychologie cognitive, sont quant à eux davantage orientés vers des propositions « pour la classe » dans un dispositif d'aide à la représentation. Il s'avère difficile de faire une synthèse de ces travaux, peu nombreux ou de les mettre en regard, du fait des problèmes, des schémas et des niveaux scolaires considérés (au début ou à la fin d'école primaire, secondaire) voire des projets initiaux de leurs auteurs, tout aussi variés. Toutefois, nous retenons que ces travaux tendent à prouver que les usages par les élèves de schémas dans la résolution de problèmes peuvent s'avérer délicats, et ce à plusieurs titres.

En l'absence d'un processus d'enseignement, les élèves de fin de primaire ne convoquent pas spontanément des schémas conventionnels, comme ceux de type « segmentaires », alors même que Novotna (2003) en souligne l'efficacité dans des stratégies de résolution — tout en s'interrogeant sur les connaissances mathématiques mises en fonctionnement dans la production et l'usage de tels schémas ou modèles. Les conditions qui seraient favorables à un enseignement explicite de la schématisation restent donc à questionner.

Nous retenons des travaux pionniers de Bessot et Richard (1980) des difficultés constatées chez des élèves de niveau secondaire à adapter des stratégies de schématisation relatives à l'usage d'un autre type de schéma conventionnel donné, de type « arbre », et donc les connaissances mathématiques liées à la production et à l'usage de schémas au regard de la nature des problèmes donnés. Ceci fait écho à ce que Julo (1995, 2000) considère comme des précautions à prendre dans l'enseignement de tels outils de modélisation, des schémas conventionnels donnés, en termes d'orientation particulière donnée dans la résolution de problèmes qu'il considère comme à même d'entraver l'activité de représentation d'un problème par les élèves. Toutefois, ce que cet auteur met en avant ne relève pas d'un questionnement lié à la nature des problèmes posés (et à la portée de schémas pour des types de problèmes donnés qu'il serait crucial d'identifier), mais plutôt d'interrogations relatives aux élèves (considérés comme sujets psychologiques) et à des entrées différentes dans la représentation et la résolution d'un problème par différents élèves. Un tel questionnement peut d'ailleurs paraître *a priori* assez contradictoire avec une démarche d'enseignement liée à un schéma conventionnel donné comme un outil de résolution commun utilisé par tous les élèves.

Laparra et Margolinas (2009) mettent quant à elles en avant des difficultés liées à l'identification et la prise en charge de connaissances mises en fonctionnement par les élèves de début de primaire (CP) dans la production et l'usage de schémas, pour résoudre des problèmes arithmétiques donnés. Considérant le schéma comme un écrit de savoir à enseigner, ces dernières proposent des pistes à cet effet à la fin de leur article, en proposant d'introduire des schémas adaptés à la résolution des problèmes étudiés : ceux liés aux travaux de Vergnaud (1986) qui pourraient être utiles à la fois pour faire identifier des catégories différentes de problèmes arithmétiques et pour les faire résoudre par les élèves.

Quoi qu'il en soit, la schématisation paraît encore une problématique qui reste largement à investir par la recherche en didactique des mathématiques et ce, à différents niveaux scolaires, comme le signalent Laparra et Margolinas dans leur article sur le sujet (Laparra & Margolinas, 2009). Ceci s'avère peut-être plus encore le cas pour la résolution de problèmes arithmétiques complexes comme ceux qui nous intéressent, qui demeure, du point de vue des processus qui déterminent le passage d'un énoncé au schéma et l'usage du schéma ou plus globalement la construction de « modèles mathématiques » pour résoudre de tels problèmes, encore et toujours, une « boîte noire » (Novotna, 2003).

> *Malgré le nombre grandissant de travaux publiés et de variables étudiées, les processus qui déterminent le passage de la lecture d'un énoncé à la construction du modèle mathématique qui le résout restent dans une « boîte noire » (Novotna, 2003, p. 35).*

1.2. Les schémas « segmentaires » ou « modèles en barres » (re)devenus d'actualité ?

Dans le cadre de notre recherche, à l'instar de Novotna (2003), nous nous sommes intéressés à un type de schéma conventionnel ou à un modèle particulier : les schémas segmentaires, parfois qualifiés de « modèle en barre » qui permettent de représenter graphiquement des relations entre des grandeurs ou des nombres.

Ces schémas sont d'une certaine façon récemment (re)devenus d'actualité dans l'institution scolaire française. En effet, le rapport produit par Villani et Torossian[5] (2018) prône l'utilisation de méthodes qualifiées d'explicites ou intuitives, en citant l'exemple de la « méthode de Singapour ». Cette méthode est représentée en France, entre autres, par une série de manuels du même nom, publié par la Librairie des Écoles et par d'autres séries comme ceux de l'éditeur « Bordas »[6]. Or, comme le signale Chambris (2017), c'est une des caractéristiques de cette collection d'ouvrages scolaires que d'envisager l'utilisation généralisée du « modèle barres » pour la résolution des problèmes d'arithmétique dès le CP-CE1. Ce qui peut ainsi apparaître comme une « innovation » était présent dans l'institution française avant la réforme des mathématiques modernes (Chambris, 2008 ; Coulange, 2001 ; Julo, 2000). Dans tous les cas, tout comme d'autres aspects de cette méthode, le « modèle barre », que nous préférons, pour notre part, appeler « schéma de type segmentaire »[7], a été ainsi récemment remis sur le devant de la scène au sein de l'institution française, notamment en lien avec des mises en œuvre envisagées à la suite du rapport Villani et Torossian (2018)[8]. Ce qui peut paraître une « nouveauté » pour des enseignants et des élèves français actuellement concernés par ces mises en œuvre n'en est certainement pas une, aux yeux des enseignants et des élèves tunisiens, qui semblent pour partie avoir conservé des pratiques d'enseignement du schéma segmentaire — historiquement héritées d'un enseignement traditionnel de l'arithmétique élémentaire.

Dans tous les cas, l'étude de ce type de schémas paraît d'autant plus intéressante du fait de ce regain d'intérêt qu'il suscite depuis peu au sein de l'institution française — sans qu'il s'agisse de prendre parti un peu aveuglément « pour » ou « contre » un processus d'enseignement du

---

[5] Ce rapport, intitulé *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, est disponible sur : https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242

[6] https://maths-leonie.editions-bordas.fr/

[7] Pour des raisons déjà signalées plus haut.

[8] Nous renvoyons le lecteur à la note de service n° 2018-052 du 25/04/2018 sur la résolution de problèmes à l'école élémentaire : https://www.education.gouv.fr/bo/18/Special3/MENE1809043N.htm

schéma segmentaire. Il s'agit plutôt d'étudier sérieusement la question d'en quoi et comment les schémas segmentaires peuvent constituer ou non des outils pour résoudre des problèmes arithmétiques complexes ou représenter une aide à la compréhension de tels énoncés ou des notions en jeu dans leur résolution. Question qui, comme notre propos dans cet article l'illustrera par la suite, reste bien complexe au demeurant.

2. Un zoom sur un « problème-schéma » particulier

2.1. Le problème *inversion d'un rapport fractionnaire entre deux grandeurs*

Dans le cadre du travail de thèse (Belguesmi, 2021), nous avons retenu et décrit plusieurs couples d'énoncés (de problèmes) – schémas « fondamentaux » correspondant à des problèmes arithmétiques traditionnellement proposés à des élèves tunisiens de fin de primaire (Belguesmi, 2016), d'âges équivalents à des élèves français de début de secondaire (11-12 ans). Cette description de classes ou de familles de « couples » problèmes arithmétiques - schémas vise à démêler la question des connaissances et des savoirs mathématiques en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques, outillée par la schématisation segmentaire.

Dans le cas présent, nous avons fait le choix de ne nous intéresser qu'à un seul couple énoncé de problème - schéma segmentaire donné. Précisons d'ailleurs que l'énoncé de problème arithmétique considéré ici s'avère un peu différent des autres énoncés considérés dans le cadre de notre recherche. Contrairement aux autres problèmes étudiés, il ne s'agit pas d'un problème de « partage en parties inégales » (Coulange, 2001 ; Julo, 2000 ; Novotna, 2003) et c'est un problème de nature connectée[9] quand les autres problèmes considérés dans le travail de thèse en cours sont de nature déconnectée au sens de Bednarz et Janvier (1996).

