ACTIVITÉ DU N° 112

LES TROIS CARRÉS
MANQUERAIT-IL UNE DONNÉE ?
SOLUTIONS

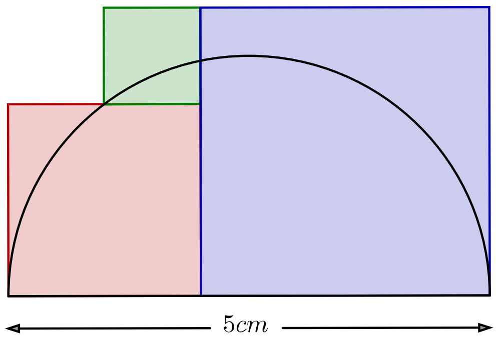
Gilles ALDON[1]
IREM de Lyon

Marie-Line GARDES[2]
Université de Lyon, CNRL, INSPÉ de l'Académie de Lyon

1. Énoncé

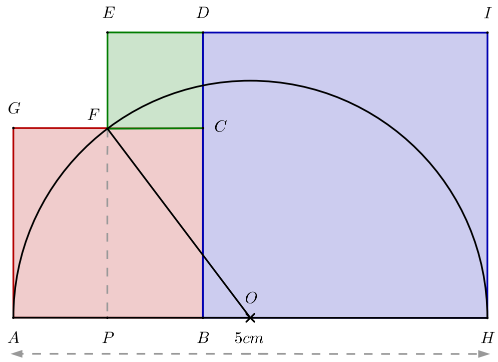
Nous avons trouvé ce problème dans le fil twitter de MathsJam (#mathsjam), proposé par Catriona Shearer. C'est un énoncé très simple qui s'appuie sur un dessin géométrique et dont les données peuvent sembler *a priori* insuffisantes... Et pourtant...

Quelle est l'aire totale des trois carrés ?



2. Une solution

Tout d'abord, il est bon de refaire cette figure en nommant les points et en ajoutant le centre du demi-cercle, O, et le point P, projeté de F sur $[AB]$:



[1] gilles.aldon@ens-lyon.fr

[2] marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

2.1. Premières remarques et notations

On va faire l'hypothèse que les trois carrés existent bien, c'est à dire que le point B est strictement dans le segment $[AO]$.

On note x la longueur du côté du carré $ABCG$; ainsi, $AB=BC=CG=GA=x$ et $0<x<\frac{5}{2}$.

On note y la longueur du côté du carré $CFED$; ainsi, $CF=FE=ED=DC=y$.

Le carré $BHID$ a donc pour longueur de côté la somme $x+y$.

2.2. Premier résultat

Comme $BH=x+y$ et que $BH=5-AB=5-x$, on en déduit :

$$y=5-2x \tag{1}$$

2.3. Où la trigonométrie entre dans le jeu

Le triangle OAF est isocèle puisque $OF=OA=R=\frac{5}{2}$. Par conséquent, les angles $\widehat{OAF}$ et $\widehat{OFA}$ ont même mesure, donc même tangente.

Or $tan\,\widehat{OAF}=\frac{PF}{AP}=\frac{x}{x-y}$, et en utilisant (1) :

$$tan\,\widehat{OAF}=\frac{x}{3x-5} \tag{2}$$

Par ailleurs, $\widehat{OFA}=\widehat{OFP}+\widehat{PFA}$.

Mais $tan\,\widehat{OFP}=\frac{PO}{FP}=\frac{OA-AP}{FP}=\frac{\frac{5}{2}-(x-y)}{x}$, et finalement :

$$tan\,\widehat{OFP}=\frac{15-6x}{2x} \tag{3}$$

$tan\,\widehat{PFA}=\frac{PA}{PF}=\frac{x-y}{x}$, et finalement :

$$tan\,\widehat{PFA}=\frac{PA}{PF}=\frac{3x-5}{x} \tag{4}$$

Puisque $tan(a+b)=\frac{tan\,a+tan\,b}{1+tan\,a\,tan\,b}$, il vient :

$$tan\,\widehat{OFA}=\frac{x}{4x^2-15x+15} \tag{5}$$

(Nous avons passé ici quelques calculs un peu fastidieux...)

Il ne reste plus qu'à se rappeler que $tan\,\widehat{OAF}=tan\,\widehat{OFA}$ pour déterminer les valeurs possibles de x en utilisant (2) et (5) :

$$\frac{x}{3x-5}=\frac{x}{4x^2-15x+15}$$

soit :

$$4x^2-18x+20=0$$

ou encore :

$$2x^2-9x+10=0$$

On obtient deux valeurs possibles pour *x*, 2 et $\frac{5}{2}$. Comme on l'a remarqué au début, $x<\frac{5}{2}$ et donc la seule valeur possible est $x=2$; on vérifie alors que dans ces conditions, *BHID* est bien un carré puisque $BH=5-x=3$ et $BD=x+y=x+5-2x=3$.

Ainsi, l'aire totale des trois carrés vaut :

$$\mathcal{A}=14\,cm^2$$

2.4. Plus généralement

On note $\alpha=\widehat{FOA}$ et $\beta=\widehat{OAF}=\widehat{AFO}$ (puisque le triangle *AFO* est isocèle en *O*). On note *a* le rayon du cercle.

Tout comme dans la première partie, le quadrilatère *BDIH* est un carré si et seulement si $x+y=2a-x$, soit :

$$y=-2x+2a \tag{6}$$

Par ailleurs,

$$tan\,\alpha=\frac{x}{a-x+y} \tag{7}$$

$$tan\,\beta=\frac{x}{x-y} \tag{8}$$

AOF isocèle en *O* est équivalent à :

$$\alpha+2\beta=\pi \tag{9}$$

Par conséquent, $tan(\alpha+2\beta)=tan\,\pi=0$.