Cet énoncé de problème nous a pour autant semblé présenter un intérêt certain au regard de notre problématique plus générale sur les connaissances et savoirs[10] en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire :

- du point de vue des connaissances et savoirs en jeu dans la schématisation et l'usage de schémas de type segmentaire pour résoudre des problèmes arithmétiques : cet énoncé - schéma fondamental illustre des apports potentiels de ce type de schématisation — notamment au regard des systèmes d'unités en jeu et des connaissances spécifiques liées au caractère relatif de ces unités (Chambris, 2021 ; Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021) possiblement convoquées dans la résolution d'un tel problème avec un schéma segmentaire ;
- du point de vue des connaissances et savoirs mathématiques visés en lien avec l'inversion d'une fraction ; ces connaissances et ces savoirs sont *a priori* pris en charge au niveau du cycle 4 en France[11] et sans mise en lien avec la fraction d'une grandeur ou avec la résolution de problèmes arithmétiques (la fraction étant davantage considérée comme un

[9] Une relation peut être facilement établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement possible de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à la donnée inconnue.

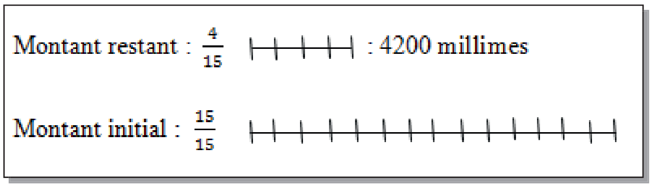
[10] Nous distinguons ce qui relève de connaissances, convoquées de manière instanciée dans la résolution d'un problème arithmétique donné, de savoirs pouvant faire l'objet d'un processus d'institutionnalisation visant à décontextualiser - dépersonnaliser ces connaissances (Brousseau, 1997).

[11] Même si, comme nous le verrons plus loin, le manuel français intitulé « méthode Singapour » envisage des problèmes d'inversion fractionnaire dès le CM1.

nombre[12] — sous son aspect quotient — à ce niveau scolaire). Le type de problème analysé par la suite est pourtant proposé dès la fin de primaire (équivalent à la dernière année du cycle 3, équivalent au niveau de la sixième dans l'enseignement français) dans l'institution tunisienne.

Nous donnons ci-après un exemple du problème arithmétique considéré pour illustrer notre propos.

Énoncé *: Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4 200 millimes, ce qui représente* $\frac{4}{15}$ *de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses ?*



Solution *:* $\frac{1}{15}$ *du montant initial correspond à* $\frac{1}{4}$ *du montant restant, soit* $4\,200\,\text{millimes} \div 4 = 1\,050\,\text{millimes}$. *Le montant initial correspond dès lors à* $1\,050\,\text{millimes} \times 15$, *soit 15 750 millimes.*

Figure 1 *: Exemple de problème et de solution avec un schéma de type « segmentaire ».*

Nous décrivons le problème-schéma fondamental associé à un tel énoncé de la manière suivante — en mettant en avant les relations génériques qu'il recouvre par rapport aux grandeurs en jeu (A connue et B inconnue) et le rapport fractionnaire générique en jeu $\frac{m}{n}$.

Sachant que $A = B$, trouver B (m, n dans $\mathbb{N}^*$) ;

- A est une grandeur connue,
- B est une grandeur inconnue,
- la relation entre A et B est connue et multiplicative de type fractionnaire $\frac{m}{n}$;
- on recherche la valeur B, ce qui suppose l'inversion de la relation multiplicative $\frac{m}{n} : \frac{n}{m}$.

Nous nous plaçons dans le cas ou m, n sont différents de 1, qui s'avère le cas plus fréquent[13] parmi les problèmes proposés dans le manuel scolaire officiel tunisien[14]. Le recours au schéma segmentaire peut être une technique enseignée pour résoudre ce type de problèmes dans cette institution scolaire, bien que nous n'en retrouvions aucune trace dans ce même manuel[15].

[12] La notion d'inverse d'une fraction apparaît dans la rubrique « utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes » du programme du cycle 4.

[13] Les cas où $\frac{m}{n}$ correspondrait à un entier ou une fraction unitaire sont plus rarement proposés dans ce manuel.

[14] Manuel scolaire officiel tunisien des mathématiques de la sixième année de l'école de base (2003).

[15] Voir les réponses d'élèves tunisiens à notre questionnaire, qui attestent des effets d'un tel enseignement en termes d'effets observables liés à leurs productions sur l'ensemble des problèmes proposés.

La production d'une solution comme celle présentée en lien avec l'exemple précédent, en prise d'appui sur un schéma de type segmentaire suppose un certain nombre de connaissances mathématiques que nous décrivons ci-après.

2.2. La résolution de ce problème outillée par un schéma segmentaire : quelles connaissances mathématiques ?

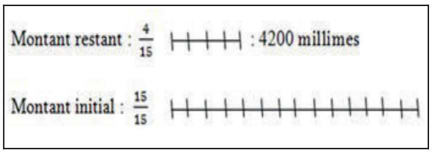
Le tableau ci-dessous résume les connaissances mathématiques potentiellement mises en jeu en lien avec la solution donnée ci-dessus, outillée par le schéma segmentaire — en distinguant celles qui apparaissent nécessaires pour produire le schéma et celles qui sont convoquées pour l'interpréter de manière à résoudre le problème posé.

<table>
<tr><td>Montant restant = $\frac{4}{15}$ du montant initial.

L'unité graphique u : $\frac{1}{15}$ du montant initial.</td><td rowspan="2">Production du schéma</td></tr>
<tr><td>Montant restant = 4u.

Cette première grandeur qui correspond à $\frac{4}{15}$ du montant initial est de valeur connue : 4 200 millimes, ce qui est codé sur le schéma.

Montant initial = 15u.

Nous appelons cette deuxième grandeur l'unité du problème. Elle correspond à $\frac{15}{15}$ du montant initial, ce qui est codé sur le schéma.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{15}$ du montant initial = $\frac{1}{4}$ de 4 200 millimes

Cette égalité traduit une double désignation donnée à voir par le schéma. Cette double désignation permet un changement d'unité de référence liée aux deux grandeurs en jeu dans le problème : montant initial et montant restant. L'unité graphique produite comme $\frac{1}{15}$ du montant initial (première unité de référence - unité du problème) est aussi $\frac{1}{4}$ du montant restant (deuxième unité de référence - grandeur de valeur connue) : 4 200 millimes.

Montant initial $=(4\,200\,\mathit{millimes} \div 4) \times 15 = \frac{4\,200\,\mathit{millimes} \times 4}{15}$

$= \frac{15}{4}$ millimes du montant restant.</td><td>Interpétation du schéma</td></tr>
</table>

Figure 2 *: Connaissances mises en jeu dans la résolution du problème - schéma « segmentaire ».*

Ce tableau fait tout d'abord apparaître que pour produire le schéma de type segmentaire, des connaissances liées à deux types d'unités sont potentiellement en jeu — que nous décrivons ci-après, tout en en considérant une généralisation possible :

- l'une, que nous avons qualifiée d'*unité graphique* (correspondant à un « petit » segment reporté n fois et m fois) correspondant à $\frac{1}{n}$ (ici $\frac{1}{15}$) de la grandeur inconnue ;
- l'autre, que nous avons qualifiée d'*unité du problème* (qui désigne la grandeur dont on connait « une fraction de »), correspondant, pour un rapport fractionnaire donné $\frac{m}{n}$ (ici $\frac{4}{15}$), à une relation multiplicative entre deux grandeurs dont une inconnue à $\frac{n}{n}$ (ici $\frac{15}{15}$) de cette grandeur inconnue ($\frac{15}{15}$ du montant initial).

Un élément clé de la résolution de ce problème avec un schéma segmentaire réside dans le fait de considérer que $\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue ($\frac{1}{15}$ du montant initial) correspond à $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue ($\frac{1}{4}$ du montant restant). Nous parlons d'un changement d'unité de référence, l'unité de référence considérée dans la production du schéma correspondant à une grandeur de valeur inconnue puis dans l'interprétation du schéma à l'autre grandeur de valeur connue, dans le problème : « $u=\frac{1}{n}$ de la grandeur de valeur inconnue » étant réinterprétée comme « $u=\frac{1}{m}$ de la grandeur de valeur connue ». Ce jeu sur des « unités relatives » (Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021) est décrit par Thompson, Carlson, Byerley et Hatfield (2014). On identifie une (sous-) unité commune pour deux grandeurs, ce qui permet d'exprimer chacune des deux grandeurs, à l'aide de cette (sous-) unité, elle-même appréhendée comme « relative » à ces deux grandeurs. Ce changement d'unité de référence peut se faire en prise d'appui sur le schéma via ce que Duval (1993) appelle une double désignation dans le registre de représentation graphique.

L'*unité graphique* correspond initialement à $\frac{1}{n}$ ($\frac{1}{15}$) de la grandeur inconnue (montant initial) lors de la production du schéma. Une fois codé, le schéma fait apparaître qu'elle est (re)désignable autrement, comme $\frac{1}{m}$ ($\frac{1}{4}$) de la grandeur connue (montant restant). Ce traitement intrinsèque au registre graphique permet dès lors d'inverser le rapport fractionnaire entre les deux grandeurs en jeu. En effet, une fois ce changement d'unité de référence opérée par le biais de cette opération de double désignation de l'unité graphique en lien avec les grandeurs en jeu dans l'énoncé, il ne reste plus qu'à conclure que la valeur de la grandeur inconnue (montant initial) correspond à $\frac{n}{m}$ ($\frac{15}{4}$) de la grandeur connue (montant restant). Nous laissons de côté les techniques de calcul que cette dernière étape dans la résolution convoque potentiellement, celles-ci n'étant pas au cœur de notre propos dans cet article.

Cette analyse d'une stratégie de résolution d'un problème correspondant à l'inversion d'un rapport fractionnaire entre deux grandeurs (l'une connue et l'autre inconnue), outillée par le schéma segmentaire, permet d'affiner l'étude des connaissances mathématiques sous-jacentes. Elle donne également à voir en quoi et comment un tel schéma peut constituer une prise d'appui via des traitements intrinsèques au registre graphique, pour résoudre ce type de problèmes — à la condition peut-être que les connaissances mathématiques liées au caractère « relatif » des unités en jeu correspondant aux grandeurs (inconnues et connues) du problème, soient effectivement convoquées dans cette résolution.

Ce dernier point constitue une des pistes de questionnement pour la suite dans nos analyses de manuels ou de réponses d'élèves français et tunisiens à un questionnaire.

3. Ce « problème-schéma » dans deux extraits de manuels français

Nous avons dans le cadre de notre travail de thèse (Belguesmi, 2021) étudié plusieurs manuels d'arithmétique anciens ainsi que le manuel intitulé *Méthode Singapour* : ces manuels ayant pour particularité d'organiser un processus d'enseignement autour des schémas segmentaires, ce que font peu de manuels scolaires français actuels (autres que ceux de la collection *Méthode Singapour*, aux éditions la Librairie des Écoles[16]) et que ne fait pas le manuel scolaire officiel tunisien contemporain. Nous ne nous attardons ici que sur deux extraits de manuels français, liés au « problème-schéma » retenu. L'analyse de ces extraits nous renseigne potentiellement plus avant sur des conditions d'enseignement de tels « problèmes schémas ».

Le premier extrait de manuel est tiré d'un manuel d'arithmétique de 1960[17] adressé à des élèves de CM2.

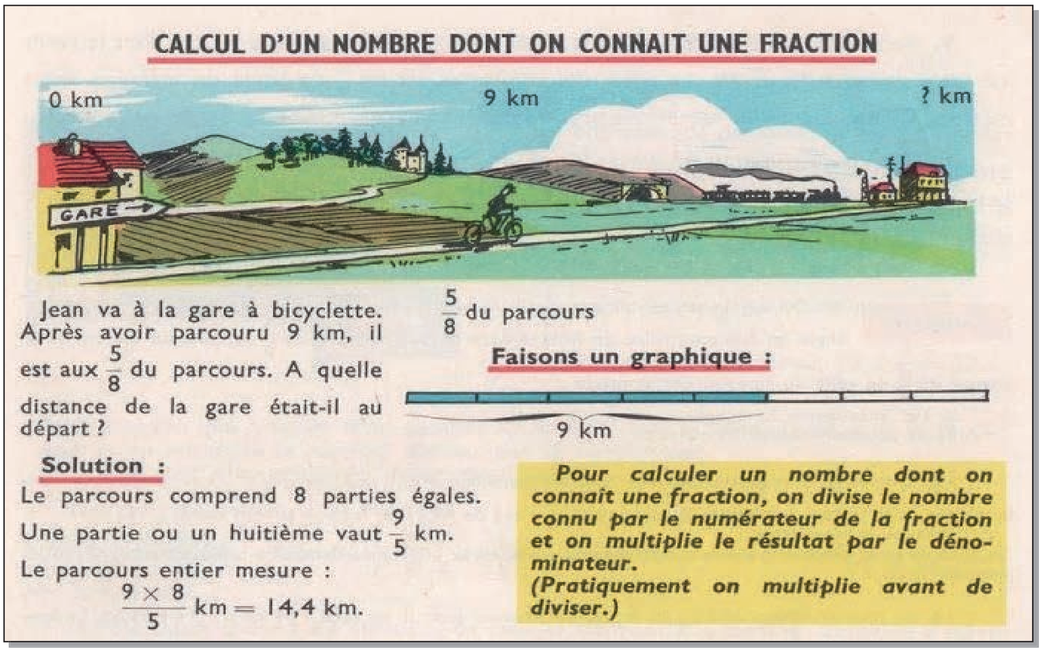


***Figure 3** : Extrait d'un ancien manuel d'arithmétique de CM2.*

Les auteurs du manuel commencent la résolution du problème par la phrase suivante : *« Le parcours comprend 8 parties égales »*. Ceci sous-entend que l'*unité graphique*, d'ailleurs

[16] Même si depuis nous avons pu repérer l'usage de ces schémas dans quelques autres manuels français, comme ceux de la collection *Maths tout terrain*, aux éditions Bordas.

[17] Bodard et Bréjaud (1960), p. 102.

désignée par la suite par une partie ou un huitième ($\frac{1}{8}$), est à associer à la grandeur correspondant à la longueur totale du parcours, à considérer comme l'*unité du problème* — soit $\frac{8}{8}$ de cette longueur. Ceci permet de produire le schéma correspondant à 8 *unités graphiques*[18]. On peut dès lors associer aux $\frac{5}{8}$ du parcours 5 *unités graphiques* correspondant à une longueur donnée de 9 *km* d'après l'énoncé — comme il est indiqué sur le schéma donné dans le manuel. Il s'agit ensuite de trouver la valeur correspondant à une *unité graphique* : *« une partie ou un huitième ».*

On note que, dans la solution, il n'est pas indiqué comment on détermine que celle-ci vaut $\frac{9}{5}\,km$. Le changement d'unité de référence (qui du $u = \frac{1}{8}$ du parcours entier devient $u = \frac{1}{5}$ de la distance parcourue) nécessaire à opérer dans l'interprétation du schéma est passé sous silence comme si celui-ci allait de soi à partir du schéma donné ou que le schéma porte à lui seul cette information sans qu'il soit nécessaire de le commenter plus avant. Le traitement intrinsèque au registre graphique correspondant ne fait pas l'objet d'une formulation liée aux grandeurs et aux systèmes d'unités en jeu. Il devient ensuite possible de trouver la valeur de la longueur totale du parcours en multipliant la valeur obtenue par 8, ce qui dans ce manuel se fait en calculant directement $\frac{9 \times 8}{5}\,km$, comme cela était classique à l'époque au regard des techniques de calcul enseignées sur les fractions, en lien avec la règle de trois.

On note également l'encart jaune en bas à droite de la page du manuel cité. Cet encart semble dédié à l'institutionnalisation d'un nouveau savoir : *« pour calculer un nombre dont on connaît une fraction, on divise le nombre connu par le numérateur de cette fraction et on multiplie le résultat par le dénominateur. (Pratiquement, on multiplie avant de diviser). »*

La présence de ce discours peut être questionnée à plusieurs titres :

- d'une part quant à sa possible construction à partir de l'unique solution donnée en prise d'appui sur un schéma de type segmentaire. Un tel savoir n'a pas été à proprement parler, convoqué dans la résolution envisagée — il ne peut être construit que dans un après coup, en rapprochant la dernière étape de la solution (le produit de la longueur donnée par $\frac{8}{5}$) des données du problème (celle-ci représente $\frac{5}{8}$ de la longueur totale) sans qu'aucunement le schéma et la façon dont on a pu aboutir à ce résultat ne soient mis en jeu. On note également que, dans le discours généralisateur ainsi produit, la référence aux grandeurs disparaît (les auteurs parlant de « fraction d'un nombre », appellation qui mériterait à elle-seule d'être interrogée[19]).
- d'autre part quant au devenir d'un tel savoir dans le processus d'enseignement ainsi

[18] On note que le schéma n'est pas tout à fait le même que celui envisagé dans nos analyses *a priori*. En effet les auteurs des deux manuels considérés superposent les représentations segmentaires des deux grandeurs en jeu faisant plus explicitement apparaître l'une comme étant une partie de l'autre — nous ne nous attardons pas sur ce point, le considérant assez secondaire dans les faits au regard des connaissances en jeu.