Or $tan(\alpha+2\beta)=\frac{tan\,\alpha+tan\,2\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,2\beta}$, donc

$$tan\,\alpha+tan\,2\beta=0$$

$$tan\,\alpha+\frac{2\,tan\,\beta}{1-tan^2\beta}=0$$

$$\frac{x}{a-x+y}+\frac{2x(x-y)}{y^2-2xy}=0$$

Et finalement :

$$x\left(-y^2-2x^2+2xy+2xa-2ya\right)=0$$

Comme $x>0$, il reste :

$$-y^2-2x^2+2xy+2xa-2ya=0$$

ce qui est l'équation d'une ellipse de centre $(0\,;-a)$ (on considère la partie de cette ellipse pour laquelle $x\in]0\,;a[$), qui coupe la droite (6) en :

$$A\left(\frac{4a}{5}\,;\frac{2a}{5}\right)$$

Dans le cas particulier où $a=\frac{5}{2}$, on retrouve : $x=2$ et $y=1$.

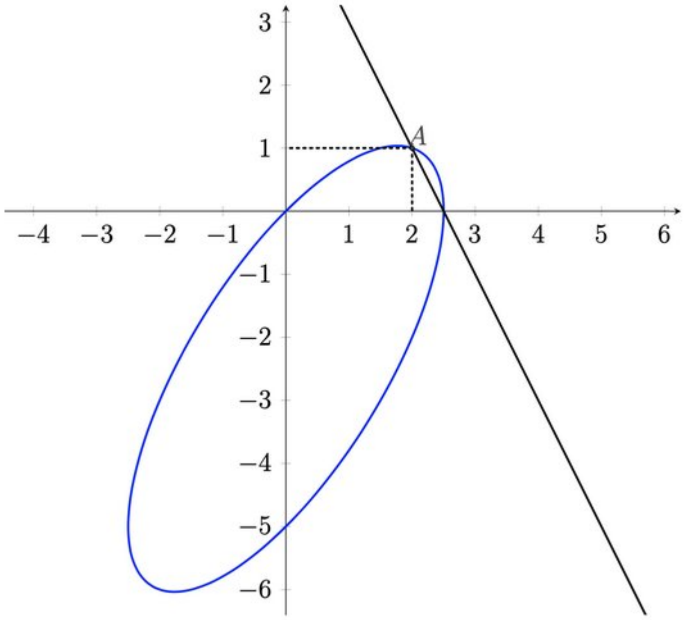


Figure 1 *: Dans le cas où* $a=\frac{5}{2}$.

2.5. Une solution plus géométrique

Le triangle *PFO* est rectangle en *P*. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $PF^2+PO^2=FO^2$. Comme $PF=x$ et $OF=\frac{5}{2}$, on obtient $x^2+PO^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

On a aussi $AO=AP+PO$, d'où $PO=AO-AP=\frac{5}{2}-(x-y)$.

On a donc $x^2+\left(\frac{5}{2}-(x-y)\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

En utilisant (1), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} y=5-2x \\ x^2+\left(\frac{5}{2}-(x-y)\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \end{cases}$$

équivalent à :

$$\begin{cases} y=5-2x \\ 2x^2-9x+10=0 \end{cases}$$

et qui a deux solutions :

$$\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Comme $0<x<\frac{5}{2}$, on obtient $x=2$ et $y=1$. On retrouve les solutions trouvées dans la partie précédente. Ainsi, l'aire totale des trois carrés vaut :

$$\mathcal{A}=14\,cm^2$$

2.6. Une solution plus géométrique... dans un autre triangle

Le triangle AFH est rectangle en F car $[AH]$ est un diamètre du cercle et F est sur le cercle. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $AF^2+FH^2=AH^2$.

Le triangle APF est rectangle en P, donc $AF^2=PF^2+AP^2=x^2+(x-y)^2$.

Le triangle PFH est rectangle en P, donc $FH^2=PF^2+PH^2=x^2+(x+2y)^2$.

On a donc $x^2+(x-y)^2+x^2+(x+2y)^2=25$.

En utilisant (1), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} y=5-2x \\ x^2+(x-y)^2+x^2+(x+2y)^2=25 \end{cases}$$

équivalent à :

$$\begin{cases} y=5-2x \\ 2x^2-9x+10=0 \end{cases}$$

On retrouve le même système que précédemment, et donc les deux solutions :

$$\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Comme $0<x<\frac{5}{2}$, on obtient $x=2$ et $y=1$ et ainsi l'aire totale des trois carrés vaut :

$$\mathcal{A}=14\,cm^2$$

2.7. Plus généralement

En notant a le rayon du cercle et en utilisant (6), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} y=2a-2x \\ x^2+(x-y)^2+x^2+(x+2y)^2=4a^2 \end{cases}$$

équivalent à :

$$\begin{cases} y=2a-2x \\ 5x^2-9ax+4a^2=0 \end{cases}$$

et qui a pour solutions :

$$\begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x=\frac{4}{5}a \\ y=\frac{2}{5}a \end{cases}$$

Comme $0<x<a$, on obtient $x=\frac{4}{5}a$ et $y=\frac{2}{5}a$ et ainsi l'aire totale des trois carrés vaut :

$$\mathcal{A}=\frac{14}{25}\times 4a^2\ cm^2$$