[19] Le passage d'une fraction d'une grandeur à un produit d'un nombre par une fraction est souvent « transparent »... C'est pourtant une question bien complexe, au demeurant sur laquelle nous ne nous attarderons pas plus ici, mais qui mériterait à elle seule, un autre article !

envisagé[20]. Ce savoir est-il à envisager comme une connaissance utile future pour la résolution de ce type de problèmes ? Autrement dit, à la condition de reconnaître un problème de ce type, convoquant une grandeur inconnue dont on connaîtrait la valeur correspondant à une fraction donnée de cette grandeur, s'agit-il de multiplier cette valeur par l'inverse de la fraction donnée ? Mais alors, qu'advient-il de la résolution initialement outillée par un schéma de type segmentaire ? Est-elle à considérer comme le savoir en jeu, visé ou bien comme un moyen intermédiaire de construire le savoir exposé et institutionnalisé dans cet encart ?

Il nous sera sans doute difficile, dans les analyses de travaux d'élèves qui vont suivre, de répondre à cette deuxième question[21]. Toutefois, elle nous est apparue intéressante à signaler pour soulever la question d'un projet plus global d'enseignement de savoirs mathématiques lié à ce couple énoncé-schéma qui n'est pas si simple à identifier dans le cas présent. Nous y reviendrons.

Le deuxième extrait de manuel ci-dessous est tiré du manuel élève *Méthode Singapour CM1* datant de 2017[22].

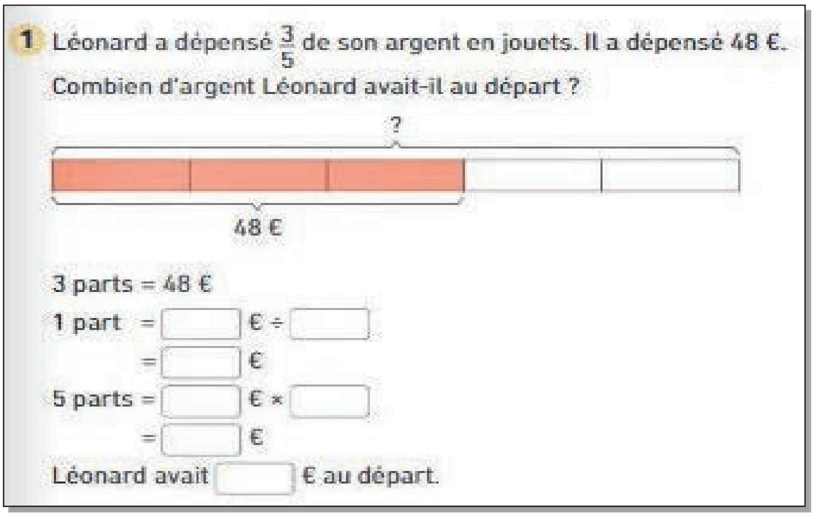


Figure 4 *: Extrait du manuel élève Méthode Singapour CM1.*

Le problème et le schéma sont du même type que ceux considérés ci-avant, mais ce qui nous intéresse ici, s'agissant d'un manuel destiné aux élèves, est la façon dont la résolution de ce problème, outillée par la schématisation, est guidée suivant différentes étapes. Contrairement à l'extrait précédent, on ne trouve pas trace de discours sur ce que nous avons appelé l'*unité du problème* — correspondant dans le cas présent à la somme totale d'argent et ce qui sous-tend la

[20] On note que trois problèmes du même type sont donnés par la suite dans ce même manuel — sans qu'il n'y ait de précisions données sur la démarche de résolution à adopter pour les résoudre.

[21] L'absence de schéma dans une production d'élève en réponse à la question ne peut nous renseigner sur le fait que le schéma ait été considéré comme moyen intermédiaire pour construire un savoir lié à l'inversion d'une « fraction de ». Sa présence ne nous signale pas plus si le schéma est à considérer comme transitoire dans la résolution de tels problèmes, ou comme une fin d'enseignement en soi.

[22] Collars, C., Nghan Hoe, L., Phong Lee, K., Cheow Seng, T. et Kritter, C. (2017), p. 97.

représentation de 5 « parts » correspondant à $\frac{5}{5}$ de cette grandeur — l'*unité graphique* correspondant dès lors à $\frac{1}{5}$ de cette même grandeur.

Qui plus est, tout comme dans le manuel précédent, il n'est pas fait mention du changement d'unité de référence : soit du passage de $u=\frac{1}{5}$ de la somme d'argent de Leonard à $u=\frac{1}{3}$ de 48 €. Cette étape est prise en charge par ce manuel de manière encore plus muette que dans le manuel précédent. Le résultat « 3 parts = 48 € » est directement donné et les étapes de calcul permettant de trouver la valeur de l'unité graphique puis de déterminer la valeur de la somme d'argent de Léonard sont fortement guidées, les opérations à effectuer étant indiquées au fur et à mesure, sans discours explicatif sur les grandeurs en jeu.

On note que l'on ne trouve pas dans ce manuel élève, ni dans celui du maître qui l'accompagne, un discours qui viserait à institutionnaliser un savoir sur l'inversion d'une fraction pour résoudre de tels problèmes — et que contrairement au manuel ancien, un tel savoir ne semble pas visé. Ici, c'est bien la démarche de résolution de ce type de problèmes, outillée par un schéma, qui paraît constituer un enjeu de connaissances et de savoirs et uniquement celle-ci. Ce problème est d'ailleurs le premier d'une série de huit énoncés donnés par la suite dans ce même manuel et le manuel du maître associé insiste précisément sur la démarche associée à l'usage des schémas de type barres pour résoudre de tels problèmes[23]. On peut toutefois se demander si l'étayage donné dans l'extrait de manuel cité, qui réduit la mise en œuvre d'une telle démarche à des étapes de calcul, dictées au fil d'égalités à compléter, avec des opérations dès lors indiquées par avance (division puis multiplication), permettra aux élèves de s'approprier la démarche visée, outillée par le schéma segmentaire, dans la résolution d'un tel problème.

Ces deux exemples montrent d'une part qu'il existait à la fois autrefois, dans un manuel d'arithmétique français et qu'il existe aujourd'hui, dans l'ouvrage *Méthode Singapour*, des problèmes correspondant à l'inversion d'un rapport multiplicatif fractionnaire entre deux grandeurs à résoudre avec un schéma de type segmentaire. Ils montrent d'autre part que la démarche visée est soit fortement guidée (dans le manuel *Méthode Singapour*), soit donnée à voir de manière ostensive sur un exemple donné (dans le manuel d'arithmétique de 1960). Dans ces exemples, les connaissances mathématiques que nous avons considérées comme possiblement convoquées en lien avec le couple « énoncé-schéma fondamental » considéré ne font pas l'objet d'une formulation. En effet, le changement d'unité de référence, en prise d'appui sur la double désignation de l'*unité graphique* qui permet l'identification d'une (sous-) unité commune liées aux deux grandeurs en jeu n'est pas explicité. L'absence de discours tenu au sujet de ces connaissances mathématiques dans les deux extraits de manuels analysés nous conduit à nous demander sous quelles conditions celles-ci, que nous avons pourtant considérées comme des éléments clés de la démarche de résolution de ce problème, outillée par un schéma de type segmentaire, peuvent faire l'objet d'une appropriation par les élèves.

Enfin, les traces d'institutionnalisation trouvées dans le manuel ancien d'arithmétique soulèvent une autre question : celle des savoirs mathématiques visés. Ces savoirs sont-ils précisément liés à

[23] Ceci constitue bien une spécificité reconnue de la « méthode Singapour » que de transposer un processus organisé et progressif d'enseignement autour de ce type de schéma. On note d'ailleurs que les savoirs précisément visés en lien avec la schématisation segmentaire dans les manuels de CM1 et de CM2 de cette collection semblent précisément la représentation de fractions de grandeurs... D'où la présence d'un nombre assez important de problèmes correspondant à notre premier énoncé-schéma fondamental.

cette démarche de résolution et aux connaissances afférentes telles que nous les avons décrites préalablement ? Ou bien cette démarche de schématisation segmentaire n'est-elle qu'un objet d'étude transitoire « voué » à disparaître rapidement, au profit de la mise en œuvre immédiate d'une formule d'inversion de fractions[24] ?

Cette question des enjeux en termes de savoirs mathématiques, liés à une démarche de résolution de tels problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire, nous paraît essentielle. En effet, les connaissances mathématiques décrites auparavant, en lien avec des jeux d' « unités relatives » (figure 2), nous semblent pouvoir constituer en soi un enjeu possible de savoir — puisque participant potentiellement de la conceptualisation d'un rapport multiplicatif fractionnaire entre deux grandeurs et de l'inversion d'un tel rapport multiplicatif (Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021 ; Thompson, Carlson, Byerley & Hatfield, 2014). Mais il reste à savoir sous quelles conditions la schématisation segmentaire peut effectivement participer à cette conceptualisation en l'absence de formulation de telles connaissances — ce qui nous incite notamment à approfondir cette question, du point de vue du système d'attentes implicites régissant potentiellement la production et l'interprétation de tels schémas segmentaires, que modélise le contrat didactique relatif à cette démarche de résolution de problème arithmétique.

4. Ce « problème-schéma » dans des réponses d'élèves français et tunisiens

Un questionnaire comprenant une série de problèmes et de tâches en lien avec les schémas segmentaires a été proposé dans le même temps à une population importante d'élèves tunisiens de fin de primaire (136 élèves provenant de 9 classes différentes) et une population plus restreinte d'élèves français de sixième (48 élèves provenant de 2 classes différentes). Notons que cette différence d'effectifs provient du fait que, malgré certaines précautions (dans la nature des problèmes et des tâches proposées dans ce questionnaire), il a été plus difficile de convaincre des enseignants français de participer à une telle enquête du fait que les problèmes proposés leur semblaient inhabituels dans l'institution française — et qu'ils avaient peur de mettre en échec leurs élèves — ce qui constitue en soi une première information sur les savoirs enseignés à ce sujet au sein des deux institutions. Ceci nous permet au passage de soulever qu'au regard des différences de curriculum constatées, la comparaison de productions d'élèves français et tunisiens semble délicate *a priori*. Pour autant, elle apparaît intéressante à plusieurs titres. D'une part, il s'agit d'approfondir la question de la « présence » supposée de connaissances et de savoirs enseignés sur la schématisation segmentaire (alors même que le manuel scolaire officiel tunisien n'en fait pas mention) dans les pratiques d'élèves et d'enseignants tunisiens. D'autre part, si les élèves français n'ont, quant à eux, reçu aucun enseignement à ce sujet, ce que confirme l'analyse à la fois globale et plus qualitative, quelques-uns d'entre eux ont produit des schémas proches de ceux produits par les élèves tunisiens. La comparaison de tels schémas produits par des élèves français (très peu) et d'élèves tunisiens (plus nombreux), en interrogeant de possibles conditions de production et d'usage de ces schémas, est à même de nous renseigner plus avant sur le contrat didactique orientant la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques convoquées par les élèves dans une démarche de résolution d'un tel problème, outillée par la schématisation segmentaire.

[24] Notons que si, dans cet article, nous ne parlons que d'un type de problème arithmétique en particulier, des questions similaires en termes d'enjeux de savoirs peuvent se poser sur des « problèmes de type partage en parties inégales » étudiés dans la thèse (Belguesmi, 2021) : des éléments de généralisation liés à des formules peuvent également être envisagés — en lien, par exemple, avec la recherche de deux nombres, connaissant leur somme et leur différence.

4.1. Une analyse globale des productions d'élèves dans la résolution d'un problème arithmétique d'inversion d'un rapport fractionnaire entre grandeurs

Un des problèmes proposés dans notre questionnaire est précisément celui cité en exemple plus haut (voir figure 1) : l'énoncé de problème étant donné « sans schéma » aux élèves qui avaient à le résoudre de manière autonome, avec la méthode de leur choix. L'étude globale des productions d'élèves confirme que les élèves tunisiens sont nettement plus acculturés à la résolution d'un tel problème arithmétique que les élèves français, ne serait-ce qu'au seul regard des différences de réussite constatées entre les deux populations d'élèves. Seuls 8 élèves sur les 48 élèves français (soit un sixième des élèves interrogés) réussissent à résoudre un tel problème quand 90 des 136 élèves tunisiens (soit presque les deux tiers des élèves interrogés) produisent une solution valide. Ceci démontre clairement la différence de familiarité des deux populations d'élèves d'âges similaires, vis-à-vis de ce type de problèmes arithmétiques, relevant de l'inversion d'un rapport multiplicatif fractionnaire entre deux grandeurs.

Une première étude des types de réponses produites par les uns et les autres (voir tableau 5 ci-dessous) donne à voir d'autres premiers faits saillants.

	Réussite avec schéma	Réussite sans schéma	Échec avec schéma	Échec sans schéma
Nombre d'élèves tunisiens de fin de primaire *Effectif total : 136 élèves*	21 (15,44 %)	69 (50,74 %)	3 (2,21 %)	43 (31,62 %)
Nombre d'élèves français de sixième *Effectif total : 48 élèves*	3 (6,25 %)	5 (10,42 %)	7 (14,58 %)	33 (68,75 %)

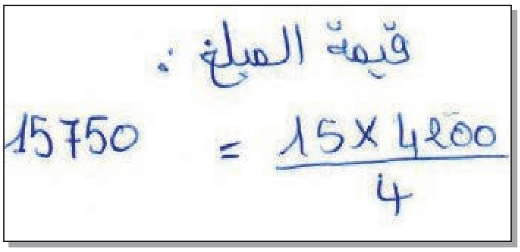
Tableau 5 *: Tableaux réussites-échecs avec ou sans schéma des élèves tunisiens et français.*

Pour les deux populations d'élèves, les réussites sans schéma sont d'effectifs supérieurs aux réussites avec schémas — mais il en est de même pour les échecs sans schémas plus nombreux que les échecs avec schéma (d'effectifs très réduits chez les élèves tunisiens), ce qui rend l'interprétation de ces indicateurs, plus complexe qu'il n'y paraît. Par exemple, notons que 12,5 % des élèves tunisiens faisant un schéma échouent quand près de 38,39 % des élèves tunisiens ne faisant pas de schéma échouent — ce qui, malgré un effectif plus grand d'élèves réussissant sans schéma, pourrait conduire à penser que l'usage d'un schéma augmente la chance de résoudre correctement le problème. Ceci semble indiquer que la majorité des élèves tunisiens qui ont produit des schémas segmentaires[25] ont réussi à s'approprier la démarche de résolution d'un tel problème, liée à l'usage de tels schémas, quand ceux-ci apparaissent valides. On verra par la suite que cela n'est peut-être pas si simple qu'il ne le semble... Il n'en demeure pas moins qu'au sein de chaque institution, des élèves (en effectif assez important dans l'institution tunisienne, beaucoup plus faible dans l'institution française) semblent avoir réussi à résoudre le problème sans utiliser de schémas : soit à inverser le rapport fractionnaire donné entre les deux grandeurs. Est-ce parce que cette connaissance leur a été préalablement enseignée par un enseignant, ou, s'agissant des élèves tunisiens, parce qu'elle aurait été généralisée à partir des

[25] Tous les schémas produits par les élèves tunisiens sont des schémas segmentaires.

problèmes donnés à résoudre en amont (à l'instar des savoirs possiblement visés dans le manuel d'arithmétique de 1960) ? Et qu'en est-il des élèves français, ce résultat (5 élèves ayant réussi à résoudre le problème sans schéma) pouvant paraître surprenant au regard du fait que ni la résolution de tels problèmes, ni l'inversion d'une fraction n'ont sans doute constitué des savoirs à enseigner officiellement à ce niveau scolaire pour les élèves interrogés ?

L'étude des productions d'élèves ne comportant pas de trace d'éléments explicatifs liés à l'inversion du rapport, nous ne pouvons guère en dire plus sur le sujet et la question reste relativement ouverte à nos yeux, si ce n'est que pour les élèves tunisiens, l'application immédiate de la règle de trois laisse penser à l'emploi d'une technique systématique institutionnalisée en amont pour résoudre ce type de problèmes.



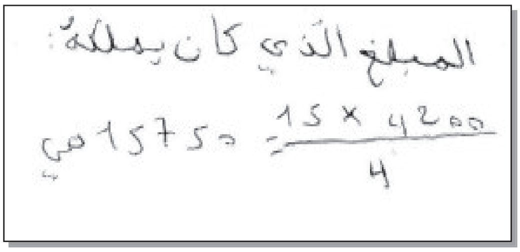
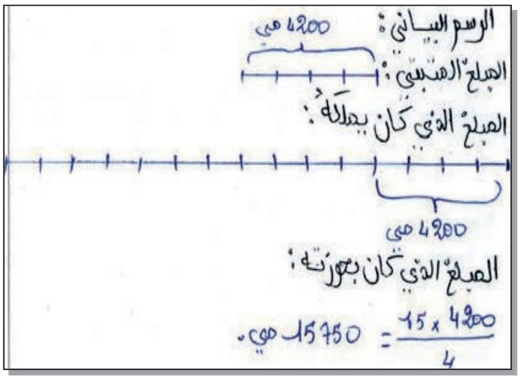


***Tableau 6** : Productions d'élèves tunisiens - réussites sans schémas.*

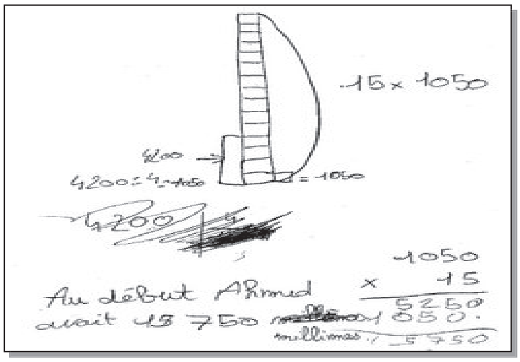
4.2. Une analyse des productions d'élèves dans la résolution d'un problème arithmétique d'inversion d'un rapport fractionnaire entre grandeurs, outillée par une schématisation segmentaire...

Ce qui nous a paru intéressant, au regard de notre problématique de départ, est d'analyser les productions « avec schéma » d'élèves français et d'élèves tunisiens (ayant réussi ou échoué), afin de mieux élucider la question des connaissances mathématiques en jeu dans la production de schémas ou dans l'interprétation des schémas en vue de résoudre le problème posé.

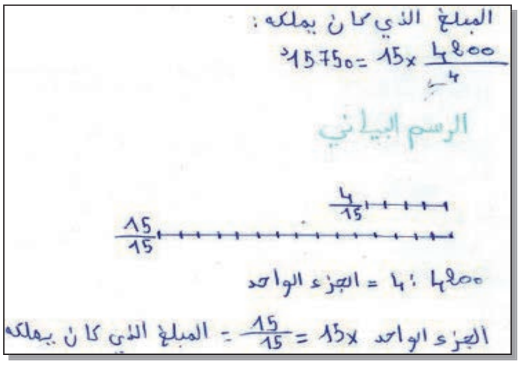
Nous avons constaté que les schémas produits, que ce soit par les élèves tunisiens ou par les élèves français, présentent des proximités apparentes. Les schémas produits par les élèves tunisiens (voir ci-après : ET1, ET2, ET3 et ET4) sont tous de modèles segmentaires et proches de celui donné en exemple dans la partie 2.1., la plupart du temps avec une représentation « séparée » des deux grandeurs en jeu (exception faite de ET3). Les schémas produits par les élèves français sont plus variés (voir ci-après : EF1, EF2, EF3 et EF4) : on peut les considérer comme segmentaires mais les représentations sont à 50 % liées à des « barres » ou à des « surfaces rectangulaires » avec une représentation « superposée » des grandeurs en jeu, plus proches de ceux donnés en exemple dans les manuels étudiés. On peut faire l'hypothèse que ces différentes représentations correspondent à des connaissances anciennes enseignées sur la schématisation au sein de chaque institution : outillant la résolution de tels problèmes en Tunisie avec des schémas segmentaires (accompagnés d'éléments de discours « normés » sur ces schémas sur les grandeurs en jeu), davantage en lien avec les fractions et leurs représentations (en lien avec les grandeurs aires ou longueurs) en France, comme l'illustrent les productions ci-après.



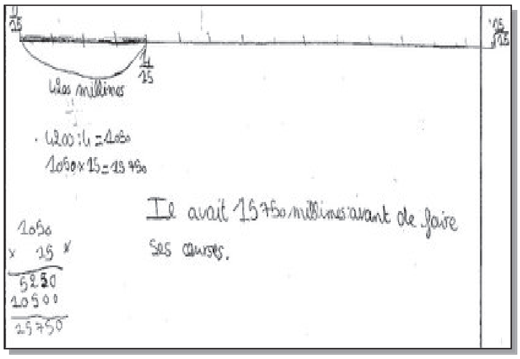
Production de l'élève tunisien ET1.



Production de l'élève français EF1.



Production de l'élève tunisienne ET2.



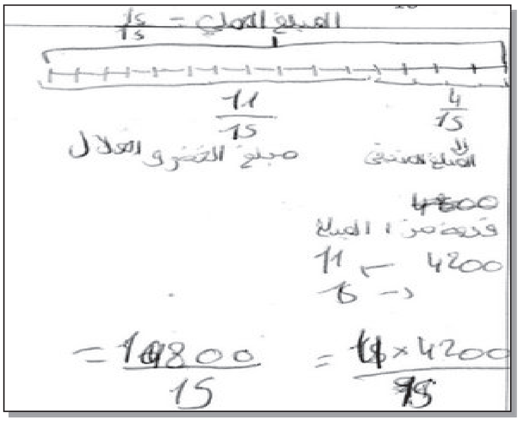
Production de l'élève française EF2.

***Tableau** 7 : Productions d'élèves français et tunisiens - réussites avec schémas.*

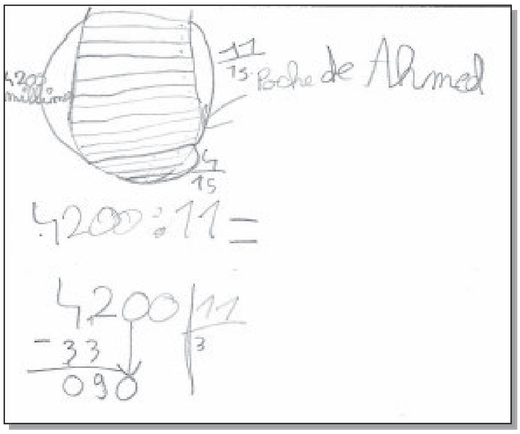
Pour autant, si on étudie plus avant les productions de ces élèves français (EF1, EF2) ou tunisiens (ET1, ET2) qui ont réussi à résoudre le problème en utilisant un schéma, elles sont proches et semblent convoquer pour partie les connaissances détaillées dans notre analyse de l'énoncé. Ainsi, ces élèves ont produit des représentations de ce que nous avons qualifié d'*unité du problème* (correspondant à la grandeur inconnue du montant d'argent initial) en reportant 15 fois une *unité graphique* ou en partageant cette unité en 15. Une fois le montant initial représenté sur ce même schéma, par l'intermédiaire de la double désignation apparente de ce montant correspondant à 4 *unités graphiques*, ils opèrent le changement d'unité de référence (1 *unité graphique* soit $\frac{1}{15}$ du montant initial étant appréhendée comme $\frac{1}{4}$ du montant restant), ce qui leur permet de déterminer directement la valeur de l'*unité graphique* : $\frac{4200\,millimes}{4}$, puis la valeur du montant initial correspondant au report d'une *unité graphique* 15 fois : $\frac{4200\,millimes}{4} \times 15$.

On remarque sur la production de l'élève française EF2 la présence d'un « 0 » qui indique que la représentation schématique produite par cette élève semble renvoyer à la représentation de fractions sur une droite graduée (familière chez les élèves français). On peut même penser que chez ces deux élèves français (EF1 et EF2), c'est la recherche d'une représentation schématique de la fraction « $\frac{4}{15}$ » donnée dans l'énoncé qui a initialement piloté la production de schémas, leur permettant de résoudre le problème que l'on suppose inhabituel pour eux, au regard des schémas ainsi produits[26]. Toutefois, ceci donne déjà à voir que si ces élèves semblent avoir réussi à interpréter la référence aux grandeurs en jeu dans le problème, permettant le changement d'unité de référence porté par les schémas produits, il peut y avoir des variations dans les connaissances qui pilotent la production et l'interprétation de schémas pourtant proches en apparence.

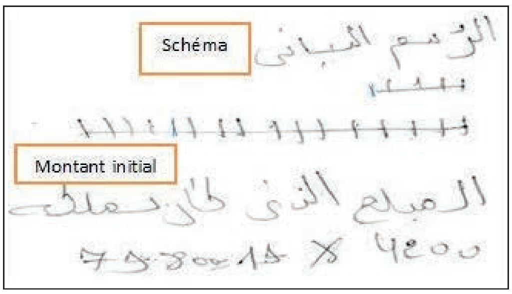
L'analyse de schémas produits par des élèves français et tunisiens n'ayant pas réussi à résoudre le problème apporte des informations nouvelles quant à la nature potentiellement différente des connaissances mathématiques mises en jeu par ces mêmes élèves dans la production et l'interprétation de schémas.



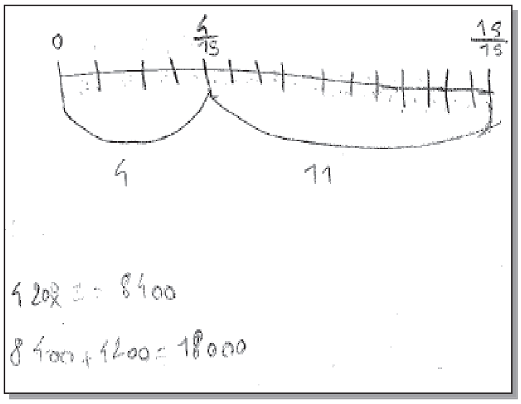
Production de l'élève tunisien ET3.



Production de l'élève français EF3.



Production de l'élève tunisienne ET4.



Production de l'élève française EF4.

Tableau 8 *: Productions d'élèves français et tunisiens - échecs avec schémas.*

Les schémas produits par ces élèves ont une proximité forte avec ceux produits par les élèves

[26] Nous y reviendrons ci-après.

ayant réussi à résoudre le problème. Et pourtant, dans leur cas, la démarche outillée par la schématisation ne leur a pas permis d'aboutir à une solution valide au problème posé. Plus encore, l'étude de ces productions fait apparaître des connaissances potentiellement différentes convoquées par les un-e-s et les autres.

Prenons tout d'abord l'exemple de la production de l'élève tunisienne ET4 — elle a représenté deux segments conformes aux attentes en termes de traitements graphiques liés à une *unité graphique* correspondant à $\frac{1}{15}$ du montant initial : l'un faisant apparaître le report de 15 *unités graphiques* qui correspondrait à l'*unité du problème*, soit le montant initial, et l'autre faisant apparaître le report de 4 *unités graphiques* qui correspond au montant restant ($\frac{4}{15}$ du montant initial), soit à la valeur donnée de 4 200 *millimes*. Toutefois, ET4 ne semble pas avoir été capable d'interpréter le schéma ainsi produit pour résoudre le problème. Le fait qu'elle effectue le produit $4\,200 \times 19 = 79\,800$ semble montrer qu'elle associe 4 200 *millimes* à une *unité graphique*, mais sans donner le sens prévu à l'*unité graphique* et au segment ainsi représenté. On peut dès lors, s'agissant de cette élève (et d'autres élèves tunisiens), faire l'hypothèse que les connaissances qui ont piloté la production de ce schéma sont d'un autre ordre que celles identifiées dans notre analyse, relatives aux fractions de grandeurs et à des systèmes d' « unités relatives ». Nous faisons l'hypothèse que ET4 et d'autres élèves tunisiens ont produits de tels schémas pour répondre à des attentes implicites créées par un processus d'enseignement qui prend en charge la schématisation segmentaire. La règle de contrat didactique relative à un tel système d'attentes pourrait être formulée de la manière suivante : *« quand il y a présence d'une fraction* $\frac{m}{n}$ *d'une grandeur (inconnue) dans un problème alors je représente un segment de m unités graphiques (*$\frac{m}{n}$*) et un autre de n unités graphiques (*$\frac{n}{n}$*) »* coupant potentiellement la production d'une telle représentation graphique d'une signification liée à la fraction d'une grandeur.

Pour les élèves français comme EF4, la difficulté nous paraît d'un autre ordre. La présence du « 0 » mentionné sur son schéma nous invite à penser que cette élève a cherché à représenter la fraction $\frac{4}{15}$ sur la droite graduée puis a représenté $\frac{15}{15}$ mais en la considérant comme l'unité « absolue » correspondant au nombre « 1 » (tout comme EF3, mais aussi, peut-être EF1 ou EF2 au moins dans un premier temps...) et non pas comme une « unité relative » correspondant dans le cas présent au montant initial dont on cherche la valeur. Nous faisons l'hypothèse que ces comportements d'élèves français sont régis par d'autres systèmes d'attentes implicites liés aux savoirs et aux connaissances enseignées sur les fractions et sur leurs représentations graphiques au sein de l'institution française : *« quand il y a présence d'une fraction* $\frac{m}{n}$ *(<1) dans un problème alors je représente cette fraction comme un partage d'une unité en représentant m parties incluses dans un tout de n parties (sur la droite graduée ou sur une représentation rectangulaire ou circulaire) — correspondant à l'unité »*. L'accent est mis sur la fraction partage d'une unité « absolue » — « 1 », d'où une difficulté de raccord pour ces élèves avec un autre point de vue, celui de la fraction partage d'une grandeur, à considérer dès lors comme une « unité relative » — celle que l'on désigne précisément par l'*unité du problème*. À regarder ce qu'ont produit ces élèves français, il peut d'ailleurs paraître presque étonnant de voir que d'autres élèves (très peu au final, rappelons-le : 3 seulement) aient réussi à étendre leurs connaissances sur la fraction « partage d'une unité » à la fraction « partage d'une grandeur ». Il est probable que ce soit la mise en relation de leurs schémas produits initialement comme des « partages de l'unité » avec les données du problème qui ait permis cette extension, puis la mise en œuvre du changement d'unité de référence, lié aux deux grandeurs, nécessaire pour résoudre le problème[27]. Notons d'ailleurs que des élèves comme EF3 ou EF4 ont également tenté des mises en relation de leurs schémas avec les grandeurs (connue et inconnue) de l'énoncé, en mettant d'ailleurs en œuvre des connaissances qui ne sont pas si éloignées de celles en jeu — par exemple pour EF3 qui, considérant que $\frac{11}{15}$ correspond à la fois à l'argent dépensé dans son schéma et à 4 200 *millimes*, tente de diviser 4 200 *millimes* par 11... ce qui pourrait tendre à laisser penser qu'un tel schéma segmentaire pourrait avoir un potentiel adidactique en lien avec cette extension de la fraction partage « d'une unité » à la fraction partage « d'une grandeur » (considérée comme « unité relative »).

Cette étude approfondie de quelques productions d'élèves français et tunisiens liées à l'utilisation de schémas pour résoudre un même problème donne ainsi à voir plusieurs phénomènes que nous avons retenu pour la suite de nos recherches sur le sujet :

- des schémas parfois apparemment très proches peuvent avoir été produits via la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques différentes et dès lors faire aussi l'objet d'interprétations différentes de la part des élèves français ou tunisiens ;
- parmi les différences constatées, nous pouvons faire l'hypothèse, au regard d'observables dans les écrits produits par ces élèves, que celles-ci renvoient pour partie à des systèmes d'attentes implicites différents, modélisables par des contrats didactiques installés à l'échelle de l'institution[28] ou plus localement et qui pilotent les actions des élèves dans la production et l'interprétation de schémas ; ainsi, des élèves français produisent — et parfois interprètent — leurs schémas à l'aune d'un point de vue sur la fraction partage d'une unité absolue (de valeur 1) quand les élèves tunisiens produisent et interprètent souvent leurs schémas à l'aune d'un point de vue sur la fraction partage d'une grandeur, davantage appréhendée comme « unité relative » (ce qui permet le changement d'unité de référence).

Ce dernier point nous invite d'ailleurs à nous questionner sur le rôle de ces contrats didactiques, à même d'orienter les connaissances mathématiques des élèves dans la résolution de problèmes outillée par les schémas. Si de tels contrats didactiques peuvent parfois être considérés comme des balises, utiles pour orienter la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques dans le sens prévu, encore faut-il s'assurer que ces contrats ne se substituent pas aux connaissances, entravant par là même l'accès à ces connaissances mathématiques pour certains élèves. C'est sans doute une des difficultés potentiellement rencontrées dans l'enseignement et l'apprentissage de la schématisation pour résoudre des problèmes...

Conclusions et perspectives

Cette étude a permis d'identifier des connaissances relatives à l'usage de schémas segmentaires pour résoudre un problème arithmétique particulier, relevant de l'inversion d'une fraction. Les connaissances mathématiques afférentes liées à des systèmes d'« unités relatives » au sens de Chambris (2021) semblent même pouvoir être considérées comme des clés pour la

[27] Le zéro sur la droite représentée par EF2 nous paraît un indice dans ce sens...

[28] Ce qui peut d'ailleurs renvoyer à la notion de contrat institutionnel introduite par Chevallard (1988).

conceptualisation d'un rapport fractionnaire entre deux grandeurs et de son inversion (Thompson, Carlson, Byerley & Hatfield 2014, Chambris *et al.*, 2021). Le schéma segmentaire et son usage pour résoudre ce type de problème arithmétique semblent présenter de réelles potentialités de ce point de vue.

Toutefois, la prise en charge d'une telle connaissance en jeu dans un processus organisé d'enseignement de la schématisation ne va pas de soi : l'étude de deux extraits de deux manuels (un manuel d'arithmétique de 1960 et *La Méthode Singapour* de 2017) donne à voir que de telles connaissances ne font pas nécessairement l'objet de formulations explicites, les solutions données en exemple ou à compléter dans ces ouvrages semblant les rendre « muettes », parfois au profit d'autres connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés, telle que la formule générale d'inversion d'une fraction. En l'absence de telles formulations peut se poser la question des conditions d'enseignement et d'apprentissage de telles connaissances pour les élèves liées à la démarche de résolution outillée par la schématisation segmentaire.

L'étude de réponses d'élèves français et tunisiens à un problème arithmétique du type de celui examiné nous renseigne un peu plus avant sur ce point. Notamment, l'examen de réponses d'élèves des deux institutions ayant réussi à résoudre le problème avec l'aide d'un schéma semble confirmer le potentiel adidactique des schémas produits au regard de la connaissance visée : quelques rares élèves français ayant même réussi à produire et à interpréter un schéma qui ne leur a vraisemblablement[29] pas été enseigné comme outil de résolution d'un tel problème pour produire un raisonnement valide. Pour autant, cette même étude donne également à voir comment ces schémas sont produits et interprétés différemment, et parfois de manière erronée, en fonction de systèmes d'attentes implicites semblant piloter leur activité au sein des deux institutions scolaires, française et tunisienne. Ainsi, d'une part, certains élèves tunisiens arrivent à produire le schéma conventionnel attendu et qui leur a été visiblement enseigné préalablement, sans pour autant réussir à l'interpréter correctement pour résoudre le problème posé. D'autre part, les élèves français qui ont produit un schéma paraissant valide convoquent des connaissances relatives à la représentation de la « fraction partage », appréhendée comme un partage équitable de l'unité « absolue », n'arrivent pas nécessairement à réinterpréter le schéma ainsi produit, au regard d'« unités relatives » liées aux grandeurs en jeu dans le problème.

En résumé, et pour tenter d'apporter des éléments de réponse à la question suggérée par le titre de cet article, cette étude tend à montrer que le schéma (de type segmentaire) peut constituer « un bon » outil pour résoudre le type de problème arithmétique « inversion d'une fraction de... »... Précisons notre propos à entendre dans le sens suivant : la production et l'interprétation d'un tel schéma peut potentiellement participer à la construction de connaissances mathématiques essentielles à convoquer pour inverser le rapport multiplicatif fractionnaire entre deux grandeurs.

De manière plus générale, la thèse de l'un d'entre nous (Belguesmi, 2021) tend à démontrer que d'une part les schémas segmentaires peuvent avoir un « beau » rôle à jouer dans la résolution d'un ensemble de problèmes arithmétiques complexes, dépassant largement le seul exemple étudié ici, s'agissant par exemple des problèmes de partage en parties inégales considérés par différents auteurs en lien avec la transition arithmétique-algèbre (Chevallard, 1984 ; Coulange, 2001). La schématisation segmentaire peut permettre d'abaisser la complexité liée à la résolution

[29] Nous sommes quasiment assurés que de tels schémas n'ont pas fait l'objet d'un enseignement préalable auprès de ces élèves au regard de la nature des schémas produits et du fait que de tels problèmes étaient alors encore assez rarement considérés dans l'institution française. C'est peut-être moins le cas aujourd'hui, suite à la mise en application de certaines des « 21 mesures » du plan Villani Torossian (2018), qui fait la part belle à la schématisation segmentaire.

de tels problèmes, par le biais de différents « jeux » sur les « unités relatives » correspondant aux grandeurs évoquées dans ces problèmes, mises en relation entre elles par des rapports de comparaison multiplicative ou additives. Ces jeux sont facilités par des traitements intrinsèques au registre de représentation graphique (en lien avec différentes actions sur ce que nous avons qualifié d'*unité graphique* : reports, ajouts et double désignation). Toutefois, les apprentissages liés à ces « unités relatives » ne peuvent se faire que sous certaines conditions. C'est précisément l'objet de la thèse de l'un d'entre nous (Belguesmi, 2021) que de tenter d'élucider l'ensemble de ces conditions et de ces contraintes. Au regard de cette recherche, ces conditions et contraintes nous paraissent aujourd'hui de deux principaux ordres. Elles sont d'une part en lien avec la formulation de connaissances sur le caractère relatif des unités en jeu (Chambris, 2021 ; Chambris, Coulange, Rinaldi & Train, 2021) et sa mise en lien avec la production et l'interprétation des schémas segmentaires dans la résolution de problèmes. Elles sont, d'autre part, relatives à des systèmes d'attentes implicites que modélise le contrat didactique — associé à la production et à l'interprétation de tels schémas dont il s'agirait de contrôler plus avant les effets, notamment en termes de ruptures de ce contrat...

Références bibliographiques

Bednarz, N. & Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis. In J.-P. Du Ponte, J.-F. Matos (Eds.) : *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. II*. Lisbonne : Université de Lisbonne, pp. 64-71.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (Eds.) : *Approaches of algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, pp. 115-136.

Belguesmi, N. (2016). *L'utilisation de la schématisation dans la résolution des problèmes arithmétiques dans le cadre de la théorie des situations didactiques : cas des élèves de la sixième année de l'école de base*. Mémoire de master de recherche en didactique des mathématiques. Université Virtuelle de Tunis - Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue.

Belguesmi, N. (2021). *Le rôle de la schématisation segmentaire dans la résolution de problèmes arithmétiques : une étude de cas en 3e cycle du primaire en Tunisie*. Thèse en cotutelle entre l'Université de Bordeaux et l'Université Virtuelle de Tunis.

Bessot, A. & Richard, F. (1980). Une étude sur le fonctionnement du schéma arbre par la commande de variable d'une situation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1*(3), 387-422.

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal). *Interactions didactiques*. Genève.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Petit x, 57*, 5-30.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de* *l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris-Diderot.

Chambris, C. (2017). L'enseignement des maths à l'école et la méthode Singapour. *Bulletin CFEM, 44*, 13-18.
http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem

Chambris, C. (2021). Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. In H. Chaachoua *et al.* (Eds) : *Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures, vol. 1*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chambris, C., Coulange, L., Rinaldi, A.-M. & Train G. (2021). Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école : vers un état des lieux - potentialités. In H. Chaachoua *et al.* (Eds) : *Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures, vol. 2 - CD-ROM*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1988). *Esquisse d'une théorie formelle du didactique*. Communication au Premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-72.

Coulange, L. (2001). Evolution du passage Arithmétique-Algèbre dans les manuels et les programmes du 20e siècle : Contraintes et espaces de liberté pour le professeur. Équipe DDM, Laboratoire Leibnitz, Grenoble. *Petit x, 57*, 61-77.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Feyfant, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ, 105*. Lyon : ENS de Lyon.
http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/105-novembre-2015.pdf

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.

Julo, J. (2000). Aide à la représentation ou aide à la modélisation ? Le cas des problèmes de partage inégal. *Publications de l'IREM de Rennes de 1999-2000 - fascicule 3 de didactique des mathématiques et de l'EIAO, 6*, 1-14.

Laparra, M. & Margolinas, C. (2009). Le schéma : un écrit de savoir ? *Pratiques - linguistique, littérature, didactique, numéro spécial : les écrits de savoir*, 51-82.

Novotna, J. (2003). *Étude de la résolution des « problèmes verbaux » dans l'enseignement des mathématiques*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Université Victor Segalen Bordeaux.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C. & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: An hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In K. C. Moore, L. P. Steffe & L. L. Hatfield (Eds.) : *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing, WISDOMe Monographs*, 41-24. http://bit.ly/1aNquwz

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N, 38*, 21-40.

Manuels scolaires

Bodard, G. & Bréjaud, H. (1960). *Le Calcul Quotidien CM2*. Paris : Editions Fernand Nathan.

Collars, C., Nghan Hoe, L., Phong Lee, K., Cheow Seng, T. & Kritter C. (2017). *Méthode Singapour CM1 - Manuel de l'élève - Pratique guidée*. Paris : Éditions La librairie des écoles.

Manuel scolaire officiel tunisien des mathématiques de la sixième année de l'école de base. Édition 2003.